ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA III (1974)

Robert BARTOSZYŃSKI (Warszawa)

Model obiegu i wymiany banknotów*

0. Wstęp. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie pewnego teoretycznego modelu obiegu banknotów i wymiany banknotów zużytych na nowe. Model ten stanowi projekt rozwiązania problemu postawionego przez Narodowy Bank Polski, mianowicie problemu wyboru optymalnej polityki wymiany zużytych banknotów.

Sformułowanie założeń modelu poprzedzone zostanie przedstawieniem problemu empirycznego w terminach intuicyjnych oraz dyskusją wyników zawartych w pracach [1], [2] i [3], dotyczących podstaw teoretycznych konstrukcji pojęcia stopnia zużycia banknotu, będącego centralnym pojęciem tej pracy.

1. Problem praktyczny

1.1. Obecny stan rzeczy. Narodowy Bank Polski prowadzi systematyczną wymianę banknotów zbytnio zużytych na nowe. Wymianie podlegają te banknoty, które trafiają do jednego z oddziałów banku prowadzących wymianę, i zostają uznane za zużyte w stopniu przekraczającym dopuszczalną normę (w terminologii NBP, banknoty takie nazywają się „destruktami").

Normy zużycia banknotów nie są określone w sposób dostatecznie precyzyjny: w myśl instrukcji, wymianie podlegają banknoty podarte, wyraźnie poplamione, itp., a ponadto banknoty „zbyt zużyte". O ile te pierwsze kategorie są określone wystarczająco jednoznacznie dla celów praktycznych, o tyle główna trudność tkwi w braku precyzyjnej definicji „stopnia zużycia, powyżej którego banknot powinien być wymieniony".

W praktyce, wymiany dokonują pracowniczki banku, których głównym zadaniem jest formowanie banknotów w paczki liczące 100 sztuk każda (tzw. liczarki). Jeżeli w procesie liczenia natrafią one na banknot, który w ich mniemaniu powinien zostać wymieniony, zastępują go innym, zaczerpniętym ze specjalnej puli.

Liczarki są materialnie odpowiedzialne za poprawność liczenia banknotów i eliminacja destruktów jest jedynie ich zadaniem ubocznym. Jakość wykonania tego zadania jest praktycznie niekontrolowana i nie ma wobec tego motywacji aby wykonywać je dobrze (brak kontroli bierze się głównie stąd, że nie jest jasne co oznacza „poprawna", czy „właściwa" eliminacja destruktów). Dla sprawdzenia stopnia dowolności decyzji dotyczącej tego, czy dany banknot należy uznać za destrukt czy nie, przeprowadzono następujący eksperyment: zbiór 1000 banknotów (dwudziestozłotówek) został poddany normalnej procedurze liczenia z eliminacją destruktów w dwóch oddziałach NBP; ten sam zbiór banknotów liczony był dwukrotnie przez tę samą osobę w odstępach pięciu dni (osoby badane nie wiedziały oczywiście, że poddawane są eksperymentowi).

Na podstawie tych badań można było się zorientować w zmienności wyników, zarówno

*Niniejsza praca jest przekładem (z niewielkimi zmianami i rozszerzeniami) pracy [5].

dla różnych osób badanych, jak i dla tej samej osoby w różnych dniach. W skrajnych przypadkach, jedna osoba usunęła ze zbioru 1000 banknotów 280 i 470 jako destrukty, podczas gdy analogiczne liczby dla innej pracowniczki (dla tego samego zbioru) wyniosły 118 i 82.

1.2. Problem postawiony przez NBP. Ogólnie, bank chciałby wprowadzić „optymalną” politykę wymiany banknotów. Dla sformułowania kryterium optymalności i wyboru polityki optymalnej względem tego kryterium konieczne jest spełnienie następujących warunków:

(a) precyzyjne określenie stopnia zużycia banknotu oraz konstrukcji metod oceny rozkładu stopnia zużycia w populacji wszystkich banknotów w danym momencie czasu;

(b) konstrukcja metod praktycznego stosowania różnych polityk wymiany, opartych na różnych „poziomach krytycznych”, tj. poziomach stopnia zużycia, powyżej których banknoty podlegają wymianie;

(c) wyznaczenie, dla każdego z możliwych poziomów krytycznych, oczekiwanej liczby banknotów, które trzeba będzie wymienić w poszczególnych okresach czasu oraz rozkładu granicznego stopnia zużycia banknotów w populacji, wynikającego z przyjęcia polityki opartej na danym poziomie krytycznym.

Rozwiązanie (a), (b) i (c) jest oczywistym warunkiem wstępnym dla

(d) sformułowania kryterium optymalności lub równoważnie: funkcji straty, zależnej co najmniej od kosztów wymiany i rozkładu stopnia zużycia banknotów w populacji oraz

(e) wyboru optymalnej polityki wymiany, tj. polityki (poziomu krytycznego) prowadzącej do minimalizacji funkcji straty opisanej w (d).

Ze względów technicznych NBP nie może opierać się na żadnych innych definicjach stopnia zużycia banknotu, z wyjątkiem definicji używających subiektywnych ocen liczarek.

Tak więc, szereg oczywistych definicji opartych na odpowiednich wskaźnikach (np. stopnia pochłaniania światła, liczby zgięć przecinających daną linię itp.) należy od razu wyeliminować z rozważań. Dokładniej, NBP żąda aby

(f) wprowadzone w praktyce rozwiązanie zagadnień (a) – (c) nie prowadziło do żadnej istotnej zmiany w obecnej procedurze, przy której decyzja dotycząca wymiany każdego banknotu zależy wyłącznie od subiektywnej oceny liczarki.

2. Definicja stopnia zużycia banknotu

2.1. Uwagi wstępne. Podstawowe idee leżące u podłoża definicji stopnia zużycia banknotu zawarte są w pracach [1], [2] i [3]. Dwie pierwsze z tych prac dotyczą metod konstrukcji i oceny subiektywnych klasyfikacji, podczas gdy trzecia dotyczy problemu istnienia skali (stopnia zużycia). Stopień zużycia banknotu zostanie mianowicie określony w terminach odpowiednio zdefiniowanej ich klasyfikacji.

Poniższe krótkie uwagi mają na celu przedstawienie istotnej różnicy między podejściem sugerowanym w tej pracy i podejściami tradycyjnymi.

Zazwyczaj klasyfikacja jest pojęciem wtórnym w stosunku do cechy, względem której się klasyfikuje. Dla zbudowania taksonomii (tj. zasady klasyfikacji) danego zbioru obiektów, wybiera się interesującą nas cechę elementów tego zbioru (cecha ta może przyjmować wartości wektorowe; może również być cechą jakościową), następnie dzieli się zbiór wszystkich wartości tej cechy na zbiory rozłączne i wreszcie, określa się relację binarną w rozważanym zbiorze obiektów w sposób następujący: dwa obiekty znajdują się ze sobą w tej relacji, jeżeli wartości ich cech należą do tego samego zbioru opisanego wyżej podziału. Tak określona relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, a więc jest pewną równoważnością. Klasy abstrakcji tej relacji nazywają się kategoriami taksonomicznymi.

W ten sposób każdemu obiektowi rozważanego zbioru odpowiada dokładnie jedna kategoria taksonomiczna („prawdziwa” kategoria tego obiektu) i można rozważać problem błędów klasyfikacji, analizując prawdopodobieństwo, że obiekt określonej kategorii zostanie

zaliczony w procesie klasyfikowania do innej kategorii. Takie podejście do problemu błędów klasyfikacji rozważane jest na przykład w pracach [4] i [7].

W analizowanym przypadku klasyfikacji banknotów z punktu widzenia stopnia ich zużycia, podejście takie nie daje się zastosować, ze względu na brak definicji cechy, która ma służyć za podstawę budowy taksonomii, tj. cechy zwanej stopniem zużycia banknotu. Wobec tego nasze postępowanie będzie szło niejako w przeciwnym kierunku: określimy pewną procedurę klasyfikowania banknotów, która nie będzie oparta na definicji cechy względem której chcemy klasyfikować, a następnie określimy kategorie taksonomiczne stopnia zużycia („prawdziwe" kategorie banknotów) posługując się właściwościami probabilistycznymi rozważanej procedury klasyfikacji.

Ze względu na to „odwrócenie" hierarchii pojęć, rozpoczniemy rozważanie od przedstawienia wyników zawartych w pracach [1] i [2], dotyczących klasyfikacji subiektywnych, metod ich oceny oraz metod ich konstrukcji.

2.2. Klasyfikacje subiektywne i metody ich oceny. Jak to już zaznaczono, przy rozważaniu problemu klasyfikacji nie będziemy zakładać explicite, że każdemu obiektowi odpowiada jego „prawdziwa" kategoria taksonomiczna. Zbudujemy model procedury klasyfikowania obiektów przez daną osobę; kryterium, względem którego odbywa się ta klasyfikacja nie odgrywa w tej chwili żadnej roli.

Niech $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ oznacza niepusty skończony lub przeliczalny zbiór, którego elementy będą nazywane kategoriami taksonomicznymi lub kategoriami klasyfikacji. Niech B oznacza zbiór klasyfikowanych obiektów i wreszcie, niech S oznacza zbiór osób dokonujących klasyfikacji.

Przez klasyfikację (zbioru B, przez osoby ze zbioru S, względem kategorii ze zbioru $\mathcal{C}$) będziemy rozumieli rodzinę

$$\{X_s^{(i)}(b), s \in S, b \in B, i = 1, 2, \ldots\} \tag{1}$$

zmiennych losowych (określonych na odpowiednio dobranej przestrzeni probabilistycznej) przyjmujących wartości ze zbioru $\mathcal{C}$. Będziemy interpretowali $X_s^{(i)}(b) = C_j$ jako zdarzenie „przy i-tej próbie, osoba s zaklasyfikowała obiekt b do kategorii C_j".

Oznaczmy $I = \{1, 2, \ldots\}$ i załóżmy, że

1° Jeżeli $U, V \subset B \times S \times I$ i $U \cap V = \emptyset$, to rodziny zmiennych losowych

$$\{X_s^{(i)}(b), (b, s, i) \in U\} \quad \text{oraz} \quad \{X_s^{(i)}(b), (b, s, i) \in V\}$$

są niezależne.

2° $\mathrm{P}\{X_s^{(i)}(b) = C_j\} = p_{s,j}(b)$ nie zależy od i.

Z założenia 1° wynika w szczególności, że jeżeli $(b_1, s_1, i_1) \neq (b_2, s_2, i_2)$, to zmienne losowe $X_{s_1}^{(i_1)}(b_1)$ oraz $X_{s_2}^{(i_2)}(b_2)$ są niezależne.

Ponieważ nie zakładamy istnienia prawdziwej kategorii dla danego obiektu, ocena jakości klasyfikacji (1) nie może opierać się na prawdopodobieństwach błędnych zaklasyfikowań. Wprowadzimy wobec tego pewną miarę jakości klasyfikacji, prowadzącą jedynie do warunków koniecznych dobroci klasyfikacji. Miara ta będzie oparta na intuicji, w myśl której przy jakiejkolwiek zasadzie klasyfikowania, klasyfikacja nie może być dobra jeżeli z dużym prawdopodobieństwem pojawią się różnice w zaklasyfikowaniach tego samego obiektu, bądź dla różnych osób klasyfikujących, bądź też dla tej samej osoby przy różnych okazjach.

Dokładniej, jakość klasyfikacji (1) względem obiektu b będzie wyrażać się jako prawdopodobieństwo

(2) $$\mathrm{P}\{X_{s_1}^{(i_1)}(b) = X_{s_2}^{(i_2)}(b)\} = u_{s_1,s_2}(b),$$

gdzie $(s_1, i_1) \neq (s_2, i_2)$. Na mocy 1° i 2° wartość po lewej stronie (2) nie zależy od i_1 oraz i_2 i mamy

$$u_{s_1,s_2}(b) = \sum_j p_{s_1,j}(b) p_{s_2,j}(b).$$

Warunkiem koniecznym dobroci klasyfikacji jest to, aby wartości $u_{s_1,s_2}(b)$ były bliskie 1 dla $b \in B$ i $s_1, s_2 \in S$. Oszacowanie $u_{s_1,s_2}(b)$ dla ustalonego $b \in B$ wymaga oczywiście dostatecznie wielkiej liczby obserwacji obiektu b przez osoby s_1 i s_2, co zazwyczaj jest praktycznie nieosiągalne. Można jednak zbudować „całościową" miarę jakości klasyfikacji, określając, dla zbioru $B' = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset B$ parametry

$$u_{s_1,s_2}(B') = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{s_1,s_2}(b_j)$$

oraz

$$\sigma^2_{s_1,s_2}(B') = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [u_{s_1,s_2}(b_j) - u_{s_1,s_2}(B')]^2.$$

W pracy [2] podana jest konstrukcja metody estymacji parametrów $u_{s_1,s_2}(B')$ oraz $\sigma^2_{s_1,s_2}(B')$ opartej na dwóch niezależnych obserwacjach zaklasyfikowań każdego obiektu zbioru B' przez każdą z osób s_1 i s_2 (jeżeli $s_1 = s_2$, estymatory te wymagają obserwacji czterech niezależnych zaklasyfikowań każdego z elementów zbioru B' przez osobę s_1). Estymatory te są nieobciążone i ich wariancje ograniczone są z góry odpowiednio przez $1/8n$ i $3/4n$.

Użycie tych estymatorów pozwala zatem na ocenę jakości klasyfikacji wyrażoną przez wielkości $u_{s_1,s_2}(b)$, drogą oszacowania, dla dostatecznie licznych zbiorów B', wartości średnich funkcji $u_{s_1,s_2}(\cdot)$ na B' oraz pewnej miary rozproszenia wartości tej funkcji wokół jej średniej na zbiorze B'.

2.3. Konstrukcja subiektywnych klasyfikacji. W tym paragrafie przedstawiona zostanie metoda, zasugerowana w pracy [2], dla konstrukcji klasyfikacji banknotów względem stopnia ich zużycia. Klasyfikacja ta nie będzie oparta na żadnej bezpośredniej definicji cechy nazywanej „stopniem zużycia"; będzie ona oparta jedynie na założeniu, że istnieje dostatecznie duża zgodność intuicji ludzi co do tej cechy. Dokładniej, założymy że każda osoba ze zbioru S może wskazać w każdej parze $\langle a, b \rangle$ obiektów ze zbioru B (banknotów) ten element, który uważa za wcześniejszy (mniej zużyty). Nie będziemy zakładali, że wybory te są zgodne (niesprzeczne), ani też, że są takie same dla różnych osób; mogą one się również zmieniać dla tej samej osoby od okazji do okazji. Założymy, że dana jest rodzina zmiennych losowych (określonych na odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej)

(3) $$\{T_s^{(i)}(a, b), \langle a, b \rangle \in B \times B,\ s \in S,\ i = 1, 2, \ldots\},$$

gdzie $T_s^{(i)}(a, b)$ przyjmuje jedną z wartości a, b. Będziemy interpretować $T_s^{(i)}(a, b) = a$ jako zdarzenie „w i-tej próbie, dotyczącej pary $\langle a, b \rangle$, osoba s wskazała element a jako „wcześniejszy" w parze $\langle a, b \rangle$".

Przyjmiemy, że zmienne losowe (3) spełniają następujące warunki:

1° Jeżeli $U, V \subset B \times B \times S \times I$ i $U \cap V = \emptyset$, to rodziny zmiennych losowych

$$\{ T_s^{(i)}(a, b), (\langle a, b \rangle, s, i) \in U \} \quad \text{oraz} \quad \{ T_s^{(i)}(a, b), (\langle a, b \rangle, s, i) \in V \}$$

są niezależne.

2° Prawdopodobieństwo $P\{ T_s^{(i)}(a, b) = a \} = p(a, b)$ nie zależy od s oraz i.

Z grubsza biorąc, będziemy próbowali znaleźć warunki dla prawdopodobieństw $p(a, b)$, umożliwiające wybór ciągu $\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots$ elementów B, które mogłyby służyć jako granice między kolejnymi kategoriami klasyfikacji. Innymi słowy, będziemy próbowali skonstruować ciąg $\{b_j\}$ taki, że reguła „umieść (w i-tej próbie) obiekt x w kategorii C_j, jeżeli uważasz, że jest on „wcześniejszy" niż b_j i „późniejszy" niż b_{j-1}" prowadzi (z prawdopodobieństwem 1) do zaklasyfikowania obiektu x, tj. do przyporządkowania mu (w danej próbie i dla danej osoby) dokładnie jednej kategorii C_j. Będziemy przy tym próbowali znaleźć najdłuższy taki ciąg, tj. ciąg prowadzący do klasyfikacji na największą liczbę kategorii. (Ciąg jedno-elementowy daje klasyfikację dychotomiczną).

Założymy, że prawdopodobieństwa $p(a, b)$ określone są dla wszystkich $\langle a, b \rangle \in B \times B$ i spełniają następujące warunki:

(i) $p(a, b) + p(b, a) = 1$ dla wszystkich $a, b \in B$.

(ii) Dla wszystkich $a, b, c \in B$, jeżeli[1] $p(a, b) \geqslant \frac{1}{2}$ i $p(b, c) \geqslant \frac{1}{2}$, to

$$p(a, c) \geqslant \max\,[p(a, b), p(b, c)].$$

(iii) Istnieje q ($\frac{1}{2} < q < 1$), takie że dla wszystkich $a, b, c \in B$, jeżeli $p(a, b) > q$ i $p(b, c) > q$, to $p(a, c) = 1$.

Dla dowolnego $a \in B$ i h $\left(\frac{1}{2} < h < 1\right)$ określmy

$$A_h^+(a) = \{x \in B\colon p(a, x) \geqslant h\} \quad \text{oraz} \quad A_h^-(a) = \{x \in B\colon p(x, a) \geqslant h\}.$$

(iv.1) Jeżeli zbiór $A_h^+(a)$ jest niepusty, to istnieje $u \in A_h^+(a)$, takie że $p(u, x) \geqslant \frac{1}{2}$ dla wszystkich $x \in A_h^+(a)$;

(iv.2) Jeżeli zbiór $A_h^-(a)$ jest niepusty, to istnieje $u \in A_h^-(a)$, takie że $p(x, u) \geqslant \frac{1}{2}$ dla wszystkich $x \in A_h^-(a)$.

(v) Dla dowolnego $a \in B$ oraz h $\left(\frac{1}{2} < h < 1\right)$:

(v.1) Jeżeli istnieje nieskończony ciąg $b_1, b_2, \ldots$ elementów B, taki że $p(b_j, b_{j+1}) \geqslant h$ dla wszystkich j, to istnieje $m = m(a)$, takie że $p(a, b_m) \geqslant \frac{1}{2}$;

(v.2) Jeżeli istnieje nieskończony ciąg $b_1, b_2, \ldots$, taki że $p(b_{j+1}, b_j) \geqslant h$ dla wszystkich j, to istnieje $m = m(a)$, takie że $p(b_m, a) \geqslant \frac{1}{2}$.

Obecnie przedstawiona zostanie konstrukcja klasyfikacji oparta na powyższym układzie postulatów; dowody przytoczonych twierdzeń można znaleźć w [2].

Przede wszystkim zauważmy, że zbiór Q wartości a, dla których spełniony jest postulat (iii), jest przedziałem lewostronnie domkniętym.

---

[1] Warunek ten nazywa się w literaturze mocną stochastyczną przechodniością (por. np. [8]).

Oznaczmy

$$q^* = \inf\{q\colon\ q \in Q\}.$$

Następnie, określmy $a \sim b$ jeżeli $p(a,\ b) = \frac{1}{2}$ oraz $a \rightarrowtail b$ jeżeli $p(a,\ b) > \frac{1}{2}$. Z (i) oraz (ii) wynika, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia w B, podczas gdy relacja $\rightarrowtail$ jest przeciwzwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Ponadto, dla wszystkich $a,\ b$ mamy $a \rightarrowtail b$, $a \sim b$ lub $b \rightarrowtail a$, wobec czego zbiór B (a dokładniej, zbiór $B/\sim$ klas równoważności względem $\sim$) jest liniowo uporządkowany przez relację $\rightarrowtail$. Zauważmy, że warunek (iv) gwarantuje istnienie „pierwszych" i „ostatnich" elementów w zbiorach określonej postaci, podczas gdy (v) odpowiada aksjomatowi Archimedesa w arytmetyce.

Dla ustalonych $a \in B$ oraz h $(\frac{1}{2} < h < 1)$ będziemy rozważali ciągi $\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots$ (skończone lub nieskończone) elementów zbioru B, o tej własności, że $b_0 \sim a$ oraz $p(b_j,\ b_{j+1}) \geqslant h$ dla wszystkich j. Oznaczmy klasę wszystkich takich ciągów przez $L(a,\ h)$.

Niech $\{b_j\} \in L(a,\ h)$ przy pewnym $h > q^*$. Konstrukcja klasyfikacji oparta jest na twierdzeniu orzekającym, że dla dowolnego $x \in B$, jeżeli $0 < p(x,\ b_m) < 1$ dla pewnego m, to $p(x,\ b_{m+k}) = p(b_{m-k},\ x) = 1$ dla wszystkich $k \geqslant 4$.

Innymi słowy, jeżeli dla pewnego m zmienne losowe $T_s^{(i)}(x,\ b_m)$ są niezdegenerowane (tj. mogą przyjmować obie wartości b_m i x z dodatnim prawdopodobieństwem, czyli mogą istnieć różnice zdań w ocenach czy x czy b_m jest „wcześniejsze"), to nie ma żadnych wątpliwości, gdy x porównywane jest z elementami ciągu $\{b_j\}$ odległymi od b_m o cztery lub więcej miejsc.

Tak więc, jeżeli $\{b_j\} \in L(a,\ h)$ dla $h > q^*$ i $\{b_{n_j}\}$ jest podciągiem $\{b_j\}$ takim, że $n_{j+1} - n_j = 4$ dla wszystkich j, to $\{b_{n_j}\}$ może służyć jako ciąg „standartów" klasyfikacji: można określić zmienną losową $X_s^{(i)}(b)$ o wartościach w zbiorze $\ldots,\ C_{-1},\ C_0,\ C_1,\ \ldots$ kategorii taksonomicznych, przyjmując $X_s^{(i)}(b) = C_j$ jeżeli $T_s^{(i)}(b,\ b_{n_j}) = b$ oraz $T_s^{(i)}(b_{n_{j-1}},\ b) = b_{n_{j-1}}$ (dla kategorii skrajnych definicja ta wymaga oczywistego uzupełnienia). Z postulatu (v) wynika, że każdy element zbioru B zostanie zaklasyfikowany do kategorii o skończonym numerze; ponadto, można pokazać, że dla każdego $x \in B$ prawdopodobieństwo $p_{s,j}(x) = P\{X_s^{(i)}(x) = C_j\}$ nie zależy od s oraz i, i może być różne od zera jedynie dla pewnych dwóch sąsiednich kategorii j i $j + 1$. Innymi słowy, dla każdego obiektu x z prawdopodobieństwem 1 wszystkie jego zaklasyfikowania (dla wszystkich osób s oraz okazji i) znajdą się bądź w jednej kategorii, bądź też w dwóch sąsiednich kategoriach.

Wynika stąd, że $u_{s_1,s_2}(x)$, określone w poprzednim paragrafie będzie spełniać warunek $u_{s_1,s_2}(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

Tak więc dowolny ciąg $\{b_j\} \in L(a,\ h)$ przy $h > q^*$ może służyć, w opisanym wyżej sensie, jako podstawa klasyfikacji o opisanych własnościach. Wygodnie będzie nazwać ciągi $\{b_j\}$ z klasy $L(a,\ h)$ przy $h > q^*$ ciągami pierwotnymi, a ich podciągi $\{b_{n_j}\}$, dla których $n_{j+1} - n_j = 4$, ciągami klasyfikacyjnymi.

Przedstawimy obecnie zasadę wyboru prowadzącą do najlepszych ciągów w klasie $L(a,\ h)$, tj. ciągów dających klasyfikację na maksymalną liczbę kategorii.

Optymalny ciąg pierwotny $\{b_j'\}$ w klasie $L(a,\ h)$, $h > q^*$ można otrzymać w sposób następujący. Wybieramy $b_0' \sim a$, a następnie tworzymy ciąg $\{b_j'\}$ według następującej reguły

indukcyjnej: dla $k \geqslant 0$, jeżeli określiliśmy już element b'_k, rozważamy zbiór $A_h^+(b'_k)$. Jeżeli zbiór ten jest pusty, to b'_k jest ostatnim wyrazem o wskaźniku dodatnim. W przeciwnym przypadku przyjmujemy jako b'_{k+1} najwcześniejszy z elementów w zbiorze $A_h^+(b'_k)$; istnienie takiego elementu zagwarantowane jest przez postulat (iv). W podobny sposób konstruujemy ciąg dla wskaźników ujemnych.

Można udowodnić, że tak skonstruowany ciąg jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do równoważności $\sim$, i że jest on najdłuższym ciągiem w klasie $L(a, h)$ w następującym sensie: dla każdego ciągu $\{b_j\} \in L(a, h)$, jeżeli b_k $(k \geqslant 0)$ jest określone, to określone jest również b'_k, i $p(b'_k, b_k) \geqslant \frac{1}{2}$. Podobny warunek spełniony jest też dla wskaźników ujemnych.

Tak więc, klasyfikacja oparta na podciągu klasyfikacyjnym ciągu pierwotnego $\{b'_j\}$ ma maksymalną liczbę kategorii spośród wszystkich klasyfikacji opartych na ciągach pierwotnych z $L(a, h)$.

2.4. Definicja kategorii stopnia zużycia banknotu. Załóżmy, że spełnione są postulaty sformułowane w poprzednim paragrafie, i niech $\{b_j\}$ oznacza dowolny ustalony ciąg pierwotny, tj. ciąg z klasy $L(a, h)$ przy $h > q^*$. Przyporządkujmy elementowi $x \in B$ kategorię K_j jeżeli $p(x, b_j) \geqslant \frac{1}{2}$ oraz $p(b_{j-1}, x) > \frac{1}{2}$ (dla ciągów skończonych definicja ta wymaga oczywistych modyfikacji dla kategorii skrajnych). W terminach relacji $\mapsto\!\!3$, element x należy do kategorii K_j, jeżeli $b_{j-1} \mapsto\!\!3\; x \mapsto\!\!3\; b_j$. Takie przyporządkowanie kategorii elementom zbioru B wyznacza funkcję $B \to \{\ldots, K_{-1}, K_0, K_1, \ldots\}$, zależną od ciągu pierwotnego $\{b_j\}$. W odniesieniu do banknotów, nazwiemy K_j „prawdziwą" kategorią zużycia banknotu (mierzoną za pomocą ciągu $\{b_j\}$). Dokładniej, dla banknotów wprowadzimy jeszcze dodatkową kategorię banknotów zużytych w sposób „nietypowy", tj. podartych, poplamionych itp. Założymy w dalszym ciągu, że banknoty można podzielić na takie, które należą do tej ostatniej kategorii oraz pozostałe (zużyte w „normalny" sposób). Chwilowo zajmiemy się jedynie tą ostatnią grupą.

W związku z powyższą definicją „prawdziwej" kategorii stopnia zużycia banknotu, powstaje problem określenia związku między obserwowaną klasyfikacją banknotów względem podciągu klasyfikacyjnego wybranego z ciągu pierwotnego $\{b_j\}$, oraz prawdziwymi kategoriami stopnia zużycia, zdefiniowanymi za pomocą ciągu $\{b_j\}$. Z rozważań poprzedniego paragrafu wynika, że schemat klasyfikacji oparty na podciągu klasyfikacyjnym, powiedzmy $\{b_{4j}\}$ ciągu pierwotnego $\{b_j\}$, daje klasyfikację (obarczoną błędami losowymi) na kategorie taksonomiczne, z których każda obejmuje cztery kolejne klasy K_j. Innymi słowy, obserwujemy klasyfikację na kategorie

$$\ldots, \quad C_0 = \{K_0, K_1, K_2, K_3\}, \quad C_1 = \{K_4, K_5, K_6, K_7\}, \quad \ldots,$$

gdzie „błędy" klasyfikacji są takie, że wszystkie zaklasyfikowania danego banknotu znajdują się w dwóch sąsiednich kategoriach C_j i C_{j+1}.

W przypadku ogólnym, problem oceny stanu danego zbioru banknotów $B' \subset B$ można sformułować następująco: niech B' będzie zbiorem skończonym, i niech N_j oznacza liczbę obiektów ze zbioru B' należących do kategorii K_j. Wobec tego z punktu widzenia interesują-

cej nas charakterystyki, wektor $\{\ldots, N_{-1}, N_0, N_1, \ldots\}$ opisuje „stan" zbioru B'. Chcielibyśmy wnioskować o tym stanie na podstawie obserwacji wartości pewnej zmiennej losowej o wartościach wektorowych $\{\ldots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \ldots\}$, gdzie Z_j jest łączną liczbą obiektów zbioru B' zaklasyfikowanych (przy danej okazji, przez daną osobę) do kategorii $C_j = \{K_{4j}, K_{4j+1}, K_{4j+2}, K_{4j+3}\}$. Jasne jest że konstrukcja estymatora $\{\ldots, N_{-1}, N_0, N_1, \ldots\}$ na podstawie zmiennej losowej $\{\ldots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \ldots\}$ jest niemożliwa z dwóch powodów: po pierwsze, parametr o którym chcemy wnioskować ma, z grubsza biorąc, cztery razy więcej składowych niż zmienna losowa, służąca za podstawę wnioskowania. Po drugie, prawdopodobieństwa $q_j(x)$, że obiekt x zostanie zaklasyfikowany do kategorii C_j nie są stałe dla obiektów z danej klasy.

Przyjmiemy wobec tego upraszczające założenie o prawdopodobieństwach $q_j(x)$ i zbudujemy model, w którym nakłada się pewne ograniczenie na wektory $\{\ldots, N_{-1}, N_0, N_1, \ldots\}$. Dokładniej, zbudujemy teoretyczny model obiegu i wymiany banknotów, którego analiza teoretyczna doprowadzi do określenia granicznego rozkładu dla poszczególnych kategorii K_j w populacji banknotów.Znając ten rozkład i przyjmując pewne założenie o prawdopodobieństwach $q_j(x)$, można będzie wyznaczyć teoretyczny rozkład prawdopodobieństwa wektora $\{\ldots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \ldots\}$ obrazującego rozkład zaklasyfikowań zaobserwowany dla dużej liczby losowo wybranych banknotów; obserwacje rzeczywistych zaklasyfikowań będą wówczas mogły służyć za test dla weryfikacji modelu.

Jeżeli chodzi o założenie o prawdopodobieństwach $q_j(x)$, przyjmujemy, że $q_j(x)$ jest stałe dla wszystkich x z klasy K_i.

Wybór konkretnej wartości liczbowej $q_j(x)$ dla x z klasy K_i oparty będzie na następujących łatwych do udowodnienia nierównościach.

Niech $C_j = \{K_{4j}, K_{4j+1}, K_{4j+2}, K_{4j+3}\}$. Wówczas dla x z klas K_{4j} i K_{4j+1} mamy $q_{j-1}(x) + q_j(x) = 1$, gdzie w pierwszym przypadku jest $q_{j-1}(x) < \frac{1}{2}$, a w drugim przypadku $q_{j-1}(x) \leqslant 1 - h$. Analogiczne nierówności spełnione są dla x z klas K_{4j+2} i K_{4j+3}; mamy wówczas $q_j(x) + q_{j+1}(x) = 1$ i nierówności dotyczą $q_{j+1}(x)$. W przypadku rozważanej klasyfikacji banknotów, założymy że $q_j(x)$ równa się odpowiednio określonej „średniej" wartości funkcji $q_j(x)$ na danej klasie K_i. Do tego problemu powrócimy jeszcze w dalszej części pracy.

Wreszcie, ostatni problem, który wymaga dyskusji dotyczy błędów klasyfikacji obiektów zbioru B przy klasyfikacji dychotomicznej, opartej na jednym elemencie ciągu pierwotnego $\{b_j\}$. Dla uproszczenia terminologii, nazwijmy destruktami banknoty z klas $K_{j_0}, K_{j_0+1}, \ldots,$ i oznaczmy przez $\varepsilon(x)$ prawdopodobieństwo, że banknot x zostanie zaklasyfikowany jako destrukt, tj.

$$\varepsilon(x) = \mathrm{P}\{T_s^{(i)}(x, b_{j_0-1}) = b_{j_0-1}\}$$

(graniczny element b_{j_0-1} uznany jest za „mniej zużyty" niż x). Na podstawie postulatów (i) — (v) można łatwo udowodnić, że

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ z klas } K_{j_0-m} \text{ przy } m \geqslant 3, \\ 1 & \text{dla } x \text{ z klas } K_{j_0+m} \text{ przy } m \geqslant 2. \end{cases}$$

Jeżeli chodzi o wartości $\varepsilon(x)$ dla x z klas $K_{j_0-2}, K_{j_0-1}, K_{j_0}$ oraz K_{j_0+1}, przyjmiemy pewne upraszczające założenie numeryczne przy rozważaniu modelu obiegu i wymiany banknotów.

2.5. Istnienie skali stopnia zużycia banknotów. Opisana wyżej konstrukcja pozwala na przyporządkowanie każdemu banknotowi x kategorii stopnia jego zużycia K_i mierzonej za pomocą wybranego ciągu pierwotnego $\{b_j\}$. Przy tej konstrukcji, wszystkim banknotom x spełniającym warunek $b_{j-1} \,\underline{\dashv}\, x \dashv b_j$ przyporządkowana jest ta sama kategoria. „Szerokości" klas nie muszą być przy tym jednakowe, ponieważ od ciągu pierwotnego wymaga się jedynie aby $p(b_j, b_{j+1}) \geqslant h$, a więc liczby $p(b_j, b_{j+1})$ nie muszą być równe (postulaty (i) – (v) nie gwarantują bynajmniej istnienia, dla danego b_j i h, takiego b_{j+1}, że $p(b_j, b_{j+1}) = h$, w wyniku czego może nie istnieć ciąg pierwotny o „równych" odstępach). Powstaje pytanie w jaki sposób można by wzmocnić postulaty (i) – (v) tak, aby dało się każdemu banknotowi x przyporządkować liczbę $f(x)$ wyrażającą stopień jego zużycia w taki sposób aby $f(x) < f(y)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x, y) > \frac{1}{2}$ oraz aby warunek $0 < p(x, y) = p(u, v) < 1$ pociągał za sobą $f(y) - f(x) = f(v) - f(u)$.

Taki układ postulatów został podany w pracy [3]. Podobnie jak w poprzednim paragrafie, zakłada się, że prawdopodobieństwa $p(a, b)$ określone są dla wszystkich $a, b \in B$ i spełniają następujące postulaty:

1) *Symetria* (postulat (i))

$$p(a, b) + p(b, a) = 1.$$

2) *Mocna stochastyczna przechodniość* (postulat (ii)):

$$p(a, b) \geqslant \tfrac{1}{2}, \quad p(b, c) \geqslant \tfrac{1}{2} \Rightarrow p(a, c) \geqslant \max\,[p(a, b), p(b, c)].$$

3) *Istnienie elementu pierwszego*: istnieje a^* takie, że

$$p(a^*, a) \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{dla wszystkich } a \in B.$$

4) *Równość elementów jednakowo odległych*:

$$0 < p(a, b) = p(a, c) < 1 \Rightarrow p(b, c) = \tfrac{1}{2}.$$

5) *Własność Darboux*: Niech $h > \frac{1}{2}$. Jeżeli $\{b : p(a, b) \geqslant h\} \neq \emptyset$, to istnieje $c = c(h)$ spełniające warunek $p(a, c) = h$, i podobnie, jeżeli $\{b : p(b, a) \geqslant h\} \neq \emptyset$, to istnieje $d = d(h)$, takie że $p(d, a) = h$.

6) *Skrócenie „połowy" odcinka*: istnieje $r < 1$ takie, że

$$\tfrac{1}{2} < p(a, b) < 1, \quad p(a, c) = p(c, b) \Rightarrow p(a, c) \leqslant \tfrac{1}{2} + r\,[p(a, b) - \tfrac{1}{2}].$$

7) *Sztywność*:

$$\tfrac{1}{2} < p(a, b) = p(c, d) < 1, \qquad \tfrac{1}{2} < p(a, e) < p(a, b),$$

$$p(a, e) = p(c, f) \Rightarrow p(e, b) = p(f, d).$$

8) *Własność Archimedesa* (postulat v.1)). Dla każdego $h > \frac{1}{2}$, jeżeli istnieje ciąg nieskończony $\{b_j\}$ taki, że $p(b_j, b_{j+1}) \geqslant h$ $(j = 1, 2, \ldots)$, to dla każdego a istnieje m takie, że $p(a, b_m) \geqslant \frac{1}{2}$.

Można pokazać (por. [3]), że postulaty te implikują między innymi kluczowy dla konstrukcji klasyfikacji postulat (iii) z poprzedniego paragrafu.

Z postulatów tych wynika istnienie funkcji f, określonej na zbiorze B, takiej że:

(I) $f(a^*) = 0$, gdzie a^* opisane jest w postulacie 3).

(II) $f(a) < f(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p(a, b) > \frac{1}{2}$.

(III) $0 < p(a, b) = p(c, d) < 1 \Rightarrow f(b) - f(a) = f(d) - f(c)$.

Ponadto, funkcja f jest wyznaczona jednoznacznie, w tym sensie, że jeżeli funkcja g spełnia warunki (I) — (III), to $g = \alpha f$ dla pewnego $\alpha > 0$.

W zastosowaniu do banknotów, twierdzenie to orzeka, iż jeżeli oceny banknotów rządzone są przez prawdopodobieństwa $p(a, b)$ spełniające 1) — 8), to istnieje z dokładnością do zmiany jednostki tylko jedna skala f stopnia zużycia banknotów.

2.6. Zastosowanie praktyczne dla klasyfikacji banknotów. Zanim przedstawimy model obiegu banknotów, opiszemy w skrócie wyniki eksperymentów dotyczących klasyfikacji banknotów, opartych na teorii zarysowanej w paragrafach 2.3 i 2.4. Szczegółowa dyskusja procedury eksperymentalnej podana jest w [2]; tutaj ograniczymy się jedynie do przedstawienia wyników.

Eksperymenty dotyczyły banknotów dwudziestozłotowych i przeprowadzone były w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie. Przyjęto, że zmienne losowe $T_s^{(i)}(a, b)$ opisujące wybór banknotu mniej zużytego w parze $\langle a, b \rangle$ spełniają postulaty (i) — (v) sformułowane w paragrafie 2.3. Prawdopodobieństwa $p(a, b) = P\{T_s^{(i)}(a, b) = a\}$ były oceniane na podstawie obserwacji wyborów z pary $\langle a, b \rangle$ dokonywanych przez różnych badanych; każdy z nich dokonywał co najmniej dwóch wyborów z danej pary $\langle a, b \rangle$. Przyjęto, że postulat (iii) spełniony jest dla $q = 0.75$ i próbowano wybrać ciąg pierwotny $\{b_j\}$ banknotów, dla którego $p(b_j, b_{j+1}) = 0.75$. Dla danego banknotu b_j, jako b_{j+1} wybrany był taki banknot, który w 24 obserwacjach uznany był 18 razy za „bardziej zużyty" niż b_j, a 6 razy za „mniej zużyty" niż b_j. W podobny sposób ciąg rozszerzony był w kierunku banknotów coraz mniej zużytych.

Procedura eksperymentalna polegała, z grubsza biorąc na tym, że dla danego banknotu b_j wybrało się odpowiedni zbiór $Z(b_j)$ banknotów, który zostawał następnie poddawany 24 razy dychotomicznej klasyfikacji na banknoty mniej i bardziej zużyte od b_j. Jako b_{j+1} lub b_{j-1} wybierano banknot, który uzyskiwał określoną liczbę zaklasyfikowań (odpowiednio 18 „bardziej" i 6 „mniej" lub odwrotnie). Zbiory $Z(b_j)$ były wybierane przez eksperymentatorów z próbki 400 banknotów wypożyczonych z NBP w celach przeprowadzenia eksperymentów.

Okazało się możliwe otrzymanie ciągu pierwotnego złożonego z 17 banknotów. Wybierając co czwarty z nich, uzyskano ciąg klasyfikacyjny 5 banknotów, dający taksonomię na 6 kategorii.

W celu zorientowania się w jakości uzyskanego schematu klasyfikacji, poddano 13 razy klasyfikacji na 6 kategorii zbiór 100 banknotów. W myśl założeń, zaklasyfikowania każdego z tych banknotów powinny znaleźć się w jednej lub dwóch sąsiednich kategoriach. Wydaje się, że wyniki eksperymentów pokrywają się w dostatecznym stopniu z oczekiwaniami: dla 55 banknotów wszystkie 13 zaklasyfikowań należały do jednej lub dwóch sąsiednich kategorii. Dla 37 banknotów, 12 zaklasyfikowań znalazło się w dwóch sąsiednich kategoriach, a tylko raz banknot zostawał zaliczany do innej kategorii (sąsiadującej z tymi dwoma). Dla 6 banknotów zaklasyfikowania znalazły się w trzech sąsiednich kategoriach, z których każda pojawiła się co najmniej dwukrotnie. Wreszcie, dla 2 banknotów, ich zaklasyfikowania znalazły się w 4 kolejnych kategoriach.

Wyniki te wydają się być obiecujące: zgodność klasyfikacji dla danej osoby klasyfikującej przy dwóch różnych okazjach była znacznie wyższa niż przy rzeczywistej klasyfikacji w NBP, pomimo tego, że eksperymenty przeprowadzone w Instytucie Matematycznym dotyczyły znacznie trudniejszego zadania klasyfikacji na sześć, a nie na dwie kategorie.

Wartości (por. [2]) estymatorów $u_{s_1, s_2}(B')$ dla rozważanego zbioru B' złożonego ze 100

banknotów wahały się od 0.47 do 0.86. Są to oszacowania przeciętnego (w zbiorze B') prawdopodobieństwa, że dwa niezależne zaklasyfikowania tego samego obiektu, względem 6 kategorii, dadzą ten sam wynik. Oszacowanie $\sigma^2_{s_1,s_2}(B')$ wahały się od -0.01 do 0.06 (parametr $\sigma^2_{s_1,s_2}(B')$, mierzący rozrzut prawdopodobieństw $u_{s_1,s_2}(b_j)$ wokół ich średniej $u_{s_1,s_2}(B')$, jest oczywiście nieujemny. Dla oszacowania tego parametru używany był estymator nieobciążony; wobec tego dla wartości parametrów bliskich 0 wartości ujemne estymatora mogą pojawić się z dodatnim prawdopodobieństwem, co tłumaczy pojawienie się wartości -0.01).

3. Model obiegu i wymiany banknotów

3.1. Założenia modelu. Załóżmy, że populacja banknotów jest skończona i składa się z N elementów (rozważamy banknoty określonej wartości). Następnie, załóżmy że istnieje $r + 1$ kategorii stopnia zużycia banknotów, z których pierwsze r oparte jest na pewnym ciągu pierwotnym $\{b_j\}$, a ostatnia kategoria K_{r+1}, obejmuje banknoty zużyte w sposób nietypowy. W dalszym ciągu wygodnie będzie przyjąć numerację klas od 1, tak że klasa K_1 odpowiada nowym (najmniej zużytym) banknotom. Dla banknotów o wartości 20 zł. można np. rozważać 19 klas, z których 18 oparte jest na 17-elementowym ciągu pierwotnym opisanym w poprzednim paragrafie, a ostatnia klasa obejmuje banknoty „nietypowe".

Przyjmijmy, że w każdym momencie czasu, każdy banknot znajduje się w jednej z klas $K_1, K_2, \ldots, K_{r+1}$ stopnia zużycia; ponadto, każdy banknot może być w jednym z trzech następujących stanów: w obiegu, w banku lub w skarbcu. Ponadto, założymy istnienie mennicy, mającej nieograniczoną ilość banknotów, które mogą być wymienione na zużyte. Banknoty w mennicy są klasy K_1 i nie są wliczane do rozważanej populacji N banknotów.

Przyjmiemy, że w ciągu każdego dnia w obiegu znajduje się $N_0 + N_1$ banknotów, a N_2 banknotów znajduje się w skarbcu, gdzie $N = N_0 + N_1 + N_2$. Ponadto, założymy że $N_2 \geqslant N_1$. Każdego wieczoru N_1 banknotów znajdujących się w obiegu trafia do banku, gdzie poddane zostają procedurze klasyfikacji na destrukty i nie-destrukty. Te banknoty, które zostają zaklasyfikowane jako destrukty ulegają zamianie na nowe banknoty z mennicy. Następnego ranka, N_1 banknotów zostaje wyjęte ze skarbca i puszczone w obieg, podczas gdy N_1 banknotów, które trafiły do banku poprzedniego wieczoru i zostały poddane klasyfikacji i wymianie, zostają złożone w skarbcu.

Jeżeli chodzi o banknoty w obiegu, przyjmiemy następujące założenia: banknot x, który danego dnia znajduje się w klasie K_j i nie trafia do banku, przechodzi do klasy K_m z prawdopodobieństwem $\pi_m(x) = \pi_{jm}$, niezależnie od losów innych banknotów i niezależnie od poprzednich zdarzeń dotyczących tego banknotu.

Następnie założymy, że prawdopodobieństwo, iż banknot x z klasy K_j zostanie uznany za destrukt wynosi $\varepsilon(x) = \varepsilon_j$ niezależnie od decyzji dotyczących zaklasyfikowań innych banknotów.

Ponadto, założymy że liczby $N_0 + N_1$ oraz N_2 są duże w porównaniu z N_1, jak również że liczba N_1 jest dostatecznie duża, tak że można adekwatnie opisać rozważane zjawisko w terminach wartości oczekiwanych rozważanych zmiennych losowych: zmiennymi tymi będą liczby banknotów poszczególnych klas w obiegu i w skarbcu. Wreszcie, założymy, że wybór banknotów trafiających z obiegu do banku oraz wybór banknotów ze skarbca, które zostają puszczone w obieg, dokonywane są niezależnie od stopnia zużycia banknotów.

3.2. Analiza modelu. Oznaczmy

$$\alpha = \frac{N_1}{N_0 + N_1}, \qquad \beta = \frac{N_1}{N_2}.$$

Tak więc, α jest frakcją banknotów (spośród banknotów znajdujących się danego dnia w obiegu), które każdego wieczora trafiają do banku, podczas gdy β jest frakcją banknotów ze skarbca, które każdego ranka puszczane są w obieg.

Niech $(U_1(t), U_2(t), \dots, U_{r+1}(t), V_1(t), \dots, V_{r+1}(t))$ będzie wektorem opisującym stan populacji banknotów w dniu t, gdzie $U_j(t)$ jest liczbą banknotów klasy K_j znajdujących się w obiegu, a $V_j(t)$ jest liczbą banknotów tej klasy znajdujących się w skarbcu. Na mocy opisanych wyżej założeń mamy

$$\sum_j U_j(t) = N_0 + N_1, \qquad \sum_j V_j(t) = N_2$$

dla każdego t.

Wobec tego, oczekiwana liczba banknotów klasy K_j, które trafiają do banku, wynosi $\alpha U_j(t)$. Spośród nich, $\varepsilon_j \alpha U_j(t)$ zostanie zaklasyfikowanych jako destrukty i zamienionych przez banknoty nowe (z klasy K_1). Oczekiwane liczby banknotów z poszczególnych klas, które zostaną włączone do obiegu następnego dnia wynoszą $\beta V_j(t)$. Mamy zatem

$$\sum U_j(t+1) = (1-\alpha)\sum_i \pi_{ij} U_i(t) + \beta V_j(t),$$

$$V_j(t+1) = (1-\beta) V_j(t) + \alpha(1-\varepsilon_j) U_j(t) + \delta_j^1 \alpha \sum \varepsilon_i U_i(t),$$

gdzie $j = 1, 2, \dots, r+1$, a δ_j^1 jest symbolem Kroneckera.

Można łatwo sprawdzić, że jeżeli $\sum U_j(0) = N_0 + N_1$ oraz $\sum V_j(0) = N_2$, to $\sum U_j(t) = N_0 + N_1$ oraz $\sum V_j(t) = N_2$ dla wszystkich t. Dzieląc obie strony przez $N = N_0 + N_1 + N_2$ i oznaczając $p_j(t) = U_j(t)/N$, $q_j(t) = V_j(t)/N$, otrzymujemy rekurencyjne związki

$$\begin{aligned} p_j(t+1) &= (1-\alpha)\sum_i \pi_{ij} p_i(t) + \beta q_j(t), \\ q_j(t+1) &= (1-\beta) q_j(t) + \alpha(1-\varepsilon_j) p_j(t) + \delta_j^1 \alpha \sum_i \varepsilon_i p_i(t), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $\sum p_i(t) + \sum q_i(t) = 1$ dla każdego t.

Znajdziemy najpierw warunki, przy których granice

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{t\to\infty} q_j(t) = q_j$$

istnieją i są niezależne od stanu początkowego dla $t = 0$.

Dla znalezienia tych warunków, przepiszmy układ (4) w postaci

$$T(t+1) = T(t)A,$$

gdzie $T(s) = (p_1(s), \dots, p_{r+1}(s), q_1(s), \dots, q_{r+1}(s))$, natomiast A jest macierzą stochastyczną postaci

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

W tej macierzy A_1 jest macierzą $(1-\alpha)[\pi_{ij}]$, A_2 jest macierzą postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha\varepsilon_1 & (1-\varepsilon_1)\alpha & 0 & \dots & 0 \\ \alpha\varepsilon_2 & 0 & (1-\varepsilon_2)\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\varepsilon_{r+1} & 0 & 0 & \dots & (1-\varepsilon_{r+1})\alpha \end{bmatrix},$$

A_3 jest macierzą βI oraz A_4 jest macierzą $(1-\beta)\,I$. Dla istnienia rozkładu granicznego $\lim p_j(t) = p_j$, $\lim q_j(t) = q_j$ wystarcza aby A było macierzą ergodycznego łańcucha Markowa, zawierającego być może również stany chwilowe. Warunek ten jest spełniony jeżeli dla co najmniej jednego wskaźnika i mamy $\pi_{ii} > 0$, w macierzy stochastycznej $[\pi_{ij}]$ ze stanu 1 można przejść do każdego innego stanu oraz $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Wówczas każdy ze stanów odpowiadających pierwszym $r+1$ wierszom jest rekurencyjny i łańcuch jest nieokresowy; w tym przypadku mamy ponadto $p_j > 0$ dla $j = 1, 2, \dots, r+1$, co związane jest z tym, że w granicy wszystkie kategorie stopnia zużycia banknotów będą reprezentowane wśród banknotów znajdujących się w obiegu (w skrabcu pewne kategorie mogą nie być reprezentowane w przypadku doskonałej eliminacji destruktów, tak że pewne q_j mogą być równe zero).

Jeżeli powyższe warunki istnienia rozkładu granicznego są spełnione, to można rozkład ten wyznaczyć z układu równań

$$(5)\qquad \begin{cases} p_j = (1-\alpha)\sum\limits_i \pi_{ij} p_i + \beta q_j, \\ q_j = (1-\beta)\, q_j + \alpha(1-\varepsilon_j)\, p_j + \delta_j^1\, \alpha \sum \varepsilon_i p_i, \\ p_1 + \dots + p_{r+1} + q_1 + \dots + q_{r+1} = 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że sumując względem j mamy

$$\beta \sum q_j = \alpha \sum (1-\varepsilon_j) p_j + \alpha \sum \varepsilon_j p_j = \alpha \sum p_j,$$

co daje, z uwagi na ostatnie równanie układu (5),

$$\sum p_j = \frac{1}{1+\alpha/\beta}.$$

Znajdziemy obecnie rozwiązanie układu (5) przy pewnych upraszczających założeniach o macierzy $[\pi_{ij}]$. Przyjmiemy mianowicie, że możliwe są jedynie trzy następujące rodzaje przejść: pozostanie w tym samym stanie, przejście do stanu o numerze wyższym o 1, oraz przejście do stanu o numerze $r+1$; ponadto, założymy że drugie z wymienionych przejść ma dodatnie prawdopodobieństwo Innymi słowy, przyjmujemy że dla $i = 1, 2, \dots, r$ spełnione są warunki

$$(6)\qquad \pi_{ii} + \pi_{i,i+1} + \pi_{i,r+1} = 1, \qquad \pi_{i,i+1} > 0 \qquad \text{oraz} \qquad \pi_{r+1,r+1} = 1.$$

Warunki istnienia rozkładu ergodycznego są spełnione. Z drugiego z równań (5) otrzymujemy

$$q_j = \frac{\alpha}{\beta}(1-\varepsilon_j) p_j + \delta_j^1 \frac{\alpha}{\beta} \sum \varepsilon_i p_i,$$

wobec czego wystarcza wyznaczyć niewiadome p_j. Podstawiając do pierwszego z równań (5), otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$c_j p_j = \sum_i \pi_{ij} p_i + \frac{\alpha}{1-\alpha} \delta_j^1 \sum \varepsilon_i p_i,$$

gdzie

$$c_j = \frac{1-\alpha(1-\varepsilon_j)}{1-\alpha} \geqslant 1. \tag{7}$$

Na mocy założenia (6) mamy zatem

$$\begin{aligned} c_1 p_1 &= \pi_{11} p_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum \varepsilon_i p_i, \\ c_2 p_2 &= \pi_{12} p_1 + \pi_{22} p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_r p_r &= \pi_{r-1,r} p_{r-1} + \pi_{rr} p_r, \\ p_1 + \ldots + p_{r+1} &= \frac{1}{1+\alpha/\beta} \end{aligned} \tag{8}$$

(opuszczono tu równanie dla przedostatniej kolumny).

Przyjmując

$$\gamma_{j-1} = c_j - \pi_{jj}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

mamy $\gamma_j > 0$ na mocy (6) oraz (7). Możemy zatem przepisać równania (8) (z wyjątkiem pierwszego i ostatniego) w postaci

$$\gamma_1 p_2 = \pi_{12} p_1, \ \gamma_2 p_3 = \pi_{23} p_2, \ \ldots, \ \gamma_{r-1} p_r = \pi_{r-1,r} p_{r-1}$$

czyli

$$p_2 = \frac{\pi_{12}}{\gamma_1} p_1, \ p_3 = \frac{\pi_{12}\pi_{23}}{\gamma_1\gamma_2} p_1, \ \ldots, \ p_r = \frac{\pi_{12}\pi_{23}\ldots\pi_{r-1,r}}{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{r-1}} p_1.$$

Podstawiając do pierwszego i ostatniego z równań (8) otrzymujemy układ dwóch równań o dwóch niewiadomych p_1 oraz p_{r+1}:

$$p_1 \left\{ \gamma_0 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{\pi_{12}}{\gamma_1} + \ldots + \varepsilon_r \frac{\pi_{12} \ldots \pi_{r-1,r}}{\gamma_1 \ldots \gamma_{r-1}} \right] \right\} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \varepsilon_{r+1} p_{r+1},$$

$$p_1 \left(1 + \frac{\pi_{12}}{\gamma_1} + \ldots + \frac{\pi_{12} \ldots \pi_{r-1,r}}{\gamma_1 \ldots \gamma_{r-1}} \right) + p_{r+1} = \frac{1}{1+\alpha/\beta}.$$

Eliminując p_{r+1} otrzymujemy

$$p_1 \left\{ \gamma_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[(\varepsilon_{r+1} - \varepsilon_1) + (\varepsilon_{r+1} - \varepsilon_2) \frac{\pi_{12}}{\gamma_1} + \ldots + (\varepsilon_{r+1} - \varepsilon_r) \frac{\pi_{12} \ldots \pi_{r-1,r}}{\gamma_1 \ldots \gamma_{r-1}} \right] \right\}$$
$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1+\alpha/\beta} \cdot \varepsilon_{r+1}.$$

Kładąc

$$M = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1+\alpha/\beta} \cdot \varepsilon_{r+1}$$

i przyjmując dla uproszczenia zapisu $\pi_{01} = \gamma_0$, możemy napisać

$$p_1 \left[\gamma_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{r} (\varepsilon_{r+1} - \varepsilon_j) \frac{\pi_{01}\pi_{12} \dots \pi_{j-1,j}}{\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{j-1}}\right] = M.$$

Jeżeli założymy, co wydaje się rozsądne, że $\varepsilon_{r+1} > 0$, to będzie $M > 0$, a ponieważ $p_1 > 0$ więc

$$\gamma_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{r} (\varepsilon_{r+1} - \varepsilon_j) \frac{\pi_{01}\pi_{12} \dots \pi_{j-1,j}}{\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{j-1}} > 0.$$

Wreszcie, dla rozkładu granicznego otrzymujemy, w przypadku rozważanej postaci macierzy $[\pi_{ij}]$:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{M}{D}, \\
p_2 &= \frac{\pi_{12}}{\gamma_1} \frac{M}{D}, \\
p_3 &= \frac{\pi_{12}\pi_{23}}{\gamma_1\gamma_2} \frac{M}{D}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_r &= \frac{\pi_{12} \dots \pi_{r-1,r}}{\gamma_1 \dots \gamma_{r-1}} \frac{M}{D}, \\
p_{r+1} &= \frac{1}{1+\alpha/\beta} - \frac{M}{D} \sum_{j=1}^{r} \frac{\pi_{01}\pi_{12} \dots \pi_{j-1,j}}{\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{j-1}}, \\
q_j &= \frac{\alpha}{\beta}(1-\varepsilon_j)p_j + \delta_j^1 \frac{\alpha}{\beta} \sum \varepsilon_i p_i, \qquad i = 1, 2, \dots, r+1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

gdzie

$$M = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{1+\alpha/\beta} \varepsilon_{r+1},$$

$$\gamma_{j-1} = \frac{1-\alpha(1-\varepsilon_j)}{1-\alpha} - \pi_{jj}, \qquad \pi_{01} = \gamma_0$$

oraz

$$D = \gamma_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{r} \frac{\pi_{01}\pi_{12} \dots \pi_{j-1,j}}{\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{j-1}} (\varepsilon_{r+1} - \varepsilon_j).$$

4. Dyskusja. Niniejsza dyskusja będzie dotyczyć problemów możliwości numerycznego oszacowania parametrów proponowanego modelu w sytuacjach praktycznych, empirycznej weryfikacji modelu oraz jego praktycznej użyteczności.

4.1. Problem numeryczny: szacowanie parametrów. Nie wdając się chwilowo w dyskusję problemów adekwatności proponowanego modelu i jego praktycznej użyteczności i zakładając, że odpowiedź jest w obu przypadkach pozytywna, pojawia się zagadnienie estymacji liczbowych wartości parametrów, tak aby można było zastosować wzory (9) dla rozkładu granicznego stopnia zużycia banknotów w populacji. Naszkicujemy poniżej możliwości takiego oszacowania, bez wdawania się w szczegóły techniczne związanych z nim procedur eksperymentalnych.

Parametrami modelu są α, β, wektor $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ oraz macierz przejścia $[\pi_{ij}]$.

Wydaje się, że nie powinno być specjalnych kłopotów z oceną α i β, wielkości tych parametrów są znane dyrekcji banku.

Jeżeli chodzi o wektor $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ reprezentujący politykę wymiany banknotów, wydaje się, że można przyjąć następujące założenie: dla polityki, w myśl której destruktami są banknoty z klas K_j przy $j \geqslant j_0$, mamy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_{j_0-3} = 0$, $\varepsilon_{j_0+2} = \varepsilon_{j_0+3} = \cdots = 1$, jak również $\varepsilon_{r+1} = 1$, jak to już zaznaczono w poprzednim paragrafie. Dla wartości ε_{j_0-2}, ε_{j_0-1}, ε_{j_0} oraz ε_{j_0+1} można przyjąć „średnie" wartości funkcji

$$\varepsilon(x) = \mathrm{P}\{\text{banknot } x \text{ zostanie uznany za destrukt}\},$$

mianowicie

$$\varepsilon_{j_0-2} = 1/8, \qquad \varepsilon_{j_0-1} = 3/8, \qquad \varepsilon_{j_0} = 5/8 \qquad \text{oraz} \qquad \varepsilon_{j_0+1} = 7/8.$$

Istotnie, dla rozważanego ciagu pierwotnego $\{b_j\}$ spełniającego warunek $p(b_j, b_{j+1}) = 0.75$ mamy

$$0 < \varepsilon(x) < \tfrac{1}{4} \quad \text{dla} \quad x \in K_{j_0-2}, \qquad \tfrac{1}{4} < \varepsilon(x) < \tfrac{1}{2} \quad \text{dla} \quad x \in K_{j_0-1}, \qquad \text{itd.}$$

Tak więc, rozważany wektor $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ będzie postaci

$$0,\ 0,\ \ldots,\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1,$$

podczas, gdy dla najbardziej „liberalnych" polityk, w myśl których za destrukty uznaje się jedynie banknoty z klasy K_{r+1}, lub jedynie banknoty z klas K_r i K_{r+1}, wektor ten będzie odpowiednio postaci

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1 \qquad \text{oraz} \qquad 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ 1$$

(ponieważ klasa K_{r+1} jest wyróżniona jako kategoria banknotów zużytych w nietypowy sposób).

Jeżeli chodzi wreszcie o estymację macierzy przejścia $[\pi_{ij}]$ (dla klas stopnia zużycia zdefiniowanych za pomocą danego ciągu pierwotnego $\{b_j\}$) problem jest nieco złożony, nawet przy upraszczających założeniach (6). Wydaje się, że założenia te należy jeszcze uprościć, tak aby zredukować liczbę nieznanych parametrów.

Jeżeli ciąg pierwotny $\{b_j\}$ wybrany jest tak, że $p(b_j, b_{j+1}) = \text{const}$, to „szerokości" klas odpowiadających kolejnym kategoriom są równe i równają się jednostkom określonym w pewien sposób poprzez próg dostrzegalności różnic stopnia zużycia.

W rozważanym modelu, średni czas pobytu w danej kategorii stopnia zużycia K_j $(j = 1, \ldots, r)$ dla banknotu znajdującego się ciągle w obiegu wynosi

$$s_i = \frac{1}{1 - \pi_{ii}} \qquad (\infty \text{ dla } \pi_{ii} = 1).$$

Wydaje się, iż można założyć, że prawdopodobieństwo, że banknot zostanie zniszczony w sposób nietypowy (przejdzie do klasy K_{r+1}) jest stałe w czasie i nie zależy od klasy stopnia zużycia K_i. Mamy zatem $\pi_{i,r+1} = b$ dla $i = 1, \ldots, r$. Wartość b oraz średnie s_i wyznaczają oczywiście i-ty wiersz macierzy $[\pi_{ij}]$, ponieważ w myśl (6) mamy $\pi_{ii} + \pi_{i,i+1} + \pi_{i,r+1} = 1$ Problem sprowadza się zatem do przyjęcia rozsądnych założeń o liczbach s_i, tak aby jeszcze bardziej zredukować liczbę nieznanych parametrów.

Wydaje się, że w grę wchodzić mogą tylko trzy rodzaje założeń, nakładające pewną regularność na ciąg $\{s_i\}$: powinien on być rosnący, stały lub malejący. Z tych trzech rodzajów założeń, pierwsze wydaje się najrozsądniejsze. Ponadto, jeżeli zgodzić się na pewien uproszczony model, można wyznaczyć ogólną postać $\{s_i\}$, $i = 1, \ldots, r$.

Załóżmy mianowicie, że percepcja stopnia zużycia banknotu zależy od cech takich, jak ilość brudu na banknocie, czy gęstość zgięć. Jeżeli cechy te wzrastają liniowo w czasie (każdego dnia odkłada się na banknocie ta sama ilość brudu lub powstaje ta sama liczba nowych zgięć), to zgodnie z prawem Webera—Fechnera powinno się obserwować następującą regularność: z dwóch banknotów, z których jeden ma ilość brudu x, a drugi $x + \Delta x$, ten drugi jest spostrzegany jako bardziej zużyty przez daną frakcję osób, jeżeli $\frac{x + \Delta x}{x} \geqslant a$, gdzie a jest pewną stałą. Zakładając, że $x = x(t)$ jest liniową funkcją czasu, otrzymujemy wykładniczą postać dla s_i. Istotnie, czas potrzebny na to aby banknot przybrudził się o tyle, aby przejść z klasy K_i do klasy K_{i+1} jest proporcjonalny do ilości brudu charakterystycznego dla klasy K_i. Tak więc, jeżeli znamy $s_1 = 1/(1 - \pi_{11})$, to dla wyznaczenia s_2 możemy użyć następujących przybliżonych obliczeń: niech d oznacza prędkość przyrostu brudu osadzającego się na banknocie; wówczas banknot przechodzi do klasy K_2 w chwili, gdy jego ilość brudu osiągnie $s_1 d$. Pozostanie on w klasie K_2 aż do momentu, gdy

$$\frac{s_1 d + s_2 d}{s_1 d} = a,$$

a więc $s_2 = s_1(a - 1)$. W podobny sposób otrzymamy $s_3 = s_1 a(a - 1)$, i ogólnie

$$s_j = s_1(a^{j-1} - a^{j-2}),$$

skąd wynika, że

$$\pi_{jj} = 1 - \frac{1}{s_1 a^{j-2}(a - 1)}$$

dla $j = 2, \ldots, r - 1$, i oczywiście $\pi_{rr} = 1 - b$.

Tak więc, problem został zredukowany do trzech parametrów, mianowicie s_1, a i b.

Powyższy model można weryfikować badając własności fizyczne ciągów pierwotnych, w szczególności ciągu pierwotnego otrzymanego w wyniku eksperymentów przeprowadzonych w Instytucie Matematycznym PAN. Należy zbadać własności takie, jak np. liczba zgięć etc. i sprawdzić, czy własności te wzrastają liniowo wraz z kolejnym numerem banknotu z ciągu.

Gdyby wyniki tej weryfikacji były pomyślne, można byłoby zasugerować dalsze eksperymenty prowadzące do oceny wartości liczbowych parametrów s_1, a i b.

Estymator b można otrzymać w sposób następujący: z grubsza biorąc, jeżeli osiągnięty już został rozkład stacjonarny, to oczekiwana liczba banknotów, które przechodzą każdego dnia do klasy K_{r+1} równa się oczekiwanej liczbie banknotów, które zostają zastąpione przez nowe z powodu uznania ich za zużyte w sposób nietypowy (przedarte, poplamione etc.). Tak więc, jeżeli średnio na dzień banknotów takich wymienia się H, i w obiegu znajduje się $N_0 + N_1$ banknotów, to liczbę H_1 banknotów w klasie K_{r+1} można oszacować na podstawie proporcji

$$\frac{H_1}{N_0 + N_1} = \frac{H}{N_1} \qquad \text{czyli} \qquad H_1 = \frac{N_0 + N_1}{N_1} H = \frac{H}{\alpha}.$$

Wobec tego, spośród $N_0 + N_1 - H_1 = N_0 + N_1 - H/\alpha$ banknotów w obiegu, które nie są w klasie K_{r+1}, każdego dnia H banknotów przechodzi do klasy K_{r+1}. Daje to przybliżone oszacowanie b, mianowicie

$$b \cong \frac{H}{N_0 + N_1 - H/\alpha}.$$

Wreszcie, dla oszacowania s_1 i a, konieczne jest przeprowadzenie pewnych eksperymentów, polegających na możliwie dokładnej ocenie stopnia zużycia banknotów, których łączny czas przebywania w obiegu jest znany. Wartości s_1 i a można wówczas ocenić na przykład metodą najmniejszych kwadratów.

4.2. Empiryczna weryfikacja modelu. W tym paragrafie omówiony zostanie pokrótce problem empirycznej weryfikacji założeń proponowanego modelu.

Metody testowania założeń dotyczących podstaw teoretycznych konstrukcji klasyfikacji banknotów ze względu na ich stopień zużycia były już omówione w [2], i zostaną tu pominięte. Warto jedynie zauważyć, że wyniki klasyfikacji próbnych opartych na wyodrębnionym z otrzymanego ciągu pierwotnego ciągu klasyfikacyjnym wydają się wskazywać, że założenia te spełnione są w wystarczająco dokładnym stopniu.

Dla weryfikacji założeń modelu obiegu i wymiany banknotów można porównać rozkład graniczny stopnia zużycia banknotów w populacji z teoretycznym rozkładem granicznym otrzymanym na podstawie modelu. Jak już wspomniano w paragrafie 2, obserwacje nie mogą dotyczyć częstości występowania banknotów poszczególnych klas, lecz klas połączonych po cztery.

Z grubsza, metoda weryfikacji mogłaby wyglądać następująco: jeżeli spełnione są założenia modelu, to granicznym rozkładem stopnia zużycia banknotów w obiegu jest $p_1^*, \ldots, p_{r+1}^*$, gdzie $p_j^* = p_j/\Sigma p_k = p_j(1 + \alpha/\beta)$. Wobec tego w dostatecznie dużej próbie liczącej M banknotów, powinno znaleźć się w przybliżeniu $M_j = M\, p_j(1 + \alpha/\beta)$ banknotów z klasy stopnia zużycia K_j.

Dla klasy K_{r+1} problem jest stosunkowo prosty, ponieważ możliwa jest obserwacja liczby m_{r+1} banknotów z klasy K_{r+1} w próbce.

Dla pozostałych banknotów można postąpić w sposób następujący: $M - m_{r+1}$ banknotów należy poklasyfikować według kategorii zdefiniowanych przez ciąg klasyfikacyjny wybrany z przyjętego ciągu pierwotnego.

Niech $q_j(x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że banknot x zostanie zaklasyfikowany do kategorii $C_j = \{K_{4j}, K_{4j+1}, K_{4j+2}, K_{4j+3}\}$. Wydaje się rozsądne przyjąć, że dla $x \in K_{4j}$ będziemy mieć w przybliżeniu $q_{j-1}(x) = 3/8$, $q_j(x) = 5/8$. Dla $x \in K_{4j+1}$ będzie $q_{j-1}(x) = 1/8$, $q_j(x) = 7/8$ i podobnie dla $x \in K_{4j+2}$ oraz $x \in K_{4j+3}$. Założenia te oparte są na nierównościach podobnych do tych, które zostały użyte dla sformułowania założeń o ciągu ε_j.

Tak więc, jeżeli spełnione są założenia modelu, to oczekiwana liczba banknotów zaklasyfikowanych do kategorii C_j wyniesie

$$M(1+\alpha/\beta)\left[\frac{5}{8}p_{4j} + \frac{7}{8}p_{4j+1} + \frac{7}{8}p_{4j+2} + \frac{5}{8}p_{4j+3} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}p_{4j-1} + \frac{1}{8}p_{4j-2} + \frac{3}{8}p_{4j+4} + \frac{1}{8}p_{4j+5}\right].$$

Obserwując liczby banknotów zaklasyfikowane do poszczególnych kategorii C_j i do klasy K_{r+1} można będzie ocenić, w jakim stopniu adekwatne są przewidywania oparte na analizie modelu.

4.3. Praktyczna użyteczność wyników uzyskanych z analizy modelu. Zakładając, że rozstrzygnięte zostały pozytywnie praktyczne problemy związane z wprowadzeniem proponowanego sposobu wymiany banknotów na nowe, że oszacowane już zostały parametry modelu oraz że wyniki empirycznej weryfikacji założeń modelu nie doprowadziły do ich odrzucenia, można pokusić się o rozwiązanie zadania postawionego przez bank, mianowicie zadania wyboru optymalnej polityki wymiany.

Po pierwsze, zauważmy że (przy rozkładzie granicznym odpowiadającym danej polityce, wyrażonej przez wektor $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$), oczekiwana liczba banknotów wymienianych każdego dnia wynosi $(N_0 + N_1)\alpha\sum\varepsilon_i p_i$. Liczbę tę można zatem wyznaczyć na podstawie rozważań teoretycznych dla każdej z polityk wymiany. Tak więc, zagadnienie sprowadza się do określenia funkcji straty, zależnej od kosztów wymiany, oraz od rozkładu granicznego $p_1, \ldots, p_{r+1}, q_1, \ldots, q_{r+1}$ (a ściślej biorąc, jedynie od składowych $p_1, \ldots, p_{r+1}$, ponieważ pozostałe składowe $q_1, \ldots, q_{r+1}$, reprezentujące graniczne częstości banknotów poszczególnych klas w skarbcu, są funkcjami prawdopodobieństw $p_1, \ldots, p_{r+1}$).

Dla określenia funkcji straty, konieczne jest określenie uporządkowania w zbiorze wektorów $(p_1, \ldots, p_{r+1})$; innymi słowy, należy przyjąć pewne kryterium, które pozwoli rozstrzygać, który z wektorów $p = (p_1, \ldots, p_{r+1})$ i $p' = (p'_1, \ldots, p'_{r+1})$ jest „bardziej pożądany" (zauważmy, że wszystkie te wektory mają tę samą sumę składowych, równą $(1 + \alpha/\beta)^{-1}$).

Przy dość ogólnych założeniach nałożonych na takie uporządkowania, polegających z grubsza biorąc na wymaganiu aby relacja $p \gg p'$ (p jest bardziej pożądane niż p') była zwrotna, przechodnia i spójna, aby kombinacje liniowe „lepszych" rozkładów były „lepsze" od analogicznych kombinacji liniowych rozkładów „gorszych" i aby dla każdych trzech rozkładów $p_1 \gg p_2 \gg p_3$ istniały kombinacje liniowe p_1 i p_3, z których jedna jest „gorsza", a druga „lepsza" od p_2, można pokazać (por. [6]), że istnieje funkcja φ określona na zbiorze wszystkich kategorii stopnia zużycia, taka że $p = (p_1, \ldots, p_{r+1}) \gg p' = (p'_1, \ldots, p'_{r+1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum \varphi(K_j)p_j \leqslant \sum \varphi(K_j)p'_j.$$

Intuicyjnie, φ jest miarą stopnia zużycia i rozkład p jest lepszy od rozkładu p' wtedy i tylko wtedy, gdy średni stopień zużycia względem rozkładu p jest mniejszy niż względem rozkładu p'.

Określenie wartości liczbowej funkcji φ (z dokładnością do dodatniej transformacji liniowej) wymaga aby bank określił preferencje $\gg$ na klasie rozkładów stopnia zużycia banknotów w populacji i aby preferencje te spełniały sformułowane wyżej założenia. Jako funkcję straty można byłoby wówczas przyjąć, dla polityki $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+1}$ prowadzącej do rozkładu $(p_1, \ldots, p_{r+1})$ wyrażenie postaci

$$A \sum \varphi(K_j)p_j + B \sum \varepsilon_j p_j$$

i można będzie wyznaczyć politykę wymiany minimalizującą to wyrażenie.

W praktyce, określenie preferencji $\gg$ przez bank może nie być możliwe. Sprawa jednak jest o tyle uproszczona, że (sądząc z długości ciągu pierwotnego otrzymanego dla banknotów 20 zł.), w grę wchodzić może kilka lub co najwyżej kilkanaście polityk wymiany. Znając dla każdej z nich średnią liczbę wymienianych banknotów i wynikający rozkład stopnia zużycia, zagadnienie sprowadzi się do wyboru najlepszej z kilkunastu możliwości.

Literatura

[1] R. Bartoszyński, *A note on subjective classifications*, Rev. Internat. Statist. Inst. 39(1971), str. 39–45.

[2] — *On the construction and evaluation of subjective classifications*, Zastosow. Matem. 12(1971), str. 1–21.

[3] — *On metric structure derived from subjective judgments* (*scaling under perfect and imperfect discrimination*), Econometrica (w druku).

[4] — *O błędach klasyfikacji*, Matematyka Stosowana 2(1974), str. 131–137.

[5] — *Model of circulation and exchange of banknotes*, Zastosow. Matem. 13(1972), str. 1–22.

[6] D. Blackwell and M. A. Girshick, *Theory of games and statistical decision functions*, New York 1954.

[7] T. Dalenius and O. Frank, *Control of classification*, Rev. Internat. Statist. Inst. 36(1968), str. 279–295.

[8] I. Marschak, *Binary choice constraints and random utility indicators*. W książce: K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (wyd.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford 1960.