ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA III (1974)

S. ŁANOWY (Gliwice)

O pewnej klasie jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych

W niniejszej pracy rozważa się pewną klasę funkcji iteracyjnych (σ-funkcje iteracyjne), do której należą między innymi funkcje iteracyjne Königa i Schrödera.

Przyjmujemy oznaczenia i definicje podane w [1], cytowana w tekście numeracja podwójna (na przykład twierdzenie 6.2) dotyczy właśnie tej pracy.

W pracy wykorzystuje się zasadnicze wyniki [1] dotyczące konstrukcji formalnych funkcji iteracyjnych.

1. DEFINICJA 1. Niech n, μ, p będą liczbami całkowitymi nieujemnymi takimi, że $1 \leqslant n \leqslant \mu \leqslant n+p$. Wielomian

$$w_n = w_n(a_0, a_1, \ldots, a_\mu)$$

nazywamy σ_p*-wielomianem*, jeżeli

$$w_n = \sum_{\sigma} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_n} \cdot a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n},$$

gdzie $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ są pewnymi liczbami zespolonymi, a sumowanie rozciąga się na pewne układy $\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ liczb całkowitych nieujemnych takich, że

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_n = n+p.$$

Wielomian stopnia 0 (stałą) nazywamy σ_0*-wielomianem*. σ_0-wielomiany oznaczać będziemy jako σ-wielomiany.

LEMAT 1. *Wielomiany Hankela* u_n (definicja 3.1) *są* σ*-wielomianami dla* $n = 0, 1, 2, \ldots$

D o w ó d (indukcyjny) wynika łatwo z następującego wzoru rekurencyjnego na wyznaczniki Hankela:

$$(1) \qquad u_0 = 1, \qquad u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} a_i u_{k+1-i} a_0^{i-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Wzór (1) uzyskujemy rozwijając wyznacznik u_{k+1} według ostatniego wiersza i następnie obniżając stopnie występujących w rozwinięciu wyznaczników.

Podobnie jak twierdzenie 5.1 można wykazać następujące twierdzenie będące jego wzmocnieniem.

TWIERDZENIE 1. *Niech n, m, μ, p oznaczają liczby całkowite spełniające warunek $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \mu \leqslant n+p$. Jeżeli*

$$K_n = K_n(a_0, a_1, \ldots, a_\mu)$$

jest σ_p-wielomianem, to zachodzi tożsamość

$$K_n = \sum_{i=0}^{m} \sum_{t=0}^{n-i} k_{n-i-t}^{(i)} u_t a_0^i + a_0^{m+1} G_{n-m-1}, \tag{2}$$

gdzie $k_{n-i-t}^{(i)}$ są pewnymi σ_{i+p}-wielomianami; G_{n-m-1} jest pewnym σ_{m+1+p}-wielomianem. Wielomiany $k_{n-i-t}^{(i)}$, G_{n-m-1} występujące w (2) są jednoznacznie określone przez wielomian K_n i liczbę m.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli K_n jest σ-wielomianem, to zachodzi tożsamość*

$$K_n = \sum_{i=0}^{n^*} \sum_{t=n^*-i}^{n-i} k_{n-i-t}^{(i)} u_t a_0^i + a_0^{n^*+1} G_{n-n^*-1}, \qquad n^* = \left[\frac{n+1}{2}\right], \tag{3}$$

gdzie $k_{n-i-t}^{(i)}$ są pewnymi σ_i-wielomianami takimi, że

$$k_0^{(i)} = 0 \qquad \text{dla } i \geqslant 1;$$

G_{n-n^*-1} jest pewnym σ_{n^*+1}-wielomianem. Wielomiany $k_{n-i-t}^{(i)}$, G_{n-n^*-1} występujące w (3) są jednoznacznie określone przez wielomian K_n.

D o w ó d. Dla $n=0$ tożsamości (2) i (3) są identyczne. Niech $n \geqslant 1$. Podstawiając w twierdzeniu 1 : $p=0$, $m=n^*$ otrzymujemy

$$K_n = \sum_{i=0}^{n^*} \sum_{t=0}^{n-i} k_{n-i-t}^{(i)} u_t a_0^i + a_0^{n^*+1} G_{n-n^*-1}, \tag{4}$$

gdzie $k_{n-i-t}^{(i)}$ są pewnymi σ_i-wielomianami; G_{n-n^*-1} jest pewnym σ_{n^*+1}-wielomianem.

Ponieważ wielomian $k_0^{(i)}$ jest stałą, więc może być w myśl definicji 1 σ_i-wielomianem wtedy, gdy

$$k_0^{(i)} = 0 \qquad \text{dla } i \geqslant 1.$$

Tożsamość (3) zachodzi więc, jeżeli

$$k_{n-i-t}^{(i)} \equiv 0, \qquad t = 0, \ldots, n^*-1-i, \quad i = 0, \ldots, n^*-1. \tag{5}$$

Składniki każdego z σ_i-wielomianów $k_{n-i-t}^{(i)}$ występujących w (4) są postaci

$$\beta_{j_1 j_2 \ldots j_{n-i-t}} \cdot a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{n-i-t}},$$

gdzie $\beta_{j_1 j_2 \ldots j_{n-i-t}}$ są pewnymi liczbami zespolonymi, a liczby całkowite $j_1, j_2, \ldots, j_{n-i-t}$ spełniają warunki

$$j_1 \geqslant 2,\ j_2 \geqslant 2,\ \ldots,\ j_{n-i-t} \geqslant 2, \qquad j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-i-t} = n-t.$$

Z ostatnich warunków otrzymujemy

$$n - t = j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-i-t} \geqslant 2\,(n - i - t),$$

a więc $t \geqslant n - 2i$. Zatem

$$k^{(i)}_{n-i-t} \equiv 0, \qquad t = 0, \ldots, n - 2i - 1, \quad i = 0, \ldots, n^* - 1. \tag{6}$$

Z tożsamości (6) wynikają tożsamości (5), gdyż

$$n^* - i \leqslant n - 2i \qquad \text{dla } i = 0, \ldots, n^* - 1.$$

Jednoznaczność tożsamości (3) wynika z jednoznaczności tożsamości (2), co kończy dowód twierdzenia.

2. DEFINICJA 2. Formalną funkcję iteracyjną

$$\Phi_n = z - \frac{a_0\, K_{n-1}\,(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})}{K_n\,(a_0, a_1, \ldots, a_n)}, \tag{7}$$

gdzie $K_n(0, a_1, \ldots, a_n) \not\equiv 0$ nazywamy *σ-funkcją iteracyjną* (*σ-f.i.*), jeżeli wielomiany K_{n-1} i K_n są σ-wielomianami.

TWIERDZENIE 3. *Załóżmy, że K_n jest dowolnym σ-wielomianem takim, że*

$$K_n(0, a_1, \ldots, a_n) \not\equiv 0. \tag{8}$$

Niech tożsamość (3) przedstawia jego rozkład według twierdzenia 2.

Każdą σ-f.i. o rzędzie zbieżności równym co najmniej $n^* + 1$ i mianowniku równym K_n można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$\underline{\Phi}_n = z - \frac{\sum\limits_{i=0}^{n^*-1} \sum\limits_{t=n^*-i}^{n-i} k^{(i)}_{n-i-t}\, u_{t-1} a_0^{i+1} + a_0^{n^*+1}\, \bar{G}_{n-n^*-1}}{K_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)}, \qquad n \geqslant 1, \tag{9}$$

gdzie $\bar{G}_{n-n^*-1}$ jest pewnym σ_{n^*+1}-wielomianem.

Każdą σ-f.i. o rzędzie zbieżności równym co najmniej $n^* + 2$ i liczniku równym $a_0 K_n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$\bar{\Phi}_{n+1} = z - \frac{a_0\, K_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\sum\limits_{i=0}^{n^*} \sum\limits_{t=n^*+1-i}^{n+1-i} k^{(i)}_{n+1-i-t}\, u_t a_0^i + a_0^{n^*+1}\, \bar{G}_{n-n^*}}, \qquad n \geqslant 2, \tag{10}$$

gdzie $\bar{G}_{n-n^*}$ jest pewnym σ_{n^*+1}-wielomianem.

D o w ó d. Z (8) na podstawie (3) i (3.3) mamy

$$\sum_{t=n^*}^{n} k^{(0)}_{n-t} a_1^t \not\equiv 0.$$

Ponieważ wielomiany $k_{n-t}^{(0)}$ są stałe ze względu na zmienną a_1, więc ostatni warunek zachodzi, jeżeli co najmniej jeden z wielomianów

$$k_{n-t}^{(0)}, \qquad t = n^*, \ldots, n, \tag{11}$$

nie jest tożsamościowo równy 0.

Tożsamość (3) zapisujemy kolejno w postaci

$$K_n = \sum_{i=0}^{n^*-1} \sum_{t=n^*-i}^{n-i} k_{n-i-t}^{(i)} u_t a_0^i + a_0^{n^*} G_{n-n^*}^*, \tag{12}$$

$$K_n = \sum_{i=0}^{n^*} \sum_{t=n^*+1-i}^{n+1-i} k_{n+1-i-t}^{(i)} u_{t-1} a_0^i + a_0^{n^*+1} \bar{G}_{n-n^*-1}, \tag{13}$$

gdzie $G_{n-n^*}^* = \sum_{t=0}^{n-n^*} k_{n-n^*-t}^{(n^*)} u_t + a_0 \bar{G}_{n-n^*-1}$.

Stosując do funkcji iteracyjnej $\underline{\Phi}_n$ (wzór (9)) twierdzenie 6.1 otrzymujemy na podstawie (12) i (11) pierwszą część twierdzenia.

Podobnie stosując do funkcji iteracyjnej $\bar{\Phi}_{n+1}$ (wzór (10)) twierdzenie 6.1 otrzymujemy na podstawie (13) i (11) drugą część twierdzenia. Twierdzenie 3 zostało więc wykazane.

Z twierdzenia 6.3 i lematu 1 wynika łatwo następujące

TWIERDZENIE 4. *σ-f.i. (7) ma rząd zbieżności $\leqslant n+1$. σ-f.i. (7) ma rząd zbieżności równy $n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest indentyczna z funkcją iteracyjną Königa φ_n* (wzór (4.1)).

3. Rozpatrzymy obecnie zagadnienie konstrukcji σ-f.i. (9) i (10) w przypadku, gdy $K_n = a_1^n$.

LEMAT 2. *Niech dla naturalnych n zachodzi tożsamość*

$$a_1^n = \sum_{i=0}^{n^*} \sum_{t=n^*-i}^{n-i} l_{n-i-t}^{(i)} u_t a_0^i + a_0^{n^*+1} \bar{\bar{G}}_{n-n^*-1} \tag{14}$$

(por. twierdzenie 2). *Wtedy są spełnione warunki*

$$l_i^{(i)} \not\equiv 0, \qquad i = 0, \ldots, [n/2]. \tag{15}$$

D o w ó d. Z definicji 1 wynika, że σ_i-wielomiany

$$l_{n-i-t}^{(i)} \equiv \gamma_i a_2^{n-i-t},$$

(gdzie γ_i są pewnymi liczbami zespolonymi) wtedy i tylko wtedy, gdy $t = n - 2i$. Ponadto σ_{n^*+1}-wielomian $\bar{\bar{G}}_{n-n^*-1}$ nie zawiera składników, w których występują tylko zmienne a_0, a_1, a_2, gdyż

$$2(n-n^*-1) < (n-n^*-1) + n^*+1.$$

Stąd wynika, że po podstawieniu w (14) $a_3 = \cdots = a_n = 0$ otrzymujemy tożsamość

(16) $$a_1^n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \gamma_i a_2^i u_{n-2i}^* a_0^i,$$

gdzie $u_0^* = 1$, $u_1^* = a_1$,

$$u_p^* = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \qquad p \geqslant 2.$$

W pracy [3] wykazano, że

$$(\alpha - \beta)\, u_p^* = \alpha^{p+1} - \beta^{p+1},$$

gdzie α i β są dane równościami

$$\alpha + \beta = a_1, \qquad \alpha\beta = a_0 a_2.$$

Uwzględniając trzy ostatnie równości w (16) mamy

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)^n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \gamma_i (\alpha\beta)^i (\alpha^{n-2i+1} - \beta^{n-2i+1}).$$

Stąd po przekształceniu mamy

$$\alpha^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}\right] \alpha^{n+1-i} \beta^i - \beta^{n+1} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \gamma_i (\alpha^{n-i+1} \beta^i - \alpha^i \beta^{n-i+1}).$$

Ostatnia równość zachodzi dla dowolnych α, β wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\gamma_0 = 1, \qquad \gamma_i = \binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}, \qquad i = 1, \dots, [n/2],$$

skąd już wynika prawdziwość lematu.

DEFINICJA 3. Przez $\underline{L}_n$ i $\overline{L}_{n+1}$ oznaczamy σ-f.i. dla $K_n = a_1^n$.

TWIERDZENIE 5. *Rząd zbieżności σ-f.i.*

$$\underline{L}_{2s-1},\ \underline{L}_{2s} \quad (s \geqslant 1); \qquad \overline{L}_{2s-2},\ \overline{L}_{2s-1} \quad (s \geqslant 3)$$

jest równy $s + 1$.

Dowód. Ponieważ na podstawie lematu 2 mamy $l_{n-n^*}^{(n-n^*)} \not\equiv 0$, więc z twierdzenia 6.2 wnioskujemy, że rząd zbieżności σ-f.i. $\underline{L}_n$ i $\overline{L}_{n+1}$ jest równy odpowiednio n^*+1 i n^*+2. Stąd już łatwo wynika twierdzenie 5.

DEFINICJA 4. Przez $\underline{Ł}_n$ i $\overline{Ł}_{n+1}$ oznaczamy σ-f.i. $\underline{L}_n$ i $\overline{L}_{n+1}$, w których wielomiany G_{n-n^*} i G_{n-n^*-1} są tak dobrane by stopień licznika i mianownika tych σ-f.i. ze względu na zmienną a_0 był $< n^* + 1$.

Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna σ-f.i. $\underline{Ł}_n$ oraz dokładnie jedna σ-f.i. $\bar{Ł}_{n+1}$ $(n \geqslant 2)$.

Funkcja iteracyjna Schrödera (patrz [2]) o rzędzie zbieżności $s+1$ spełnia warunki narzucone na σ-f.i. $\underline{Ł}_{2s-1}$, zatem jest z nią identyczna.

σ-f.i. $Ł_{2s-2}$ dla $s \geqslant 3$ tworzą pewną nową klasę funkcji iteracyjnych kształtem zbliżonych do funkcji iteracyjnych Schrödera.

Wyprowadzimy obecnie wzory na σ-f.i. $\bar{Ł}_4$ i $\bar{Ł}_6$ o rzędach zbieżności odpowiednio 4 i 5. W związku z tym wypiszemy rozkłady a_1^3 i a_1^5 według twierdzenia 2:

$$a_1^3 = u_3 + 2a_2u_1a_0 - a_3u_0a_0^2,$$

$$a_1^5 = u_5 + 3a_2u_3a_0 + 4a_2^2u_1a_0^2 - 2a_3u_2a_0^2 - 3a_2a_3u_0a_0^3 + a_4u_1a_0^3 - a_5u_0a_0^4.$$

Stąd na podstawie twierdzenia 3 mamy

$$Ł_4 = z - \frac{a_0a_1^3}{u_4 + 2a_2u_2a_0 - a_3u_1a_0^2 + a_0^3G_1},$$

$$Ł_6 = z - \frac{a_0a_1^5}{u_6 + 3a_2u_4a_0 + 4a_2^2u_2a_0^2 - 2a_3u_3a_0^2 - 3a_2a_3u_1a_0^3 + a_4u_2a_0^3 + a_0^4G_2},$$

gdzie G_1 i G_2 są dowolnymi wielomianami.

Z ostatnich wzorów wynika, że

$$\bar{Ł}_4 = z - \frac{a_0a_1^3}{a_1^4 - a_0a_1^2a_2 + a_0^2a_1a_3 - a_0^2a_2^2},$$

$$\bar{Ł}_6 = z - \frac{a_0a_1^5}{a_1^6 - 2a_0a_1^4a_2 + 2a_0^2a_1^3a_3 + 4a_0^2a_1^2a_2^2 - 2a_0^3a_1a_2a_3 - 2a_0^3a_1^2a_4 - 5a_0^3a_2^3}.$$

Prace cytowane

[1] R. Bartłomiejczyk i S. Łanowy, *Algebraiczna charakteryzacja jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych*, Matematyka Stosowana, ten zeszyt, str. 35–52.

[2] A. S. Householder, *Principles of Numerical Analysis*, New York–Toronto–London 1953.

[3] L. Jeśmanowicz i J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, cz. I, Warszawa 1959.