ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA III (1974)

R. ZIELIŃSKI (Warszawa)

W. Hoeffding: Asymptotycznie optymalne testy dla rozkładu wielomianowego*

Zmienna losowa $Z^{(N)}$ ma rozkład wielomianowy, tzn. przyjmuje wartości $z^{(N)} = (n_1/N, \ldots, n_k/N)$, gdzie $n_1, \ldots, n_k$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi i $n_1 + \ldots + n_k = N$, z prawdopodobieństwem

$$P_N(z^{(N)}|p) = N! \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{n_i}/n_i!\right)$$

przy czym $p = (p_1, \ldots, p_k) \in \Omega$, Ω jest zbiorem takich punktów $x = (x_1, \ldots, x_k)$, że $x_i \geqslant 0$ oraz $\sum x_i = 1$. Jeżeli A jest dowolnym podzbiorem zbioru Ω, to przez $A^{(N)}$ definiujemy zbiór punktów $z^{(N)}$ należących do A. Przez $P_N(A|p)$ oznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $\{Z^{(N)} \in A\}$; oczywiście $P_N(A|p) = P_N(A^{(N)}|p)$.

Definiujemy następujące funkcje:

$$I(x, p) = \sum_{i=1}^{k} x_i \log (x_i/p_i),$$

$$I(A, p) = \inf_{x \in A} I(x, p),$$

$$I(x, A) = \inf_{p \in A} I(x, p)$$

dla $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega$, $p = (p_1, \ldots, p_k) \in \Omega$ oraz A, $A \subset \Omega$.

Podstawowy wynik, na którym opiera się cała praca Hoeffdinga, zawarty jest w następującym twierdzeniu (por. Twierdzenie 2.1):

Dla każdego zbioru $A \subset \Omega$ i każdego punktu $p \in \Omega$

$$P_N(A|p) = \exp\left\{-NI(A^{(N)}, p) + O(\log N)\right\}. \tag{1}$$

*Wassily Hoeffding, *Asymptotically optimal tests for multinomial distribution*, Ann. Math. Statist. 36(1965), str. 369–408.

Jeżeli A_N jest obszarem krytycznym testu (krótko: testem) hipotezy (złożonej) $H : p \in A,\ A \subset \Omega$, to, na mocy (1), rozmiar $\alpha_N = \sup_{p \in A} P_N(A \mid p)$ jest

(2) $$\alpha_N = \exp\left\{-NI(A^{(N)}, A) + O(\log N)\right\},$$

gdzie $I(A, A) = \inf_{p \in A} I(A, p)$. Dla prawdopodobieństwa $\beta_N(p)$ błędu drugiego rodzaju w punkcie p mamy wtedy

(3) $$\beta_N(p) \underset{\mathrm{df}}{=} P_N(A_N'^{(N)} \mid p) = \exp\left\{-NI(A_N'^{(N)}, p) + O(\log N)\right\},$$

gdzie $A' = \Omega - A$.

Wzory (2) i (3) pozwalają na badanie asymptotycznych (przy $N \to \infty$) własności testów w następujący sposób. Jeżeli A_N, $N = 1,2, \ldots$, jest testem hipotezy H takim, że $I(A_N^{(N)}, A) \to 0$ (gdy $N \to \infty$) na tyle szybko, by istniała granica $\lim \alpha_N$, to $\lim \beta_N(p)$ charakteryzuje „jakość" testu w punkcie p. Jeżeli $I(A_N^{(N)}, A) \to 0$ tak, że $NI(A_N^{(N)}, A)/\log N \to \infty$, to $\alpha_N \to 0$ szybciej niż N^{-m} dla każdego skończonego m. W pracy studiuje się asymptotyczne własności testów przy tym właśnie warunku.

Łatwo jest sprawdzić, że test hipotezy $H : p \in A$, oparty na stosunku wiarygodności, ma postać: odrzucić H jeżeli $I(z^{(N)}, A) > \mathrm{const}$. Ten fakt stawia testy oparte na stosunku wiarogodności w pewnej wyróżnionej sytuacji. Okazuje się, że te właśnie testy mają asymptotycznie optymalne własności w następującym sensie:

Dla każdego testu A_N istnieje taki test B_N^* oparty na stosunku wiarogodności, że rozmiar α_N' tego testu nie przekracza rozmiaru α_N testu A_N, natomiast dla prawdopodobieństw $\beta_N(p)$ i $\beta_N'(p)$ błędów drugiego rodzaju w testach A_N i B_N^* mamy

$$N^m \beta_N'(p)/\beta_N(p) \to 0$$

dla każdego naturalnego m oraz dla wszystkich p z pewnego zbioru $\Pi \subset \Omega - A$.

W sformułowanym twierdzeniu istotne jest oczywiście wyspecyfikowanie zbioru Π (twierdzenie jest trywialne, gdy Π jest zbiorem pustym). Będziemy mówili, że na zbiorze Π test oparty na stosunku wiarygodności jest lepszy od danego testu A_N.

W ogólnym przypadku, tzn. dla dowolnych testów A_N, Hoeffding formułuje następujące twierdzenie (por. Twierdzenie 3.1). Niech $B_N = \left\{x : I(x, A) \geqslant I(A_N^{(N)}, A)\right\}$, niech dany będzie ciąg δ_N taki, że $0 \leqslant \delta_N = O(N^{-1} \log N)$ i niech $B_N^* = \left\{x : I(x, A) \geqslant I(A_N^{(N)}, A) + \delta_N\right\}$. Jeżeli w punkcie $p \in \Omega - A$

(4) $$\lim_{N \to \infty} N\left[I(B_N'^{(N)}, p) - I(A_N'^{(N)}, p)\right]/\log N = +\infty$$

oraz

(5) $$\lim_{N \to \infty} \frac{I(B_N'^{(N)}, p) - I(B_N^{*\prime(N)}, p)}{I(B_N'^{(N)}, p) - I(A_N'^{(N)}, p)} = 0,$$

to dla każdego m naturalnego $N^m \beta_N'(p)/\beta_N(p) \to 0$.

Charakteryzacja zbioru preferencji testu opartego na stosunku wiarogodności za pomocą warunków (4) i (5) jest mało przejrzysta, ale za to „uniwersalna". W pracy podano charakteryzację zbioru Π dla różnych testów A_N; okazuje się, że dla pewnych testów zbiór Π „prawie' pokrywa się ze zbiorem $\Omega - \Lambda$. Jako przykład przytoczymy twierdzenie (por. Twierdzenie 8.4) dla przypadku, gdy A_N jest standardowym testem chi-kwadrat hipotezy prostej $H: p = p^0$ Ten test, jak wiadomo, ma postać: odrzucić H, gdy

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i/N - p_i^0)^2/p_i^0 \geqslant \varepsilon_N^2$$

gdzie ε_N – pewna stała. Otóż:

Jeżeli $\varepsilon_N \to 0$ *tak, że* $N\varepsilon_N^3 / \log N \to \infty$, *to w każdym punkcie* $p = (p_1, ..., p_k) \neq p^0$ *takim, że wszystkie* $p_i > 0$ *i nie leżącym na żadnym z odcinków*

$$p_j = 1 - a + ap_j^0, \qquad p_i = ap_i^0 \textit{ dla } i \neq j; 0 < a < 1; p_j^0 = p_{\min}^0$$

test oparty na stosunku wiarogodności jest lepszy od testu chi-kwadrat.

Praca Hoeffdinga jest bardzo obszerna (32 strony, 14 twierdzeń, 14 lematów) i zawiera mnóstwo szczegółowych rozważań (np. prawie 8 stron poświęcono dyskusji funkcji $I(x, p)$). Istotę pracy stanowi nowe podejście do problemu porównywania asymptotycznych własności testów. Jednocześnie z pracą opublikowano trzy dyskusyjne wypowiedzi na jej temat: J. Neymana, H.Chernoffa i D.G. Chapmana. J. Neyman ocenia, że praca Hoeffdinga otwiera „nowy i bardzo ważny rozdział w teorii statystyki".