ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA III (1974)

R. ZIELIŃSKI (Warszawa)

Luis B. Boza: Asymptotycznie optymalne testy dla skończonych łańcuchów Markowa*

W pracy zastosowano metodę W. Hoeffdinga (por. [1]) do analizy asymptotycznych własności testów dla skończonych łańcuchów Markowa.

Niech X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $\{1, 2, \ldots, m\}$ i macierzą przejść $P = (p_{ij})$, $\mathcal{P}$ — klasą wszystkich macierzy P. Dla ustalonego T rozpatruje się statystykę $C(T)$ — macierz zliczającą przejścia: $C_{ij}(T)$ jest liczbą przejść ze stanu i do stanu j w ciągu $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_T$. Niech $F(T) = C(T)/T$ i niech $\mathcal{F}_T$ będzie klasą wszystkich macierzy $F(T)$ oraz niech $\mathcal{F}$ będzie klasą wszystkich macierzy $F = (F_{ij})$ takich, że $F_{ij} \geqslant 0$ oraz $\sum_{i,j} F_{ij} = 1$. Dla każdego zbioru $A \subset \mathcal{F}$ oznaczamy $A_T = A \cap \mathcal{F}_T$. Niech $P_T(F)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia $\{F(T) = F\}$. Definiujemy funkcję (por. funkcję $I(x, p)$ w [1]):

$$\Phi(F, P) = \sum_{i: F_{i.} > 0} \sum_{j} F_{ij} \log (F_{ij}/F_{i.} p_{ij}),$$

$$\Phi(A_T, P) = \inf_{F \in A_T} \Phi(F, P),$$

$$\Phi(F, \Lambda) = \inf_{P \in \Lambda} \Phi(F, P),$$

gdzie $F \in \mathcal{F}$, $P \in \mathcal{P}$, $A_T \subset \mathcal{F}_T$, $\Lambda \subset \mathcal{P}$ oraz $F_{i.} = \sum_j F_{ij}$.

Podstawowy wynik, na którym opiera się cała praca, zawarty jest w następującym twierdzeniu (por. Twierdzenie 3.1 w referowanej pracy i wzór (1) w [1]):

Dla każdego $F \in \mathcal{F}_T$ i $P \in \mathcal{P}$

$$P_T(F) = \exp\{-T\Phi(F, P) + O(\log T)\}.$$

---

*Luis B. B o z a, *Asymptotically optimal tests for finite Markov chains*, Ann.Math.Statist. 42(1971), str. 1992–2007.

Korzystając z tego twierdzenia, na drodze analogicznych rozważań jak w pracy W Hoeffdinga dowodzi się własności asymptotycznej optymalności dla testów opartych na stosunku wiarogodności; testy te mają ogólną postać: odrzucić weryfikowaną hipotezę $H: P \in \Lambda$, jeżeli $\Phi(F, \Lambda) > \text{const}$.

Prace cytowane:

[1] Notatka o pracy W. Hoeffdinga: Asymptotycznie optymalne testy dla rozkładu wielomianowego, w bieżącym numerze MS.