ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA III (1974)

Marek PIEŃKOWSKI (Warszawa)

Informacje o wzorze Whittle'a

Dany jest s elementowy zbiór stanów S, np. $S = \{1, 2, \ldots, s\}$, oraz ciąg $n+1$ elementów tego zbioru: $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Dla takiego ciągu możemy podać macierz F, tzw. macierz liczb przejść, którą określamy następująco:

Dla dowolnych $i, j \in S$ f_{ij} jest liczbą tych m, dla których

$$a_m = i, \qquad a_{m+1} = j.$$

Dla tak określonej macierzy liczb przejść dobrze określone są liczby

$$f_{i.} = \sum_{j \in S} f_{ij} \qquad \text{(liczba wszystkich wyjść ze stanu } i\text{)},$$

$$f_{.j} = \sum_{i \in S} f_{ij} \qquad \text{(liczba wszystkich „dojść'' do stanu } j\text{)}.$$

Liczby te spełniają następujące równości:

$$f_{i.} - f_{.i} = \delta_{ia_1} - \delta_{ia_{n+1}},$$

$$\sum_{i,j} f_{ij} = \sum_i f_{i.} = \sum_j f_{.j} = n.$$

Wynika z tego, że macierz F oraz stan początkowy a_1 wyznaczają stan końcowy a_{n+1}.

Dla teorii łańcuchów Markowa interesujące jest pytanie, ile istnieje $(n+1)$-elementowych ciągów mających tę samą macierz liczb przejść. Odpowiedzią na nie jest następujące

TWIERDZENIE (Whittle). *Załóżmy, że F jest macierzą o wymiarach $s \times s$, której elementy f_{ij} są liczbami całkowitymi nieujemnymi, $\sum_{i,j} f_{ij} = n$, oraz $f_{i.} - f_{.i} = \delta_{iu} - \delta_{iv}$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$, dla pewnych u i v.*

Jeśli przez $N^n_{u,v}(F)$ oznaczymy liczbę ciągów $\{a_k\}_{k=1}^{n+1}$ o macierzy liczb przejść F, takich, że $a_1 = u$, $a_{n+1} = v$, to

$$N^n_{u,v}(F) = \frac{\prod_i f_{i.}!}{\prod_{i,j} f_{ij}!} F^*_{vu},$$

gdzie F^*_{vu} *jest* (v, u)*-dopełnieniem algebraicznym macierzy* $F^* = \{f^*_{ij}\}$ *zdefiniowanej wzorami:*

$$f^*_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} - \dfrac{f_{ij}}{f_{i.}} & \text{jeśli } f_{i.} > 0, \\ \delta_{ij} & \text{jeśli } f_{i.} = 0. \end{cases}$$

Oryginalny dowód tego twierdzenia pochodzący od P.Whittle'a (J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 17(1955), str. 235–242) jest dość skomplikowany. Prosty indukcyjny dowód podał P. Billingsley (Ann. Math. Stat. 32(1961), str. 12–16 oraz str. 1343).

Znaczenie powyższego twierdzenia dla teorii łańcuchów Markowa jest następujące:

Jeśli $x_1, \ldots, x_{n+1}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o wartościach w S, o rozkładzie początkowym p_i i prawdopodobieństwie przejścia p_{ij}, to prawdopodobieństwo konkretnej realizacji $a_1, \ldots, a_{n+1}$ wynosi

$$p_{a_1} \cdot p_{a_1 a_2} \cdot \ldots \cdot p_{a_n a_{n+1}} = p_{a_1} \cdot \prod_{i,j} p_{ij}^{f_{ij}},$$

gdzie $F = \{f_{ij}\}$ – macierz liczb przejść dla ciągu $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

Jako wniosek z twierdzenia Whittle'a otrzymujemy:

Prawdopodobieństwo tego, że jednorodny łańcuch Markowa $x_1, \ldots, x_{n+1}$, $x_1 = u$, $x_{n+1} = v$, będzie opisany macierzą liczb przejść F wynosi

$$p_u \cdot F^*_{vu} \frac{\prod_i f_{i.}!}{\prod_{i,j} f_{ij}!} \cdot \prod_{i,j} p_{ij}^{f_{ij}}.$$