ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA IV (1975)

TERESA STYRYLSKA (Kraków)

Dwuetapowe wyrównywanie spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych

0. Wstęp

W rachunku wyrównawczym spotyka się przypadki, w których występuje duża liczba równań warunków, przy czym większość z nich ma prostą budowę, a pozostałe, zwykle nieliczne, budowę bardziej złożoną. W przypadkach tych warto zastosować metodę pozwalającą rozwiązać całość zadania częściami, a mianowicie przez uwzględnienie w pierwszej kolejności tych warunków, które łatwo rozwiązać, a następnie dołączenie pozostałych, bardziej skomplikowanych, równań warunków. W innych przypadkach zdarza się, że na pewnym etapie obliczeń dochodzą dodatkowe równania warunków i należy wyrównane spostrzeżenia „poprawić" przez dołączenie do układu uprzednio uzgodnionego nowych równań warunków.

Powstaje więc potrzeba opracowania metody dwuetapowego wyrównywania spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych, polegającej na dołączaniu do układu już uzgodnionego dodatkowego układu równań warunków i znalezienia łącznych poprawek oraz błędów średnich wyrównanych obserwacji, bez konieczności powtarzania obliczeń od początku. Sumaryczne poprawki uzyskane z dwóch etapów powinny być oczywiście takie same jak przy łącznym wyrównaniu całego układu.

W oparciu o sposób dołączania jednego równania warunkowego dla spostrzeżeń jednakowo dokładnych podany w [2], w tej pracy sformułowano problem i udowodniono twierdzenie rozwiązujące zagadnienie dwuetapowego wyrównywania spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych niejednakowo dokładnych. Wcześniej podano zgodnie z [1] sposób wyrównywania spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych i przytoczono potrzebne dalej wzory.

W pracy posłużono się symboliką macierzową przyjmując przy tym zasadę oznaczania macierzy dużymi literami, wektorów (macierzy jednokolumnowych) – małymi literami, skalarów – literami greckimi.

1. Wyrównywanie spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych

Wyrównywaniem spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych nazywamy przypadek, gdy do bezpośrednio zmierzonych ν wielkości l o błędnościach F (macierz diagonalna stopnia ν o elementach dodatnich) szukamy takich ν poprawek v, dla których

$$v^T F^{-2} v = \text{minimum}, \tag{1}$$

przy równoczesnym spełnieniu przez ν wyrównanych spostrzeżeń x określonych związkiem

(2) $$x = l + v$$

układu λ równań, tzw. warunków ścisłych. Postać tych równań może być dowolna lecz w przypadku nieliniowym musi być przed wyrównaniem sprowadzona do postaci liniowej. Układ równań warunków w postaci liniowej może być zapisany następująco:

$$A\,x = w$$

lub po wykorzystaniu (2)

(3) $$A\,v = w - A\,l,$$

przy czym A jest macierzą $\lambda \times \nu$, a w jest wektorem o λ składowych.

Rozwiązanie zadania wyrównawczego w omawianym przypadku, przy założeniu, że rząd macierzy A jest równy λ oraz spełniona jest nierówność $\lambda < \nu$, podano w pracy [1]. Przy poszukiwaniu minimum (1) z równoczesnym spełnieniem warunków (3) posłużono się tam metodą nieoznaczonych czynników Lagrange'a zwanych też korelatami. Uzyskano równość

(4) $$v = F^2\,A^T\,k,$$

w której przez k oznaczono λ korelat. Po dodatkowym wykorzystaniu równań (3) otrzymano ostateczny wzór na poprawki:

(5) $$v = F^2\,A^T\,M^{-1}\,(w - A\,l),$$

przy czym symetryczna macierz M stopnia λ określona jest wzorem

(6) $$M = A\,F^2\,A^T.$$

2. Zagadnienie dwuetapowego wyrównywania spostrzeżeń bezpośrednich zawarunkowanych

2.1. Sformułowanie problemu. Dany jest układ warunków ścisłych w postaci

(7) $$A_1\,v = w_1 - A_1\,l,$$

wcześniej wyrównany za pomocą wzorów (4) do (6). Do układu (7) dołącza się układ

(8) $$A_2\,v = w_2 - A_2\,l.$$

Macierz A_1 ma wymiar $\alpha \times \nu$, A_2 jest macierzą $\beta \times \nu$, w_1 jest wektorem o α składowych, a w_2 wektorem o β składowych.

Jeżeli przez v' oznaczy się ν poprawek uzyskanych z uzgodnienia układu (7), to należy tak zmienić współczynniki układu (8), aby uzyskane po jego uzgodnieniu poprawki v'' dodane do poprawek v' uzgadniały równocześnie układ (7) i (8). Niech przekształcone równanie (8) będzie postaci:

(9) $$\tilde{A}\,v = \tilde{w} - \tilde{A}\,l,$$

gdzie $\tilde{A}$ jest macierzą $\beta \times \nu$, a $\tilde{w}$ jest wektorem o β składowych. Rozwiązanie problemu polegać będzie na znalezieniu nieznanych macierzy $\tilde{A}$ i $\tilde{w}$.

2.2. Kryterium dwuetapowego wyrównywania. Aby poprawki otrzymane po wyrównaniu w dwóch etapach

(10) $$v = v' + v''$$

były takie same jak poprawki otrzymane z równoczesnego wyrównania układów (7) i (8), musi być spełniony zgodnie z [2], str. 301, zasadniczy warunek dwuetapowego wyrównywania

(11) $$v''^T F^{-2} v' = 0.$$

2.3. Wyznaczanie poprawek i spostrzeżeń wyrównanych. Po wykorzystaniu zasady (1) oraz kryterium (11) dochodzi się do następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli zachodzi nierówność*

(12) $$\alpha + \beta < \nu$$

oraz rząd macierzy $[A_1^T \; A_2^T]$ *jest równy* $\alpha + \beta$, *to problem jest jednoznacznie rozwiązalny i*

(13) $$v' = F^2 A_1^T M_1^{-1} (w_1 - A_1 l),$$

gdzie symetryczna macierz M_1 *stopnia* α *jest określona wzorem*

(14) $$M_1 = A_1 F^2 A_1^T,$$

natomiast

(15) $$v'' = F^2 \tilde{A}^T \tilde{M}^{-1} (\tilde{w} - \tilde{A} l),$$

gdzie symetryczna macierz $\tilde{M}$ *stopnia* β *jest określona wzorem*

(16) $$\tilde{M} = \tilde{A} F^2 \tilde{A}^T,$$

przy czym

(17) $$\tilde{A} = A_2 - B A_1,$$

(18) $$\tilde{w} = \tilde{w}_2 - B w_1.$$

Występująca w ostatnich wzorach macierz B jest macierzą korelującą układ (7) *z układem* (8) *i jest równa*:

(19) $$B = A_2 C,$$

gdzie

(20) $$C = F^2 A_1^T M_1^{-1}.$$

(*C jest macierzą* $\nu \times \alpha$).

D o w ó d. Jeżeli α korelat związanych z układem (7) oznaczy się przez k', to zgodnie z (4)

(21) $$v' = F^2 A_1^T k',$$

jeżeli zaś β korelat związanych z układem (9) oznaczy się przez k''. to zgodnie z (4)

$$v'' = F^2 \tilde{A}^T k'', \tag{22}$$

skąd

$$v'' F^{-2} = k''^T \tilde{A}. \tag{23}$$

Mnożąc stronami (21) przez (23) i wykorzystując kryterium (11) otrzymuje się:

$$v''^T F^{-2} v' = k''^T \tilde{A} F^2 A_1^T k' = 0. \tag{24}$$

Aby (24) było spełnione niezależnie od korelat k' i k'' musi być spełniony warunek

$$\tilde{A} F^2 A_1^T = 0. \tag{25}$$

Z kolei mnoży się układ (7) przez nieoznaczoną na razie macierz B, a wyniki odejmuje się od układu (8). W ten sposób uzyskuje się układ równań

$$(A_2 - B A_1) v = w_2 - B w_1 - (A_2 - B A_1) l, \tag{26}$$

który powinien być równoważny układowi (9) i stąd wynikają wzory (17) i (18). Wstawiając teraz (17) do (25) otrzymuje się

$$(A_2 - B A_1) F^2 A_1^T = 0, \tag{27}$$

skąd

$$B A_1 F^2 A_1^T = A_2 F^2 A_1^T. \tag{28}$$

Z założenia, że rząd macierzy $[A_1^T \, A_2^T]$ jest równy $\alpha + \beta$, wynika, że rząd macierzy A_1 równy jest α, rząd macierzy A_2 równy jest β. Z (17) wynika, że macierz $[A_1^T \, \tilde{A}^T]$ powstaje z macierzy $[A_1^T \, A_2^T]$ przez odjęcie od pewnych jej kolumn kombinacji liniowych innych jej kolumn. Ponieważ transformacja taka nie zmienia rzędu macierzy, więc rząd macierzy $[A_1^T \, \tilde{A}^T]$ jest równy $\alpha + \beta$, skąd rząd macierzy $\tilde{A}$ jest równy β. Zatem istnieją macierze odwrotne do macierzy M_1 i $\tilde{M}$ określonych zgodnie z (14) oraz (16). Przekształcając (28) uzyskuje się

$$B = A_2 F^2 A_1^T (A_1 F^2 A_1^T)^{-1} = A_2 F^2 A_1^T M_1^{-1}. \tag{29}$$

Przyjmując C zgodnie z (20), na podstawie (29), otrzymuje się (19), natomiast z (5) oraz (6) wynikają wzory (13) i (15). Jednoznaczność rozwiązania problemu wynika ze sposobu otrzymywania wzorów (13) i (15). To kończy dowód twierdzenia 1.

Warto zauważyć, że macierz C jest obliczana już w pierwszym etapie wyrównywania (porównaj wzór (13)).

Spostrzeżenia wyrównane metodą dwuetapową zgodnie z (2) i (10) są równe

$$x = l + v = l + v' + v''. \tag{30}$$

2.4. Wyznaczanie błędności i błędów średnich. Celem wyznaczenia błędności i błędów średnich wprowadzono:

$$\psi = f_v^T v + f_x^T x + \psi_0 \tag{31}$$

jako dowolną funkcję liniową poprawek i wyrównanych spostrzeżeń o ν współczynnikach

f_v, ν współczynnikach f_x, wyrazie wolnym ψ_0 oraz błędności φ. Postępując podobnie jak w [1] otrzymuje się wzory:

$$\varphi^2 = f^T G f, \tag{32}$$

gdzie

$$f = [f_v^T\, f_x^T]^T, \tag{33}$$

a

$$G = \begin{bmatrix} G_v & 0 \\ 0 & G_x \end{bmatrix} \tag{34}$$

przy czym błędności poprawek i spostrzeżeń wyrównanych metodą dwuetapową są równe:

$$G_v = G_{v'} + G_{v''}, \tag{35}$$

$$G_x = F^2 - G_v, \tag{36}$$

gdzie

$$G_{v'} = F^2 A_1^T M_1^{-1} A_1 F^2, \tag{37}$$

$$G_{v''} = F^2 \tilde{A}^T \tilde{M}^{-1} \tilde{A} F^2. \tag{38}$$

Wzory od (31) do (38) umożliwiają obliczenie poprawek, spostrzeżeń wyrównanych oraz ich funkcji liniowych. Mnożąc zaś błędności przez tzw. błąd średni typowego spostrzeżenia μ_0, który po dwóch etapach jest określony wzorem

$$\mu_0^2 = \frac{v^T F^2 v}{\alpha + \beta},$$

otrzymuje się odpowiednio błędy średnie poprawek, spostrzeżeń wyrównanych lub ich funkcji liniowych.

Bibliografia

[1] Z. Kordylewska, J. Kordylewski, T. Styrylska, *Wyznaczanie błędów średnich przy rozwiązywaniu problemów wyrównawczych*, Matematyka Stosowana III (1974), str. 59–66.

[2] E. Warchałowski, *Rachunek wyrównawczy dla geodetów*, Warszawa 1955.