ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA IV (1975)

Z. WĘGLOWSKI (Kraków)

O stabilności metod różnicowych dla równań cząstkowych

1. Wstęp

1.1. W pracy rozpatrywać będziemy równanie różniczkowe

$$D_t u = f(t, x, u, D_x u), \tag{1.1}$$

gdzie

$$x = (x_1, \ldots, x_p), \qquad D_x u = (D_{x_1} u, \ldots, D_{x_p} u) \qquad (t, x) \in Q,$$

$$Q = \{(t, x)\colon\ t \geqslant 0, 0 \leqslant x_i \leqslant a, i = 1, \ldots, p\}.$$

Oznaczamy

$$\tilde{Q} = \{(t, x, u, q)\colon\ (t, x) \in Q,\ \ u \in R^1,\ \ q \in R^n\}$$

i zakładamy, że funkcja $f(t, x, u, q)$ jest klasy C^1 w zbiorze $\tilde{Q}$.

Szukamy rozwiązania równania (1.1) w zbiorze $Q_T = Q \cap \langle 0, T\rangle$, spełniającego warunki:

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad u(t, x_i') = \varphi_i(t, x_i') \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{1.2}$$

gdzie

$$x_i' = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_p), & \text{gdy} \quad D_{q_i} f < 0 \text{ w } Q, \\ (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_p), & \text{gdy} \quad D_{q_i} f > 0 \text{ w } Q. \end{cases}$$

1.2. W zbiorze Q_T wprowadzamy sieć o kroku k w kierunku osi Ot i o kroku h w kierunku osi Ox_i $(i = 1, \ldots, p)$, $h = \frac{a}{N}$. Przez $M = (\mu, m)$ oznaczać będziemy węzeł $(t^\mu, x^m) = (\mu k, m_1 h, \ldots, m_p h)$, $\mu \geqslant 0$, $0 \leqslant m_i \leqslant N$ $(i = 1, \ldots, p)$. Przez j oznaczać będziemy wielowskaźnik $(j_1, \ldots, j_p)$ a przez $|j|$ sumę bezwzględnych wartości jego współrzędnych, tzn. $|j| = \sum_{i=1}^{p} |j_i|$.

Węzeł siatki $(\mu, m + j)$ oznaczać będziemy przez $M + j$ a węzeł $(\mu + 1, m)$ przez $1 + M$. Wartość rozwiązania problemu (1.1), (1.2) w punkcie M oznaczać będziemy $u^M = u(t^\mu, x^m)$ a v^M oznaczać będzie wartość rozwiązania przybliżonego spełniającego równanie

$$(1.3)\qquad \frac{v^{1+M}-v^M}{k}=f(t^\mu,\ x^m,\ lv^M,\ l_h v^M)$$

oraz warunki

$$(1.4)\qquad v^{0m}=\varphi(x^m),\qquad v^M=\varphi_i(t^\mu,\ x^m)\quad \text{gdy}\quad x^m=x'_i,$$

gdzie lv^M i $l_h v^M$ oznaczają wyrażenia:

$$lv^M=\sum_{|j|=0}^{J}\alpha_j^M\, v^{M+j},\qquad l_h v^M=(l_h^1 v^M,\dots,l_h^p v^M),\qquad l_h^i v^M=\sum_{|j|=0}^{J}\beta_j^M\, v^{M+j}\,\frac{1}{h}.$$

Wyrażenia te przybliżają funkcję u o odpowiedniej klasie regularności oraz jej pochodne cząstkowe względem x_i z dokładnością $O(h^s)$.

Jeżeli do równania (1.3) podstawimy w miejsce v rozwiązanie naszego zagadnienia u, otrzymamy

$$(1.5)\qquad \frac{u^{1+M}-u^M}{k}=f(t^\mu,\ x^m,\ lu^M,\ l_h u^M)+\eta^M.$$

Wyrażenie η^M nazywamy błędem metody. Zakładamy, że metoda (1.3), (1.4) jest zgodna z zagadnieniem (1.1), (1.2), tzn. przy $h\to 0$, $k\to 0$ błąd metody η^M dąży do zera w zbiorze Q_T.

Wprowadzimy oznaczenia

$$(1.6)\qquad \varepsilon^\mu=\max_{\nu\leqslant\mu}\max_{m}|\eta^{\nu m}|,$$

$$(1.7)\qquad r^M=u^M-v^M.$$

Wyrażenie r^M jest błędem przybliżenia w węźle M sieci. Błąd ten spełnia równanie różnicowe

$$(1.8)\qquad \frac{r^{1+M}-r^M}{k}=\sum_{|j|=0}^{J}L^j r^{M+j}+\frac{1}{h}\Big(P^0 r^M+\sum_{|j|=1}^{J}P^j r^{M+j}\Big)+\eta^M.$$

W równaniu tym L^j oznaczają pochodne cząstkowe $D_u f$ brane w punkcie pośrednim i pomnożone przez α_j^M a P^j pochodne $D_Q f$ brane w punkcie pośrednim i pomnożone przez β_j^M. Zależą one oczywiście od wskaźników $(\mu,\ m)$, czego nie zaznaczamy dla prostszego zapisu.

1.3. Zastosowanie metody różnicowej postaci (1.3), (1.4) do rozwiązania zagadnienia (1.1), (1.2) podał Z. Kowalski w pracy [3], dowiódł zbieżności metody i podał oszacowanie błędu. A. Fitzke w pracy [1] uzyskał taki sam wynik, stosując przy dowodzie metodę zaproponowaną przez A. Plisia [6]. Celem niniejszej pracy jest podanie pewnych ogólnych założeń, przy których metoda (1.3), (1.4) jest zbieżna i określenie charakteru zbieżności w zależności od znaku pochodnej $D_u f$ (twierdzenia 1 i 2). W punkcie 3 podane zostaną za-

stosowania twierdzeń 1 i 2 do badania zbieżności metod różnicowych dla pewnych równań cząstkowych drugiego rzędu. Wyniki zostaną sformułowane w terminologii stosowanej przez Hildebranda [2].

1.4. Przydatność metody różnicowej zależy nie od błędu całkowitego, na który składają się błąd metody i błąd zaokrąglenia, ale od sposobu propagacji tego błędu. Nie wystarcza stosowanie metody o wysokim rzędzie dokładności, gdyż może się zdarzyć, że przy zagęszczaniu sieci rozwiązanie różnicowe ucieka do nieskończoności, podczas gdy rozwiązanie dokładne jest ograniczone (por. [7], str. 181). Pożądane jest, by błąd zaokrąglenia był wyższego rzędu niż błąd metody, gdyż w przeciwnym przypadku stosowanie dokładniejszych metod nie przynosi efektu. W dalszych rozważaniach będziemy pomijać błąd zaokrąglenia.

O przydatności metody różnicowej decydują:

(a) zbieżność rozwiązania różnicowego do rozwiązania dokładnego w ustalonym punkcie przy zagęszczaniu sieci,

(b) szybkość wzrastania błędu przybliżenia w ustalonym punkcie przy zagęszczaniu sieci,

(c) szybkość wzrastania błędu przybliżenia przy $\mu \to \infty$ dla ustalonej sieci.

Pewne sposoby klasyfikacji metod z uwzględnieniem warunków (a), (b), (c) podamy w punkcie 2.

2. Warunki dostateczne stabilności metod wypukłych

2.1. DEFINICJA 1. Metodę różnicową (1.3), (1.4) nazywamy *wypukłą*, jeżeli

$$1^\circ \quad P^0 + \sum_{|j|=1}^{J} P^j = 0,$$

$$2^\circ \quad P^j \geqslant 0 \text{ dla } 1 \leqslant |j| \leqslant J,$$

$$3^\circ \quad 1 + kL^0 + \frac{k}{h} P^0 \geqslant 0, \quad hL^j + P^j \geqslant 0.$$

Jak wynika z definicji, metodę nazywamy wypukłą, jeżeli błąd r^{1+M} jest kombinacją wypukłą błędów r^M, z pominięciem współczynników postaci $O(k)$.

2.2. Wprowadzimy teraz definicję punktowej stabilności (pointwise stability) podobnie jak w książce Hildebranda [2].

Niech $A(t, x)$ będzie ustalonym punktem zbioru Q_T. Oznaczamy przez $r(h)$ bezwzględną wartość błędu przybliżenia w tym punkcie dla sieci o krokach k i h a przez δ maksymalną wartość błędu popełnianego przy obliczaniu $r(h)$ z równania (1.8), tzn. $\delta = k|\eta^M|$.

DEFINICJA 2. Metodę różnicową nazywamy *punktowo-stabilną*, jeżeli w każdym punkcie zbioru Q_T $r(h) \to 0$ przy $k \to 0$, $h \to 0$ oraz gdy wyrażenie $r(h)\,\delta^{-1}$ nie rośnie szybciej niż $O(h^{-n})$ przy $h \to 0$, $n > 0$.

Definicja ta uwzględnia warunki (a) i (b) rozpatrywane w 1.4 i charakteryzuje zbieżność metody w ustalonym punkcie przy zagęszczaniu sieci.

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli metoda różnicowa* (1.3), (1.4) *jest wypukła i w zbiorze* Q_T *zachodzi nierówność:*

$$\sum_{|j|=0}^{J} |L^j| \leqslant L, \tag{2.1}$$

to metoda ta jest punktowo-stabilna i w zbiorze Q_T spełniony jest związek

$$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon^\mu}{L} (e^{kL\mu} - 1). \tag{2.2}$$

D o w ó d. Posłużymy się pomocniczo nierównością

$$\frac{R^{\mu+1} - R^\mu}{k} \geqslant L R^\mu + \varepsilon^\mu, \tag{2.3}$$

którą spełnia funkcja $R^\mu = \frac{\varepsilon^\mu}{L} (e^{kL\mu} - 1)$ (możemy to łatwo sprawdzić przez indukcję). Ponieważ $r^{0m} = R^0 = 0$, więc spełniona jest nierówność początkowa $|r^{0m}| \leqslant R^0$. Wykażemy drugi krok indukcyjny.

Korzystając z definicji wypukłości, otrzymujemy z równania (1.8):

$$|r^{1+M}| \leqslant |r^M| \left(1 + kL^0 + \frac{k}{h} P^0\right) + k \sum_{j=1}^{J} |L^j| \cdot |r^{M+j}| + \frac{k}{h} \sum_{|j|=1}^{J} P^j |r^{M+j}| + k\varepsilon^\mu;$$

nierówność (2.3) przepisujemy w postaci

$$R^{\mu+1} \geqslant R^\mu (1 + kL^0 + \frac{k}{h} P^0) + kR^\mu (L - |L^0|) + \frac{k}{h} R^\mu \sum_{|j|=1}^{J} P^j + k\varepsilon^\mu.$$

Odejmując teraz stronami otrzymane nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego $|r^M| \leqslant R^\mu$, otrzymujemy

$$|r^{1+M}| - R^{\mu+1} \leqslant 0,$$

co kończy dowód nierówności (2.2).

Oznaczmy przez $\varepsilon(h)$ maksymalną wartość bezwzględną błędu metody w punkcie $A(t, x) \in Q_T$, dla sieci o krokach k i h. Z założenia zgodności wynika, że $\varepsilon(h)$ dąży jednostajnie do zera w Q_T przy $h \to 0$, czyli metoda jest zbieżna. Dla określenia rzędu zbieżności zauważmy, że

$$r(h) = \frac{\varepsilon(h)}{L} (e^{tL} - 1), \qquad \delta = k\,\varepsilon(h).$$

Wobec tego

$$r(h)\,\delta^{-1} = O(k^{-1}) = O(h^{-1}),$$

czyli metoda jest punktowo-stabilna w sensie definicji 2, co kończy dowód twierdzenia.

2.3. Wprowadzimy teraz definicję stabilności krokowej (stepwise stability).

DEFINICJA 3. Metodę różnicową nazywamy *krokowo-stabilną*, jeżeli, dla ustalonej sieci, r^M nie rośnie wykładniczo wraz z μ przy $\mu \to \infty$.

Definicja ta uwzględnia warunek (c) rozpatrywany w punkcie 1.4. Łatwo zauważyć, że wypukłość metody nie wystarcza do zapewnienia krokowej stabilności. W szczególności, otrzymane w twierdzeniu 1 oszacowanie błędu r^M rośnie wykładniczo wraz z μ przy $\mu \to \infty$. Musimy wobec tego wprowadzić dodatkowe założenia.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli metoda* (1.3), (1.4) *jest wypukła oraz warunki:*

$$L^0 \leqslant -L < 0, \qquad L^j \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant |j| \leqslant J \tag{2.4}$$

są spełnione w zbiorze Q_T, *to jest ona punktowo- i krokowo-stabilna i zachodzi oszacowanie*

$$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon^\mu}{L}\,[1-(1-kL)^\mu\,|. \tag{2.5}$$

Założenia (2.4) będą spełnione, jeśli $D_u f < 0$ i wszystkie $\alpha_j^M \geqslant 0$.

D o w ó d. Posłużymy się pomocniczą nierównością

$$\frac{S^{\mu+1} - S^\mu}{k} \geqslant -L\,S^\mu + \varepsilon^\mu, \tag{2.6}$$

którą spełnia funkcja $S^\mu = \frac{\varepsilon^\mu}{L}\,[1-(1-kL)^\mu\,|$ (łatwo to sprawdzić przez indukcję). Dowód nierówności (2.5) prowadzimy podobnie jak w twierdzeniu 1. Mamy $r^{0m} = S^0$, czyli spełniona jest nierówność początkowa $|r^{0m}| \leqslant S^0$. Z równania (1.8) otrzymujemy:

$$|r^{1+M}| \leqslant |r^M|\,(1 + kL^0 + \frac{k}{h}P^0) + \frac{k}{h}\sum_{|j|=1}^{J}(hL^j + P^j)\,|r^{M+j}| + k\,\varepsilon^\mu,$$

a z nierówności (2.6) mamy:

$$S^{\mu+1} \geqslant S^\mu\,(1 - kL + \frac{k}{h}P^0) + \frac{k}{h}\sum_{|j|=1}^{J}(hL^j + P^j)\,S^\mu - k\sum_{|j|=1}^{J}L^j\,S^\mu + k\,\varepsilon^\mu.$$

Odejmując stronami otrzymane nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego $|r^M| \leqslant S^\mu$, otrzymujemy

$$|r^{1+M}| - S^{\mu+1} \leqslant 0,$$

z czego wynika nierówność (2.5).

Stosując takie same oznaczenia jak w dowodzie twierdzenia 1 otrzymujemy

$$r(h)\,\delta^{-1} = O(h^{-1}),$$

czyli metoda nasza jest punktowo stabilna. Stabilność krokowa wynika z nierówności (2.5), gdyż

$$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon^\mu}{L},$$

czyli błąd przybliżenia jest dla każdego μ tego samego rzędu co błąd metody, a więc nie rośnie wykładniczo. W ten sposób zakończony został dowód twierdzenia 2.

Jak zauważyliśmy już wcześniej, może się zdarzyć, że dla metody wypukłej błąd r^M dąży wykładniczo do nieskończoności ~~wraz~~ z μ. Jeśli jednak rozwiązanie zagadnienia (1.1), (1.2) rośnie wykładniczo wraz z t, to błąd względny $r^M(v^M)^{-1}$ może być niewielki. Z drugiej strony, krokowa stabilność nie zabezpiecza przed wykładniczym wzrostem błędu względnego w ustalonym punkcie (por. [2], str. 205).

3. Powyższe metody dowodzenia zbieżności i podawania oszacowań błędu można przenieść na równania drugiego rzędu, z tym że wówczas wyrażenia P^j mogą być postaci $O(h^{-1})$. Podamy teraz przykłady stosowania twierdzeń 1 i 2 do różnych metod różnicowych.

Łatwo zauważyć, że założenia H w pracach [3]–[5] zapewniają spełnienie założeń twierdzenia 1, więc oszacowania otrzymane w tych pracach dostajemy jako bezpośrednie wnioski. Również oszacowanie z twierdzenia T w pracy [1] wynika z naszego twierdzenia.

Podamy teraz zastosowanie twierdzenia 2 do metod różnicowych rozpatrywanych w pracach [3]–[5], gdy pochodna $D_u f$ jest ujemna.

3.1. Rozważać będziemy równanie różniczkowe

$$D_t u = f(t, x, u, D_x u). \tag{3.1}$$

Szukamy rozwiązania równania (3.1) w zbiorze Q, spełniającego warunki:

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad u(t, x_i') = \varphi_i(t, x_i') \quad \text{dla} \quad x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, p), \tag{3.2}$$

gdzie $x_i' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_p)$.

Stosujemy metodę różnicową

$$\begin{gathered}\frac{v^{1+M} - v^M}{k} = f(t^\mu, x^m, v^M, v^{M\Delta}),\\ v^{0m} = \varphi(x^m), \qquad v^M = \varphi_i(t^\mu, x^m) \quad \text{dla} \quad m_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, p),\end{gathered} \tag{3.3}$$

gdzie $v^{M\Delta}$ oznacza wektor p-wymiarowy o współrzędnych

$$\frac{1}{h}(v^M - v^{M+j}).$$

Przez j rozumiemy wielowskaźnik $j_1, \ldots, j_p$, którego wszystkie współrzędne są równe zero za wyjątkiem j-tej.

Przyjmujemy następujące

ZAŁOŻENIA H'.

(i) Funkcja $f(t, x, u, q)$ występująca po prawej stronie równania (3.1) jest klasy C^1 w zbiorze $\tilde{Q}$.

(ii) Istnieje stała $L < 0$ a k i h są tak dobrane, że

$$D_u f \leqslant -L, \qquad D_{q_i} f \leqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{3.4}$$

$$(3.5)\qquad 1+\frac{k}{h}\sum_{i=1}^{p} D_{q_i} f + k D_u f \geqslant 0.$$

(iii) Funkcja $u(t, x)$, klasy C^1 w Q, jest rozwiązaniem równania (3.1) spełniającym warunki (3.2).

TWIERDZENIE 3. *Przy założeniach* H′ *metoda* (3.3) *jest punktowo- i krokowo-stabilna.*

D o w ó d. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy (por. [3]):

$$r^{1+M} = r^M\Big(1 + kD_u f + \frac{k}{h}\sum_{|j|=1} D_{q_j} f\Big) - \frac{k}{h}\sum_{|j|=1} D_{q_j} f\, r^{M+j} + k\eta^M.$$

Z założeń (ii) wynika teraz spełnienie założeń twierdzenia 2, co kończy dowód.

3.2. Dla równania różniczkowego

$$(3.6)\qquad D_t u = f(t,\, x,\, u,\, D_x u,\, D_x^2 u),$$

gdzie $D_x^2 u = (D^2_{x_1} u, \ldots, D^2_{x_p} u)$, rozpatrujemy następujące zagadnienia graniczne w zbiorze Q

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} &u(0,x) = \varphi(x), && u(t, x_i') = \varphi_i(t, x_i'),\\ &u(t, x_i'') = \psi_i(t, x_i'') && (i = 1, \ldots, p), \end{aligned}$$

gdzie x_i' jest określone jak w 3.1 a $x_i'' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_p)$, oraz

$$(3.8)\qquad u(0,x) = \varphi(x), \quad D_{x_i} u = 0 \quad \text{dla} \quad x_i = 0 \text{ lub } x_i = a \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Do rozwiązania zagadnienia (3.6), (3.7) stosujemy metodę różnicową:

$$(3.9)\qquad \frac{v^{1+M} - v^M}{k} = f(t^\mu,\, x^m,\, v^M,\, v^{M\triangle},\, v^{M\square}),$$

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} &v^{0m} = \varphi(x^m), && v^M = \varphi_i(t^\mu, x^m) && \text{dla} && m_i = 0,\\ &v^M = \psi_i(t^\mu, x^m) && \text{dla} && m_i = N \end{aligned}$$

podaną w pracy [4]. Wyrażenia $v^{M\triangle}$, $v^{M\square}$ oznaczają odpowiednio wektory o współrzędnych

$$\frac{1}{h}(v^{M+j} - v^{M-j}) \quad \text{i} \quad \frac{1}{h^2}(v^{M+j} - 2v^M + v^{M-j}).$$

Do rozwiązania zagadnienia (3.6), (3.8) stosujemy metodę różnicową zadaną równaniem (3.9) i warunkami:

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} &v^{0m} = \varphi(x^m), \qquad v^{M-i} = v^{M+i} \qquad \text{dla} \quad m_i = 0,\\ &v^{M+i} = v^{M-i} \qquad \text{dla} \qquad m_i = N, \end{aligned}$$

gdzie wielowskaźnik i określony jest tak samo jak poprzednio j.

Warunki (3.11) definiują wartości rozwiązania równania różnicowego w dodatkowych punktach sieci leżących poza zbiorem Q i umożliwiają wyznaczanie wartości rozwiązania na brzegu zbioru Q. W pracy [5] wykazano, że dla rozwiązania $u(t, x)$, klasy C^2 w Q, zachodzi zgodność metody (3.9), (3.11) z zagadnieniem (3.6), (3.8) również na brzegu zbioru Q.

Ponieważ równanie (3.9) jest wspólne dla obu zagadnień więc zagadnienie stabilności rozpatrywać będziemy łącznie dla obu metod.

Przyjmujemy następujące

ZAŁOŻENIA H″.

(i) Funkcja $f(t, x, u, q, w)$ jest klasy C^1 dla $(t, x) \in Q$, $u \in R^1$, $q \in R^p$, $w \in R^p$.

(ii) Istnieją stałe dodatnie L, Γ, g, G takie, że

$$(3.12)\qquad D_u f \leqslant -L, \qquad |D_{q_i} f| \leqslant \Gamma, \qquad g \leqslant D_{w_i} f \leqslant G \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

(iii) k i h są tak dobrane, że zachodzą nierówności

$$(3.13)\qquad \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0, \qquad \frac{2pG}{h^2} - \frac{1}{k} \leqslant 0,$$

$$(3.14)\qquad 1 + k D_u f - \frac{2k}{h^2} \sum_{i=1}^{p} D_{w_i} f \geqslant 0.$$

(iv) Funkcja $u(t, x)$ jest rozwiązaniem równania (3.6), spełniającym warunki (3.7) (lub warunki (3.8)) i jest klasy C^2 w zbiorze Q.

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli spełnione są założenia* H″, *to metoda różnicowa* (3.9), (3.10) (*lub* (3.9), (3.11)) *jest punktowo- i krokowo-stabilna.*

D o w ó d. Stosując twierdzenie o wartości średniej otrzymamy (por. [4] i [5]):

$$\begin{aligned} r^{1+M} &= r^M\Big(1 + k D_u f - \frac{2k}{h^2} \sum_{|j|=1} D_{w_j} f\Big) + \\ &+ \sum_{|j|=1} \Big(\frac{k}{2h} D_{q_j} f + \frac{k}{h^2} D_{w_j} f\Big) r^{M+j} + \\ &+ \sum_{|j|=1} \Big(-\frac{k}{2h} D_{q_j} f + \frac{k}{h^2} D_{w_j} f\Big) r^{M-j} + k\eta^M. \end{aligned}$$

Z założeń (ii) oraz (iii) wynika spełnienie założeń twierdzenia 2, co kończy dowód.

Bibliografia

[1] A. F i t z k e, *O pewnej metodzie różnicowej dla nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu*, Zeszyty Naukowe AGH 208 (1969), str. 47–50.

[2] F. B. H i l d e b r a n d, *Finite-Difference Equations and Simulations,* Englewood Cliffs N.J. 1968.
[3] Z. K o w a l s k i, *A difference method for the non-linear partial differential equation of the first order,* Ann. Polon. Math. 18 (1966), str. 235–242.
[4] – *A difference method for a non-linear parabolic differential equation without mixed derivatives,* Ann. Polon. Math. 20 (1968), str. 167–177.
[5] – *A difference method for an adiabatic problem in non-linear parabolic equation,* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astronom. et phys. 17 (1968), str. 393–400.
[6] A. P l i ś, *On difference inequalities corresponding to partial differential inequalities of the first order,* Ann. Polon. Math. 20 (1968), str. 179–181.
[7] B. W e n d r o f f, *Theoretical Numerical Analysis,* New York and London 1966.