ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA VI (1976)

RYSZARD MAGIERA i STANISŁAW TRYBUŁA (Wrocław)

Plany ukośne dla procesu dwumianowego

1. Wstęp. Rozważmy błądzenie losowe polegające na niezależnych przesunięciach o jednostkę, w prawo z prawdopodobieństwem p i w górę, z prawdopodobieństwem $q = 1-p$, na zbiorze punktów o współrzędnych całkowitych na płaszczyźnie (x, y). Błądzenie rozpoczyna się od początku układu współrzędnych, tzn. od punktu $(0, 0)$. Będziemy więc rozważać dyskretne chwile $0, 1, 2, \ldots$ i zapisywać współrzędne trajektorii w tych chwilach w postaci

$$X_0 = (0, 0), \quad X_1 = (x_1, y_1), \quad X_2 = (x_2, y_2), \quad \ldots$$

Proces jest realizowany zgodnie z pewną regułą stopu; regułą stopu będzie w naszym przypadku zmienna losowa τ przyjmująca tylko wartości całkowite nieujemne i taka, że zdarzenie $\{\tau = n\}$ jest mierzalne względem σ-algebry, generowanej przez zmienne losowe $X_0, X_1, \ldots, X_n$ dla każdej całkowitej wartości n.

Zadaniem naszym będzie oszacowanie parametru $Q = g(p)$, w przypadku gdy p jest nieznane. Znajdziemy pewną klasę optymalnych planów sekwencyjnych tego parametru. Pokażemy mianowicie, że reguła stopu zdefiniowana jako chwila pierwszego wejścia do zbioru

$$B = \left\{(x, y) : y = \frac{1}{s}(x-k)\right\},$$

gdzie k, s są liczbami naturalnymi, wyznacza optymalny plan sekwencyjny i podamy niektóre własności takiego planu.

2. Określenia i podstawowe zależności

DEFINICJA 1. Niech τ będzie regułą stopu. Funkcję $f_\tau = f(X_\tau, \tau)$ będziemy nazywać *estymatorem* parametru $Q = g(p)$.

Estymator f_τ nazywa się *estymatorem nieobciążonym*, jeżeli $E_p(f_\tau) = g(p)$, gdzie $E_p(f_\tau)$ jest wartością oczekiwaną estymatora f_τ dla danego τ i p.

DEFINICJA 2. *Planem sekwencyjnym* będziemy nazywać trójkę (τ, g, f_τ) składającą się z reguły stopu τ, funkcji $g(p)$ i jej nieobciążonego estymatora f_τ.

Niech A będzie ustalonym zbiorem wartości parametru p. Plan sekwencyjny S jest *domknięty* dla A, jeżeli dla każdego $p \in A$ $P(\tau < \infty) = 1$. W przyszłości zbiór A będzie ustalonym przedziałem $\langle a, b\rangle$.

Wśród wszystkich planów S wyszczególniamy klasę planów *pierwszego wejścia*. Plan pierwszego wejścia określony jest za pomocą zbioru brzegowego B, do którego

wchodząc trajektoria zatrzymuje się. Tylko takie plany będziemy rozpatrywać. Punkty zbioru B nazywamy punktami *brzegowymi*. Punkt nazywa się *przejściowy*, jeśli trajektoria wychodząc z początku układu współrzędnych może go osiągnąć i wyjść z niego z dodatnim prawdopodobieństwem. Punktami *nieosiągalnymi* nazywamy punkty, które nie są ani przejściowymi, ani brzegowymi.

Estymacji sekwencyjnej dla procesu dwumianowego poświęcono w literaturze dużo uwagi (np. [1], [2], [3], rozdział 12, [5], [6]).

Niech $\mathscr{K}(X_\tau)$ oznacza liczbę różnych trajektorii wychodzących z początku układu współrzędnych i osiągających po raz pierwszy zbiór B w punkcie $X_\tau = (x_\tau, y_\tau)$. Wtedy prawdopodobieństwo osiągnięcia tego punktu wynosi

$$\mathscr{K}(X_\tau)p^{x_\tau}q^{y_\tau}.$$

Zatem plan S pierwszego wejścia jest domknięty dla wartości $p \in \langle a, b\rangle$, $0 < a < < b < 1$, jeżeli zachodzi równość

$$\sum_{X_\tau \in B} \mathscr{K}(X_\tau)p^{x_\tau}q^{y_\tau} = 1 \quad \text{dla} \quad p \in \langle a, b\rangle. \tag{1}$$

Będziemy rozważać jedynie takie plany sekwencyjne, dla których: (a) szereg

$$\mathrm{E}_p(\tau^2) = \sum_{X_\tau \in B} \tau^2 \mathscr{K}(X_\tau)p^{x_\tau}q^{y_\tau} \tag{2}$$

jest jednostajnie zbieżny w każdym domkniętym przedziale wartości p zawartym w $\langle a, b\rangle$, oraz (b) dla każdego rozważanego estymatora f_τ szereg

$$g(p) = \mathrm{E}_p(f_\tau) = \sum_{X_\tau \in B} f_\tau \mathscr{K}(X_\tau)p^{x_\tau}q^{y_\tau} \tag{3}$$

można różniczkować wyraz po wyrazie w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Pewne ważne i dobrze znane (patrz [2]) własności wynikające z powyższych założeń podaje następujące

TWIERDZENIE 1. *Przy podanych powyżej założeniach, dla każdego planu sekwencyjnego* (τ, g, f_τ):

(A) $\mathrm{E}_p(x_\tau^2)$, $\mathrm{E}_p(y_\tau^2)$ *i* $\mathrm{E}_p(x_\tau y_\tau)$ *istnieją i co najwyżej równe są wartości* $\mathrm{E}_p(\tau^2)$;

(B) *wielkości* x_τ, y_τ *i* τ, *traktowane jako estymatory, spełniają warunek* (b);

(C) *zachodzą następujące tożsamości*:

$$q\mathrm{E}_p(x_\tau) = p\mathrm{E}_p(y_\tau), \tag{4}$$

$$\mathrm{E}_p(y_\tau) = q\mathrm{E}_p(\tau), \tag{5}$$

$$\mathrm{E}_p(qx_\tau - py_\tau)^2 = pq\mathrm{E}_p(\tau), \tag{6}$$

$$\mathrm{E}_p[(qx_\tau - py_\tau)f_\tau] = pqg'(p); \tag{7}$$

(D) *zachodzi nierówność*

$$\mathrm{D}_p^2(f_\tau) \geqslant \frac{pq[g'(p)]^2}{\mathrm{E}_p(\tau)}, \tag{8}$$

gdzie $\mathrm{D}_p^2(f_\tau)$ *oznacza wariancję estymatora* f_τ.

DEFINICJA 3. Plan sekwencyjny (τ, g, f_τ) nazywamy *efektywnym w punkcie* $p = p_0$, jeśli w nierówności (8) zachodzi równość dla $p = p_0$. Estymator f_τ nazywa się

wtedy *efektywnym w punkcie* $p = p_0$, a funkcja $g(p)$ jest *efektywnie estymowalna w tym punkcie*.

DEFINICJA 4. Plan sekwencyjny (τ, g, f_τ) nazywa się *efektywnym*, jeśli jest efektywny dla każdej wartości $p \in \langle a, b\rangle$. Estymator f_τ nazywa się wtedy *efektywnym*, a funkcja $g(p)$ jest *efektywnie estymowalna.*

3. Plany ukośne

DEFINICJA 5. Plan sekwencyjny nazywa się *ukośnym*, jeżeli dla pewnego $k = 1, 2, \ldots$ i pewnego $s = 1, 2, \ldots$ zbiór brzegowy B określony jest następująco:

(9)
$$B = \left\{(x, y)\colon\ y = \frac{1}{s}(x-k)\right\}$$

lub

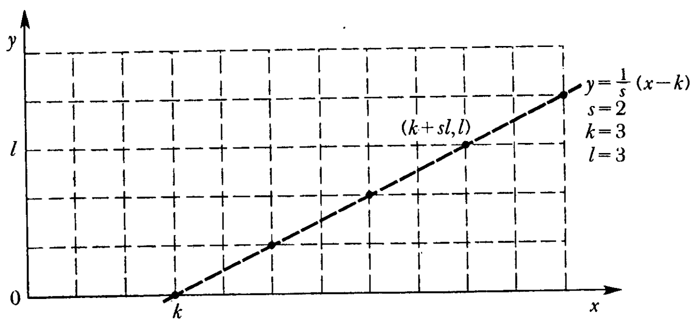
(10)
$$B = \left\{(x, y)\colon\ x = \frac{1}{s}(y-k)\right\}.$$

Dla rozważanego procesu dwumianowego znajdziemy prawdopodobieństwa osiągnięcia punktów brzegowych zbioru B. Uwzględniając symetrię planów określonych przez (9) i (10) wystarczy rozważać tylko jeden z tych planów. Obliczmy zatem prawdopodobieństwo p_{kl}^s osiągnięcia po raz pierwszy przez trajektorię punktu $(x, y) = (k+sl, l)$, leżącego na prostej $y = \frac{1}{s}(x-k)$. Widać, że

(11)
$$p_{kl}^s = q_{kl}^s p^{k+sl} q^l,$$

gdzie q_{kl}^s równe jest liczbie różnych trajektorii wychodzących z punktu $(0, 0)$ i osiągających po raz pierwszy zbiór B w punkcie $(k+sl, l)$ (patrz rys. 1). Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia liczby trajektorii q_{kl}^s. Zauważmy, że prawdziwy jest związek

(12)
$$p_{kl}^s = pp_{k-1,l}^s + qp_{k+s,l-1}^s.$$



Rys. 1

Podstawiając wartość p_{kl}^s ze wzoru (11) do wyrażenia (12) otrzymujemy następujący związek rekurencyjny dla q_{kl}^s:

(13)
$$q_{kl}^s = q_{k-1,l}^s + q_{k+s,l-1}^s.$$

Jak łatwo zauważyć,

(14) $$q_{k0}^{s} = 1$$

oraz

$$q_{k1}^{s} = k.$$

Następnie, przewidując rozwiązania q_{kl}^{s} w postaci

$$q_{kl}^{s} = \frac{k^{l} + \alpha_{l-1}^{(l)} k^{l-1} + \ldots + \alpha_{1}^{(l)} k + \alpha_{0}^{(l)}}{l!}$$

i uwzględniając związek (13), otrzymujemy

(15) $$q_{kl}^{s} = \frac{k(k+sl+1)(k+sl+2)\ldots[k+(s+1)l-1]}{l!} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Rozwiązania (14) i (15) można przedstawić w postaci wzoru

(16) $$q_{kl}^{s} = \frac{k}{k+(s+1)l}\binom{k+(s+1)l}{l} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Warto zwrócić uwagę, że gdyby przyjąć $s = -1$, to otrzymalibyśmy plan określony zbiorem brzegowym

$$B = \{(x, y)\colon x+y = k\} \quad (k \text{ ustalone, } k = 1, 2, \ldots),$$

zwany planem stałym. Ponieważ $\tau = x_{\tau}+y_{\tau}$, więc uwzględniając wzór (16) otrzymujemy

(17) $$\mathrm{P}(\tau = k) = \binom{k}{l} p^{k-l} q^{l} \quad (l = 0, 1, \ldots, k).$$

Podobnie, jeśli przyjąć $s = 0$, otrzymalibyśmy plan określony zbiorem brzegowym

$$B = \{(x, y)\colon x = k\} \quad (k \text{ ustalone, } k = 1, 2, \ldots),$$

zwany planem odwrotnym, dla którego zgodnie z wzorem (16)

(18) $$\mathrm{P}(x_{\tau} = k) = \binom{k+l-1}{l} p^{k} q^{l} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Plany te były badane przez wielu autorów (patrz np. [1], [2]).

4. Efektywność planów ukośnych. Podobnie jak w pracy [4] dowodzi się, że dla $p \in \big(s/(s+1), 1\big\rangle$ plan jest domknięty i istnieją momenty $\mathrm{E}_p(x_{\tau}^{m})$ i $\mathrm{E}_p(y_{\tau}^{m})$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Dalej będziemy zakładali, że $p \in \big(s/(s+1), 1\big\rangle$.

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy $f_{\tau} = \tau$, tożsamość (7) sprowadza się do postaci

(19) $$\mathrm{E}_p[(qx_{\tau} - py_{\tau})\tau] = pq\mathrm{E}_p'(\tau),$$

gdzie prim oznacza pochodną względem parametru p. Teraz, biorąc pod uwagę (5), (6) i (19), otrzymujemy

(20) $$\mathrm{D}_p^2(\tau) = \frac{1}{q^2}\mathrm{D}_p^2(y_{\tau}) + \frac{p}{q^2}\mathrm{E}_p(y_{\tau}) + \frac{2p}{q}\mathrm{E}_p'(y_{\tau}).$$

Z drugiej strony, ze wzoru (11) i z warunku domkniętości planu ukośnego, otrzymujemy

$$\sum_{l=0}^{\infty} q_{kl}^{s} p^{k+sl} q^{l} = 1. \tag{21}$$

Różniczkując szereg (21) wyraz po wyrazie względem p otrzymujemy równanie

$$qk \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl}^{s} + (sq-p) \sum_{l=0}^{\infty} l p_{kl}^{s} = 0,$$

czyli

$$\mathrm{E}_p(y_\tau) = \frac{qk}{p-sq}. \tag{22}$$

Analogicznie, różniczkując po raz drugi szereg (21) wyraz po wyrazie oraz uwzględniając (22), otrzymujemy wzór na drugi moment zmiennej losowej y_τ:

$$\mathrm{E}_p(y_\tau^2) = \frac{k^2 q^2}{(p-sq)^2} + \frac{kpq}{(p-sq)^3}. \tag{23}$$

Stąd

$$\mathrm{D}_p^2(y_\tau) = \frac{kpq}{(p-sq)^3}. \tag{24}$$

Wzór (5) po uwzględnieniu (22) daje

$$\mathrm{E}_p(\tau) = \frac{k}{p-sq}. \tag{25}$$

Biorąc pod uwagę (22) i (24), ze wzoru (20) otrzymujemy wyrażenie na wariancję zmiennej losowej τ:

$$\mathrm{D}_p^2(\tau) = \frac{kpq(s+1)^2}{(p-sq)^3}. \tag{26}$$

Wykorzystując otrzymane wzory udowodnimy, że plan ukośny jest efektywny. Przyjmijmy

$$g(p) = \frac{1}{p-sq}, \quad f_\tau = \frac{\tau}{k}. \tag{27}$$

Ponieważ

$$\mathrm{E}_p(f_\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau}{k} p_{kl}^{s} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \tau p_{kl}^{s} = \frac{1}{p-sq} = g(p),$$

więc estymator $f_\tau = \tau/k$ jest nieobciążonym estymatorem funkcji $g(p) = 1/(p-sq)$. Ponadto, biorąc pod uwagę (26), otrzymujemy

$$\mathrm{D}_p^2(f_\tau) = \frac{1}{k^2} \mathrm{D}_p^2(\tau) = \frac{pq(s+1)^2}{k(p-sq)^3}.$$

Z drugiej strony,

$$\frac{pq[g'(p)]^2}{\mathrm{E}_p(\tau)} = \frac{pq(s+1)^2}{k(p-sq)^3},$$

a więc zachodzi równość w nierówności (8). Zatem ukośny plan sekwencyjny jest efektywny, funkcją efektywnie estymowalną jest $g(p) = 1/(p-sq)$, a $f_\tau = \tau/k$ jest jej efektywnym estymatorem.

Podobnie dla planu określonego zbiorem brzegowym (10) dla $p \in \left\langle 0, \frac{1}{s+1}\right)$ otrzymujemy ten sam wniosek przy $g(p) = 1/(q-sp)$ i $f_\tau = \tau/k$.

Oczywiście, jeżeli funkcja $g(p)$ jest efektywnie estymowalna, to również i funkcja $\alpha g(p)+\beta$ jest efektywnie estymowalna.

De Groot udowodnił [2], że gdy $p \in (0, 1)$, to plany stałe i odwrotne są jedynymi efektywnymi planami sekwencyjnymi. Jeśli opuścić założenie $p \in (0, 1)$ i przyjąć, że p należy do mniejszego przedziału $\langle a, b\rangle$ zawartego w $\langle 0, \frac{1}{2})$ bądź $(\frac{1}{2}, 1\rangle$, to jedynymi planami efektywnymi są plany stałe, odwrotne i ukośne. Wśród ukośnych tylko te plany są efektywne, dla których przedział $\langle a, b\rangle$ mieści się w przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{s+1}\right)$ bądź odpowiednio w przedziale $\left(\frac{s}{s+1}, 1\right\rangle$.

5. Określenie planów pierwszego wejścia poprzez warunki nałożone na regułę stopu. Okazuje się, że typ planu pierwszego wejścia może być określony poprzez dość słabe warunki nałożone na regułę stopu τ dla ustalonej wartości parametru $p \in \langle a, b\rangle$. Tak jest np. dla planu odwrotnego (patrz [3], tw. 12.2.9) i dla planu ukośnego.

Podamy teraz pewne wykorzystywane dalej zależności. Ze wzoru (19), uwzględniając związek $x_\tau + y_\tau = \tau$, otrzymuje się

(28) $$\mathrm{E}_p(\tau y_\tau) = q\,\mathrm{E}_p(\tau^2) - pq\,\mathrm{E}'_p(\tau),$$

a ze wzorów (6) i (28) mamy zależność

(29) $$\mathrm{E}_p(y_\tau^2) = q^2\,\mathrm{E}_p(\tau^2) + pq\,\mathrm{E}_p(\tau) - 2pq^2\,\mathrm{E}'_p(\tau).$$

Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 2. *Jeśli dla planu sekwencyjnego (τ, g, f_τ) pierwszego wejścia bez punktów nieosiągalnych, domkniętego w otoczeniu ustalonej wartości $p \in \left(\frac{s}{s+1}, 1\right\rangle$, zachodzą następujące warunki*

(30) $$\mathrm{E}_p(\tau) = \frac{k}{p-sq},$$

(31) $$\mathrm{E}'_p(\tau) = -\frac{k(s+1)}{(p-sq)^2},$$

(32)
$$\mathrm{E}_p(\tau^2) \leqslant \frac{kpq(s+1)^2+k^2(p-sq)}{(p-sq)^3}$$

dla $k \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, *to wówczas plan ten jest planem ukośnym o zbiorze brzegowym określonym przez wzór* (9).

D o w ó d. Wprowadzimy nową zmienną losową

(33)
$$z_\tau = x_\tau - sy_\tau = \tau-(s+1)y_\tau.$$

Stąd, uwzględniając (5) i (30), otrzymujemy

(34)
$$\mathrm{E}_p(z_\tau) = \mathrm{E}_p(\tau)-(s+1)\mathrm{E}_p(y_\tau) = (p-sq)\mathrm{E}_p(\tau) = k.$$

Pokażemy zatem teraz, że

(35)
$$\mathrm{D}_p^2(z_\tau) = 0.$$

W tym celu obliczmy najpierw $\mathrm{E}_p(z_\tau^2)$. Ze wzorów (33), (28) i (29) otrzymujemy

$$\mathrm{E}_p(z_\tau^2) = \mathrm{E}_p(\tau^2)-2(s+1)\mathrm{E}_p(\tau y_\tau)+(s+1)^2\mathrm{E}_p(y_\tau^2) =$$
$$= (p-sq)^2\mathrm{E}_p(\tau^2)+pq(s+1)^2\mathrm{E}_p(\tau)+2pq(s+1)(p-sq)\mathrm{E}_p'(\tau).$$

Po wykorzystaniu warunków (30), (31) i (32) mamy

(36)
$$\mathrm{E}_p(z_\tau^2) \leqslant \frac{kpq(s+1)^2+k^2(p-sq)-kpq(s+1)^2}{p-sq} = k^2.$$

Zatem, na mocy (34) i (36)

$$\mathrm{D}_p^2(z_\tau) = \mathrm{E}_p(z_\tau^2)-\mathrm{E}_p^2(z_\tau) \leqslant k^2-k^2 = 0,$$

co dowodzi równości (35). Wnioskujemy stąd, że brzeg planu leży na prostej $x-sy = k$. Ponieważ w otoczeniu danego p plan ten jest domknięty, k i s muszą być liczbami naturalnymi, co kończy dowód twierdzenia.

Literatura cytowana

[1] M. A. G i r s h i c k, F. M o s t e l l e r, L. J. S a v a g e, *Unbiased estimates for certain binomial sampling problems with applications*, Ann. Math. Statist. 17 (1946), str. 13–23.

[2] M. H. D e G r o o t, *Unbiased sequential estimation for binomial populations*, Ann. Math. Statist. 30 (1959), str. 80–101.

[3] А. М. К а г а н, Ю. В. Л и н н и к, С. Р. Р а о, *Характеризационные задачи математической статистики*, Москва 1972.

[4] S. T r y b u ł a, *Sequential estimation in processes with independent increments*, Dissertationes Mathematicae LX (1968).

[5] Р. А. З а й д м а н, Ю. В. Л и н н и к, И. В. Р о м а н о в с к и й, *Планы последовательного оценивания и марковские моменты остановки*, ДАН СССР, Том 185, № 6 (1969), str. 1222–1225.

[6] Р. А. З а й д м а н, Ю. В. Л и н н и к, В. Н. С у д а к о в, *О последовательном оценивании и марковских моментах остановки для процессов с независимыми приращениями.* W zbiorze: Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969, Ч. I, str. 122–143.