ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA VI (1976)

WIKTOR OKTABA (Lublin)

Przegląd niektórych prac Katedry Zastosowań Matematyki Akademii Rolniczej w Lublinie

1. Tematyka badawcza. Prace naukowe Katedry Zastosowań Matematyki Akademii Rolniczej w Lublinie, uprzednio noszącej tytuł Katedry Statystyki Matematycznej, wchodzą w zakres statystyki matematycznej. Wskazują na to następujące zagadnienia, które z braku miejsca omówimy tylko pokrótce: 1. Regresja normalna, 2. Analiza wariancji i kowariancji, 3. Estymacja komponentów wariancyjnych i kowariancyjnych, 4. Układy eksperymentalne, 5. Metody numeryczne, 6. Analiza wielu zmiennych i 7. Problematyka naukowo-dydaktyczna.

Prace mają charakter zarówno teoretyczny, jak i aplikacyjny, uwarunkowany własnymi badaniami i licznymi konsultacjami naukowymi. Dla przykładu można wymienić współpracę z Instytutem Uprawy, Nawożenia i Gleboznawstwa w Puławach, z Polskim Towarzystwem Biometrycznym we Wrocławiu, z Komitetem Hodowli i Uprawy Roślin Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, z Instytutem Technicznym Wojsk Lotniczych w Warszawie, z Instytutem Agro-Fizyki Polskiej Akademii Nauk w Lublinie, z Instytutem Techniki Budowlanej w Warszawie, Akademiami Medycznymi w Lublinie, Krakowie i Białymstoku, z Instytutami Akademii Rolniczych całego kraju, z Centralnym Instytutem Weterynarii w Puławach itp. oraz z wieloma instytutami zagranicznymi.

Załączona bibliografia obejmuje prace omówione bądź cytowane w niniejszym przeglądzie.

2. Regresja normalna. W problemie weryfikacji hipotezy liniowej w teorii normalnej regresji, którym interesowało się od początku bieżącego stulecia wielu statystyków matematyków, uzyskano w Katedrze szereg wyników. Rezultaty początkowe zawarte w trzech twierdzeniach (por. Oktaba [22] i [23]) dotyczą stałego modelu pełnego rzędu. Rozszerzono je na stały model niepełnego rzędu (por. Oktaba [49] i [52]) korzystając z twierdzeń C. R. Rao, z teorii najmniejszych kwadratów i z uogólnionej macierzy odwrotnej $\boldsymbol{G}$ wprowadzonej przez Moore'a i Penrose. Poza tym, przy użyciu macierzy $\boldsymbol{G}$ udowodniono twierdzenie o podziale sumy kwadratów na sumy kwadratów z pojedynczymi stopniami swobody oraz wyprowadzono pewną postać zmiennej losowej F metodą reparametryzacji w przypadku klasyfikacji pojedynczej.

Niektóre rezultaty w notacji macierzowej zestawione w twierdzeniach poprzedzamy następującymi uwagami.

Niech Ω oznacza stały model matematyczny

$$y = X\beta + e, \tag{2.1}$$

gdzie błędy eksperymentalne $e_1, e_2, \ldots, e_n$, będące współrzędnymi losowego wektora kolumnowego $e = \underset{n1}{e}$, mają niezależne rozkłady normalne ze średnimi równymi zeru i wspólną wariancją σ^2. Przypuśćmy, że ustalona macierz $X = \underset{np}{X}$ (o n wierszach i p kolumnach) jest rzędu $r(X) = r < p < n$, gdzie p jest liczbą współrzędnych wierszowego wektora parametrów $\underset{1p}{\beta'} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p]$. Wartości oczekiwane współrzędnych wektora losowego y, gdzie $\underset{1n}{y'} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$, stanowią wektor

$$\mathscr{E}(y) = X\beta. \tag{2.2}$$

Z uwagi na niepełny rząd macierzy X, równania normalne

$$S\hat{\beta} = X'y \tag{2.3}$$

zawierają macierz osobliwą $S = X'X$, a więc nie dają jednoznacznego rozwiązania na estymator $\hat{\beta}$.

Jednoznaczną wartość uzyskują jedynie funkcje estymowalne

$$\underset{m1}{\varphi} = \underset{mp}{Ł}\ \underset{p1}{\beta}, \tag{2.4}$$

tj. funkcje parametrów $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ spełniające warunek

$$\underset{mp}{Ł}\ \underset{pp}{H} = \underset{mp}{Ł}, \tag{2.5}$$

gdzie $H = GS$ jest macierzą idempotentną, a G jest uogólnioną macierzą odwrotną macierzy S, tj. macierzą spełniającą relacje

$$SGS = S \quad \text{i} \quad GSG = G. \tag{2.6}$$

TWIERDZENIE 2.1. *Niech w modelu Ω postaci $y = X\beta + e = X_1\gamma + X_2\delta + e$ prawdziwa będzie hipoteza*

$$L\gamma = \varphi_0, \tag{2.7}$$

gdzie $L = \underset{ma}{L}$, $r(L) = m < a$, $\gamma' = \underset{1a}{\gamma'} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_a]$ jest podwektorem wektora $\beta' = \underset{1p}{\beta'} = [\underset{1a}{\gamma'} : \underset{1,p-a}{\delta'}]$, φ_0 jest wektorem o m współrzędnych i $\underset{np}{X} = [\underset{na}{X_1} : \underset{n,p-a}{X_2}]$.

Wtedy zmienna losowa

$$F = \frac{(L\hat{\gamma} - \varphi_0)'(LG_{11}L')^{-1}(L\hat{\gamma} - \varphi_0)}{m} : \frac{y'y - (X'y)'G(X'y)}{n-r} \tag{2.8}$$

ma rozkład F z m i $n-r$ stopniami swobody, gdzie

$$\hat{\beta} = \underset{p1}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = GX'y + (H - I)z$$

jest estymatorem parametru $\boldsymbol{\beta}$, $\underset{aa}{\boldsymbol{G}_{11}} = \boldsymbol{G}_{11}$ — *podmacierzą macierzy* $\boldsymbol{G} = \underset{pp}{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$, *która jest uogólnioną macierzą odwrotną wobec* $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{GS}$ *a z jest dowolnym wektorem. Liniowe funkcje* $\boldsymbol{L}\gamma$ *są estymowalne, gdy*

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}_{11} = \boldsymbol{L} \quad i \quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{H}_{12} = 0, \tag{2.9}$$

gdzie

$$\boldsymbol{H}_{11} = \underset{aa}{\boldsymbol{H}_{11}}, \quad \boldsymbol{H}_{12} = \underset{a,p-a}{\boldsymbol{H}_{12}} \quad oraz \quad \boldsymbol{H} = \underset{pp}{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}.$$

W przypadku modelu pełnego rzędu udowodniono odpowiednie twierdzenie (por. Oktaba [29]).

TWIERDZENIE 2.2. *Niech dla modelu* Ω *postaci* $\underset{n1}{\boldsymbol{y}} = \underset{na}{\boldsymbol{X}_1}\underset{a1}{\gamma} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{e}$ *s liniowych funkcji estymowalnych* $\boldsymbol{L}_i\gamma$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ *spełnia wzajemnie ortogonalne warunki*

$$\boldsymbol{L}_i \boldsymbol{G}_{11} \boldsymbol{L}_j' = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, s), \tag{2.10}$$

gdzie macierz $\boldsymbol{G}_{11}$ *jest zdefiniowana w twierdzeniu* 2.1. *Wtedy suma kwadratów dla hipotezy estymowalnej*

$$\underset{sa}{\boldsymbol{L}}\underset{a1}{\gamma} = \boldsymbol{0}, \quad gdzie \quad \boldsymbol{L} = [\boldsymbol{L}_1 \vdots\ \boldsymbol{L}_2 \vdots \ldots \vdots\ \boldsymbol{L}_s] \quad i \quad r(\boldsymbol{L}) = s \leqslant a,$$

jest sumą s sum kwadratów z pojedynczymi stopniami swobody

$$(\boldsymbol{L}\hat{\gamma})'(\boldsymbol{L}\boldsymbol{G}_{11}\boldsymbol{L}')^{-1}(\boldsymbol{L}\hat{\gamma}) = \sum_{i=1}^{s} \frac{(\boldsymbol{L}_i\hat{\gamma})^2}{\boldsymbol{L}_i \boldsymbol{G}_{11} \boldsymbol{L}_i'}. \tag{2.11}$$

Ze wzoru (2.11) można korzystać w analizie wariancji.

TWIERDZENIE 2.3. *Przy założeniach modelu* Ω *oraz przy estymowalnych restrykcjach*

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta}, \tag{2.12}$$

gdzie $\boldsymbol{M} = \underset{mp}{\boldsymbol{M}}$, $r(\boldsymbol{M}) = m < r$, $\boldsymbol{\eta} = \underset{m1}{\boldsymbol{\eta}}$, *i przy estymowalnej i prawdziwej hipotezie*

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}, \tag{2.13}$$

gdzie $\boldsymbol{W} = \underset{wp}{\boldsymbol{W}}$, $r(\boldsymbol{W}) = w$, $m + w < r < p$ *oraz przy niezależności* (2.12) *i* (2.13), *zmienna losowa*

$$F = \frac{(\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\tau})'(\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}')^{-1}(\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\tau}) - (\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\eta})'(\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}\boldsymbol{M}')^{-1}(\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\eta})}{w} : \tag{2.14}$$

$$: \frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})'\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\eta})'(\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}\boldsymbol{M}')^{-1}(\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\eta})}{n - r + m}$$

ma rozkład F z w i $n - r + m$ *stopniami swobody, gdzie* $\underset{m+w,p}{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{W} \end{bmatrix}$ *i* $\underset{m+w,1}{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$, *a G jest uogólnioną odwrotną macierzą względem* $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ *przy* $\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$.

Twierdzenie to uogólnia twierdzenie 2.2 (por. [23]) dla regresji wielokrotnej na przypadek modelu niepełnego rzędu.

TWIERDZENIE 2.4. *Niech przy założeniach modelu Ω hipoteza, że p parametrów $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ wyraża się jako liniowa kombinacja $p-q$ innych parametrów $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \ldots, \vartheta_{p-q}$, tworzących wektor $\boldsymbol{\vartheta} = \underset{p-q,1}{\boldsymbol{\vartheta}}$, będzie postaci*

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\vartheta}, \tag{2.15}$$

gdzie $\boldsymbol{\beta} = \underset{p1}{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{U} = \underset{p,p-q}{\boldsymbol{U}}$ *i* $r(\boldsymbol{U}) \leqslant p-q < r$. *Wtedy zmienna losowa*

$$F = \frac{(\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{U}')\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{\beta}}}{r-r_1} : \frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})'\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y})}{n-r} \tag{2.16}$$

ma rozkład F z $r-r_1$ i $n-r$ stopniami swobody, gdzie $r_1 = r(\boldsymbol{X}\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{G}$ i $\boldsymbol{G}_1$ są uogólnionymi macierzami odwrotnymi odpowiednio macierzy $\underset{pp}{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{U}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}$.

Gdy model Ω staje się modelem pełnego rzędu, uzyskujemy dawne twierdzenie dla regresji wielokrotnej (por. [23]).

Zauważmy, że twierdzenia 2.1–2.4 można wykorzystać do weryfikacji zaznaczonych w nich hipotez zerowych.

Wyznaczono również wartości oczekiwane form kwadratowych występujących w twierdzeniach 2.1, 2.3 i 2.4 dla zmiennych losowych F i niektórych innych. Przedstawiono pewne zastosowania twierdzeń dla modeli z klasyfikacją jedno- i dwukierunkową. Znaleziono wyraźną postać zmiennej losowej F w modelu klasyfikacji pojedynczej dla weryfikacji hipotezy, że kombinacja liniowa parametrów jest zerem, gdy wiadomo, że inna dana kombinacja liniowa tych parametrów ma daną wartość. Korzystając z twierdzenia tu nie zamieszczonego wyprowadzono dwie postaci zmiennej losowej F dla weryfikacji dwu hipotez: 1) regresje wielokrotne są równoległe i 2) regresje wielokrotne przecinają się w jednym punkcie.

3. Analiza wariancji i kowariancji

3.1. Iloczyny Kroneckerowskie macierzy dla zrównoważonych danych. W przypadku gdy w modelu matematycznym postaci (2.1) X jest macierzą układu statystycznego opartego na wielokrotnych klasyfikacjach krzyżowych, hierarchicznych bądź ich dowolnej kombinacji mamy model analizy wariancji. Macierz X jest na ogół niepełnego rzędu i obejmuje tylko jedynki i zera.

Zarówno z punktu widzenia teoretycznego, jak i aplikacyjnego podstawowy problem analizy wariancji polega na określeniu wyraźnej postaci macierzy X. Rozwiązano go formułując i dowodząc trzech twierdzeń, gdy dane liczbowe stanowią klasyfikację krzyżową: (1) z $a_0 = 1$, (2) z $a_0 > 1$ obserwacją w każdej podklasie i (3) klasyfikację hierarchiczną (por. Oktaba [60]). Uogólnienie tych twierdzeń na przypadek dowolnej kombinacji klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną jest bezpośrednie.

Metoda polega na przedstawieniu *explicite* podmacierzy $X_1, \ldots, X_t$ danej macierzy $X = [X_1 \vdots X_2 \vdots \ldots \vdots X_t]$,' jako uporządkowanych iloczynów Kroneckerow-

skich macierzy jednostkowych I oraz wektorów jedynkowych E w przypadku zrównoważonych modeli. Wówczas wektor β, występujący w (2.1), jest wektorem parametrów obejmującym t zbiorów uporządkowanych według Yatesa. Efekty każdego z t zbiorów porządkuje się w ten sam określony sposób jak obserwacje wektora y.

Walorem tej metody jest m.in. możliwość wypisania sum kwadratów lub form kwadratowych $y'Ay$ w wyraźnej postaci, w której macierze A są znanymi funkcjami podmacierzy $X_1, \ldots, X_t$, a te z kolei znanymi postaciami iloczynów Kroneckerowskich.

Z metody tej można korzystać w programach dla elektronicznych maszyn cyfrowych, celem uzyskania analizy wariancji i analizy wielu zmiennych.

3.2. Relacje między sumami kwadratów i stopniami swobody. Również podstawową rolę w teorii analizy wariancji, w przypadkach modeli zrównoważonych, gra prosta i wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między sumami kwadratów i wzorami analitycznymi na liczby stopni swobody. Metoda ta oddaje znaczne usługi przy opracowywaniu liczbowych danych eksperymentalnych za pomocą metod statystycznych (por. [25]). Bez trudności daje się ją zapisać w notacji macierzowej, jeśli uwzględni się operatory rzutowe.

Metoda ta jest ogólna i może być stosowana w obszernej klasie układów eksperymentalnych opartych na klasyfikacji α) krzyżowej, β) hierarchicznej bądź γ) na różnych wariantach obu tych klasyfikacji, a w szczególności na zasadach: rozszczepionych poletek, kompletnego (nieczęściowego) uwikłania interakcji w blokach, kwadratu łacińskiego i jego uogólnień.

Do tej klasy zaliczają się znane i powszechnie stosowane układy doświadczalne takie, jak: układ kompletnej randomizacji, układ bloków kompletnie zrandomizowanych, układy doświadczeń czynnikowych, itp. Metoda ta nie może jednakże być stosowana do takich układów eksperymentalnych jak kraty lub układy z częściowym uwikłaniem interakcji.

Wskazano, że dzięki addytywności stopni swobody w ANOVA dla zrównoważonych układów można za pomocą metody M obliczać bezpośrednio sumy kwadratów dla kolejnych błędów a, b i c w układzie podwójnie rozszczepionych jednostek eksperymentalnych. W tym celu wystarczy wyznaczyć sumy kwadratów dla poszczególnych składników dla każdego z tych błędów. Znając sumy kwadratów można z kolei badać ich jednorodność (por. również Przybysz [69]). Nadto fakt ten umożliwia kontrolę poprawności rachunków poprzez obliczenie sum kwadratów dla błędu eksperymentalnego za pomocą dwóch niezależnych metod (przez dopełnienie i przez sumowanie składników błędu).

3.3. Mieszany model z interakcją dla danych niezrównoważonych. Przy umiarkowanie ogólnych założeniach, przedstawiono definicje efektów głównych i interakcyjnych, opartych na wagach, dla modelu mieszanego $I \times J$ dwukierunkowej klasyfikacji $A \times B$, w przypadku nierównych liczebności n_{ij} ($i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$) w podklasach, gdy jeden z efektów jest stały, a drugi wraz z interakcją jest losowy. Podano analizę wariancji, niektóre wartości oczekiwane średnich kwadratów i przy-

bliżone testy istotności F dla zweryfikowania hipotez o braku efektów głównych i interakcyjnych przy trzech typach klasyfikacji $I\times J$, $I\times 2$ i 3×3 oraz estymowano komponenty wariancyjne i kowariancyjne.

Dla modelu $I\times 2$ przy nieważonych restrykcjach, przedstawiono testy F, a w szczególności wyprowadzono następującą zmienną losową F, której z uwagi na $\mathscr{E}(V_A) \neq \neq \mathscr{E}(V_{AB})$ przy $J > 3$ nie używa się w przypadku $J > 3$ (por. Oktaba [27], [30], [31], [32]):

$$F = \frac{V_A}{V_{AB}} \quad \text{z} \quad I-1 \text{ i } I-1 \text{ stopniami swobody,}$$

gdzie

$$V_A = \frac{1}{I-1}\sum l_i\left(\theta_i - \frac{\sum l_i\theta_i}{\sum l_i}\right)^2, \quad V_{AB} = \frac{1}{I-1}\sum l_i\left(z_i - \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}\right)^2,$$

$$\theta_i = \sum_j^2 \bar{y}_{ij.}, \quad l_i = \frac{n_{i1}n_{i2}}{n_{i1}+n_{i2}}, \quad z_i = \bar{y}_{i1.} - \bar{y}_{i2.}, \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{1}{n_{ij}}\sum_k^{n_{ij}} y_{ijk}.$$

Dla modelu 3×3 uzyskano wartość oczekiwaną średniego kwadratu dla interakcji AB przy nieważonych restrykcjach. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, że wszystkie stałe efekty klasyfikacji A są równe zeru, wykazano, że $V_A \neq V_{AB}$ i że te średnie kwadraty zależą od tych samych komponentów, tj. od wariancji losowej, wariancji efektów interakcyjnych i kowariancji tych efektów. Wydaje się, że twierdzenie to jest również prawdziwe dla modelu ogólnego $I\times J$.

3.4. Modele dla danych proporcjonalnych. Przez dane proporcjonalne rozumie się 1) klasyfikację krzyżową z wierszami $i = 1, 2, \ldots, r$ i kolumnami $j = 1, 2, \ldots, s$ oraz n_{ij} (liczba obserwacji w podklasie ij) taką, że $n_{ij} = p_i s_j$ lub 2) klasyfikację hierarchiczną z $n_{ij} = p_i s_j$ w j-tej podgrupie i-tej grupy efektu głównego. Przedstawiono analizy wariancji dla obu przypadków. Użyto dwu systemów reparametryzacji: jeden z nieważonymi restrykcjami liniowymi i drugi z ważonymi zależnymi od p_i oraz s_j. Oczywiście testy dla efektów równych zeru są takie same w obu systemach (por. Oktaba i Mikos [63]). Rozważono różnice między modelami ze względu na oceny parametrów, testy istotności i przedziały ufności dla różnych restrykcji. Nadto przedstawiono metody konstruowania układów jednoczesnych przedziałów ufności. Podano przykład liczbowy. Rozważono modele stałe i losowe.

3.5. Metoda kompletnego uwikłania interakcji z blokami. Przedstawiono metodę konstruowania i zakładania eksperymentów z 2, 3, 4 i 5 poziomami każdego z czynników według zasady kompletnego wikłania interakcji lub jej składników z niekompletnymi blokami. Zamieszczono definicje głównych efektów i interakcji oraz interakcji uogólnionej. Zestawiono plany doświadczeń typu 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 3^3, 3^4, 4^2, 4^3, 5^2, 5^3 w 17 tablicach. Metoda zasługuje na powszechne jej propagowanie z uwagi na to, że zalicza się do najprostszych wśród układów niekompletnych bloków (por. Oktaba [21] i [62]). Opisano dokładnie analizę wariancji wraz z ilustracją jej na autentycznym przykładzie liczbowym doświadczenia polowego typu

4^3, założonego według schematu podanego w pracy. Przedstawiono metodę konstrukcji niezależnych sum kwadratów analizy wariancji dla kolejnych składników głównych i interakcyjnych, wykorzystując niektóre pojęcia z teorii liczb i ciała Galois dla układu eksperymentalnego klasy (S^h, S^m), gdzie h jest liczbą czynników, z których każdy występuje w S poziomach: $0, 1, 2, \ldots, S-1$ a m jest liczbą tzw. generatorów $(m < h)$, gdzie S^m oznacza liczbę bloków w każdej replikacji. W układzie takim wikłamy S^m-1 stopni swobody, na które się składa $\frac{S^m-1}{S-1} = S^{m-1}+$ $+S^{m-2}+\ldots+S+1$ składników interakcyjnych, każdy z $S-1$ stopniami swobody $(S = 2, 3, 4, 5)$.

W roku 1954 w Zakładzie Rolniczo-Doświadczalnym należącym do UMCS założono doświadczenie czynnikowe według układu kompletnie wikłającego trzy stopnie swobody należące do składnika $W^1D^1N^1$ interakcji trójczynnikowej WDN. W eksperymencie tym chodziło m.in. o zbadanie wpływu czterech gęstości wysiewu ($W^0 = 180$, $W^1 = 200$, $W^2 = 220$ i $W^3 = 240$ kg/ha) i czterech poziomów nawożenia azotowego ($n^0 = 0$, $n^1 = 15$, $n^2 = 30$ i $n^3 = 45$ kg/ha azotu w czystym składniku) na plony czterech odmian pszenicy jarej: Rokickiej (d^0), Ostki Chłopickiej (d^1), Opolskiej (d^2) i Kogi (d^3) w kolejnych kilku latach.

3.6. Metoda konstrukcji macierzy ortogonalnej. Przedstawiono graficzną metodę konstrukcji zbiorów wzajemnie ortogonalnych kontrastów, która stanowi zarazem metodę konstrukcji macierzy ortogonalnej. Wykorzystano twierdzenie z teorii liczb o systematycznych rozwinięciach liczb naturalnych przy dowolnej zasadzie numeracji $a \geqslant 2$. W przypadku $a = 2$, podano *explicite* tożsamość, wyrażającą podział sumy kwadratów odchyleń pojedynczych obserwacji od średniej na $n-1$ składników wyznaczonych zgodnie z przedstawioną metodą przy n obserwacjach. Zamieszczono uogólnienie na przypadek dowolnej naturalnej zasady i niektóre zastosowania (por. [24]). Rozważono również kontrasty w przypadku danych nieortogonalnych (por. [28]).

3.7. Modele matematyczne rozszczepionych jednostek eksperymentalnych. Rozpatrzono cztery modele dla układu pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych przy następujących założeniach: 1) wektor obserwacji ma rozkład normalny wielowymiarowy, 2) efekty błędu „pierwszego" są skorelowane wewnątrz replikacji, 3) efekty błędu „drugiego" są skorelowane wewnątrz dużych poletek. Korzystając z analizy wariancji, zbadano formy kwadratowe dla kolejnych źródeł zmienności i zaproponowano funkcje testowe dla weryfikacji hipotez zerowych odnośnie efektów modelu. Rozważono modele: stały, losowy i dwa mieszane (por. Niedokos [17]).

3.8. Operatory rzutowe w ANOVA. Korzystając z operatorów rzutowych, przedstawiono estymację parametrów i weryfikację hipotez liniowych. Wyniki pracy znajdują zastosowania m.in. w analizie wariancji dla jedno- i dwukierunkowych klasyfikacji z danymi niezrównoważonymi i danymi o proporcjonalnych liczebnościach

w podklasach dla modelu stałego. Rozważono restrykcje liniowe z dowolnymi wagami i proporcjonalnymi do liczebności obserwacji w podklasach (por. Mikos [15]).

3.9. Metoda pośrednia i bezpośrednia w ANOVA i analizie kowariancji. Przedstawiono analizę wariancji i kowariancji dla klasyfikacji krzyżowych bez interakcji i z interakcją przy danych niezrównoważonych oraz dla klasyfikacji hierarchicznych i ich kombinacji z krzyżowymi. Wiadomo, że kowariancyjne modele matematyczne, tj. modele ze zmiennymi towarzyszącymi, podlegają ogólnej teorii modeli wariancyjnych. Korzystając z metody dopasowania stałych, zdefiniowano sumy kwadratów jako różnice dwu reduktów. Testy istotności F wynikają z ogólnej teorii największej wiarygodności.

W przypadku analizy wariancji i kowariancji z danymi niezrównoważonymi dla klasyfikacji krzyżowej bez interakcji, zalecono dwie metody: pośrednią i bezpośrednią (por. Oktaba [22]) bądź ich kombinację. Szczególnie warto zwrócić uwagę na zastosowanie metody bezpośredniej przy obliczaniu sum kwadratów w przypadku klasyfikacji hierarchicznej i w analizie kowariancji.

Metoda pośrednia polega na wyznaczaniu sum kwadratów w analizie wariancji jako różnic reduktów dla modelu wyjściowego i modelu hipotetycznego. Korzysta się z niej przy obliczaniu sum kwadratów dla wielkiej klasyfikacji. Nie jest ona efektywną dla małej klasyfikacji. Przez redukt rozumiemy sumę iloczynów estymatorów parametrów i odpowiadających im prawych stron równań normalnych.

Metoda bezpośrednia obliczania sum kwadratów wymaga wyznaczenia estymatora parametru, dla którego obliczamy sumę kwadratów, i odwrócenia dwu macierzy: 1) macierzy równań normalnych $\boldsymbol{Z}$ oraz 2) macierzy blokowej $\boldsymbol{Z}^{ii}$ macierzy $\boldsymbol{Z}$, która to macierz $\boldsymbol{Z}^{ii}$ odpowiada i-temu źródłu zmienności. Przy stosowaniu metody bezpośredniej funkcje testowe mają podobną i przejrzystą postać.

Zreferujemy metodę bezpośrednią. Zapiszmy model matematyczny (2.1) w postaci

$$y = X\beta + e = X_1\beta_1 + \ldots + X_d\beta_d + e, \tag{3.9.1}$$

gdzie

$$\underset{p1}{\beta'} = [\beta_1' \vdots \ldots \vdots \beta_d'] \tag{3.9.2}$$

oraz

$$\underset{np}{X} = [\underset{na_1}{X_1} \vdots \ldots \vdots \underset{n,a_d}{X_d}], \tag{3.9.3}$$

przy czym

$$\beta_i' = [\beta_{i1}, \ldots, \beta_{i,a_i}] \quad (i = 1, 2, \ldots, d) \tag{3.9.4}$$

są wektorami blokowymi wektora parametrów β, a $X_1, \ldots, X_{d-1}, X_d$ — macierzami blokowymi macierzy X, d jest liczbą efektów modelu łącznie ze średnią populacji μ i współczynnikami regresji przy zmiennych towarzyszących, $p = a_1 + \ldots + a_d$ — liczbą zależnych i niezależnych parametrów.

Nałóżmy na parametry β restrykcje liniowe. Eliminując parametry zależne uzyskujemy model pełnego rzędu

$$\underset{n1}{y} = \underset{nt}{U}\underset{t1}{\theta} + \underset{n1}{e} = U_1\theta_1 + \ldots + U_d\theta_d + e, \tag{3.9.5}$$

w którym rząd macierzy $U = [U_1 \vdots U_2 \vdots \ldots \vdots U_d]$ jest równy liczbie niezależnych parametrów θ, gdzie $\theta' = [\theta_1' \vdots \ldots \vdots \theta_d']$. Estymatory d zbiorów parametrów $\theta_1, \ldots, \theta_d$ uzyskujemy z równań normalnych pełnego rzędu

$$Z\hat{\theta} = U'y, \tag{3.9.6}$$

gdzie

$$Z = U'U = \begin{bmatrix} U_1'U_1 & U_1'U_2 & \ldots & U_1'U_d \\ & U_2'U_2 & \ldots & U_2'U_d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & U_p'U_d \end{bmatrix} \tag{3.9.7}$$

jest macierzą symetryczną.

Jeśli

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} Z^{11} & Z^{12} & \ldots & Z^{1d} \\ & Z^{22} & \ldots & Z^{2d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & Z^{dd} \end{bmatrix}, \tag{3.9.8}$$

to sumami kwadratów dla d kolejnych źródeł zmienności odpowiadających estymatorom $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_d$ są

$$SS_i = \hat{\theta}_i'(Z^{ii})^{-1}\hat{\theta}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, d). \tag{3.9.9}$$

Wzory (3.9.9) stanowią metodę bezpośrednią wyznaczania sum kwadratów zarówno w analizie wariancji jak i kowariancji dla klasyfikacji krzyżowej, hierarchicznej i ich kombinacji. Sumą kwadratów dla błędu jest

$$SS_e = y'y - \hat{\theta}'U'y = y'y - \sum_{i=1}^{d} \hat{\theta}_i y_i,$$

gdzie $y_i = U_i'y$ są wektorami prawych stron równań normalnych.

3.10. Analiza kowariancji. Rozważmy matematyczny model liniowy analizy kowariancji postaci

$$y = X\beta + Z\delta + e,$$

gdzie $\underset{n1}{y}$ jest wektorem obserwacji, $\underset{np}{X}$ — znaną macierzą układu eksperymentalnego o niepełnym rzędzie $r(X) = v < p$, $\underset{p1}{\beta}$ — wektorem parametrów, $\underset{nq}{Z}$ — znaną macierzą (pełnego rzędu) obserwacji zmiennych towarzyszących, $\underset{q1}{\delta}$ — nieznanym wektorem parametrów regresyjnych wektora y względem każdego z q wektorów $z_1, \ldots, z_q$ zmiennych towarzyszących, $\underset{n1}{e}$ — wektorem błędów eksperymentalnych. Wykorzystując własności uogólnionych macierzy odwrotnych uogólniono znane wyniki dla modelu stałego z nieskorelowanymi zmiennymi na takiż model ze zmiennymi skorelowanymi oraz na model mieszany. Wyniki dotyczą danych niezrównoważonych (por. Suwała, *Analiza kowariancji*, 1973, praca doktorska).

Podano estymatory $\hat{\beta}$ i $\hat{\delta}$ metodą najmniejszych kwadratów dla modelu stałego oraz ich wartości oczekiwane i macierze kowariancji. Przedstawiono funkcje testowe dla weryfikacji hipotezy odnośnie δ i funkcji estymowalnych parametrów β. Zamieszczono przedziały ufności Scheffégo dla parametrów δ i funkcji estymowalnych parametrów β.

Do danych skorelowanych y zastosowano przekształcenie w celu wykorzystania wyników dla zmiennych nieskorelowanych.

Korzystając z trzeciej metody Hendersona i czwartej metody Searle'a podano metodę estymacji komponentów wariancyjnych i efektów stałych w mieszanym modelu liniowym. Zamieszczono również zastosowania teorii analizy kowariancji do rozwiązywania problemów technicznych oraz program dla elektronicznej maszyny cyfrowej. Zilustrowano zastosowania przykładami liczbowymi z zakresu przechowalnictwa owoców i eksploatacji pojazdów.

4. Estymacja komponentów wariancyjnych i kowariancyjnych

4.1. Pierwsza metoda Hendersona i metoda RO. Wielu przyrodników (hodowców, genetyków, itp.) interesuje się zagadnieniami oceny komponentów wariancyjnych i udziału tych komponentów w całkowitej zmienności wyników. Problematyka z punktu widzenia teoretycznego jest bardzo bogata i obejmuje wiele zagadnień dotąd otwartych.

Zagadnienie estymacji komponentów wariancyjnych w zrównoważonych modelach: stałych, losowych i mieszanych oraz tzw. modelach skończonej populacji najogólniejszego typu, a więc opartych na dowolnej kombinacji krzyżowej z hierarchiczną, zostało rozwiązane przez Bennetta i Franklina. Reguły Crumpa i Schultza, odpowiednio dla modeli losowego i mieszanego, są szczególnymi przypadkami reguły Bennetta i Franklina.

Gdy dane są niezrównoważone, tj. liczebności w podklasach danych liczbowych opartych na klasyfikacjach krzyżowej i hierarchicznej są nieproporcjonalne, to metody oszacowania komponentów są bardziej złożone.

Podstawowymi metodami są trzy metody Hendersona H_1, H_2 i H_3 oraz czwarta: metoda Searle'a.

Z pierwszą metodą Hendersona wiąże się metoda RO zreferowana w odpowiednim twierdzeniu (por. Oktaba [37], [40] i [43]). Oto opis metody RO. Rozpatruje się model losowy z p nieskorelowanymi efektami: $a, b, \ldots, e$, których średnimi są zera a wariancjami, zwanymi komponentami wariancyjnymi: $\sigma_a^2, \sigma_b^2, \ldots, \sigma_e^2$. Twierdzenie dostarcza wzorów na współczynniki (funkcje liczebności podklas) w układzie $p+1$ równań z tylomaż niewiadomymi estymatorami: $\hat{\mu}^2$ (kwadratem estymatora średniej populacji μ) i p wariancjami $\hat{\sigma}_a^2, \hat{\sigma}_b^2, \ldots, \hat{\sigma}_e^2$ dla niezrównoważonego modelu, gdy dane liczbowe stanowią dowolną kombinację klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną i zawierają nieproporcjonalne liczebności w podklasach a w szczególności pewne podklasy bez obserwacji.

Rozwiązanie $p+1$ równań z $p+1$ niewiadomymi estymatorami dostarcza wariancji nieobciążonych. Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia (metody) jest

reguła Le Roy'a dla podwójnej klasyfikacji krzyżowej. Metoda RO upraszcza pierwszą metodę Hendersona, gdyż rozwiązuje problem estymacji komponentów bez obliczania wartości oczekiwanych sum kwadratów z analizy wariancji.

Znaczenie metody RO wyraża się w jej prostocie i szerokich zastosowaniach oraz w tym, że można z niej korzystać w drugiej metodzie Hendersona i czwartej Searle'a.

Przedstawiono zastosowania twierdzenia na różnych modelach i na przykładzie liczbowym z zakresu zootechniki.

Z twierdzenia przedstawiającego metodę RO wynikają w szczególności wzory Ganguli, gdy ograniczymy się do niezrównoważonej klasyfikacji hierarchicznej i wzory Crumpa dla modeli losowych i zrównoważonych.

4.2. Dowolnie-krotna niezrównoważona klasyfikacja hierarchiczna. Rozpatrywano niezrównoważony model losowy z nieskorelowanymi zmiennymi, oparty na dowolnie-krotnej klasyfikacji hierarchicznej. Przedstawiono ogólną metodę estymacji komponentów wariancyjnych według ANOVA, polegającą na przyrównaniu średnich kwadratów kolejnych źródeł zmienności do estymatorów wartości oczekiwanych tych średnich kwadratów. Wyznaczono ogólne postaci wzorów na współczynniki (funkcje liczebności podklas) przy estymatorach komponentów w wymienionych równaniach liniowych (por. [35]). Uzyskano w ten sposób modyfikację pierwszej metody Hendersona i metody RO dla dowolnej klasyfikacji hierarchicznej.

Na przykładzie liczbowym danych genetycznych z zakresu hodowli drobiu, reprezentującym pięciokrotną klasyfikację hierarchiczną, zilustrowano technikę rachunkową estymacji komponentów wariancyjnych.

Estymację komponentów wariancyjnych w niezrównoważonym modelu hierarchicznym można realizować korzystając z własności przestrzeni liniowych, tj. prezentując ANOVA przy użyciu operatorów rzutowych.

4.3. Druga metoda Hendersona. Druga metoda Hendersona estymacji komponentów wariancyjnych, dla modeli mieszanych bez interakcji między efektami stałymi i losowymi, sprowadza się do metody pierwszej przez odpowiednią transformację. Przedstawiono drugą metodę Hendersona w notacji macierzowej (por. Oktaba [50]). Podano w postaci wyraźnej, co następuje: 1) nieobciążone estymatory stałych parametrów, 2) estymator wariancji błędu, 3) macierze kowariancji estymatorów efektów stałych i losowych oraz 4) nieobciążone estymatory komponentów wariancyjnych.

4.4. Trzecia metoda Hendersona. Trzecia metoda Hendersona estymacji komponentów wariancyjnych, szczególnie zalecana dla modeli mieszanych, stosuje się również do modeli losowych ze skorelowanymi efektami losowymi. Ponieważ metoda ta może dostarczać większą liczbę równań niż wynosi liczba oszacowywanych komponentów wariancyjnych, zaproponowano układ równań, których liczba pokrywa się z liczbą niewiadomych (por. [67]).

Mając na uwadze fakt, że w metodzie tej występują uogólnione macierze odwrotne pokaźnych wymiarów, opracowano programy na e.m.c.

4.5. Metoda sum symetrycznych. Korzystając z metody sum symetrycznych odnośnie modeli mieszanych, wyznaczono nieobciążone estymatory dla pięciu typów mieszanych modeli niezrównoważonych, opartych na kombinacji klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną. Są to modele następujące: 1) podwójna klasyfikacja krzyżowa $A \times B$, gdzie A jest stałe i B losowe, 2) C w $A \times B$, gdzie A — stałe, B — losowe, 3) (C w A)$\times B$, gdzie A — stałe, B — losowe, 4) $A \times C$ w B, gdzie A — stałe, B — losowe, 5) potrójna klasyfikacja krzyżowa $A \times B \times C$, gdzie A — stałe, B i C — losowe. Wykazano, że w modelach 1), 3) i 5) wszystkie estymatory komponentów wariancyjnych są niezmiennikami translacji wektora obserwacji i że w modelach 2) i 4) mamy po jednym estymatorze reagującym na translację (por. Niedokos [18]).

Z metody tej można korzystać nie dysponując e.m.c. w przypadku modeli, wobec których stosuje się czwarta metoda Searle'a, tj. gdy mamy interakcję między efektami losowymi i stałymi. Metoda Searle'a wymaga wykorzystania e.m.c.

Opracowano odpowiedni przykład liczbowy z badań genetycznych Akademii Rolniczej w Lublinie na zastosowanie metody sum symetrycznych dla modeli mieszanych (por. Oktaba i Wesołowska [64]).

4.6. Ujemne oceny komponentów wariancyjnych. Biorąc pod uwagę uzyskiwanie ujemnych ocen komponentów wariancyjnych w metodach Hendersona, udowodniono twierdzenie o znaku pewnej formy kwadratowej w analizie wariancji. Twierdzenie to głosi, że proporcjonalność liczebności danych w podklasach stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, by jeden ze składników pewnej tożsamości był nieujemny, niezależnie od wartości wyników obserwacji.

4.7. Estymacja współczynników odziedziczalności. Dokonano przeglądu metod estymacji przedziałowej współczynników odziedziczalności dla modeli losowych opartych na następujących klasyfikacjach: 1) pojedynczej, 2) podwójnej hierarchicznej i 3) podwójnej krzyżowej.

Przedstawiono metodę konstruowania dwustronnych obszarów ufności dla współczynników odziedziczalności dla modelu 2) oraz podano wzory na estymatory wariancji współczynników odziedziczalności dla modelu 3), które pozwalają budować przedziały ufności w przypadku dużych prób.

5. Układy eksperymentalne

5.1. Metoda kompletnie wikłająca interakcje. Opracowano metodę konstruowania układów eksperymentalnych kompletnie wikłających interakcje bądź składniki interakcyjne w doświadczeniach czynnikowych typu 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 3^2, 3^3, 3^4, 4^2, 4^3, 5^2 i 5^3. Zamieszczono plany tych doświadczeń oraz przedstawiono metodę wnioskowania.

W wieloletnich rolniczych badaniach eksperymentalnych, popartych analizą statystyczną, potwierdzono rezultaty teoretyczne o zaleceniu stosowania metody kompletnie wikłającej interakcje jako jednej z najprostszych metod przy podziale kombinacji poziomów czynników na bloki (por. [21]).

5.2. Układy niekompletnych bloków. Przedstawiono teorię i klasyfikację ogólnych układów eksperymentalnych niekompletnych bloków dla modeli stałych. Korzystając z notacji macierzowej i ogólnej teorii normalnej regresji, podano estymatory parametrów, analizę wariancji i testy istotności F dla dwóch rodzin układów podstawowych: 1) częściowo zrównoważonych niekompletnych bloków i 2) wewnątrz- i międzygrupowych zrównoważonych niekompletnych bloków. Jako szczególne przypadki rozważono układy niekompletnych bloków z eliminacją niejednorodności w jednym, dwu i więcej kierunkach. Rozważano ortogonalność sum obiektowych, wierszowych i kolumnowych oraz estymowalność kontrastów funkcji parametrycznych. W szczególności przedstawiono takie układy, jak: bloki kompletnie zrandomizowane, kwadrat łaciński, kwadraty grecko-łacińskie i wyższego rzędu, układ naprzemienny (cross-over-design), układ zrównoważonych niekompletnych bloków, kwadrat Youdena, układy kratowe i układy wikłające interakcje (por. [54]).

W przypadku układów niekompletnych bloków z pięcioma parametrami v, b, k, r i λ zajmowano się zagadnieniami ortogonalności, zwartości i zrównoważenia. Podano warunki estymowalności kontrastów obiektowych oraz warunki określające nieestymowalność kontrastów. W szczególności rozpatrzono dwa typy układów: 1) zrównoważonych niekompletnych bloków i 2) rozkładalnych zrównoważonych niekompletnych bloków (Wesołowska, *Pewne aspekty teorii układów eksperymentalnych*, praca doktorska).

6. Metody numeryczne

6.1. Zakres badań. Obok teorii statystyki matematycznej, tematyka badań Katedry jest ściśle związana ze stosowaniem tej teorii w planowaniu doświadczeń i opracowywaniu danych eksperymentalnych, łącznie z wnioskowaniem i odpowiednią interpretacją zgodnie z ostatnimi osiągnięciami nauki w skali międzynarodowej. Interesuje nas problematyka typowa dla nauk przyrodniczych i technicznych w szerokim ich zakresie. Z licznych konsultacji oraz wykładów i kursów statystyki matematycznej prowadzonych przez Katedrę korzystają nie tylko pracownicy naukowi naszej Uczelni, lecz również pracownicy wielu instytutów naukowych w całym kraju, a w szczególności stażyści naukowi, magistranci i doktoranci wykonujący swe prace. Dla przykładu można wymienić magistrantów-matematyków z Uniwersytetu M. Curie-Skłodowskiej w Lublinie, doktorantów z Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Kielcach i w Lublinie, z Akademii Rolniczej w Olsztynie, z Akademii Medycznych w Lublinie, Krakowie i Białymstoku.

W ramach współpracy z Zakładem Metod Numerycznych UMCS, studenci matematyki tej Uczelni wykonują od 1968 roku prace magisterskie w Katedrze w zakresie teorii statystyki matematycznej i metod numerycznych. Prowadzi się dwa seminaria: 1) doktoranckie z estymacji komponentów wariancyjnych i 2) magisterskie z różnych dziedzin teoretycznych statystyki matematycznej.

Z dniem 1 października 1973 roku została powołana w Katedrze Pracownia Metod Numerycznych, której zadaniem wstępnym jest m.in. instalacja i uruchomienie e.m.c. „Odra 1325” w roku 1974 oraz ciągłe i systematyczne przygotowywa-

nie programów opartych na teorii statystyki matematycznej, a w szczególności na badaniach naukowych Katedry. Wykonano dotąd szereg programów na e.m.c. „Odra 1013" i „1204", które wykorzystuje się do opracowywania danych liczbowych uzyskanych z obserwacji lub zaplanowanych doświadczeń według ustalonych układów eksperymentalnych. Szczególnie pomocną jest e.m.c. w zagadnieniach związanych z analizą wielu zmiennych oraz z metodami wykorzystującymi uogólnione macierze odwrotne.

6.2. Programy na e.m.c. Opracowano szereg programów na e.m.c.: UMC-1 i Odrę 1013. Oto niektóre z nich: testy *t* „Studenta" dla zmiennych połączonych i niepołączonych, test chi-kwadrat niezależności dwu cech dla tablicy czterodzielczej, test *F* dla różnicy dwóch wariancji, estymacja charakterystyk próby jednej zmiennej, estymacja komponentów wariancyjnych metodami Hendersona, analiza wariancji dla podwójnej klasyfikacji hierarchicznej oraz dla klasyfikacji krzyżowych: podwójnej, potrójnej i poczwórnej z replikacjami i bez nich, analiza wariancji dla danych nieortogonalnych. Nadto przedstawiono programy dla analizy czynnikowej, dla wyznaczania wektorów i wartości własnych, dla wielokrotnych przedziałów ufności Tukeya i Scheffégo, dla metody iteracyjnej Stevensa w przypadku podwójnej i potrójnej klasyfikacji krzyżowej, dla analizy doświadczeń wielokrotnych. Poza tym zestawiono liczne programy dla kolejnych wykonanych prac magisterskich z zakresu statystyki matematycznej, np. analiza wariancji dla danych skorelowanych, analiza kowariancji, model częściowo zrównoważonych niekompletnych bloków i inne.

6.3. Doświadczenia oparte o układy eksperymentalne. Otrzymano eksperymentalne potwierdzenie teoretycznych wyników o supremacji metody wikłającej interakcje w blokach nad metodą bloków kompletnie zrandomizowanych. Zysk w precyzji oszacowano na około 21% na podstawie wieloletniego doświadczenia polowego zrealizowanego w Rolniczych Zakładach Doświadczalnych Felin, należących do Akademii Rolniczej w Lublinie (por. [62]).

Stosowano układy z rozszczepionymi jednostkami eksperymentalnymi w doświadczeniach pojedynczych i wieloletnich (por. Przybysz [70], [71], [72], Przybysz i Dobrzański [73]).

W pracach z teorii normalnej regresji zamieszczono szereg przykładów na zastosowanie testów istotności oraz odpowiednie przykłady zagadnień występujących w doświadczalnictwie polowym i szklarniowym. Szereg prac dotyczy problematyki związanej z opracowywaniem danych liczbowych metodą analizy wariancji w przypadku danych zrównoważonych i niezrównoważonych (por. Oktaba [22], [25], [41], Przybysz [69], Dobrzański i inni [6]).

Przedstawiono proste metody obliczania sum kwadratów dla kontrastów obiektowych w ANOVA dla modeli niezrównoważonych (por. [28]).

6.4. Zastosowanie metod estymacji komponentów wariancyjnych w genetyce. Metodę RO i technikę rachunkową zilustrowano na przykładzie niezrównoważonych danych genetycznych z zakresu hodowli drobiu, stanowiących kombinację podwój-

nej klasyfikacji krzyżowej (lata × fermy) z podwójną klasyfikacją hierarchiczną (por. [37]).

6.5. Metody statystyczne w medycynie. Opublikowano szereg prac wspólnych z pracownikami naukowymi pediatrii Akademii Medycznej w Lublinie i w Warszawie, wykorzystując różnorodne metody statystyki matematycznej. Opracowano materiały kliniczne i szpitalne dotyczące m.in. urodzeń i śmiertelności noworodków w Klinice Położniczej Akademii Medycznej w Lublinie (por. Kwitowa i Oktaba [11], Dobrzańska i Oktaba [3], [4]; Gębala i inni [7], [8]; Dobrzańska i inni [5]).

6.6. Estymacja brakujących wyników. Dane niezrównoważone wymagają przy opracowaniu statystycznym znacznie więcej trudu niż dane zrównoważone. Stąd dąży się często do oszacowania brakujących wyników dla uzyskania danych zrównoważonych. W tym względzie podano ogólną regułę pozwalającą znaleźć estymator jednej brakującej obserwacji w każdym zrównoważonym układzie eksperymentalnym (por. Niedokos [16]).

Nadto przedstawiono ogólną teorię brakujących wyników, jak również metodę Biggersa dla podstawowych układów eksperymentalnych. Wyznaczono estymator wektora brakujących wyników w formie wyraźnej, wykorzystując uogólnioną macierz odwrotną i uogólniając wynik Seala. Udowodniono, że przy brakujących wynikach suma kwadratów dla hipotezy jest dodatnio obciążona. Przedstawiono praktyczny sposób wyznaczania tych obciążeń. Zilustrowano metodę Biggersa dla następujących układów eksperymentalnych: bloków kompletnie zrandomizowanych, kwadratu łacińskiego, pojedynczo rozszczepionych jednostek. Na przykładach liczbowych zaprezentowano estymację brakujących wyników (Jagiełło i Oktaba [9]).

Zaprogramowano metodę Biggersa na e.m.c. „Odra 1204". Poza tym uzyskano wyniki odnośnie osobliwej macierzy partnerów dotyczące estymacji brakujących obserwacji, pojedynczych i całego bloku, w doświadczeniach metodą pojedynczo rozszczepionych jednostek eksperymentalnych.

6.7. Zastosowania w rolnictwie. Zastosowano metody statystyki matematycznej w zagadnieniach uprawy roślin i w problematyce gleboznawczej.

Zbadano charakter błędu eksperymentalnego w kwadracie łacińskim i w doświadczeniach opartych na zasadzie rozszczepienia jednostek eksperymentalnych. Dokonano podziału błędu w ANOVA na składniki jednorodne w wieloletnich modelach stałych i mieszanych. Uwzględniono przypadki istnienia korelacji pomiędzy błędami eksperymentalnymi. Przedstawiono dokładne i przybliżone funkcje testowe dla weryfikacji hipotez statystycznych oraz przedziały ufności dla parametrów modeli matematycznych.

Odpowiednie wyniki były wykorzystane przez przyrodników w ich badaniach polowych i terenowych, np. przez Katedrę Szczegółowej Uprawy Roślin, Katedrę Łąk i Pastwisk, Katedrę Hodowli Roślin (por. [21], [62]; Styk i Przybysz [75], [76]).

Badano wpływ terminów i sposobów wysiewu na plon zielonej masy facelii, wpływ wysokich dawek nawożenia mineralnego na porost darniny starej i młodej.

Wykorzystano wyniki teoretyczne dotyczące modelu matematycznego dla klasyfikacji krzyżowej w przypadku danych proporcjonalnych (por. Oktaba i Mikos [63]) do badań gleboznawczych (Dobrzański i inni [6], Przybysz i Dobrzański [73], Turski i inni [77]).

W ramach współpracy z Instytutem Agro-Fizyki PAN zbadano zależność pomiędzy zawartością przyswajalnego manganu, a niektórymi frakcjami mechanicznymi w poziomach gleb bielicowych, brunatnych, czarnych ziem i mad. Wyniki te wchodzące w zakres chemii gleb mają duże znaczenie praktyczne i prowadzą do wniosku, że zależności przyswajalnego manganu należy rozpatrywać oddzielnie w odniesieniu do każdego typu i określonego poziomu gleby (Bartuzi i inni [1]).

6.8. Metoda Monte Carlo. Przedstawiono metodę Monte Carlo numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu z zadanymi warunkami brzegowymi przy zastosowaniu metody losowej. Zamieszczono algorytm w postaci schematu blokowego oraz przykład liczbowy.

Zaprezentowana metoda pozwala na znajdowanie rozwiązań równania w pewnym przedziale, tj. w węzłach siatki nałożonej na przedział i może być wykorzystana jedynie na e.m.c. Różni się tym od klasycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych, że pozwala znaleźć rozwiązanie w jednym lub kilku węzłach siatki bez konieczności szukania rozwiązania w pozostałych. Korzystając z tej metody można równocześnie uzyskać rozwiązania równania przy nałożeniu na ten sam brzeg kilku różnych warunków brzegowych.

7. Analiza wielu zmiennych

7.1. Analiza czynnikowa. Przedstawiono proste relacje wiążące modele matematyczne analizy czynnikowej. Modelom tym odpowiadają trzy następujące metody: 1) składowych głównych Hotellinga, 2) Thomsona i 3) największej wiarogodności Lawley'a. Przedyskutowano pewne aspekty rachunkowe z nimi związane. Metody zilustrowano przykładem liczbowym z hodowli roślin. W oparciu o metody iteracyjne, dla których ułożono programy na e.m.c. „Odra 1013", wyznaczono tzw. macierz ocen ładunków czynników i macierz czynników swoistych. Porównano oceny parametrów uzyskane różnymi metodami (por. Kieloch i Oktaba [10]).

7.2. Analiza wariancji wielu zmiennych. Przedstawiono teorię analizy wariancji wielu zmiennych, w tym warunki konieczne i dostateczne estymowalności liniowych funkcji parametrycznych. Nadto wyznaczono estymatory parametrów metodą najmniejszych kwadratów i zamieszczono funkcje testowe dla hipotez liniowych. Opracowano technikę obliczeniową dla e.m.c. (Kieloch, *Estymacja i testowanie hipotez w uogólnionym modelu MANOVA*, praca doktorska).

7.3. Taksonomia. Zestawiono szereg wskaźników podobieństwa używanych w taksonomii. Zdefiniowano wskaźnik podobieństwa Smirnowa dla osobników opisanych wieloma cechami. Korzystając z tego wskaźnika i z metody dendrytów, przedstawiono analizę taksonomiczną dla porządkowania indywiduów. Dla ilustracji metody zamieszczono przykład liczbowy z nasionoznawstwa (Oktaba i Chmielnicka [66]).

8. Problematyka naukowo-dydaktyczna. Poza pracami nad tematyką naukowo-badawczą, w Katedrze napisano szereg podręczników, skryptów i książek z matematyki i statystyki matematycznej dla studentów, oraz słowników wielojęzycznych w ramach współpracy krajowej, międzynarodowej i krajów Rady Wzajemnej Pomocy Gospodarczej. Napisane książki doczekały się wielu wydań na skutek widocznego zapotrzebowania na nie u pracowników naukowych i studentów.

Łącznie opublikowano trzy podręczniki: pierwszy w czterech wydaniach skryptowych i dwu książkowych (por. Oktaba [26], [33], [38], [44]), drugi w skryptowym i dwu książkowych (por. Oktaba [48], [56], [58]) oraz trzeci w dwu wydaniach książkowych (por. Oktaba i Niedokos [65], [68]).

Opracowano słowniki specjalistyczne, proponując do nich wiele nowych haseł z biometrii, rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej i teorii eksperymentu.

Ogłoszono drukiem pierwszy tego rodzaju w literaturze polskiej słownik trójjęzyczny statystyki matematycznej i teorii doświadczenia w trzech wydaniach skryptowych i jednym książkowym (por. Oktaba [34], [36], [39], [53]).

Opracowano szereg haseł ze statystyki matematycznej i doświadczalnictwa do rolniczych słowników francusko-polskiego i rosyjsko-polskiego (por. Oktaba jako współautor [45]) wydanych w naszym kraju. We współpracy z zagranicą opracowano blisko trzy tysiące haseł do trzech słowników: 1) sześciojęzycznego biometrycznego wydanego w Budapeszcie [12], 2) dwutomowego siedmiojęzycznego biometrycznego wydanego w Berlinie [13] oraz 3) dwutomowego ośmiojęzycznego rolniczego wydanego w Pradze Czeskiej [14].

Opublikowano recenzje książek i artykułów z rachunku prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej i teorii eksperymentu (por. Oktaba [42], [47], [51], [55]).

Przetłumaczono książkę angielską ze statystyki matematycznej i dokonano przeglądu części prac z tejże dziedziny w lubelskim ośrodku naukowym (por. [2], [61]).

Bibliografia

[1] J. Bartuzi, A. Chmielnicka, I. Dechnik, L. Malicki, *Korelacja przyswajalnego manganu z frakcją koloidalną i spławialną oraz z odczynem na przykładzie niektórych gleb niziny mazowiecko-podlaskiej*, Polish Journal of Soil Science, Soil Chemistry, 4 (1971), str. 39–46.

[2] H. Cramér, *Metody matematyczne w statystyce*, z angielskiego tłumaczył W. Oktaba, PWN, Warszawa 1958.

[3] A. Dobrzańska, W. Oktaba, *Statystyczna analiza urodzeń i śmiertelności noworodków w Klinice Położniczej Akademii Medycznej za okres 1951–1954*, Ann. UMCS 10 D (1955), str. 159–174.

[4] — — *Uwagi o zmianach w liczbach urodzeń i w śmiertelności noworodków w Klinice Położniczej Akademii Medycznej w Lublinie za okres 1951–1954*, Pediatria Polska 1 (1957), str. 49–54.

[5] A. Dobrzańska, E. Niedokos, B. Niewiedzioł, T. Rusinowa, *Badania porównawcze przydatności chromatyny płciowej*, Polski Tyg. Lek. 28 (1971), str. 1–7.

[6] B. Dobrzański, T. Przybysz, B. Szot, *Zależność plonowania włókna lnu od typologii zasobności i bonitacji gleb*, Ann. UMCS 23 E (1968), str. 69–76.

[7] A. Gębala, A. Dobrzańska, E. Niedokos, T. Rusinowa, *Wpływ leczniczego stosowania estrogenów na obraz morfologiczny jąder granulocytów*, Polski Tyg. Lek. 26 (1969), str. 1–8.

[8] A. Gębala, A. Dobrzańska, E. Niedokos, T. Rusinowa, *The effect of the therapeutic use of estrogens on the morphology of the nuclei of neutrophils*, Polish Med. J. 9 (1970), str. 621–625.

[9] G. Jagiełło, W. Oktaba, *Teoria brakujących wyników i jej zastosowania*, PAN, Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, Warszawa 1973, str. 45–77.

[10] A. Kieloch, W. Oktaba, *Factor analysis by the method of maximum likelihood*, Zastosow. Matemat. (Applicat. Math.) 12 (1971), str. 63–78.

[11] H. Kwitowa, W. Oktaba, *Ocena i analiza statystyczna materiału klinicznego i szpitalnego dotyczącego umieralności noworodków w latach 1946–1950*, Ann. UMCS 9 D (1954), str. 181–190.

[12] Międzynarodowa praca kolektywna, W. Oktaba — współautor, *Mezogazdasagi Konyvkiado Valla Budapest (Magyar Népköztársazág)*, Biometriai Értelmezö Szótar, Mezögazdaság Kiadó, Budapest (Sześciojęzyczny słownik biometryczny: angielsko-niemiecko-polsko-węgiersko-czesko-rosyjski).

[13] Międzynarodowa praca kolektywna, W. Oktaba — współautor, *Veb Deutscher Landwirtschaftsverlag Berlin und Verlag für Landwirtschaftliche Bücher und Zeitschriften Budapest*, Biometrisches Wörterbuch, Band 1/2, Veb Deutscher Landwirtschaftsverlag Berlin, 1967 (Siedmiojęzyczny dwutomowy słownik biometryczny: angielsko-niemiecko-polsko-węgiersko-czesko-francusko-rosyjski).

[14] Międzynarodowa praca kolektywna RWPG, W. Oktaba — współautor, *Ośmiojęzyczny słownik rolniczy: rosyjsko-bułgarsko-czesko-polsko-węgiersko-rumuńsko-niemiecko-angielski*, Statni Zemedelske Nakladatelstvi, Praha 1970, t. 1, 2.

[15] H. Mikos, *Operatory rzutowe w analizie wariancji*, Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, Warszawa 1973, str. 46–78.

[16] E. Niedokos, *Estimation of missing observation in orthogonal designs of experiments*, Folia Soc. Sci. Lublinensis 3/4 C (1963), str. 13–14.

[17] — *On mathematical models of split-plot design*, Ann. UMCS 18 A (1964), str. 123–136.

[18] — *Estimation of variance components in two nonorthogonal models*, Biometrische Zeitschrift 11 (1969), str. 289–296.

[19] — *Estymacja komponentów wariancyjnych w modelach mieszanych nieortogonalnych*, PAN, Wydz. Nauk Rolniczych i Leśnych, Warszawa 1972, str. 1–35.

[20] — *Estimation of variance components in unbalanced mixed models*, Ann. UMCS 27 A (1973), str. 51–69.

[21] W. Oktaba, *Metoda kompletnego uwikłania interakcji z podblokami w doświadczeniach czynnikowych o dwu, trzech, czterech i pięciu poziomach każdego z czynników*, Ann. UMCS 11 E (1956), str. 123–186.

[22] — *On the linear hypothesis in the theory of normal regression*, Ann. UMCS 11 A (1957), str. 17–71.

[23] — *On the linear hypothesis in the theory of normal regression*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. phys., Mathematics, 6 (1958), str. 75–78.

[24] — *On certain method of constructing sets of mutually orthogonal comparisons*, Ann. UMCS 12 A (1958), str. 5–22.

[25] — *O wzajemnej i jednoznacznej odpowiedniości między sumami kwadratów i stopniami swobody w analizie wariancji*, Ann. UMCS 12 E (1958), str. 327–344.

[26] — *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, pierwsze wydanie skryptowe podręcznika, PWN, Warszawa 1962.

[27] — *Mieszany model z interakcją dla danych nieortogonalnych*, Streszczenie referatów i komunikatów zgłoszonych na konferencję statystycznych i operacyjnych zastosowań matematyki, Min. Szk. Wyż., PAN, Warszawa 1962, str. 100.

[28] — *Definition of the sum of squares for a comparison and a simple method of calculating this sum in the case of non-orthogonal data*, Folia Societatis Scientiarum Lublinensis 2 (1962), str. 88–91.

[29] — *On the testing of the linear hypothesis for the model of normal regression*, Ann. UMCS 16 A (1962), str. 95–99.

[30] W. O k t a b a, *Mixed models $I \times J$ and $I \times 2$ with interaction in the case of non-orthogonal data*, Ann. UMCS 16 A (1962), str. 53–76.

[31] — *Expected mean squares and tests of significance for mixed model 3×3 with interaction in the case of non-orthogonal data*, Ann. UMCS 16 A (1962–1964), str. 85–94.

[32] — *Estimates of parameters of mixed model $I \times J$ with interaction in the case of non-orthogonal data*, Ann. UMCS 16 A (1962), str. 77–83.

[33] — *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, II i III wydanie skryptowe podręcznika, PWN, Warszawa 1963.

[34] — *Słownik polsko-rosyjsko-angielski statystyki matematycznej i teorii doświadczenia*, WSR, Lublin 1963, wyd. 1.

[35] — *Nieortogonalne modele losowe klasyfikacji hierarchicznej*, Roczniki Nauk Rolniczych, 1963, 82-B-3, str. 417–435.

[36] — *Słownik polsko-rosyjsko-angielski statystyki matematycznej i teorii doświadczenia*, WSR, Lublin 1964, wyd. 2.

[37] — *Estymacja komponentów wariancyjnych w nieortogonalnych modelach losowych opartych na kombinacji klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną*, Zastosow. Matemat. 7 (1964), str. 435–463.

[38] — *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, skrypt, PWN, Warszawa 1965, wyd. 4.

[39] — *Słownik polsko-rosyjsko-angielski stytystyki matematycznej i teorii doświadczenia*, WSR, Lublin 1965, wyd. 3.

[40] — *Twierdzenie dotyczące metody wyznaczania ocen komponentów wariancyjnych w modelach losowych dla danych nieortogonalnych*. Zastosow. Matemat. (Applicat. Math.) 8 (1965), str. 127–142.

[41] — *Metody analizy wariancji*, Listy Biometryczne, 9–11, Polskie Towarzystwo Biometryczne, Wrocław 1965, str. 1–44.

[42] — *Recenzja książki Reginy Elandt „Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczalnictwa rolniczego", PWN, Warszawa 1964, str. 595*, Wiadom. Matemat. 8 (1965), str. 173–176.

[43] — *Theorem on estimating variance components in random models for non-orthogonal data*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. phys., Mathematics (Statistics) 13 (1965), str. 721–726.

[44] — *Elementy statystki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*. Dwa wydania książkowe, PWN, Warszawa, 1966.

[45] W. O k t a b a — współautor, *Francusko-polski słownik rolniczy pod redakcją H. Wolskiej*, Dictionnaire d'agriculture français-polonais, PWRiL, Warszawa 1966.

[46] W. O k t a b a — współautor, *Rosyjsko-polski słownik rolniczy pod redakcją K. Maksimow*, PWRiL, Warszawa 1966, wyd. 2.

[47] W. O k t a b a, *Recenzja książki Zdzisława Hellwiga „Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej", PWN, Warszawa 1965, str. 234*, Wiadom. Matemat. 9 (1967), str. 285–286.

[48] — *Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie*, PWN, Warszawa 1967, str. 568, skrypt-podręcznik.

[49] — *Tests of the hypotheses for the fixed model non of full rank*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. 16 (1968), str. 409–413.

[50] — *A note on estimating the variance components by the method two of Henderson*, Akademie-Verlag, Berlin, Biometrische Zeitschrift 10 (1968), str. 97–108.

[51] — *Recenzja pracy Z. Nawrockiego „Współczesne problemy doświadczalnictwa społecznego w Polsce"*, Biuletyn IHAR, Nr 1–2, 1968, str. 41–42.

[52] — *Generalized inverses of matrices in a fixed model*, Akademie Verlag, Berlin, Biometrische Zeitschrift 11 (1969), str. 228–251.

[53] — *Słownik polsko-rosyjsko-angielski statystyki matematycznej i teorii doświadczenia*, PWN, Warszawa 1969.

[54] W. Oktaba, *Teoria układów eksperymentalnych. I. Modele stałe*, PAN, Warszawa 1970, str. 1–109.

[55] — *Recenzja książki H. H. Holmana „Planung und Auswertung Biologischer Versuche", Jena, 1970*, Medycyna Weterynaryjna 26 (1970), str. 507.

[56] — *Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie*, PWN, Warszawa 1971, wyd. 1 książkowe.

[57] — *Teoria układów ekperymentalnych. II. Modele mieszane*, PAN, Warszawa 1972, str. 3–24.

[58] — *Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie*, PWN, Warszawa 1972, wyd. 2 książkowe.

[59] — *Estymacja komponentów wariancyjnych metodą analizy wariancji*, Streszczenia referatów i komunikatów, Komitet Nauk Matematycznych PAN, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Jadwisin, 1972, str. 40–41.

[60] — *Iloczyn Kroneckerowski macierzy w analizie wariancji dla zrównoważonych modeli matematycznych*, PAN, Trzecie Colloquium Metodologiczne z Agro-Biometrii, Warszawa 1973, str. 6–44.

[61] — *Mikołaj Olekiewicz 1896–1971*, Wiadom. Matemat. 16 (1973), str. 79–85.

[62] W. Oktaba, W. Rejmak, M. Warteresiewicz, *Efektywność metody uwikłanej i jej zastosowanie dla zbadania wpływu gęstości wysiewu i poziomów nawożenia azotowego na plony czterech odmian pszenicy jarej*, Ann. UMCS 11 E (1956), str. 187–226.

[63] W. Oktaba, H. Mikos, *Matematyczne modele dla danych proporcjonalnych*, Zastosow. Matemat. (Applicat. Math.) 11 (1970), str. 151–172.

[64] W. Oktaba, M. Wesołowska, *Oszacowanie komponentów wariancyjnych w modelach mieszanych*, Ann. UMCS 24 E (1969/1970), str. 331–341.

[65] W. Oktaba, E. Niedokos, *Matematyka i podstawy statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1971.

[66] W. Oktaba, A. Chmielnicka, *Analiza taksonomiczna Smirnowa dla cech jakościowych*, Roczniki Nauk Roln. 97 A (1971), str. 41–52.

[67] W. Oktaba, J. Suwała, *Metody estymacji komponentów wariancyjnych w modelach losowych i mieszanych*, PAN, Warszawa 1972, str. 1–38.

[68] W. Oktaba, E. Niedokos, *Matematyka i podstawy statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1972, wyd. 2.

[69] T. Przybysz, *O niejednorodnym błędzie w analizie wariancji dla kwadratu łacińskiego w modelu z pojedynczo rozszczepionymi poletkami*, Ann. UMCS 19 E (1964), str. 229–306.

[70] — *Pojedyncze doświadczenia oparte na zasadzie rozszczepionych poletek*, Ann. UMCS 19 E (1964), str. 307–332.

[71] — *Schematy doświadczeń bloków losowych i rozszczepionych poletek z roślinami wieloletnimi*, Ann. UMCS 22 E (1967), str. 123–140.

[72] — *Analiza statystyczna doświadczenia z roślinami wieloletnimi w układzie bloków losowych*, Ann. UMCS 22 E (1967), str. 141–148.

[73] T. Przybysz, B. Dobrzański, *The application of a statistical model for proportional data in pedological studies*, Polish Journal of Soil Science 2 (1969), str. 81–86.

[74] T. Przybysz, R. Turski, *Zastosowanie modelu statystycznego dla danych proporcjonalnych z restrykcjami nieważonymi w badaniach gleboznawczych*, Ann. UMCS 22 E (1971), str. 397–405.

[75] B. Styk, T. Przybysz, *Plony zielonej masy i nasion kilku gatunków roślin strączkowych w zależności od ilości ich wysiewu*, Biuletyn IHAR 5 (1967), str. 77–81.

[76] — — *Wpływ następczy niektórych roślin strączkowych na plon pszenicy ozimej*, Ann. UMCS 23 E (1968), str. 87–95.

[77] R. Turski, T. Przybysz, J. Sysa, *Porównanie zasobności w przyswajalny* P_2O_5 *i* K_2O *niektórych kompleksów rolniczej przydatności gleb*, Ann. UMCS 14 E (1969), str. 41–53.