ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA V (1975)

R. BARTŁOMIEJCZYK i S. ŁANOWY (Gliwice)

Wielokrokowe schematy dla jednopunktowych optymalnych funkcji iteracyjnych

Celem niniejszej pracy jest podanie różnych sposobów przedstawienia pewnej podklasy wymiernych f.i. Na tej podstawie podane zostaną pewne wielokrokowe schematy dla obliczania wartości n-optymalnych f.i., które mogą znaleźć zastosowanie w praktyce.

Przyjmujemy oznaczenia i definicje podane w [1].

W pracy rozpatrywać będziemy n-optymalne wymierne f.i., tzn. f.f.i. postaci

$$\Psi = z - \frac{a_0 K_{n-1}(a_0, a_1, \ldots, a_\mu)}{K_n(a_0, a_1, \ldots, a_\mu)}, \tag{1}$$

gdzie $K_p(a_0, a_1, \ldots, a_\mu)$ $(p = n-1, n; n, \mu \in N, n \leqslant \mu)$ są pewnymi wielomianami jednorodnymi stopnia p zmiennych $a_0, a_1, \ldots, a_\mu$, przy czym

$$K_n(0, a_1, \ldots, a_\mu) \not\equiv 0,$$

których rząd zbieżności jest równy $n+1$.

Modyfikując twierdzenia podane w [1] (twierdzenia 6.1 – 6.3) otrzymujemy:

TWIERDZENIE 1. *Każda f.f.i. dająca się przedstawić w postaci* (1) *ma rząd zbieżności* $\leqslant n+1$.

TWIERDZENIE 2. *F.f.i. jest n-optymalną f.i. wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci*

$$\Psi_n = z - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_{n-1-i} a_0^{i+1}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_{n-i} a_0^i}, \tag{2}$$

gdzie $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *są dowolnymi liczbami zespolonymi.*

Podamy obecnie twierdzenia charakteryzujące n-optymalne f.i. w inny sposób niż twierdzenie 2.

TWIERDZENIE 3. *F.f.i. jest n-optymalną f.i. wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci*

$$\Phi_n = z - \frac{a_0 V_{n-1,k}}{V_{n,k}}, \tag{3}$$

gdzie: k–liczba naturalna,

$$(4)\qquad V_{s,k} = \begin{array}{l} s\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ k\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_s & a_{s-1} & a_{s-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \gamma_{s+1} & \gamma_s & \gamma_{s-1} & \dots & \gamma_2 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{s+k-1} & \gamma_{s+k-2} & \gamma_{s+k-3} & \dots & \gamma_k & \gamma_{k-1} & \dots & \gamma_0 \\ \gamma_{s+k} & \gamma_{s+k-1} & \gamma_{s+k-2} & \dots & \gamma_{k+1} & \gamma_k & \dots & \gamma_1 \end{vmatrix},$$

$s = n-1, n$;[1] $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n+k}$ – *dowolne liczby zespolone takie, że*

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_k & \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \dots & \gamma_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

D o w ó d. Oznaczmy

$$(6)\qquad \alpha_i = (-1)^i \begin{vmatrix} \gamma_{i+1} & \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{i+2} & \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i+k} & \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \dots & \gamma_1 \end{vmatrix}, \qquad i = 0\ (1)\ n.$$

Rozwijając wyznacznik (4) według ostatnich k wierszy otrzymujemy

$$(7)\qquad V_{s,k} = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i u_{s-i} a_0^i,$$

gdzie α_i są określone równościami (6).

Stosując wzór (7) do (3) otrzymujemy tożsamość

$$\Phi_n \equiv \Psi_n$$

dla α_i określonych wzorami (6) ($\alpha_0 \neq 0$ na podstawie założenia (5)). Stąd na podstawie twierdzenia 2 wnosimy, że f.f.i. Φ_n jest n-optymalną f.i.

Pozostaje wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ można dobrać liczby $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n+k}$ takie, że zachodzą równości (6).

[1] Dla $s = 0$ przyjmujemy, że wiersze zaznaczone klamrą z literą s nie istnieją.

Przyjmijmy

$$\gamma_1 \neq 0, \qquad \gamma_0 = 0.$$

Równości (6) przyjmują wtedy postać

$$\alpha_i = (-1)^i \gamma_1^{k-1} \cdot \gamma_{i+1}, \qquad i = 0(1)n,$$

a więc

$$\gamma_{i+1} = (-1)^i \frac{\alpha_i}{\gamma_1^{k-1}}, \qquad i = 0\ (1)\ n. \ ■$$

Przyjmiemy obecnie pewne oznaczenia i wykażemy lemat potrzebny do dowodu następnych twierdzeń.

Niech

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$$

będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych.

Oznaczmy $\gamma_1 = \beta_1$,

$$(8) \qquad \gamma_k = \begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_k & \beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \ldots & \beta_1 \end{vmatrix}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

LEMAT 1. *Dla* $i \in N$

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_i & \gamma_{i-1} & \gamma_{i-2} & \ldots & \gamma_1 \end{vmatrix} = \beta_i.$$

D o w ó d. Dla $i = 1$ lemat zachodzi. Załóżmy, że jest on słuszny dla $i = 1\ (1) k-1$.

Rozwijając wyznacznik γ_k (wzór (8)) według elementów pierwszej kolumny i obniżając stopnie wyznaczników występujących w równości otrzymujemy wzór

$$\gamma_k = \beta_1 \gamma_{k-1} - \beta_2 \gamma_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-3} \beta_{k-2} \gamma_2 + (-1)^{k-2} \beta_{k-1} \gamma_1 + (-1)^{k-1} \beta_k.$$

Z ostatniej równości po przekształceniu mamy

$$(10) \qquad \beta_k = \gamma_1 \beta_{k-1} - \gamma_2 \beta_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2} \gamma_{k-1} \beta_1 + (-1)^{k-1} \gamma_k,$$

gdzie β_i dla $i = 1\ (1)\ k-1$ na podstawie założenia indukcyjnego określają równości (9).

Zauważmy, że prawą stronę równości (10) można otrzymać rozwijając wyznacznik (9) dla $i = k$ według elementów pierwszej kolumny (podobnie jak uprzednio wyznacznik γ_k). ∎

TWIERDZENIE 4 *F.f.i. jest n-optymalną f.i. wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci*

$$\tilde{\Phi}_n = z - \frac{a_0 W_{n-1}}{W_n}, \tag{11}$$

gdzie $W_0 = 1$, $W_1 = c_1$,

$$W_k = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 \end{vmatrix}, \qquad k = n-1, n, \tag{12}$$

$c_0 = a_0$,

$$c_s = a_s + \sum_{i=1}^{s} (-1)^i \beta_i a_{s-i} \qquad \textit{dla} \qquad s = 1(1)n, \tag{13}$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ *są dowolnymi liczbami zespolonymi.*

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem.

LEMAT 2. *Przy oznaczeniach* $\beta_0 = \gamma_0 = 1$, (8) *i* (13) *dla* $k = 1(1)n$ *zachodzi tożsamość*

$$\sum_{i=0}^{k} c_{k-i} \gamma_i = a_k, \tag{14}$$

gdzie γ_i *są określone wzorem* (8).

D o w ó d. Stosując do lewej strony równości (14) wzór (13) i przekształcając kolejno otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{k} \gamma_i c_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \beta_j a_{k-i-j} = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \gamma_{i-j} \beta_j = a_k,$$

ponieważ z równości (10) wynika, że

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \gamma_{i-j} \beta_j = 0 \qquad \text{dla} \qquad i \in N. \quad ∎$$

D o w ó d t w i e r d z e n i a 4. Dla $j = 2(1)n$ dodając do j-tego wiersza wyznacznika (12) kombinację liniową $j-1$ pierwszych wierszy o współczynnikach $\gamma_{j-1}, \gamma_{j-2}, \dots, \gamma_1$ (wzór (8)) otrzymujemy

$$W_k = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2-\gamma_1 c_1 & c_1-\gamma_1 c_0 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{k-2} \gamma_i c_{k-1-i} & \sum_{i=0}^{k-2} \gamma_i c_{k-2-i} & \sum_{i=0}^{k-3} \gamma_i c_{k-3-i} & \dots & c_0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i c_{k-i} & \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i c_{k-1-i} & \sum_{i=0}^{k-2} \gamma_i c_{k-2-i} & \dots & c_1-\gamma_1 c_0 \end{vmatrix}.$$

Stosując do elementów ostatniego wyznacznika lemat 2 otrzymujemy

$$W_k = \begin{vmatrix} a_1-\gamma_1 a_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2-\gamma_2 a_0 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k-\gamma_k a_0 & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Łatwo zauważyć, że wyznacznik (15) można zapisać w postaci

$$W_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & 0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_0 \\ \gamma_k & \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Stąd na podstawie (4) mamy, że $W_k = V_{k,1}$ przy $\gamma_0 = 1$.

F.i. (11) jest więc identyczna z n-optymalną f.i. (3) dla $k = 1$ i $\gamma_0 = 1$.

Z lematu 1 wynika, że każdemu układowi liczb $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ odpowiada dokładnie jeden układ liczb $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ i na odwrót.

Wzory (3) dla $k = 1$ i $\gamma_0 = 1$ oraz (11) przedstawiają więc identyczne f.i. wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są związki (8) (lub (9)).

Równoważność ta dowodzi prawdziwości twierdzenia 4. ■

TWIERDZENIE 5. *F.f.i.* (11) *można przedstawić w postaci*

$$\tilde{\Phi}_n = z + \delta_n, \tag{16}$$

gdzie δ_n *jest rozwiązaniem układu równań*

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1\delta_1 = 0, \\ &c_0 + c_1\delta_2 + c_2\delta_2\delta_1 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &c_0 + c_1\delta_n + \dots + c_n\delta_n\dots\delta_1 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

D o w ó d (indukcyjny). Wystarczy wykazać, że

$$\delta_n = -\frac{a_0 W_{n-1}}{W_n}. \tag{18}$$

Dla $n = 1$ mamy $c_0 + c_1\delta_1 = 0$, stąd (na podstawie (12))

$$\delta_1 = -\frac{c_0}{c_1} = -\frac{a_0 W_0}{W_1}.$$

Załóżmy, że

$$\delta_1 = -\frac{a_0 W_0}{W_1}, \quad \delta_2 = -\frac{a_0 W_1}{W_2}, \quad \ldots, \quad \delta_{n-1} = -\frac{a_0 W_{n-2}}{W_{n-1}}. \tag{19}$$

Z (19) otrzymujemy

$$\delta_{n-1}\delta_{n-2}\ldots\delta_i = (-1)^{n-i} a_0^{n-i}\frac{W_{i-1}}{W_{n-1}}, \qquad i = 1\,(1)\,n-1. \tag{20}$$

Na podstawie (20) ostatnie równanie układu (17) zapisujemy w postaci

$$c_0 + \delta_n \frac{c_1 - c_2 W_{n-2}c_0 + c_3 W_{n-3}c_0^2 - \ldots + (-1)^{n-1}c_n W_0 c_0^{n-1}}{W_{n-1}} = 0.$$

Zauważmy, że licznik ułamka występującego w ostatniej równości (na podstawie wzoru analogicznego do (10)) jest równy W_n. Zatem

$$c_0 + \delta_n \frac{W_n}{W_{n-1}} = 0,$$

stąd łatwo wynika (18), gdyż $c_0 = a_0$. ■

Przyjmując

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0 \tag{21}$$

otrzymujemy następujący

WNIOSEK. *F.f.i. Königa* (por. [1]) *można przedstawić w postaci*

$$\varphi_n = z + \bar{\delta}_n,$$

gdzie $\bar{\delta}_n$ *jest rozwiązaniem układu równań*

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\bar{\delta}_1 &= 0,\\ a_0 + a_1\bar{\delta}_2 + a_2\bar{\delta}_2\bar{\delta}_1 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_0 + a_1\bar{\delta}_n + \ldots + a_n\bar{\delta}_n\ldots\bar{\delta}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Z (21) na podstawie (9) mamy bowiem

$$\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0,$$

a stąd na podstawie (13) $c_i = a_i$ dla $i = 0(1)n$. ■

Mając dane konkretne wartości z, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ możemy w prosty sposób obliczyć wartość funkcji $\tilde{\Phi}_n = z + \delta_n$ korzystając z twierdzenia 5. Proces ten zapisujemy

$$\delta_1 = -\frac{c_0}{c_1},$$

(22) $$\delta_{i+1} = \frac{-c_0}{c_1 + \sum_{k=2}^{i+1} c_k \delta_i \ldots \delta_{i-k+2}} \qquad \text{dla} \quad i = 1(1)n-1.$$

Do obliczenia wartości mianownika wyrażenia (22)

$$b_{i+1} = c_1 + \sum_{k=2}^{i+1} c_k \delta_i \ldots \delta_{i-k+2}$$

przy ustalonym i stosujemy następujący schemat Hornera

$$b_1 = c_{i+1}, \qquad b_{s+1} = b_s \delta_s + c_{i-s+1} \qquad \text{dla} \qquad s = 1(1)i.$$

Literatura

[1] R. Bartłomiejczyk i S. Łanowy, *Algebraiczna charakteryzacja jednopunktowych wymiernych metod iteracyjnych*, Matematyka Stosowana 3 (1974), str. 35–52.