ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA V (1975)

Stanisław GNOT (Wrocław)

Średnia efektywność układów blokowych

Wprowadzenie. W doświadczeniach z jakimi mamy na ogół do czynienia w rolnictwie, biologii czy technice, na wyniki pomiarów, poza czynnikami badanymi, mają także wpływ czynniki uboczne. Wpływ tych zakłócających czynników można całkowicie lub częściowo wyeliminować, w zależności od przyjętego układu doświadczalnego. W niniejszej pracy rozważać będziemy blokowe układy eksperymentalne. Stosujemy je wówczas, gdy jednostki doświadczalne dają się sklasyfikować ze względu na dwa czynniki o działaniu addytywnym, mianowicie ze względu na bloki (czynnik zakłócający) i warianty doświadczalne (czynnik badany). Jeżeli liczba jednostek w bloku jest tak duża, że każdy obiekt może wystąpić w każdym bloku co najmniej jeden raz, wówczas stosując tzw. układ ortogonalny (patrz rozdział 2), zakłócający wpływ czynnika blokowego można wyeliminować zupełnie. W przeciwnym razie, jeżeli eksperyment musi być zakładany w okolicznościach nakładających pewne ograniczenia na pojemności bloków, np. w przypadku, gdy liczba obiektów jest zbyt duża, aby zachować jednorodność wewnątrz każdego bloku, wówczas zmuszeni jesteśmy stosować układy blokowe niekompletne (nieortogonalne). Stosowanie układów nieortogonalnych wiąże się z pewną stratą informacji w stosunku do czynnika badanego, spowodowaną uwikłaniem obiektów z blokami. Stopień tego uwikłania można przyjąć jako miarę efektywności układu. Ponieważ czynniki są z reguły w różnym stopniu uwikłane z blokami, więc każda definicja efektywności układu blokowego powinna dotyczyć estymacji konkretnej funkcji parametrycznej lub układu takich funkcji. W rozdziale 3 podana jest definicja Pearce'a ([5], [6]), średniej efektywności układu blokowego dla estymacji wektora średnich obiektowych $\mathbf{a}$. W tej pracy rozszerza się definicję średniej efektywności układu blokowego dla estymacji dowolnego układu kombinacji liniowych składowych wektora $\mathbf{a}$ (rozdział 3). Rozdział 5 poświęcony jest badaniom własności wektorów własnych macierzy $\mathbf{M}_0$, wprowadzonej przez Calińskiego ([1]). Na tych wektorach oparta jest konstrukcja ortogonalnej bazy przestrzeni $V_t^{\text{k.ś.o.}}$ estymatorów wszystkich liniowych kombinacji składowych wektora $\mathbf{a}$, otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów (estymatorów NK) oraz definicja bazowych kontrastów średniej obiektowej (rozdział 6). W rozdziale 7 podany jest związek pomiędzy średnią efektywnością układu blokowego dla estymacji bazowych kontrastów wektora średniej obiektowej, a średnią efektywnością dla estymacji składowych wektora $\mathbf{a}$. Związek ten zawarty w twierdzeniu 7.1 jest uogólnieniem wyniku Pearca'a ([5]), który zbadał zależność średniej efektywności układu dla estymacji wektora różnic pomiędzy średnimi, od średniej efektywności dla estymacji wektora $\mathbf{a}$, przy założeniu, że obiekty są równo-replikowane. W ostatnim rozdziale pracy podaje się zasady konstrukcji układów blokowych o maksymalnej średniej efektywności dla estymacji układów funkcji parametrycznych, których estymatory NK tworzą pewną podprzestrzeń przestrzeni $V_t^{\text{k.ś.o.}}$.

1. Ogólny model liniowy. Oznaczenia. Rozważmy eksperyment, w którym t obiektów rozmieszczonych jest w b blokach w pewien określony sposób, wyznaczony jednoznacznie przez macierz incydencji $\mathbf{n}$. Niech $\mathbf{Y}$ będzie obserwowalnym wektorem losowym. Założymy, że

$$(1.1) \qquad \mathbf{Y} = [\mathbf{1}\ \mathbf{D}'\ \Delta'][\alpha \beta' \gamma']' + \mathbf{e},$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest N-wymiarowym wektorem złożonym z samych jedynek, $\mathbf{D}'$ jest $(N \times b)$-wymiarową macierzą, której elementy d_{ij} są równe 1, gdy i-ta obserwacja pochodzi z j-tego bloku, a 0 w przeciwnym przypadku, Δ jest $(N \times t)$-wymiarową macierzą, której elementy δ_{ij} są równe 1, gdy i-ta obserwacja jest obserwacją j-tego obiektu, a 0 w przeciwnym razie, α jest parametrem ogólnym układu, β wektorem parametrów blokowych, γ wektorem parametrów obiektowych, $\mathbf{e}$ jest wektorem błędów losowych, spełniającym następujące warunki: $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ i $E(\mathbf{ee}') = \sigma^2\mathbf{I}$. Rozważania nasze ograniczymy do przypadku, gdy rząd macierzy $[\mathbf{1}\ \mathbf{D}'\Delta']$ jest równy $t + b - 1$. Dodatkowo założymy, że

$$(1.2) \qquad \mathbf{k}'\beta = \mathbf{r}'\gamma = 0,$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem replikacji obiektów, a $\mathbf{k}$ jest wektorem pojemności blokowej ($\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_b)'$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_t)'$). Przy powyższych założeniach każda kombinacja liniowa parametrów α, β i γ jest funkcją estymowalną (Scheffé [9]). W dalszej części pracy posługiwać się będziemy następującymi oznaczeniami $\mathbf{m}^\delta = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_p)$, $\mathbf{m}^{-\delta} = \mathrm{diag}(1/m_1, 1/m_2, \ldots, 1/m_p) = \mathrm{diag}^{-1}(m_1, m_2, \ldots, m_p)$, gdzie $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_p)'$ jest dowolnym wektorem p-wymiarowym.

2. Ogólna postać macierzy Ω. Ortogonalne układy blokowe. Zanim omówimy główne rezultaty z zakresu teorii układów blokowych, wprowadzimy następujące oznaczenia

$$(2.1) \qquad \mathbf{n}_0 = \mathbf{n} - \mathbf{rk}'/N,$$

$$(2.2) \qquad \mathbf{P} = \mathbf{nk}^{-\delta}\mathbf{n}',$$

$$(2.3) \qquad \mathbf{P}_0 = \mathbf{n}_0\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}_0',$$

$$(2.4) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P},$$

$$(2.5) \qquad \mathbf{M}_0 = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P}_0 = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P} - \mathbf{1r}'/N,$$

$$(2.6) \qquad \Omega^{-1} = \mathbf{r}^\delta - \mathbf{nk}^{-\delta}\mathbf{n}' + \mathbf{rr}'/N = \mathbf{r}^\delta(\mathbf{1}^\delta - \mathbf{M}_0).$$

Dla wyżej wprowadzonych macierzy w łatwy sposób można wykazać prawdziwość następujących związków: $\mathbf{n1} = \mathbf{r} = \Delta\mathbf{1}$, $\mathbf{n}'\mathbf{1} = \mathbf{k} = \mathbf{D1}$, $\mathbf{r}'\mathbf{1} = \mathbf{k}'\mathbf{1} = N$, $\mathbf{n} = \Delta\mathbf{D}'$, $\mathbf{DD}' = \mathbf{k}^\delta$, $\Delta\Delta' = \mathbf{r}^\delta$, $\mathbf{D}'\mathbf{1} = \Delta'\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\Omega^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{r}$, $\mathbf{P1} = \mathbf{r}$, $\mathbf{M1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_0\mathbf{1} = \mathbf{0}$.

U w a g a. Z warunków $\Delta\Delta' = \mathbf{r}^\delta$ i $\mathbf{DD}' = \mathbf{k}^\delta$ wynika, że macierze Δ' i $\mathbf{D}'$ są pełnego rzędu.

Estymatory NK dla wektora efektów obiektowych γ i wektora średnich obiektowych $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{1} + \gamma$ (patrz Tocher [10]), mają postać

$$(2.7) \qquad \hat{\gamma} = \Omega(\Delta - \mathbf{nk}^{-\delta}\mathbf{D})\mathbf{Y},$$

$$(2.8) \qquad \hat{\mathbf{a}} = \hat{\alpha}\mathbf{1} + \hat{\gamma},$$

gdzie $\hat{\alpha} = \mathbf{Y}'\mathbf{1}/N$. Macierz kowariancji wektora $\hat{\mathbf{a}}$ wyraża się wzorem

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{\Omega}\, \sigma^2 . \tag{2.9}$$

Szczególnie użyteczną w badaniu układów blokowych jest wprowadzona przez Calińskiego macierz $\mathbf{M}_0$, określona wzorem (2.5). Caliński udowodnił, że jeżeli rząd $[\mathbf{1}\ \mathbf{D}'\mathbf{\Delta}'] = t + b - 1$, to wartości własne macierzy $\mathbf{M}_0$ spełniają nierówność $0 \leqslant \mu_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, a więc szereg $\sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{M}_0^h$ jest zbieżny. Wówczas $\mathbf{\Omega}^{-1}$ jest macierzą nieosobliwą i na mocy wzoru (2.6) możemy napisać

$$\mathbf{\Omega} = \Big(\mathbf{1}^\delta + \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{M}_0^h\Big)\mathbf{r}^{-\delta} . \tag{2.10}$$

Podobny wynik otrzymał Pearce [6] w następującej formie

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\varrho}^{-\delta} \Big(\mathbf{1}^\delta + \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{H}^h\Big)\boldsymbol{\varrho}^{-\delta} , \tag{2.11}$$

gdzie $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varrho}^{-\delta}\mathbf{P}_0\boldsymbol{\varrho}^{-\delta}$, a $\boldsymbol{\varrho}^{2\delta} = \mathbf{r}^\delta$. Przy założeniu, że rząd $[\mathbf{1}\ \mathbf{D}'\mathbf{\Delta}'] = t + b - 1$, symetryczna macierz $\mathbf{H}$ jest nieujemnie określona, a jej wartości własne spełniają nierówność $0 \leqslant h_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Niech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_t$ będą ortogonalnymi wektorami własnymi macierzy $\mathbf{H}$ odpowiadającymi wartościom własnym $h_1, h_2, \ldots, h_t$. Wówczas możemy napisać (por. [7])

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{r}^{-\delta} + \boldsymbol{\varrho}^{-\delta} \sum_{i=1}^{t} [h_i/(1 - h_i)]\, \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i' \boldsymbol{\varrho}^{-\delta} . \tag{2.12}$$

Jeżeli macierz $\mathbf{M}_0$ da się przedstawić w postaci

$$\mathbf{M}_0 = \mu\, \mathbf{L}, \tag{2.13}$$

gdzie $\mathbf{L}$ jest pewną macierzą idempotentną, a $0 \leqslant \mu < 1$, to $\mathbf{M}_0^h = \mu^{h-1}\mathbf{M}_0$. Przy założeniu (2.13) możemy więc zamiast (2.10) napisać

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{1}^\delta + [1/(1 - \mu)]\, \mathbf{M}_0)\, \mathbf{r}^{-\delta} . \tag{2.14}$$

Układami, dla których macierz $\mathbf{M}_0$ jest postaci (2.13), są między innymi układy zrównoważone, omawiane w rozdziale 9. Szczególny przypadek układów zrównoważonych stanowią układy ortogonalne, tzn. takie, dla których $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$. Można udowodnić (patrz [5]), że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ blokowy był układem ortogonalnym jest aby macierz incydencji przyjmowała postać $\mathbf{n} = \mathbf{r}\mathbf{k}'/N$. Dla układów ortogonalnych ze wzoru (2.10) wynika, że

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{r}^{-\delta} . \tag{2.15}$$

Stąd i z wzoru (2.9) otrzymujemy

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{r}^{-\delta}\, \sigma^2 . \tag{2.16}$$

Rozważmy dowolną kombinację $\mathbf{p}'\mathbf{a}$ składowych wektora $\mathbf{a}$. Dla dowolnego układu blokowego na mocy wzorów (2.9) i (2.12)

$$\mathrm{var}(\mathbf{p}'\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{p}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{p}\sigma^2 = \mathbf{p}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{p}\sigma^2 + \sum_i [h_i/(1-h_i)(\mathbf{p}'\mathbf{g}^{-\delta}\mathbf{u}_i)(\mathbf{p}'\mathbf{g}^{-\delta}\mathbf{u}_i)']\,\sigma^2 =$$
$$= \mathbf{p}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{p}\sigma^2 + \sum_i [h_i/(1-h_i)(\mathbf{p}'\mathbf{g}^{-\delta}\mathbf{u}_i)^2]\,\sigma^2 .$$

Ponieważ $0 \leqslant h_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, przeto $h_i/(1-h_i) > 0$, a więc $\mathrm{var}(\mathbf{p}'\hat{\mathbf{a}}) \geqslant \mathbf{p}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{p}\sigma^2$. Z drugiej strony ze wzoru (2.15) wynika, że dla układu ortogonalnego o wektorze replikacji $\mathbf{r}$ mamy $\mathrm{var}(\mathbf{p}'\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{p}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{p}\sigma^2$. Stąd otrzymujemy natychmiast następujący

LEMAT 2.1. *Układy ortogonalne minimizują wariancję każdej kombinacji liniowej składowych wektora* $\mathbf{a}$, *w klasie wszystkich układów o ustalonym wektorze replikacji* $\mathbf{r}$.

3. Średnia efektywność układu. Ponieważ blokowe układy ortogonalne minimizują wariancję każdej kombinacji liniowej składowych wektora $\mathbf{a}$, więc mogą pełnić rolę układów względem których określać się będzie efektywność innych układów blokowych. Niech $U(\mathbf{n})$ będzie dowolnym układem blokowym o macierzy incydencji $\mathbf{n}$ oraz niech $\mathbf{r}$ będzie wektorem replikacji obiektów. Wariancją i-tej składowej wektora $\mathbf{a}$ w układzie $U(\mathbf{n})$ jest $\Omega_i\sigma^2$, gdzie Ω_i jest i-tym diagonalnym elementem macierzy $\boldsymbol{\Omega}$. Wariancją i-tej składowej wektora $\mathbf{a}$ w układzie ortogonalnym o tym samym wektorze replikacji $\mathbf{r}$ jest na mocy wzoru (2.16) wielkość $(1/r_i)\sigma^2$. Niech dla $i = 1, 2, \ldots, t$

$$e_i = (1/r_i)/\Omega_i = 1/(r_i\Omega_i). \tag{3.1}$$

Ponieważ $1/r_i \leqslant \Omega_i$, przeto mamy nierówność

$$0 < e_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t). \tag{3.2}$$

Utwórzmy średnią harmoniczną ilorazów e_i,

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = t/\sum_i (1/e_i) = t/\sum_i r_i\Omega_i. \tag{3.3}$$

Ze wzoru (3.2) wynika, że $0 < \varepsilon(\mathbf{a}) \leqslant 1$. Ponadto $\varepsilon(\mathbf{a}) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U(\mathbf{n})$ jest układem ortogonalnym. Pearce [5] zaproponował, aby wyrażenie $\varepsilon(\mathbf{a})$ określone wzorem (3.3) przyjąć za miarę efektywności układu $U(\mathbf{n})$ dla estymacji wektora średnich obiektowych $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{1} + \boldsymbol{\gamma}$.

Niech $\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_t$ będą wartościami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0$. Ponieważ $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}^\delta = (\mathbf{1}^\delta - \mathbf{M}_0)^{-1}$, przeto

$$t/\sum(r_i\Omega_i) = t/\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}^\delta = t/\mathrm{tr}\,(\mathbf{1}^\delta - \mathbf{M}_0)^{-1} = t/\sum_i 1/(1-\mu_i),$$

a zatem w myśl wzoru (3.3)

$$t/\varepsilon(\mathbf{a}) = \sum_i 1/(1-\mu_i). \tag{3.4}$$

W wielu zagadnieniach interesować nas może nie tylko estymacja średnich obiektowych, lecz także estymacja liniowych kombinacji tych średnich. Zanim podamy uogólnioną definicję średniej efektywności układu dla estymacji dowolnych liniowych kombinacji składowych wektora $\mathbf{a}$, zauważmy, że w modelu (1.1) przy ograniczeniach (1.2) każda funkcja parame-

tryczna $\varphi = \sum_{i=1}^{t} l_i a_i = \mathbf{l}'\mathbf{a}$ jest funkcją estymowalną, a $\hat{\varphi} = \sum_i l_i \hat{a}_i = \mathbf{l}'\hat{\mathbf{a}}$ jest jej estymatorem NK. Rozważmy wektor funkcji parametrycznych $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s)' = \mathbf{L}'\mathbf{a}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą złożoną ze współczynników kombinacji φ_i. Estymatorem NK wektora $\mathbf{L}'\mathbf{a}$ jest wektor $\mathbf{L}'\hat{\mathbf{a}}$. Oznaczmy wariancję i-tej składowej wektora $\mathbf{L}'\mathbf{a}$ w układzie $U(\mathbf{n})$ przez $\rho_i \sigma^2$, a w układzie ortogonalnym o tym samym wektorze replikacji $\mathbf{r}$ przez $\rho_i^* \sigma^2$.

DEFINICJA 3.1. *Średnią efektywnością* układu $U(\mathbf{n})$ dla estymacji wektora $\mathbf{L}'\mathbf{a}$ nazywać będziemy wielkość

$$\varepsilon(\mathbf{L}'\mathbf{a}) = s / \sum_{i=1}^{s} (\rho_i / \rho_i^*).$$

Ponieważ $\rho_i^* \leqslant \rho_i$ na mocy lematu 2.1, przeto mamy nierówność $0 < \varepsilon(\mathbf{L}'\mathbf{a}) \leqslant 1$ dla każdego wektora $\mathbf{L}'\mathbf{a}$ i dla każdego układu blokowego $U(\mathbf{n})$.

Macierz kowariancji wektora $\mathbf{L}'\mathbf{a}$ w układzie $U(\mathbf{n})$ wyraża się wzorem $\mathbf{L}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{L}\sigma^2$, a w układzie ortogonalnym wzorem $\mathbf{L}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{L}\sigma^2$. Stąd, zgodnie z definicją 3.1, możemy napisać

$$\varepsilon(\mathbf{L}'\mathbf{a}) = s / \operatorname{tr}(\mathbf{L}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{L}\,\operatorname{diag}^{-1}\mathbf{L}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{L}), \tag{3.5}$$

gdzie symbol $\operatorname{diag}\mathbf{A}$ oznacza macierz diagonalną o elementach równych diagonalnym elementom macierzy $\mathbf{A}$, a $\operatorname{diag}^{-1}\mathbf{A} = (\operatorname{diag}\mathbf{A})^{-1}$.

4. Przestrzenie kontrastów. W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy średnią efektywność układu blokowego dla estymacji s dowolnych kombinacji liniowych składowych wektora $\mathbf{a}$. Przedmiotem naszych rozważań będzie teraz przestrzeń liniowa estymatorów NK tych kombinacji. Odtąd będziemy utożsamiać każdą kombinację składowych wektora $\mathbf{Y}$ z wektorem jej współczynników.

Oznaczmy przez R_N N-wymiarową przestrzeń kombinacji liniowych składowych wektora $\mathbf{Y}$, a przez $V_{N-1}^{\text{c.}}$ $(N-1)$-wymiarową przestrzeń kontrastów, tzn. kombinacji $\mathbf{p}'\mathbf{Y}$, dla których $\mathbf{p}'\mathbf{1} = 0$. Jeżeli istnieje wektor $\mathbf{s}$ taki, że $\mathbf{p} = \boldsymbol{\Delta}'\mathbf{s}$, to kontrast $\mathbf{p}'\mathbf{Y}$ nazywamy kontrastem *obiektowym*. Podobnie, jeżeli istnieje wektor $\mathbf{u}$ taki że $\mathbf{p} = \mathbf{D}'\mathbf{u}$, to kontrast $\mathbf{p}'\mathbf{Y}$ nazywamy kontrastem *blokowym* (*między-blokowym*). Z warunku $\mathbf{p}'\mathbf{1} = 0$ wynika, że $\mathbf{s}'\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Y}$ jest kontrastem obiektowym jeżeli $\mathbf{s}'\boldsymbol{\Delta}\mathbf{1} = \mathbf{s}'\mathbf{r} = 0$, podobnie $\mathbf{u}'\mathbf{D}\mathbf{Y}$ jest kontrastem blokowym jeżeli $\mathbf{u}'\mathbf{D}\mathbf{1} = \mathbf{u}'\mathbf{k} = 0$. Kontrast, który jest ortogonalny do każego kontrastu blokowego, nazywamy kontrastem *wewnątrz-blokowym*. Oznaczmy symbolami $V_{t-1}^{\text{c.o.}}$, $V_{b-1}^{\text{c.b.}}$ i $V_{N-b}^{\text{c.w.b.}}$ odpowiednio przestrzenie liniowe kontrastów obiektowych, blokowych i wewnątrz-blokowych (wskaźnik u dołu oznacza wymiar danej przestrzeni). Wówczas $R_N = V_1^{\Sigma} \oplus V_{N-1}^{\text{c.}}$ oraz $V_{N-1}^{\text{c.}} = V_{b-1}^{\text{c.b.}} \oplus V_{N-b}^{\text{c.w.b.}}$, gdzie V_1^{Σ} jest przestrzenią generowaną przez wektor $\mathbf{1}$. Przestrzenie V_1^{Σ}, $V_{b-1}^{\text{c.b.}}$ i $V_{N-b}^{\text{c.w.b.}}$ są parami ortogonalne.

Ponieważ $V_{t-1}^{\text{c.o.}} \subset V_{N-1}^{\text{c.}}$, przeto dowolny kontrast obiektowy $\mathbf{s}'\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Y}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy dwóch ortogonalnych komponentów, kontrastu blokowego i wewnątrz-blokowego (Jones [3]), tzn.

$$(4.1) \qquad \mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y} = \mathbf{u}'\mathbf{D}\mathbf{Y} + (\mathbf{s}'\Delta - \mathbf{u}'\mathbf{D})\mathbf{Y},$$

przy czym $\mathbf{D}(\Delta'\mathbf{s} - \mathbf{D}'\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Ponieważ $\mathbf{D}\Delta' = \mathbf{n}'$ i $\mathbf{D}\mathbf{D}' = \mathbf{k}^{\delta}$, więc z powyższego wzoru wynika, że $\mathbf{n}'\mathbf{s} = \mathbf{k}^{\delta}\mathbf{u}$, a stąd $\mathbf{u} = \mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}'\mathbf{s}$. Wzór (4.1) można zatem napisać w następującej postaci

$$(4.2) \qquad \mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y} = \mathbf{s}'\mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{D}\mathbf{Y} + \mathbf{s}'\mathbf{Q},$$

gdzie $\mathbf{s}'\mathbf{Q} = \mathbf{s}'(\Delta - \mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{D})\mathbf{Y}$ jest wewnątrz-blokowym komponentem kontrastu obiektowego $\mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y}$.

Oznaczmy symbolem $V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$ przestrzeń liniową estymatorów NK kontrastów wektora $\mathbf{a}$, tzn. tych kombinacji $\mathbf{c}'\mathbf{a}$, dla których $\mathbf{c}'\mathbf{1} = 0$. Udowodnimy teraz następujący

LEMAT 4.1. *Przestrzeń $V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$ jest identyczna z przestrzenią liniową komponentów wewnątrz-blokowych kontrastów obiektowych.*

D o w ó d. Niech $\mathbf{c}'\mathbf{a}$ będzie dowolnym kontrastem $\mathbf{a}$. Estymatorem NK kontrastu $\mathbf{c}'\mathbf{a}$ jest $\mathbf{c}'\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{c}'\alpha\mathbf{1} + \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}$. Na podstawie wzoru (2.7)

$$(4.3) \qquad \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{c}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}.$$

Porównując wzory (4.2) i (4.3) można zauważyć (Caliński [1]), że warunkiem koniecznym na to, aby estymator NK kontrastu $\mathbf{c}'\mathbf{a}$ był wewnątrz-blokowym komponentem kontrastu obiektowego $\mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y}$ jest, aby zachodziła równość

$$(4.4) \qquad \mathbf{s} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}.$$

Ponieważ $\boldsymbol{\Omega}$ jest macierzą nieosobliwą (założyliśmy, że rząd $[\mathbf{1}\ \mathbf{D}'\Delta'] = t + b - 1$), przeto równość (4.4) określa wzajemną jednoznaczność pomiędzy wewnątrz-blokowymi komponentami kontrastów obiektowych, a estymatorami NK kontrastów średniej obiektowej. Dowód lematu jest zakończony.

Oznaczmy przez $V_t^{\text{k.ś.o.}}$ przestrzeń liniową estymatorów NK wszystkich kombinacji składowych wektora $\mathbf{a}$, czyli tych funkcji parametrycznych, dla estymacji których średnia efektywność została zdefiniowana. Przestrzeń $V_t^{\text{k.ś.o.}}$ można przedstawić w postaci, $V_t^{\text{k.ś.o.}} = V_1 \oplus V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$, gdzie V_1 jest jednowymiarową przestrzenią ortogonalną do $V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$, a $V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$ jest na mocy lematu 4.1 identyczna z przestrzenią komponentów wewnątrz-blokowych kontrastów obiektowych.

5. Wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}_0$. W niniejszym rozdziale przedstawimy niektóre własności wektorów własnych i wartości własnych macierzy $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}_0$ określonych wzorami (2.4) i (2.5), z których skorzystamy przy konstrukcji ortogonalnej bazy przestrzeni $V_t^{\text{k.ś.o.}}$ i definicji bazowych kontrastów wektora $\mathbf{a}$. Przypomnimy w tym celu niektóre pojęcia z algebry liniowej.

Niech $\mathbf{K}$ będzie dowolną symetryczną i dodatnio określoną macierzą nieosobliwą o wymiarach $n \times n$, a $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ niech będą dowolnymi wektorami z przestrzeni R_N.

Jeżeli $\mathbf{x}'\mathbf{K}\mathbf{y} = 0$, to wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ nazywamy $\mathbf{K}$-*ortogonalnymi.*

Niech $\mathbf{A}$ będzie dowolną macierzą o wymiarach $n \times n$. Jeżeli

$$(5.1) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{K},$$

to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy macierzą $\mathbf{K}$-*symetryczną*.

Każda macierz K-symetryczna o wymiarach $n \times n$ ma n liniowo niezależnych wektorów własnych, parami K-ortogonalnych (mówimy wówczas, że liniowo niezależne wektory własne tworzą układ pełny).

Omówienie własności wektorów własnych macierzy $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}_0$ rozpoczniemy od udowodnienia następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 5.1. *Macierze* $\mathbf{M}$ *i* $\mathbf{M}_0$ *mają pełny układ liniowo niezależnych wektorów własnych parami* $\mathbf{r}^\delta$*-ortogonalnych.*

D o w ó d. Aby udowodnić to twierdzenie, wystarczy pokazać, że macierze $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}_0$ są $\mathbf{r}^\delta$-symetryczne. Wobec (2.4) i (2.5) mamy, $\mathbf{M} = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P}_0$. Ponieważ $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}_0$ są macierzami symetrycznymi, przeto $\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{M}'\mathbf{r}^\delta = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P} = \mathbf{M}$ i podobnie $\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{M}_0'\mathbf{r}^\delta = \mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{P}_0 = \mathbf{M}_0$, co kończy dowód.

Ponieważ $\mathbf{M1} = \mathbf{1}$ i $\mathbf{M}_0\mathbf{1} = \mathbf{0}$, przeto $\mathbf{1}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}_0$, odpowiadającym wartościom własnym 1 i 0.

Niech $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}, \mathbf{s}_t = (1/\sqrt{N})\mathbf{1}$ będzie pełnym układem liniowo niezależnych, parami $\mathbf{r}^\delta$-ortogonalnych wektorów własnych macierzy $\mathbf{M}_0$. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $\mathbf{s}_i'\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_j = \delta_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, t$. Wówczas dla $i = 1, 2, \ldots, t-1$ mamy, $\mathbf{s}_i'\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_t = (1/\sqrt{N})\,\mathbf{s}_i'\mathbf{r} = 0$, czyli

$$\mathbf{s}_i'\mathbf{r} = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, t-1. \tag{5.2}$$

Oznaczmy symbolem $\mathcal{L}_{t-1}$ przestrzeń generowaną przez wektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}$. Jeżeli $\mathbf{s} \in \mathcal{L}_{t-1}$, to $\mathbf{s}'\mathbf{r} = 0$, a zatem zgodnie z definicją kontrastu obiektowego istnieje wzajemna jednoznaczność pomiędzy wektorami z przestrzeni $V_{t-1}^{\text{c.o.}}$, a wektorami z przestrzeni $\mathcal{L}_{t-1}$. Wektory z przestrzeni $\mathcal{L}_{t-1}$ będziemy nazywali również kontrastami obiektowymi. Ponieważ relacja $\mathbf{s}_i'\Delta\Delta'\mathbf{s}_j = 0$ jest równoważna relacji $\mathbf{s}_i'\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_j = 0$, przeto wektory $\mathbf{s}_i'\Delta$ i $\mathbf{s}_j'\Delta$, które należą do przestrzeni $V_{t-1}^{\text{c.o.}}$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{s}_i$ oraz $\mathbf{s}_j$ z przestrzeni $\mathcal{L}_{t-1}$ są $\mathbf{r}^\delta$-ortogonalne, tzn. $\mathbf{s}_i'\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_j = 0$.

Związek pomiędzy wektorami własnymi macierzy $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}_0$ podaje następujący

LEMAT 5.1. *Każdy kontrast obiektowy będący wektorem własnym macierzy* $\mathbf{M}_0$ *jest również wektorem własnym macierzy* $\mathbf{M}$, *odpowiadającym tej samej wartości własnej.*

D o w ó d. Niech $\mathbf{s}$ będzie wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}_0$, odpowiadającym wartości własnej μ, takim, że $\mathbf{s}'\mathbf{r} = 0$. Ze wzoru (2.5) wynika, że $\mathbf{Ms} = \mathbf{M}_0 + (\mathbf{1r}'/N)\mathbf{s} = \mathbf{M}_0\mathbf{s} = \mu\mathbf{s}$.

WNIOSEK 5.1. *Jeżeli* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{t-1}, \mu_t = 0$ *są wartościami własnymi macierzy* $\mathbf{M}_0$, *to* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{t-1}, \overset{0}{\mu_t} = 1$ *są wartościami własnymi macierzy* $\mathbf{M}$.

6. Ortogonalna baza przestrzeni $V_t^{\text{k.ś.o.}}$. Kontrasty bazowe. W rozdziale tym wprowadzimy pojęcie bazowych kombinacji i bazowych kontrastów wektora średniej obiektowej **a** oraz omówimy własności ich estymatorów NK. W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że wektory własne macierzy $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}$ parami $\mathbf{r}^\delta$-ortogonalne generują w przestrzeni $V_{t-1}^{\text{c.o.}}$ ortogonalną bazę

$$\Delta'\mathbf{s}_1, \Delta'\mathbf{s}_2, \ldots, \Delta'\mathbf{s}_{t-1}. \tag{6.1}$$

Układ (6.1) uzupełniony wektorem $\Delta'\mathbf{s}_t = (1/\sqrt{N})\Delta'\mathbf{1}$ tworzy ortogonalną bazę w prze-

strzeni wszystkich kombinacji obiektowych, to jest kombinacji składowych wektora $\mathbf{Y}$ postaci $\mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y}$. Oznaczmy przez $\mathbf{S}_0$ macierz, której kolumny tworzą wektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}$, a przez $\mathbf{S}$ macierz powstałą z $\mathbf{S}_0$ przez dołączenie kolumny $\mathbf{s}_t$. Wówczas

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_0 \ \ \mathbf{s}_t] \tag{6.2}$$

oraz

$$\mathbf{S}'\mathbf{r}^\delta\mathbf{S} = \mathbf{1}^\delta. \tag{6.3}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\mathbf{C}_0 = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{S}_0 \tag{6.4}$$

oraz

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{S}, \tag{6.5}$$

oczywiście $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_0 \ \ \mathbf{c}_t]$, gdzie $\mathbf{c}_t = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{s}_t$.

Niech $\mathbf{c}_i$ będzie i-tą kolumną macierzy $\mathbf{C}$. Ze wzoru (6.5) wynika, że

$$\mathbf{c}_i = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{s}_i = \mathbf{r}^\delta(\mathbf{1} - \mathbf{M}_0)\,\mathbf{s}_i = (1-\mu_i)\,\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_i \qquad \text{dla} \qquad i = 1, 2, \ldots, t-1$$

oraz

$$\mathbf{c}_t = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{s}_t = (1/\sqrt{N})\,\mathbf{r}.$$

Wobec tego prawdziwe są następujące równości

$$\mathbf{c}_i'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{c}_j = (1-\mu_i)(1-\mu_j)\,\mathbf{s}_i'\mathbf{r}^\delta\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_j = (1-\mu_i)^2\delta_{ij},$$

a stąd

$$\mathbf{C}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{C} = \boldsymbol{\lambda}^{2\delta}, \tag{6.6}$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} = (1-\mu_1, 1-\mu_2, \ldots, 1-\mu_{t-1}, 1)'$.

Rozważmy wektor kombinacji składowych wektora $\mathbf{a}$ postaci $\mathbf{C}_0'\mathbf{a}$. Ponieważ $\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{r}$, przeto $\mathbf{C}_0'\mathbf{1} = \mathbf{S}_0'\mathbf{r} = \mathbf{0}$, a więc $\mathbf{C}_0'\mathbf{a}$ jest wektorem kontrastów $\mathbf{a}$. Na mocy wzorów (2.7) i (2.8) wektorem estymatorów NK dla $\mathbf{C}_0'\mathbf{a}$ jest wektor $\mathbf{C}_0'\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{C}_0'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G}\mathbf{Y} = \mathbf{S}_0'\mathbf{G}\mathbf{Y}$, gdzie $\mathbf{G} = \Delta - \mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{D}$. Stąd i ze wzoru (4.4) wynika, że składowe wektora $\mathbf{C}_0'\hat{\mathbf{a}}$ są wewnątrz-blokowymi komponentami kontrastów obiektowych $\mathbf{s}_1'\Delta\mathbf{Y}, \mathbf{s}_2'\Delta\mathbf{Y}, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}'\Delta\mathbf{Y}$.

Udowodnimy teraz następujące

TWIERDZENIE 6.1. *Składowe wektora $\mathbf{C}_0'\hat{\mathbf{a}}$ tworzą ortogonalną bazę w przestrzeni* $V_{t-1}^{c.\acute{s}.o}$.

D o w ó d. Ponieważ $\mathbf{C}_0'\mathbf{a} = \mathbf{S}_0'\mathbf{G}\mathbf{Y}$, wystarczy więc udowodnić, że dowolne dwie kolumny macierzy $\mathbf{G}'\mathbf{S}_0$ są ortogonalne.

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_i'(\Delta - \mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{D})(\Delta' - \mathbf{D}'\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}')\,\mathbf{s}_j &= \\
&= \mathbf{s}_i'\Delta\Delta'\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i'\Delta\mathbf{D}'\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}'\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i'\mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{D}\Delta'\mathbf{s}_j + \mathbf{s}_i'\mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{D}\mathbf{D}'\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}'\mathbf{s}_j = \\
&= \mathbf{s}_i'\mathbf{r}^\delta\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i'\mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}'\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i'\mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}'\mathbf{s}_j + \mathbf{s}_i'\mathbf{n}\mathbf{k}^{-\delta}\mathbf{n}'\mathbf{s}_j = \\
&= -\mathbf{s}_i'\mathbf{P}\mathbf{s}_j = -\mathbf{s}_i'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{M}\mathbf{s}_j.
\end{aligned}$$

Z lematu 5.1 wynika, że s_j jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}$, stąd $s_i'r^{\delta}\mathbf{M}s_j = \mu_j s_i' r^{\delta} s_j = 0$.

Ponieważ $s_t = (1/\sqrt{N})\mathbf{1}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}$ odpowiadającym wartości własnej 1, przeto wektor $\mathbf{G}'s_t$ jest ortogonalny do każdego wektora $\mathbf{G}'s_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, t-1$. Z drugiej strony $s_t'\mathbf{G}\mathbf{Y} = c_t'\mathbf{a}$. Otrzymujemy stąd następujący

WNIOSEK 6.1. *Składowe wektora* $\mathbf{C}'\hat{\mathbf{a}}$ *tworzą ortogonalną bazę w przestrzeni* $V_t^{\text{k.ś.o.}}$.

DEFINICJA 6.1. Składowe wektora $\mathbf{C}'\hat{\mathbf{a}} = (c_1'\mathbf{a}, c_2'\mathbf{a}, \ldots, c_{t-1}'\mathbf{a}, c_t'\mathbf{a})'$ będziemy nazywać *kombinacjami bazowymi*, a składowe wektora $\mathbf{C}_0'\mathbf{a} = (c_1'\mathbf{a}, c_2'\mathbf{a}, \ldots, c_{t-1}'\mathbf{a})'$ *kontrastami bazowymi*.

Z twierdzenia 6.1 i z wniosku 6.1 wynika, że estymatory NK kontrastów bazowych tworzą ortogonalną bazę w przestrzeni $V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$, a estymatory NK kombinacji bazowych tworzą ortogonalną bazę w przestrzeni $V_t^{\text{k.ś.o.}}$.

7. Średnia efektywność układu blokowego dla estymacji kombinacji bazowych i kontrastów bazowych. Następujące twierdzenie podaje zależność pomiędzy średnią efektywnością układu blokowego dla estymacji bazowych kontrastów i bazowych kombinacji wektora $\mathbf{a}$, a średnią efektywnością dla estymacji samych średnich.

TWIERDZENIE 7.1. *Średnia efektywność układu blokowego* $U(\mathbf{n})$ *dla estymacji kombinacji bazowych* $\mathbf{C}'\mathbf{a}$ *wyraża się wzorem*

$$\varepsilon(\mathbf{C}'\mathbf{a}) = \varepsilon(\mathbf{a}),$$

a dla estymacji kontrastów bazowych wzorem

$$\varepsilon(\mathbf{C}_0'\mathbf{a}) = \{(t-1)/[t-\varepsilon(\mathbf{a})]\}\,\varepsilon(\mathbf{a}),$$

gdzie $\varepsilon(\mathbf{a}) = t/\sum_i r_i\Omega_i = t/\sum_i [1/(1-\mu_i)]$ *jest efektywnością układu* $U(\mathbf{n})$ *dla estymacji wektora średnich obiektowych.*

Dowód. Na mocy (3.5) mamy $\varepsilon(\mathbf{C}'\mathbf{a}) = t/\mathrm{tr}(\mathbf{C}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}\,\mathrm{diag}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{C})$. Z wzoru (6.6) wynika, że $\mathbf{C}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{C} = \boldsymbol{\Lambda}^{2\delta}$. Ponieważ $\mathbf{C} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{S}$, przeto

$$t/\varepsilon(\mathbf{C}'\mathbf{a}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{S}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-2\delta} = \mathrm{tr}\,\mathbf{S}'\mathbf{r}^{\delta}(\mathbf{1}^{\delta}-\mathbf{M}_0)\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-2\delta},$$

ale kolumny macierzy $\mathbf{S}$ są wektorami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0$, stąd $(\mathbf{1}^{\delta}-\mathbf{M}_0)\mathbf{S} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^{\delta}$. Teraz możemy napisać

$$t/\varepsilon(\mathbf{C}'\mathbf{a}) = \mathrm{tr}\,\mathbf{S}'\mathbf{r}^{\delta}\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}^{-\delta} = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Lambda}^{-\delta} = \mathrm{tr}(\mathbf{1}^{\delta}-\mathbf{M}_0)^{-1} = t/\varepsilon(\mathbf{a}),$$

czyli

$$\varepsilon(\mathbf{C}'\mathbf{a}) = \varepsilon(\mathbf{a}).$$

Z drugiej strony, wobec (6.2) i (6.4), otrzymujemy

$$t/\varepsilon(\mathbf{a}) = t/\varepsilon(\mathbf{C}'\mathbf{a}) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_0'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_0'\boldsymbol{\Omega}c_t \\ c_t'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}_0 & c_t'\boldsymbol{\Omega}c_t \end{bmatrix} \mathrm{diag}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_0'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{C}_0 & \mathbf{C}_0'\mathbf{r}^{-\delta}c_t \\ c_t'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{C}_0 & c_t'\mathbf{r}^{-\delta}c_t \end{bmatrix}\right).$$

Ponieważ $\mathbf{c}_t = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{s}_t = (1/\sqrt{N})\mathbf{r}$, więc $\mathbf{c}_t'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{c}_t = 1$ oraz $\mathbf{c}_t'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}_t = 1$. Korzystając z tych równości możemy napisać

$$t/\varepsilon(a) = \mathrm{tr}(\mathbf{C}_0'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}_0\ \mathrm{diag}^{-1}\mathbf{C}_0'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{C}_0) + 1 = (t-1)/\varepsilon(\mathbf{C}_0'\mathbf{a}) + 1.$$

Z powyższego wynika, że

$$\varepsilon(\mathbf{C}_0'\mathbf{a}) = \{(t-1)/[t-\varepsilon(\mathbf{a})]\}\varepsilon(\mathbf{a}).$$

Ponieważ $0 < \varepsilon(\mathbf{a}) \leqslant 1$ i $\varepsilon(\mathbf{a}) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy układ $U(\mathbf{n})$ jest ortogonalny, przeto z twierdzenia 7.1 wynika następujący

WNIOSEK 7.1. *Nieortogonalny układ blokowy jest dla estymacji kontrastów bazowych zawsze mniej efektywny niż dla estymacji samych średnich.*

8. Współczynnik efektywności Jones'a a średnia efektywność układu. Caliński ([2]) zauważył, że jeżeli kontrast obiektowy $\mathbf{s}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}_0$ odpowiadającym wartości własnej μ, to wariancja jego komponenta wewnątrz-blokowego $\mathbf{c}'\mathbf{a}$ ($\mathbf{c} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{s}$) jest proporcjonalna do wariancji $\mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y}$

$$\mathrm{var}(\mathbf{c}'\hat{\mathbf{a}}) = (1-\mu)\ \mathrm{var}\ \mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y}. \tag{8.1}$$

Wielkość μ można uważać za stratę informacji w odniesieniu do kontrastu $\mathbf{s}'\Delta\mathbf{Y}$, spowodowaną częściowym uwikłaniem kontrastu z blokami. Jeżeli $\mathbf{s}'\mathbf{nk}^{-\delta}\mathbf{D} = \mathbf{0}$, to na mocy wzoru (4.2) kontrast obiektowy leży w przestrzeni $V_{t-1}^{\text{c.ś.o.}}$. W takim razie całość informacji dotycząca tego kontrastu zawarta jest w jego komponencie wewnątrz-blokowym. Wielkość $E = 1-\mu$ nosi nazwę *współczynnika efektywności* danego układu blokowego względem kontrastu $\mathbf{s}$ (Jones [3]). Z drugiej strony stosunek wariancji w układzie ortogonalnym do wariancji w układzie $U(\mathbf{n})$ wewnątrz-blokowego komponentu kontrastu obiektowego $\mathbf{s}$, będącego wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}_0$ odpowiadającym wartości własnej μ, wyraża się wzorem ([1]):

$$\mathbf{c}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{c}/\mathbf{c}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c} = 1-\mu. \tag{8.2}$$

Wyrażenie $\mathbf{c}'\mathbf{r}^{-\delta}\mathbf{c}/\mathbf{c}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{c}$, gdzie $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{s}$ można przyjąć jako uogólnienie definicji współczynnika efektywności Jones'a na przypadek dowolnego kontrastu $\mathbf{s}$. Średnia efektywność dla estymacji funkcji $\mathbf{c}'\mathbf{a} = \mathbf{s}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{a}$ pokrywa się ze współczynnikiem efektywności Jones'a względem kontrastu $\mathbf{s}$.

9. Układy zrównoważone. Dowodząc twierdzenie o ortogonalności komponentów wewnątrz-blokowych kontrastów obiektowych $\Delta'\mathbf{s}_1, \Delta'\mathbf{s}_2, \ldots, \Delta'\mathbf{s}_{t-1}$, w istotny sposób wykorzystaliśmy fakt, że $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}$ są wektorami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0$. Zastanówmy się teraz, dla jakich układów blokowych każda para ortogonalnych kontrastów obiektowych ma ortogonalne komponenty wewnątrz-blokowe. Zauważmy, że z ortogonalności wewnątrz-blokowych komponentów ortogonalnych kontrastów obiektowych wynika ortogonalność ich komponentów blokowych. Jones ([3]) udowodnił, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby każda para ortogonalnych kontrastów obiektowych miała blokowe i wewnątrz-blokowe komponenty ortogonalne, jest aby dla pewnych μ i ν spełniona była równość $\mathbf{P} = \mu\mathbf{r}^{\delta} + \nu\mathbf{r}\mathbf{r}'$. Ponieważ $\mathbf{P1} = \mu\mathbf{r} + \nu\mathbf{r}\cdot N = \mathbf{r}$, przeto otrzymujemy następującą równość $\nu = (1-\mu)/N$. Teraz możemy napisać $\mathbf{P} = \mu\mathbf{r} + [(1-\mu)/N]\mathbf{r}\mathbf{r}'$. Na mocy wzoru (2.5) mamy

$$\mathbf{M}_0 = \mu(\mathbf{1}^{\delta} - \mathbf{1}\mathbf{r}'/N). \tag{9.1}$$

Układy blokowe, dla których macierz $\mathbf{M}_0$ jest postaci (9.1) nazywamy układami *zrównoważonymi*. Każdy kontrast obiektowy s jest wówczas wektorem własnym macierzy $\mathbf{M}_0$ odpowiadającym wartości własnej μ i współczynnik efektywności Jones'a względem dowolnego kontrastu obiektowego, jak też średnia efektywność dla estymacji dowolnego układu kontrastów wektora średniej obiektowej a jest równa $1 - \mu$. Rozważmy raz jeszcze wektory własne $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_t$ macierzy $\mathbf{M}_0$, odpowiadające wartościom własnym $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t = 0$. Niech $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_s}$ $(s \leqslant t)$ będą wartościami własnymi różnymi, tzn. $\mu_{i_k} \neq \mu_{i_l}$ dla $k \neq l$ i niech $\lambda^{\mu_{i_k}}$ będzie przestrzenią generowaną przez wektory własne macierzy $\mathbf{M}_0$, odpowiadające wartości własnej μ_{i_k}. Wówczas przestrzeń $\mathcal{L}_t$ generowaną przez wektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_t$ można rozłożyć na przestrzenie $\lambda^{\mu_{i_1}}, \lambda^{\mu_{i_2}}, \ldots, \lambda^{\mu_{i_s}}$. Współczynnik efektywności Jones'a względem dowolnego kontrastu obiektowego z przestrzeni $\lambda^{\mu_{i_j}}$, jak też średnia efektywność dla estymacji dowolnego układu kontrastów $\mathbf{c}'\mathbf{a}$, których estymatory NK są wewnątrz-blokowymi komponentami kontrastów obiektowych z przestrzeni $\lambda^{\mu_{i_j}}$, jest równa $1 - \mu_{i_j}$. Układ blokowy, dla którego przestrzeń $\mathcal{L}_t$ daje się rozłożyć na podprzestrzenie $\lambda^{\mu_{i_1}}, \lambda^{\mu_{i_2}}, \ldots, \lambda^{\mu_{i_s}}$ nazywamy układem zrównoważonym względem tego rozkładu. Oczywiście każdy układ blokowy jest zrównoważony względem pewnego rozkładu przestrzeni $\mathcal{L}_t$. Powinniśmy jednak zakładać doświadczenie tylko w takim układzie, dla którego rozkład ten jest korzystny, tzn. dla którego interesujące nas kontrasty obiektowe generują przestrzenie o możliwie małych μ_{i_j}.

10. Konstrukcja układów blokowych pewnego typu. W niniejszym rozdziale zajmiemy się konstrukcją układów blokowych, dla których rozkład przestrzeni $\mathcal{L}_t$ na podprzestrzenie generowane przez wektory własne macierzy $\mathbf{M}_0$, odpowiadające różnym wartościom własnym, może okazać się w wielu praktycznych zagadnieniach korzystny.

Niech $U(\mathbf{n})$ będzie dowolnym układem blokowym o macierzy incydencji $\mathbf{n}$ i niech $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ i N będą odpowiednio wektorem pojemności blokowej, wektorem replikacji obiektów i liczbą obserwacji dla tego układu. Rozważmy układy blokowe o następujących macierzach incydencji

$$U_1(\mathbf{n}_1):\ \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \qquad U_2(\mathbf{n}_2):\ \mathbf{n}_2 = [\mathbf{n} \quad \mathbf{n}], \qquad U_3(\mathbf{n}_3):\ \mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n} \end{bmatrix},$$

$$U_4(\mathbf{n}_4):\ \mathbf{n}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{n} \\ \mathbf{n} & \mathbf{n} \end{bmatrix}.$$

Wektorami replikacji obiektów i pojemności bloków dla tych układów są odpowiednio

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_4 = 2\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix},$$

$$k_1 = 2k, \qquad k_2 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}, \qquad k_3 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}, \qquad k_4 = 2\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathbf{P}, \mathbf{P}_0, \mathbf{M}, \mathbf{M}_0$ będą macierzami określonymi wzorami (2.2) do (2.5) dla układu $U(\mathbf{n})$. Dla układów $U_i(\mathbf{n}_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ z prostych obliczeń otrzymujemy

$$\mathbf{P}^{(1)} = (1/2)\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{(2)} = 2\mathbf{P}, \qquad \mathbf{P}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_0^{(1)} = (1/2)\begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_0^{(2)} = \mathbf{M}_0, \qquad \mathbf{M}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}-\mathbf{1}\mathbf{r}'/2N & -\mathbf{1}\mathbf{r}'/2N \\ -\mathbf{1}\mathbf{r}'/2N & \mathbf{M}-\mathbf{1}\mathbf{r}'/2N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_0^{(4)} = (1/2)\begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}.$$

Przechodząc do obliczenia wartości własnych macierzy $\mathbf{M}_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, wykorzystamy następujący, prosty w dowodzie

LEMAT 10.1. *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie macierzą postaci* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$, *gdzie* $\mathbf{A}_1$ *i* $\mathbf{A}_2$ *są macierzami kwadratowymi o tych samych wymiarach. Wówczas wyznacznik macierzy* $\mathbf{A}$ *dany jest wzorem*

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2|\,|\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2|.$$

Z powyższego lematu wynika, że

$$(10.1)\quad |\mathbf{M}_0^{(1)} - \lambda \mathbf{1}^\delta| = (1/2)^{2t}\begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 - 2\lambda\mathbf{1}^\delta & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 - 2\lambda\mathbf{1}^\delta \end{bmatrix} = -(1/2)^{2t}|2\lambda\mathbf{1}^\delta|\,|2\mathbf{M}_0 - 2\lambda\mathbf{1}^\delta|.$$

Niech $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{t-1}, \mu_t = 0$ będą wartościami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0$. Na mocy wzoru (10.1) wartościami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0^{(1)}$ są liczby $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$, przy czym zerowa wartość własna μ_t jest $(t + 1)$-krotna. Niech $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{t-1}, \mathbf{s}_t = (1/\sqrt{N})\mathbf{1}$ będzie pełnym układem $\mathbf{r}^\delta$-ortogonalnych wektorów własnych macierzy $\mathbf{M}_0$. Łatwo zauważyć, że wektorami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0^{(1)}$, odpowiadającymi wartości własnej zero są

$$\mathbf{s}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ -\mathbf{s}_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{s}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2 \\ -\mathbf{s}_2 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{s}_{t-1}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{t-1} \\ -\mathbf{s}_{t-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_t^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{1}.$$

Średnia efektywność dla dowolnego układu wewnątrz-blokowych komponentów kontrastów z $(t + 1)$-wymiarowej przestrzeni generowanej przez wektory $\mathbf{s}_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, t + 1)$

jest równa 1. Wektorami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0^{(1)}$, odpowiadającymi wartościom własnym $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{t-1}$ są kontrasty obiektowe postaci

$$\mathbf{s}_{t+2}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \\ \mathbf{s}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_{t+3}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_2 \\ \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{s}_{2t}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{t-1} \\ \\ \mathbf{s}_{t-1} \end{bmatrix}.$$

Wraz z wektorami $\mathbf{s}_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, t+1)$ tworzą one pełny układ $\mathbf{r}_1^{\delta}$-ortogonalnych wektorów własnych macierzy $\mathbf{M}_0^{(1)}$.

Macierz $\mathbf{M}_0^{(2)}$ jest równa macierzy $\mathbf{M}_0$, a więc układ $U_2(\mathbf{n}_2)$ nie wydaje się być zbyt ciekawym. W praktyce może jednak okazać się przydatnym, zachowuje bowiem średnią efektywność układu wyjściowego dla estymacji bazowych kontrastów i bazowych kombinacji kosztem zwiększenia liczby bloków, nie zwiększając ich pojemności.

Układ $U_4(\mathbf{n}_4)$ jest złożeniem układów $U_1(\mathbf{n}_1)$ i $U_2(\mathbf{n}_2)$ i szczegółowo omawiać go nie będziemy.

Ciekawym wydaje się być układ $U_3(\mathbf{n}_3)$. Znajdźmy wartości własne macierzy $\mathbf{M}_0^{(3)}$. $|\mathbf{M}_0^{(3)} - \lambda \mathbf{1}^{\delta}| = |\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}^{\delta}|\,|\mathbf{M} - \mathbf{1}\mathbf{r}'/N - \lambda \mathbf{1}^{\delta}|$. Na mocy wzoru (2.5) otrzymujemy

$$|\mathbf{M}_0^{(3)} - \lambda \mathbf{1}^{\delta}| = |\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}^{\delta}|\,|\mathbf{M}_0 - \lambda \mathbf{1}^{\delta}|. \tag{10.2}$$

Z wniosku 5.1 i z wzoru (10.2) wynika, że wartościami własnymi macierzy $\mathbf{M}_0^{(3)}$ są liczby $1, 0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{t-1}$, przy czym krotność μ_i $(i = 1, 2, \ldots, t-1)$ jest dwa. Ponieważ 1 jest wartością własną macierzy $\mathbf{M}_0^{(3)}$, przeto macierz $\mathbf{1}^{\delta} - \mathbf{M}_0^{(3)}$, a więc i macierz Ω^{-1} jest dla układu $U_3(\mathbf{n}_3)$ macierzą nieosobliwą. Z postaci macierzy incydencji $\mathbf{n}_3$ wynika, że w układzie $U_3(\mathbf{n}_3)$ występują dwie grupy obiektów rozmieszczonych w oddzielnych blokach. Takie postępowanie sprawia, że macierz układu $[\mathbf{1}\ \mathbf{D}'\boldsymbol{\Delta}']$ jest rzędu mniejszego niż $b + t - 1$.

Powróćmy jeszcze do układu $U_1(\mathbf{n}_1)$, w którym dwie grupy obiektów rozmieszczone są we wspólnych blokach w jednakowy sposób. Funkcje parametryczne, dla estymacji których średnia efektywność jest jeden, tworzą co najmniej $(t+1)$-wymiarową przestrzeń liniową. Jeżeli macierz $\mathbf{M}_0$ układu wyjściowego ma zerową wartość własną krotności większej niż jeden, wówczas wymiar tej przestrzeni jest odpowiednio większy. W szczególności, jeżeli układ wyjściowy jest ortogonalny, to ortogonalny jest również układ $U_1(\mathbf{n}_1)$.

Uogólnieniem układu $U_1(\mathbf{n}_1)$ jest układ, w którym m różnych grup obiektów rozmieszczonych jest w blokach według macierzy incydencji $\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$. Macierzami określonymi wzorami (2.2) do (2.5) są odpowiednio

$$\mathbf{P}^{(1)} = (1/m)\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{P} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} & \ldots & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_0^{(1)} = (1/m)\begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 & \ldots & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 & \ldots & \mathbf{M}_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 & \ldots & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}.$$

Aby obliczyć wartości własne macierzy $\mathbf{M}_0^{(1)}$ wykorzystamy lemat, który jest uogólnieniem lematu 10.1.

LEMAT 10.2. *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie dowolną macierzą kwadratową postaci*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{A}_1$ *i* $\mathbf{A}_2$ *są macierzami kwadratowymi o jednakowych wymiarach. Wówczas, jeżeli* m *jest liczbą podmacierzy* $\mathbf{A}_1$, *to*

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2|^{(m-1)} |\mathbf{A}_1 + (m-1)\mathbf{A}_2|.$$

Z powyższego lematu wynika, że

$$|\mathbf{M}_0^{(1)} - \lambda \mathbf{1}^\delta| = (1/m)^{mt} \begin{vmatrix} \mathbf{M}_0 - m\lambda \mathbf{1}^\delta & \mathbf{M}_0 & \dots & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 - m\lambda \mathbf{1}^\delta & \dots & \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{M}_0 & \mathbf{M}_0 & \dots & \mathbf{M}_0 - m\lambda \mathbf{1}^\delta \end{vmatrix} =$$

$$= (1/m)^{mt} |-m\lambda \mathbf{1}^\delta|^{m-1} |m\mathbf{M}_0 - m\lambda \mathbf{1}^\delta|.$$

Zerowa wartość własna macierzy $\mathbf{M}_0^{(1)}$ jest więc co najmniej $[t \times (m-1) + 1]$-krotna. W podobny sposób można uogólnić konstrukcje układów $U_2(\mathbf{n}_2)$, $U_3(\mathbf{n}_3)$, $U_4(\mathbf{n}_4)$. Szczegółowa ich analiza jest podobna jak w przypadku układu $U_1(\mathbf{n}_1)$ i nie będziemy się nią bliżej zajmowali. Inne uogólnienia układu $U_1(\mathbf{n}_1)$ znaleźć można w pracach Pearce [4] i Calińskiego [1].

Bibliografia

[1] T. Caliński, *On some desirable patterns in block design,* Biometrics 27(1971), str. 275–292.
[2] – *Wybrane zagadnienia z teorii eksperymentu,* Warszawa 1972.
[3] R. Jones, *On a property of incomplete blocks,* J. R. Statist. Soc. B21(1959), str. 172–179.
[4] S. Pearce, *Supplemented balance,* Biometrika 47(1960), str. 263–271.
[5] – *The mean efficiency of equi-replicate designs,* Biometrika 55 (1968), str. 251–253.
[6] – *The efficiency of block designs in general,* Biometrika 57 (1970), str. 339–346.
[7] M. Pease, *Methods of Matrix Algebra,* New York and London 1965.
[8] D. Rees, *The analysis of variance of designs with many non-orthogonal classifications,* J. R. Statist. Soc. B28 (1966), str. 110–117.
[9] H. Scheffé, *The Analysis of Variance,* New York 1959.
[10] K. Tocher, *The design and analysis of blok experiments,* J. R. Statist. Soc. B14 (1952), str. 45–91

POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT IMMUNOLOGII I TERAPII DOŚWIADCZALNEJ
Wrocław