ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA V (1975)

Ilona KOPOCIŃSKA i B. KOPOCIŃSKI (Wrocław)

Włożone łańcuchy Markowa dla pewnych rozbudowanych procesów obsługi masowej

1. Wprowadzenie. Jedną z podstawowych charakterystyk systemów obsługi masowej jest proces stochastyczny $\{n(t), t \geqslant 0\}$ zdefiniowany jako liczba jednostek znajdujących się w systemie w chwili t. W pewnych przypadkach proces ten jest procesem Markowa i wówczas jego analiza jest względnie łatwa. Gdy proces $\{n(t), t \geqslant 0\}$ nie jest procesem Markowa zazwyczaj dokonuje się jego „markowizacji" przez odpowiednie rozbudowanie stanu systemu lub przez skonstruowanie odpowiedniego włożonego łańcucha Markowa. Metoda rozbudowy stanu systemu, polegająca na tworzeniu wektorowego procesu, którego jedną ze składowych jest proces $\{n(t), t \geqslant 0\}$, daje natychmiast interesujące charakterystyki procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$. Metoda włożonych łańcuchów Markowa, polegająca na badaniu procesu w odpowiednio wybranym ciągu chwil, daje charakterystyki tego procesu jedynie w wybranych chwilach, np. system $GI/M/N$ może być analizowany w chwilach zgłoszeń jednostek do systemu. Dlatego też, gdy użyta jest metoda włożonych łańcuchów Markowa, interesujące charakterystyki procesu w ciągłym czasie mogą być uzyskane przy dodatkowym wysiłku.

Zauważmy, że zbadanie charakterystyk procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ w odpowiednio wybranych chwilach może być interesujące i przydatne do dalszego opisu systemu. Np. we wspomnianym systemie $GI/M/N$ znajomość rozkładu prawdopodobieństwa stanu systemu w chwilach zgłoszeń jednostek do systemu pozwala natychmiast znaleźć rozkład czasu czekania jednostki na obsługę. Może się więc zdarzyć, że będziemy poszukiwali rozkładu prawdopodobieństwa stanu pewnego łańcucha włożonego wtedy, gdy rozkład prawdopodobieństwa procesu ciągłego parametru jest już znany.

Relacji między rozkładami prawdopodobieństwa stanu procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ i wybranych łańcuchów włożonych będziemy szukali przy założeniu stacjonarności procesu. Dla wielu systemów obsługi masowej relacje te są znane; znalezione one zostały także ogólnie dla obszernej klasy procesów przedziałami markowskich. W tej pracy prezentujemy sposób znajdowania tych relacji przy użyciu metody rozbudowy stanu systemu i dajemy systematyczny przegląd znanych wyników. Głównie uwagę skupimy na systemach ze sprzężeniem intensywności zgłoszeń lub intensywności obsługi i liczby jednostek w systemie, systemach z mieszanką strumieni zgłoszeń i systemach konserwacji z priorytetami.

2. Procesy przedziałami markowskie

2.1. Definicje i oznaczenia. Liczne systemy obsługi masowej można opisać przy użyciu skokowych procesów ciągłego parametru, które startując od pewnego stanu początkowego

zmieniają się w sposób markowski w pewnym segmencie (przedziale czasu), którego długość jest określona na początku segmentu. W końcu segmentu zmienia się stan systemu i proces jest kontynuowany w sposób markowski w kolejnym segmencie z nowym warunkiem początkowym.

Procesy stochastyczne o opisanej strukturze nazywamy procesami przedziałami markowskimi. Definicje potrzebne do ich analizy podał A. Kuczura, który zajmował się również analizą stacjonarnych charakterystyk tych procesów i ich zastosowaniami w teorii obsługi masowej ([19] – [21]). Niżej podajemy niektóre wyniki A. Kuczury z nowymi dowodami uzyskanymi metodą rozbudowy procesu przedziałami markowskiego do procesu Markowa.

Niech S będzie dyskretną przestrzenią stanów $\{0, 1, \ldots, N\}$ lub $\{0, 1, \ldots\}$. Proces stochastyczny $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ nazywamy procesem *przedziałami markowskim* jeżeli istnieje ciąg zmiennych losowych $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots$ taki, że dla każdego $m = 1, 2, \ldots$

(2.1) $$\{Y(t),\ \omega_{m-1} \leqslant t < \omega_m\}$$

jest procesem Markowa,

(2.2) $$p_{ij} = \Pr\{Y(\omega_m) = j \mid Y(\omega_m - 0) = i\}, \qquad i, j \in S,$$

są elementami macierzy prawdopodobieństw przejścia (p_{ij}), oraz

(2.3) $$F_k(u) = \Pr\{\omega_m - \omega_{m-1} < u \mid Y(\omega_{m-1}) = k\}, \qquad k \in S,$$

są dystrybuantami z $F_k(0+) = 0$.

Proces $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$ jest procesem regenerującym się w sensie W. L. Smitha [24], a chwile $\omega_1, \omega_2, \ldots$, są chwilami regeneracji. Znajomość procesu w chwili regeneracji ω_m w pełni wystarcza do opisu procesu w czasie późniejszym $t > \omega_m$; w szczególności

$$\Pr\{Y(t) = j \mid Y(s) \text{ dla wszystkich } s \leqslant \omega_m\} = \Pr\{Y(t) = j \mid Y(\omega_m)\}.$$

Zmianę stanu w chwilach regeneracji nazywamy przejściem regeneratywnym (dopuszczamy także przejście do tego samego stanu). Poza chwilami regeneracji zmiany stanu nazywamy przejściami markowskimi.

Przedziały $\omega_m \leqslant t < \omega_{m+1}$, $m = 0, 1, \ldots$ nazywamy segmentami markowskimi. Zakładamy, że jeżeli segment rozpoczyna się gdy stan procesu jest k, to jego długość ma rozkład prawdopodobieństwa F_k mogący zależeć od k, macierz intensywności przejścia $(\theta_{ij}^{(k)})$ procesu Markowa w tym segmencie może zależeć od k ale wymienione wielkości nie zależą od m. Mając daną macierz intensywności przejścia $(\theta_{ij}^{(k)})$ możemy znaleźć prawdopodobieństwa przejścia $P_{ij}^{(k)}(t)$. Symbolicznie, dla każdego s i t takich, że $\omega_m \leqslant$ $\leqslant s < s + t < \omega_{m+1}$ mamy

$$\Pr\{Y(t+s) = j \mid Y(s) = i,\ Y(\omega_m) = k\} = P_{ij}^{(k)}(t), \qquad i, j, k \in S.$$

Przy tym oczywiście

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} P_{ij}^{(k)}(t) = \theta_{ij}^{(k)}, \qquad i, j, k \in S, \qquad i \neq j,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(1 - P_{ii}^{(k)}(t)) = \theta_i^{(k)} = \sum_{j\neq i} \theta_{ij}^{(k)}, \qquad i, k \in S.$$

Procesy przedziałami markowskie są kompletnie opisane przez trójkę $(F_k, (p_{ij}), (\theta_{ij}^{(k)}))$. Łatwo zauważyć, że do tej klasy procesów należą procesy semi-markowskie $(F_k, (p_{ij}), (0))$, procesy odnowy $(F_k, (\delta_{i,j-1}), (0))$, gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera, a także, oczywiście, procesy Markowa. Interesujące zastosowania znajdują procesy przedziałami markowskie w teorii obsługi masowej (por. [19], [21]).

2.2. Włożone łańcuchy Markowa i włożone strumienie odnowy. Niech $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ będzie procesem przedziałami markowskim scharakteryzowanym trójką $(F_k, (p_{ij}), (\theta_{ij}^{(k)}))$. Weźmy pod uwagę dwa następujące ciągi zmiennych losowych:

$$R_m = Y(\omega_m - 0), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$S_m = Y(\omega_m), \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Łatwo zauważyć, że są to jednorodne łańcuchy Markowa bowiem $\{\omega_m\}$ jest ciągiem chwil regeneracji. Przyjmijmy oznaczenia dla prawdopodobieństw przejścia

$$r_{ij} = \Pr\{R_m = j \mid R_{m-1} = i\},$$

$$s_{ij} = \Pr\{S_m = j \mid S_{m-1} = i\}, \qquad i, j \in S,$$

dla dowolnego m. Prawdopodobieństwa te możemy wyrazić przez zdefiniowane poprzednio pojęcia w następujący sposób:

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} r_{ij} &= \int_0^\infty \sum_k p_{ik} P_{kj}^{(k)}(u)\, dF_k(u), \\ s_{ij} &= \int_0^\infty \sum_k P_{ik}^{(i)}(u)\, p_{kj}\, dF_i(u), \qquad i, j \in S. \end{aligned}$$

W zastosowaniach włożone łańcuchy Markowa $\{R_m\}$ i $\{S_m\}$ są nieprzywiedlne i ergodyczne a więc istnieją graniczne rozkłady prawdopodobieństwa stanu nie zależne od stanu początkowego:

$$\lim_{m\to\infty} \Pr\{R_m = j \mid R_1 = i\} = \rho_j,$$

$$\lim_{m\to\infty} \Pr\{S_m = j \mid S_0 = i\} = \sigma_j, \qquad j \in S.$$

Prawdopodobieństwa graniczne spełniają jednorodne układy równań

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} \rho_j &= \sum_i \rho_i r_{ij}, \\ \sigma_j &= \sum_i \sigma_i s_{ij}, \qquad j \in S, \end{aligned}$$

oraz warunki zupełności prawdopodobieństwa

(2.6) $$\sum_j \rho_j = 1, \qquad \sum_j \sigma_j = 1.$$

Ponadto, ponieważ zmienne losowe R_m i S_m są związane przejściem regeneratywnym, między rozkładami $\{\rho_j\}$ i $\{\sigma_j\}$ zachodzi związek

(2.7) $$\sigma_j = \sum_i \rho_i p_{ij}, \qquad j \in S.$$

Weźmy pod uwagę strumień regeneratywnych przejść do stanu j w procesie przedziałami markowskim $\{Y(t), t \geqslant 0\}$. Długości czasu między kolejnymi chwilami w rozważanym strumieniu są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Załóżmy, że średni odstęp między sygnałami rozważanego włożonego strumienia odnowy jest skończony i oznaczmy go przez $1/\mu_j$.

TWIERDZENIE 2.1. *W procesie przedziałami markowskim $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ ciągi $\{\mu_j\}$ i $\{\sigma_j\}$, jeżeli istnieją, związane są równościami*

(2.8) $$\mu_j = \nu\sigma_j, \qquad j \in S,$$

gdzie

(2.9) $$\frac{1}{\nu} = \sum_i \frac{\sigma_i}{\nu_i}$$

przy czym $\frac{1}{\nu_i} = \int_0^\infty (1 - F_i(u))du$ *jest średnią w rozkładzie* F_i.

D o w ó d. Niech F_{ij} oznacza rozkład prawdopodobieństwa długości czasu od chwili regeneratywnego przejścia do stanu i do chwili regeneratywnego przejścia do stanu j. Rozkłady te przy $i, j \in S$ spełniają następujący układ równań:

(2.10) $$1 - F_{ij}(x) = 1 - F_i(x) + \sum_k \sum_{l \neq j} \int_0^x P_{ik}^{(i)}(u) p_{kl} (1 - F_{lj}(x-u))\, dF_i(u), \qquad i, j \in S.$$

Niech $\frac{1}{\mu_{ij}} = \int_0^\infty (1 - F_{ij}(u))du$; oczywiście $\frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_{jj}}$. Całkując (2.10) obustronnie otrzymujemy

$$\frac{1}{\mu_{ij}} = \frac{1}{\nu_i} + \sum_k \sum_{l \neq j} \frac{1}{\mu_{lj}} \int_0^\infty P_{ik}^{(i)}(u)\, p_{kl}\, dF_i(u), \qquad i, j \in S,$$

czyli, wobec (2.4)

(2.11) $$\frac{1}{\mu_{ij}} = \frac{1}{\nu_i} + \sum_{l \neq j} \frac{1}{\mu_{lj}} s_{il}, \qquad i, j \in S.$$

Pomnóżmy równanie (2.11) obustronnie przez σ_i i zsumujmy względem i. Korzystając z (2.5), po redukcji otrzymujemy

$$\frac{\sigma_j}{\mu_{jj}} = \sum_i \frac{\sigma_i}{\nu_i} = \frac{1}{\nu}, \qquad j \in S.$$

To kończy dowód twierdzenia 2.1.

WNIOSEK 2.1. *Ciąg* $\{\mu_j\}$, *jeżeli istnieje, spełnia jednorodny układ równań*

$$\mu_j = \sum_i \mu_i s_{ij}, \qquad j \in S, \tag{2.12}$$

z warunkiem

$$\sum_j \frac{\mu_j}{\nu_j} = 1. \tag{2.13}$$

Wniosek 2.1 wynika z (2.5) i (2.9) po podstawieniu (2.8).

2.3. Rozkłady graniczne. Przejdziemy teraz do analizowania procesu przedziałami markowskiego jako procesu ciągłego parametru. Weźmy pod uwagę prawdopodobieństwa przejścia

$$Q_j^{(i)}(t) = \Pr\{Y(t) = j \mid Y(0) = i\}, \qquad i, j \in S,$$

oraz graniczne prawdopodobieństwa

$$q_j = \lim_{t \to \infty} Q_j^{(i)}(t), \qquad j \in S.$$

Postać granicznego rozkładu prawdopodobieństwa procesu przedziałami markowskiego rozpatrywanego w czasie ciągłym oraz związki między nim a granicznymi rozkładami prawdopodobieństwa włożonych łańcuchów Markowa $\{R_m\}$ i $\{S_m\}$ dają dwa następujące twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.2. *W procesie przedziałami markowskim* $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ *rozkłady graniczne* $\{q_j\}$, *jeżeli istnieją, są postaci*

$$q_j = \sum_k \mu_k \int_0^\infty (1 - F_k(u)) P_{kj}^{(k)}(u)\, du, \qquad j \in S. \tag{2.14}$$

TWIERDZENIE 2.3. *W procesie przedziałami markowskim* $\{Y(t), t \geqslant 0\}$, *jeżeli macierze intensywności przejścia markowskiego są jednakowe,* $(\theta_{ij}^{(k)}) = (\theta_{ij})$, *to graniczne rozkłady prawdopodobieństwa* $\{q_j\}$, $\{\rho_j\}$ *i* $\{\sigma_j\}$, *jeżeli istnieją, spełniają układ równań*

$$\nu \rho_j + \theta_j q_j = \nu \sigma_j + \sum_{k \neq j} \theta_{kj} q_k, \qquad j \in S. \tag{2.15}$$

D o w ó d t w i e r d z e n i a 2.2. Łatwo zauważyć, że

$$(2.16)\quad Q_j^{(i)}(t) = (1 - F_i(t))P_{ij}^{(i)}(t) + \int_0^t \sum_k (1 - F_k(t-u))P_{kj}^{(k)}(t-u)\, dH_k^{(i)}(u),$$

gdzie $H_k^{(i)}(u)$ jest funkcją odnowy strumienia odnowy regeneratywnych przejść do stanu k przy założeniu $Y(0) = i$. Pierwsze wyrażenie po prawej stronie (2.16) dąży do zera przy $t \to \infty$, natomiast granicę drugiego wyrażenia znajdujemy korzystając z węzłowego twierdzenia teorii odnowy (W. L. Smith [24]).

Dowód twierdzenia 2.3. Niech $X(t)$ będzie długością czasu od chwili t do najbliższej chwili regeneracji. Proces stochastyczny $\{(Y(t), X(t)), t \geqslant 0\}$ jest procesem Markowa; przy badaniu własności granicznych charakterystyk tego procesu wystarczy ograniczyć się do procesów stacjonarnych. Niech więc

$$P_j(x) = \Pr\{Y(t) = j,\ X(t) < x\}, \qquad j \in S.$$

Analizując stan procesu w chwilach t i $t+h$, $h > 0$, z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy

$$\Pr\{Y(t+h) = j,\ X(t+h) < x\} = \Pr\{Y(t) = j,\ h \leqslant X(t) < x + h\}(1 - \theta_j h) + \sum_k \Pr\{Y(t) = k,\ X(t) < h\} F_j(x+h)\, p_{kj} + \sum_{k \neq j} \Pr\{Y(t) = k,\ h \leqslant X(t) < x + h\}\theta_{kj} h + o(h), \qquad j \in S.$$

Stąd

$$P_j(x) = (P_j(x+h) - P_j(h))(1 - \theta_j h) + \sum_k P_k(h)\, p_{kj} F_j(x+h) + \sum_{k \neq j}(P_k(x+h) - P_k(h))\theta_{kj} h + o(h), \qquad j \in S.$$

Po utworzeniu ilorazów różnicowych i przejściu do granicy przy $h \to 0$ otrzymujemy

$$(2.17)\quad P_j'(x) - P_j'(0) - P_j(x)\theta_j + \sum_k P_k'(0)\, p_{kj} F_j(x) + \sum_{k \neq j} P_k(x)\theta_{kj} = 0, \qquad j \in S.$$

Przechodząc do granicy przy $x \to \infty$ wobec tego, że $P_j'(x) \to 0$, $F_j(x) \to 1$, $P_j(x) \to q_j$ otrzymujemy

$$(2.18)\quad -P_j'(0) - q_j\theta_j + \sum_k P_k'(0)\, p_{kj} + \sum_{k \neq j} q_k \theta_{kj} = 0, \qquad j \in S.$$

Zajmiemy się teraz wyrażeniami $P_j'(0)$, $j \in S$. Niech

$$P(x) = \Pr\{X(t) < x\} = \sum_k P_k(x).$$

Sumując (2.17) stronami otrzymujemy

$$P'(x) - P'(0) + \sum_k P_k'(0) \sum_j p_{kj} F_j(x) = 0.$$

Ponieważ $P(0) = 0, P(\infty) = 1$, więc powyższe równanie ma następujące rozwiązanie:

$$P(x) = \sum_k P'_k(0) \sum_j p_{kj} \int_0^x (1 - F_j(u))\, du, \tag{2.19}$$

przy czym

$$\sum_k P'_k(0) \sum_j p_{kj} \frac{1}{\nu_j} = 1. \tag{2.20}$$

Zauważmy, że

$$P'_j(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Pr\{Y(t) = j,\ X(t) < h\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Pr\{X(t) < h\} \Pr\{Y(t) = j \mid X(t) < h\} = \Big(\sum_k P'_k(0)\Big) \rho_j,$$

to znaczy, że $P'_j(0)$ są proporcjonalne do ρ_j. Po podstawieniu do (2.20) wobec (2.7) i (2.9) otrzymujemy

$$P'_j(0) = \nu \rho_j, \qquad j \in S.$$

Stąd i z (2.18) wynika (2.15) co kończy dowód twierdzenia 2.3.

3. Systemy obsługi masowej ze sprzężeniem zwrotnym

3.1. System $GI/M/\infty$ ze sprzężeniem intensywności obsługi i liczby jednostek w systemie. Weźmy pod uwagę system obsługi masowej oznaczony symbolicznie przez $GI/M/\infty$, a więc system, w którym strumień zgłoszeń jest strumieniem Palma (GI – z ang. general independent) natomiast czas obsługi ma rozkład wykładniczy (M – z ang. Markovian). Oznaczmy przez G rozkład prawdopodobieństwa odstępów między zgłoszeniami jednostek do systemu i niech μ_j oznacza intensywność obsługi (łącznie we wszystkich liniach obsługi) przy warunku, że j jednostek znajduje się w systemie w danej chwili. Zakładamy, że istnieje wartość oczekiwana w rozkładzie G, $\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x\, dG(x)$ oraz ponadto, że $G(0+) = 0$, co oznacza, że odstęp między zgłoszeniami jednostek do systemu nie może być zerowy z dodatnim prawdopodobieństwem. W całej tej pracy stan systemu zdefiniowany jako liczba jednostek znajdujących się w systemie w chwili t oznaczamy przez $n(t)$.

TWIERDZENIE 3.1. *W systemie $GI/M/\infty$ ze sprzężeniem intensywności obsługi i liczby jednostek w systemie proces stochastyczny $\{n(t), t \geq 0\}$ jest procesem przedziałami markowskim, w którym chwilami regeneracji są chwile $\{S_m\}$ zgłoszeń jednostek do systemu. Ciąg $\{n(S_m - 0)\}$ jest włożonym łańcuchem Markowa, a rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j\}$ stanu procesu $\{n(t), t \geq 0\}$ i rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j^-\}$ stanu łańcucha $\{n(S_m - 0)\}$, jeżeli istnieją, spełniają następujące równości:*

(3.1)
$$p_{j+1} = \frac{\lambda}{\mu_{j+1}} p_j^-, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$
$$p_0 = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_{j+1}} p_j^-.$$

WNIOSEK 3.1. *W systemie GI/M/N (z oczekiwaniem) mamy*

$$\mu_j = \min(j, N)\mu, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

i wobec tego

$$p_{j+1} = \frac{\rho}{\min(j, N)} p_j^-, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

gdzie $\rho = \lambda/\mu$.

W szczególności dla systemu GI/M/1 mamy $\mu_j = \mu, j = 1, 2, \ldots$, *a więc* $p_{j+1} = \rho p_j^-$, $j = 0, 1, \ldots,$ $p_0 = 1 - \rho$ (F. G. Foster, A. G. A. D. Perrera [4]).

WNIOSEK 3.2. *W systemie GI/M/N bez oczekiwania mamy*

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1, 2, \ldots, N, \\ \infty, & j = N+1, N+2, \ldots, \end{cases}$$

i wobec tego mamy

(3.3)
$$p_{j+1} = \frac{\rho}{j+1} p_j^-, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$
$$p_0 = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\rho}{j+1} p_j^-$$

(L. Takács [25], str. 182).

D o w ó d t w i e r d z e n i a 3.1. W rozpatrywanym systemie proces stochastyczny $\{n(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem skokowym, o przyrostach jednostkowych w chwilach zgłoszeń jednostek do systemu oraz czystym procesem śmierci w przedziałach czasu między zgłoszeniami. Jest więc to proces przedziałami markowski, w którym odstępy między chwilami regeneracji mają ten sam rozkład prawdopodobieństwa G z parametrem $\nu = \lambda$. Macierz prawdopodobieństw przejścia (p_{ij}) ma elementy niezerowe $p_{i,i+1} = 1$ natomiast macierz intensywności przejścia (θ_{ij}) ma elementy niezerowe $\theta_{i,i-1} = \mu_i, \theta_i = \mu_i$.

Korzystając z twierdzenia 2.3, w którym podstawiamy $q_j = p_j, \rho_j = p_j^-$ i z wzoru (2.7) otrzymujemy

$$\lambda p_j^- + \mu_j p_j = \lambda p_{j-1}^- + \mu_{j+1} p_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots .$$

Wobec tego

$$\lambda p_{j-1}^- = \mu_j p_j, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

a stąd i z warunku zupełności prawdopodobieństwa wynika (3.1), co kończy dowód twierdzenia 3.1.

3.2. System $M/G/N$ ze sprzężeniem intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie. W rozpatrywanym niżej systemie zakładamy, że strumień zgłoszeń jednostek do systemu jest poissonowski z intensywnością λ_j przy warunku, że j jednostek znajduje się w systemie w danej chwili natomiast czas obsługi ma pewien rozkład H. Zakładamy, że istnieje wartość oczekiwana w rozkładzie czasu obsługi, $\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty x dH(x)$ oraz ponadto, że $H(0+) = 0$, co oznacza, że obsługa jednostki nie może być natychmiastowa z dodatnim prawdopodobieństwem.

TWIERDZENIE 3.2. *W systemie $M/G/N$ ze sprzężeniem intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie jeżeli, dla $n(t) > 0$, przez $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_{\min(N,n(t))}(t)$ oznaczymy czasy potrzebne do zakończenia obsługi jednostek znajdujących się w obsłudze w chwili t, to proces $\{(n(t), X_1(t), \ldots, X_{\min(N,n(t))}(t)), t \geqslant 0\}$ jest procesem Markowa. Rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j\}$ stanu procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ i rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j^*\}$ stanu włożonego łańcucha stochastycznego $\{n(\sigma_m - 0)\}$, gdzie $\{\sigma_m\}$ jest ciągiem chwil zakończenia obsług w systemie, jeżeli istnieją, spełniają następujące równości:*

$$\lambda_j p_j = \min(N, j+1)(1-p_0)\mu p_{j+1}^*, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

WNIOSEK 3.3. *W systemie $M/G/N$, z kolejką ograniczoną do $K-N$ miejsc, mamy*

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda, & j = 0, 1, \ldots, K-1, \\ 0, & j = K, K+1, \ldots, \end{cases}$$

a więc

$$p_j^* = \frac{\rho p_{j-1}}{\min(N, j)(1-p_0)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{3.5}$$

gdzie $\rho = \lambda/\mu$.

W szczególności, w systemie $M/G/N$ bez oczekiwania, mamy

$$p_j^* = \frac{\rho p_{j-1}}{j(1-p_0)} = \frac{p_j}{1-p_0}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.6}$$

Skorzystaliśmy tu z wzoru $p_j = \rho p_{j-1}/j$ (B. A. Sewastjanow, zob. [6], str. 382).

WNIOSEK 3.4. *W systemie $M/G/1$ (z oczekiwaniem) mamy*

$$p_j^* = \frac{\rho p_{j-1}}{j(1-p_0)} = p_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

(F. G. Foster [3]).

D o w ó d t w i e r d z e n i a 3.2. W rozważanym systemie proces $\{n(t), t \geqslant 0\}$ nie jest procesem przedziałami markowskim wobec czego nie można zastosować twierdzenia 2.3.

W tym dowodzie zastosujemy bezpośrednio metodę rozbudowy stanu systemu użytą w dowodzie twierdzenia 2.3.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że w chwilach zmiany stanu składowej $n(t)$ permutuje się składowe $X_1(t), \ldots, X_{n(t)}(t)$ przyjmując z jednakowym prawdopodobieństwem każdą permutację. Niech

$$p_0 = \Pr\{n(t) = 0\},$$

$$P_j(x_1, \ldots, x_{\min(N,j)}) =$$
$$= \Pr\{n(t) = j,\ X_i(t) < x_i,\ i = 1, 2, \ldots, \min(N, j)\}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 2.3 (zob. także B. W. Gniedenko i I. N. Kowalenko [6], str. 385), znajdujemy następujący układ równań:

$$-\lambda_0 p_0 + \frac{\partial}{\partial x_1} P_1(0) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} P_1(x_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} P_1(0) - \lambda_1 P_1(x_1) + \lambda_0 H(x_1) p_0 + 2\frac{\partial}{\partial x_2} P_2(x_1, 0) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{\partial}{\partial x_k} P_j(x_1, \ldots, x_j) - \sum_{k=1}^{j} \frac{\partial}{\partial x_k} P_j(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_j) -$$

$$\text{(3.8)} \qquad - \lambda_j P_j(x_1, \ldots, x_j) + \frac{\lambda_{j-1}}{j} \sum_{k=1}^{j} H(x_k) P_{j-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_j) +$$

$$+ (j+1) \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} P_{j+1}(x_1, \ldots, x_j, 0) = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} P_N(x_1, \ldots, x_N) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} P_N(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_N) -$$

$$- \lambda_N P_N(x_1, \ldots, x_N) + \frac{\lambda_{N-1}}{N} \sum_{k=1}^{N} H(x_k) P_{N-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} H(x_k) P_{N+1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_N) = 0, \qquad j = N,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} P_j(x_1, \ldots, x_N) - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} P_j(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_N) -$$

$$- \lambda_j P_j(x_1, \ldots, x_N) + \lambda_{j-1} P_{j-1}(x_1, \ldots, x_N) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} H(x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} P_{j+1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_N) = 0, \qquad j = N+1, N+2, \ldots$$

Pokażemy teraz, że

$$P(x) = \Pr\{X_1(t) < x\} = p_0 + (1-p_0)\mu \int_0^x (1-H(u))\,du. \tag{3.9}$$

Łatwo sprawdzić, przez podstawienie do (3.8), że dla $j = 1, 2, \ldots, N$ mamy

$$P_j(x_1, \ldots, x_j) = p_0 \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{j-1}}{j!} \prod_{k=1}^{j} \int_0^{x_k} (1-H(u))\,du, \tag{3.10}$$

stąd wynika, że funkcja

$$P_j(x) = \Pr\{n(t) = j,\ X_1(t) < x\} = P_j(x, \infty, \ldots, \infty)$$

spełnia równanie

$$P_j'(x) - P_j'(0)(1-H(x)) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3.11}$$

Niech $x_1 = x$ oraz $x_k \to \infty$ dla $k = 2, 3, \ldots$ Wówczas $\frac{\partial}{\partial x_k} P_k(x_1, \ldots, x_j) \to 0$ i z (3.8), dla $j = N, N+1, \ldots$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &P_N'(x) - P_N'(0) - (N-1)\frac{\partial}{\partial x_2} P_N(x, 0) - \lambda_N P_N(x) + \\ &\quad + \frac{\lambda_{N-1}}{N}[H(x)P_{N-1}(\infty) + (N-1)P_{N-1}(x)] + H(x)P_{N+1}'(0) + \\ &\quad + (N-1)\frac{\partial}{\partial x_2} P_{N+1}(x, 0) = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &P_j'(x) - P_j'(0) - (N-1)\frac{\partial}{\partial x_2} P_j(x, 0) - \lambda_j P_j(x) + \lambda_{j-1}P_{j-1}(x) + \\ &\quad + H(x)P_{j+1}'(0) + (N-1)\frac{\partial}{\partial x_2} P_{j+1}(x, 0) = 0, \qquad j = N+1, N+2, \ldots \end{aligned} \tag{3.13}$$

Oczywiście,

$$P(x) = \Pr\{X_1(t) < x\} = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x),$$

dlatego sumując (3.11)–(3.13) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &P'(x) - P'(0)(1-H(x)) + \\ &+ \left[(N-1)\frac{\partial}{\partial x_2} P_N(x, 0) - \frac{\lambda_{N-1}}{N} H(x)P_{N-1}(\infty) - (N-1)P_{N-1}(x) - P_N'(0)H(x)\right] = 0. \end{aligned}$$

Z (3.10) wynika, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym równa się zero, a stąd wynika równanie różniczkowe

$$P'(x) - P'(0)(1 - H(x)) = 0,$$

które przy warunkach $P(0) = 0, P(0+) = p_0, P(\infty) = 1$ ma rozwiązanie postaci (3.9).

Przechodząc w (3.8) do granicy przy $x_k \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ i korzystając z tego, że

$$\text{(3.14)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} P_j(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots) \to P_j'(0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_j(x_1, \ldots, x_j) \to 0$$

otrzymujemy następujący układ równań:

$$-\lambda_0 p_0 + P_1'(0) = 0,$$

$$-\min(N, j) P_j'(0) - \lambda_j p_j + \lambda_{j-1} p_{j-1} + \min(N, j+1) P_{j+1}'(0) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Stąd wynika, że

$$\text{(3.15)} \qquad \lambda_j p_j = \min(N, j+1) P_{j+1}'(0), \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Z (3.14) i (3.9) wynika, że

$$P_j'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Pr\{n(t) = j, X_1(t) < \infty, \ldots, X_{k-1}(t) < \infty,$$

$$X_k(t) < h, X_{k+1}(t) < \infty, \ldots, X_j(t) < \infty\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Pr\{0 < X_1(t) < h\} \Pr\{n(t) = j \mid X_1(t) < h, X_2(t) < \infty, \ldots\} =$$

$$= (1 - p_0)\mu p_j^*.$$

To kończy dowód twierdzenia 3.2.

4. System z mieszanką strumieni zgłoszeń

Weźmy pod uwagę system obsługi masowej oznaczony symbolicznie przez $(M + GI)/M/\infty$ ze sprzężeniem intensywności strumienia zgłoszeń i intensywności obsługi i liczby jednostek w systemie. W tym systemie strumień zgłoszeń jednostek do systemu jest mieszanką dwóch strumieni: poissonowskiego z intensywnością λ_j $(j = 0, 1, \ldots)$ przy warunku, że j jednostek znajduje się w systemie oraz strumienia Palma (GI) z rozkładem A odstępów między zgłoszeniami sygnałów. Zakładamy, że istnieje wartość oczekiwana w rozkładzie A, $\frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty x dA(x)$, oraz, że $A(0+) = 0$. Ponadto zakładamy, że w sygnałach strumienia GI następują zgłoszenia grupowe i niech P_{ij} $(j = 0, 1, \ldots, \sum_{j=0}^\infty P_{ij} = 1, i = 0, 1, \ldots)$ oznacza prawdopodobieństwo j zgłoszeń w grupie przy warunku, że i jednostek znajduje się w systemie w chwili sygnału. Jak zwykle przez μ_j oznaczamy intensywność obsługi we wszystkich liniach obsługi przy warun-

ku, że j jednostek znajduje się w systemie. Specjalne przypadki tego systemu rozpatrywali J. P. Young [26], T. Ryba [22], [23], A. Kuczura [19], [21].

W ogólności mieszanka strumieni $M + GI$ nie jest strumieniem GI z wyjątkiem przypadku gdy oba mieszane strumienie są poissonowskie. Dlatego stan systemu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ nie jest procesem Markowa z wyjątkiem wspomnianego szczególnego przypadku.

TWIERDZENIE 4.1. *W systemie $(M + GI)/M/\infty$ ze sprzężeniem intensywności strumienia zgłoszeń i intensywności obsługi i liczby jednostek w systemie proces $\{n(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem przedziałami markowskim, w którym chwilami regeneracji są chwile $\{S_m\}$ sygnałów strumienia GI. W systemie tym rozkłady prawdopodobieństwa $\{p_j\}$ stanu procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ i rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j^-\}$ włożonego łańcucha Markowa $\{n(S_m - 0)\}$, jeżeli istnieją, spełniają następujące równania:*

$$\sum_{k=0}^{j-1}\left(\sum_{i=k}^{j-1}\frac{\alpha}{\mu_{i+1}}\rho_{i+1}\dots\rho_{j-1}r_{k,i-k}\right)p_k^- = p_j - \rho_0\rho_1\dots\rho_{j-1}p_0, \qquad j = 1, 2, \dots, \tag{4.1}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_0\dots\rho_{j-1}}\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=k}^{j+k}\frac{\alpha}{\mu_{i+1}}\rho_{i+1}\dots\rho_{j+k}r_{k,i-k}\right)p_k^-\right], \tag{4.2}$$

gdzie iloczyn pusty jest równy 1, $\rho_j = \lambda_j/\mu_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots$ *(jeżeli $\mu_{j+1} = \infty$, to $\rho_j = 0$),*

$r_{k,m} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_{k,m+i}$, $k, m = 0, 1, \dots$

WNIOSEK 4.1. *Jeżeli w systemie $(M + GI)/M/\infty$ zdefiniowanym w twierdzeniu* 4.1. *strumień zgłoszeń GI jest pojedyńczy,*

$$P_{ji} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1, \end{cases}$$

to

$$r_{k,i-k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

i wówczas

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\alpha}{\mu_{i+1}}\rho_{i+1}\dots\rho_{j-1}p_i^- = p_j - \rho_0\dots\rho_{j-1}p_0, \qquad j = 1, 2, \dots, \\ &p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_0\dots\rho_{j-1}}\left[1 - \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha}{\mu_{i+1}}\rho_{i+1}\dots\rho_{j+i}\right)p_i^-\right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

WNIOSEK 4.2. *Jeżeli w systemie* $(M + GI)/M/N$ *bez oczekiwania strumień* GI *jest pojedyńczy oraz*

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1, 2, \ldots, N, \\ \infty, & j = N+1, N+2, \ldots, \end{cases}$$

$$\lambda_j = \lambda, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

to

$$(4.4) \qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{\mu} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i!}{j!} \rho^{j-i-1} p_i^- = p_j - \frac{\rho^j}{j!} p_0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \\ &p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N} \rho^j/j!} \left[1 - \frac{\alpha}{\mu} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-j-1} \frac{j!}{(j+i+1)!} \rho^i \right) p_j^- \right], \end{aligned}$$

gdzie $\rho = \lambda/\mu$ (T. Ryba [23]).

WNIOSEK 4.3. *Jeżeli w systemie* $(M + GI)/M/1$ *(bez sprzężenia) strumień zgłoszeń* GI *jest grupowy, tj. jeżeli*

$$\lambda_j = \lambda, \qquad \mu_{j+1} = \mu, \qquad P_{ij} = P_j, \qquad i, j = 0, 1, \ldots,$$

to

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha}{\mu} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\sum_{i=0}^{j-k-1} \rho^{j-i-k-1} r_i \right) p_k^- = p_j - \rho^j p_0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \\ &p_0 = (1-\rho) \left[1 - \frac{\alpha}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k-1} \rho^{j-i-k-1} r_i \right) p_k^- \right], \end{aligned}$$

gdzie $r_m = \sum_{j=1}^{\infty} P_{m+j}$, $m = 0, 1, \ldots$ (M. Jankiewicz [9]).

D o w ó d t w i e r d z e n i a 4.1. W rozpatrywanym systemie proces stochastyczny $\{n(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem skokowym, o przyrostach losowych w chwilach sygnałów strumienia zgłoszeń GI równych ilości zgłoszeń jednostek w sygnale, oraz procesem narodzin i śmierci w przedziałach czasu między sygnałami. Jest więc to proces przedziałami markowski, w którym odstępy między chwilami regeneracji mają ten sam rozkład A z parametrem $\nu = \alpha$, macierz prawdopodobieństw przejścia (p_{ij}) ma elementy niezerowe $p_{ij} = P_{i,j-i}$ dla $j \geqslant i$ natomiast macierz intensywności przejścia (θ_{ij}) ma następujące elementy niezerowe: $\theta_{i,i+1} = \lambda_i$, $\theta_{i,i-1} = \mu_i$, $\theta_i = \lambda_i + \mu_i$.

Korzystając z twierdzenia 2.3, w którym podstawiamy $q_j = p_j$, $\rho_j = p_j^-$, i korzystając z wzoru (2.7) otrzymujemy

$$(4.6)\quad \alpha p_j^- + (\lambda_j + \mu_j) p_j = \alpha \sum_i P_{ij} p_i^- + \lambda_{j-1} p_{j-1} + \mu_{j+1} p_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Dodając stronami równania układu (4.6) dla $j = 0, 1, \ldots, n$ otrzymujemy

$$-\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} = \alpha \sum_{k=0}^{n} p_k^- - \alpha \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} P_{i,k-i} p_i^- = \alpha \sum_{k=0}^{n} r_{k,n-k} p_k^-, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Po przekształceniu

$$p_n = \rho_0 \rho_1 \ldots \rho_{n-1} p_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha}{\mu_{i+1}} \cdot \frac{\rho_0 \ldots \rho_{n-1}}{\rho_0 \ldots \rho_i} \sum_{k=0}^{i} r_{k,i-k} p_k^-, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Stąd, po zmianie porządku sumowania i z warunku zupełności prawdopodobieństwa otrzymujemy (4.2), co kończy dowód twierdzenia 4.1.

5. System Takácsa konserwacji maszyn

Weźmy pod uwagę system $N + 1$ maszyn i jednego konserwatora. Maszyny są przeznaczone do ciągłej pracy jednakże w pewnych chwilach ulegają uszkodzeniom i muszą być konserwowane przez konserwatora. Zakładamy, że czas pracy maszyn ma rozkład wykładniczy z parametrem μ natomiast czas konserwacji ma dowolny rozkład G przy czym skończona jest wartość oczekiwana $\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty x\, dG(x)$.

Dla rozwiązania zagadnienia konserwatora L. Takács [25] rozważa najpierw system obsługi masowej $GI/M/N$ bez oczekiwania, dla którego znajduje rozkład prawdopodobieństwa łańcucha Markowa $\{n(S_r - 0)\}$, gdzie $n(t)$ oznacza liczbę jednostek w systemie natomiast $\{S_r\}$ oznacza chwile zgłoszeń jednostek do systemu. Weźmy teraz pod uwagę system konserwacji maszyn i niech $m(t)$ oznacza liczbę maszyn sprawnych w chwili t oraz $\{S_r'\}$ oznacza chwile zakończenia konserwacji. Można pokazać, że łańcuchy stochastyczne $\{n(S_r - 0)\}$ i $\{m(S_r' - 0)\}$ mają jednakowe charakterystyki probabilistyczne a więc dla kompletności rozwiązań zagadnień obsługi masowej i konserwatora należy znaleźć odpowiednie relacje pozwalające przejść do rozkładów prawdopodobieństwa procesów ciągłego parametru.

Łatwo zauważyć, że procesy stochastyczne $\{n(t), t \geqslant 0\}$ i $\{m(t), t \geqslant 0\}$ są procesami przedziałami markowskimi. Idee dowodów L. Takácsa, będące pięknym powiązaniem metody włożonych łańcuchów Markowa i metod teorii odnowy, zostały rozwinięte przez A. Kuczurę w ogólnej analizie procesów przedziałami markowskich. Rozwiązanie zagadnienia konserwatora przy użyciu prezentowanej w tym artykule metody rozbudowy stanu procesu znajduje się w [13], [14].

Rezultaty L. Takácsa podajemy bez dowodu ponieważ są dobrze znane (por. L. Takács [25], B. Kopociński [18]).

TWIERDZENIE 5.1. *W systemie obsługi masowej $GI/M/N$ bez oczekiwania, rozkład prawdopodobieństwa stacjonarnego włożonego łańcucha Markowa $\{n(S_m - 0)\}$ istnieje i jest następujący:*

(5.1) $$p_j^- = \sum_{k=j}^{N} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} B_k, \qquad j = 0, 1, \dots, N,$$

gdzie

$$B_k = C_k \frac{\sum_{j=k}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j}}, \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

są momentami dwumianowymi rozkładu p_j^-, *natomiast*

$$C_0 = 1,$$

$$C_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{g^*(i\mu)}{1 - g^*(i\mu)}, \qquad k = 1, 2, \dots, N,$$

przy czym $g^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$ *jest transformatą Laplace'a–Stieltjesa rozkładu odstępów między zgłoszeniami.*

TWIERDZENIE 5.2. *W systemie Takácsa konserwacji maszyn rozkład prawdopodobieństwa stanu procesu* $\{m(t), t \geqslant 0\}$ *jest następujący:*

(5.2) $$Q_j = \frac{(N+1)\, p_{j-1}^-}{j\left(\frac{N+1}{\rho} + p_N^-\right)}, \qquad j = 0, 1, \dots, N+1,$$

$$Q_0 = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} Q_j,$$

gdzie $\rho = \lambda/\mu$.

TWIERDZENIE 5.3. *W systemie Takácsa konserwacji maszyn transformata Laplace'a–Stieltjesa rozkładu czasu zajętości konserwatora jest następująca:*

(5.3) $$g_N^*(s) = \frac{\sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1 - g^*(s+i\mu)}{g^*(s+i\mu)}}{\sum_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1 - g^*(s+i\mu)}{g^*(s+i\mu)}},$$

wartość oczekiwana w rozkładzie G_N *jest równa*

(5.4)
$$\gamma_N = \int_0^\infty x\, dG_N(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{C_j},$$

gdzie iloczyn pusty jest równy 1.

6. System konserwacji z priorytetami

6.1. System dodatkowych jednostek. W systemie konserwacji maszyn w okresach czasu, w których wszystkie maszyny pracują konserwator może wykonywać dodatkowe prace. Przypuśćmy, że w tym czasie obsługuje on dodatkowe jednostki, przy czym maszyny mają priorytet bezwzględny, to znaczy, że jednostki są obsługiwane wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie maszyny są sprawne. Jeżeli w chwili uszkodzenia jakiejś maszyny obsługiwana jest jednostka, to przerywa się tę obsługę i natychmiast rozpoczyna się konserwację maszyny, natomiast przerwana obsługa jednostki jest kontynuowana po zakończeniu okresu zajętości konserwatora obsługą maszyn.

Z przyjętych założeń wynika, że system obsługi jednostek nie ma wpływu na proces konserwacji maszyn. System ten można natomiast interpretować jako system, w którym urządzenie obsługi może się psuć zarówno podczas obsługi jednostek jak i w pozostałym czasie. Jeżeli weźmiemy pod uwagę system Takácsa konserwacji maszyn, to intensywność awarii urządzenia obsługi jest równa $(N + 1)\,\lambda$ a czas awarii ma rozkład G_N, równy rozkładowi okresu zajętości konserwatora obsługą maszyn (zob. twierdzenie 5.3). Tego typu systemy obsługi masowej z priorytetami są dobrze znane (zob. [8], [10], [6]) i dla nich znaleziono m. in. rozkłady prawdopodobieństwa liczby jednostek w systemie w dowolnej chwili a także w chwilach zakończenia obsługi. Tutaj przedstawimy niektóre rezultaty dotyczące rozkładu prawdopodobieństwa stanu systemu, przy założeniu stacjonarności, dodając analizę rozkładu prawdopodobieństwa stanu systemu w chwilach bezpośrednio przed początkiem okresów zajętości konserwatora obsługą maszyn. Rozkład ten wyróżnimy dlatego, że dotyczy on jednostek, które będą czekały przez okres zajętości konserwatora obsługą maszyn.

Załóżmy, że strumień zgłoszeń jednostek dodatkowych do systemu jest poissonowski i niech ν_j $(j = 0, 1, \ldots)$ oznacza intensywność tego strumienia przy warunku, że j jednostek znajduje się w systemie. Rozkład czasu obsługi jednostek oznaczamy przez B a jego wartość oczekiwaną przez $\frac{1}{\beta} = \int_0^\infty x\, dB(x)$. Jak zwykle zakładamy, że $B(0+) = 0$.

Niech $\{S_m\}$ oznacza chwile rozpoczęcia okresów zajętości konserwatora obsługą maszyn, $\{\sigma_m\}$ oznacza chwile zakończenia obsługi jednostek. Weźmy pod uwagę proces stochastyczny $\{n(t), t \geqslant 0\}$ zdefiniowany jako liczba jednostek w systemie w chwili t i niech $\{p_j\}$ oznacza rozkład prawdopodobieństwa tego procesu oraz $\{p_j^-\}$ i $\{p_j^*\}$ oznaczają rozkłady prawdopodobieństwa włożonych łańcuchów stochastycznych $\{n(S_m - 0)\}$ i $\{n(\sigma_m - 0)\}$.

Zdefiniujmy zmodyfikowany czas t' przez ściągnięcie do punktów w czasie t okresów, w których konserwator jest zajęty obsługą maszyn. Po tej transformacji w czasie t' do systemu wchodzi mieszanka dwóch strumieni zgłoszeń. Jednym z nich jest grupowy strumień jednostek, w którym grupy tworzą się z tych jednostek, które w rzeczywistym czasie t zgłosiły się w okresach zajętości konserwatora obsługą maszyn. Rozkład liczby jednostek w grupie przy warunku, że i jednostek znajduje się w systemie na początku okresu zajętości kon-

serwatora obsługą maszyn oznaczymy przez $\{P_{ij}\}$, $i = 0, 1, \ldots$ Rozkłady te mogą być wyrażone przy użyciu ciągu $\{\nu_j\}$ i rozkładu G_N. Oprócz opisanego grupowego strumienia zgłoszeń, do systemu napływa poissonowski strumień zgłoszeń, pojedyńczy z intensywnością ν_j przy warunku, że j jednostek znajduje się w systemie. Pokazaliśmy więc, że strumień zgłoszeń jednostek w czasie t' jest mieszanką dwóch strumieni Poissona. Łatwo zauważyć, że jest to grupowy strumień Poissona z intensywnością zależną od stanu systemu. Z założenia, że przerwane obsługi jednostek są kontynuowane po zakończeniu okresów zajętości konserwatora obsługą maszyn wynika, że system jednostek dodatkowych w czasie t' jest systemem typu $(M^B + M)/G/1$ lub co na jedno wychodzi systemem typu $M^B/G/1$ ze sprzężeniem intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie (B – z ang. batched).

6.2. System $M^B/G/1$ ze sprzężeniem intensywności strumienia zgłoszeń i liczby jednostek w systemie. Weźmy pod uwagę system obsługi masowej, w którym jednostki pojawiają się grupowo w chwilach sygnałów poissonowskiego strumienia. Załóżmy, że intensywności ν_i strumienia sygnałów i rozkład liczby jednostek w grupie $\{P_{ij}\}$ zależą od liczby i jednostek znajdujących się w systemie w danej chwili. O rozkładzie prawdopodobieństwa H czasu obsługi w rozpatrywanym w tym rozdziale systemie przyjmujemy te same założenia co w rozdziale 3.2.

TWIERDZENIE 6.1. *W systemie $M^B/G/1$ ze sprzężeniem intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie proces stochastyczny $\{n(t), t \geqslant 0\}$ jest procesem przedziałami markowskim. Rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j\}$ tego procesu i rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j^*\}$ stanu włożonego łańcucha Markowa $\{n(\sigma_m - 0)\}$, gdzie $\{\sigma_m\}$ są chwilami zakończenia obsługi jednostek, jeżeli istnieją, spełniają następujące równości:*

$$\nu p_{j+1}^* = \sum_{i=0}^{j} \lambda_i r_{i,j-i} p_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{6.1}$$

gdzie

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{(1 - P_{00})\lambda_0} p_1^* + \frac{1}{\mu}, \tag{6.2}$$

oraz

$$r_{im} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{i,m+k}, \qquad i, m = 0, 1, \ldots$$

WNIOSEK 6.1. *W systemie $M^B/G/1$ ze sprzężeniem intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie prawdopodobieństwo p_1^* tego, że po zakończeniu obsługi jednostki system pozostanie pusty jest równe*

$$p_1^* = \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu}\right)(1 - P_{00})\lambda_0, \tag{6.3}$$

gdzie

$$\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i p_i, \tag{6.4}$$

przy czym $a_i = \sum_{j=1}^{\infty} jP_{ij}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ jest oczekiwaną liczbą zgłoszeń w grupie przychodzącej do systemu przy warunku, że i jednostek znajduje się w systemie.

Wzór (6.3) jest uogólnieniem znanego wzoru $p_1^* = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ dla systemu $M/G/1$ z pojedyńczym strumieniem zgłoszeń o stałej intensywności. Wynika on natychmiast z (6.2) i (6.1) oraz z warunku zupełności prawdopodobieństwa $\sum_{j=1}^{\infty} p_j^* = 1$.

D o w ó d t w i e r d z e n i a 6.1. W procesie stochastycznym $\{n(t), t \geqslant 0\}$ chwile $\{\sigma_m\}$ zakończenia obsługi jednostek są chwilami regeneracji a w przedziałach między tymi chwilami proces jest procesem Markowa. Macierz prawdopodobieństw przejścia (p_{ij}) ma niezerowe elementy $p_{i+1,i} = 1$, natomiast macierz intensywności przejścia (θ_{ij}) ma niezerowe elementy $\theta_i = \lambda_i(1 - P_{i0})$, $\theta_{ij} = \lambda_i P_{i,j-i}$ dla $j = i+1, i+2, \ldots$ Wartości oczekiwane odstępów między chwilami regeneracji zależą od liczby jednostek znajdujących się w systemie w chwili zakończenia obsługi i są postaci:

$$\frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{(1 - P_{00})\lambda_0} + \frac{1}{\mu}, \qquad \frac{1}{\nu_j} = \frac{1}{\mu}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Stąd i z (2.9) i (2.7) wynika wzór (6.2).

Z twierdzenia 2.3 i wzoru (2.7) otrzymujemy

$$\nu p_j^* + \lambda_j(1 - P_{j0})p_j = \nu p_{j+1}^* + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_{i,j-i} p_i, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Sumując stronami równości o wskaźnikach $0, 1, \ldots, j$ otrzymujemy (6.1) co kończy dowód twierdzenia 6.1.

Warto wspomnieć, że w systemie $M^B/G/1$ bez sprzężenia intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie rozkład prawdopodobieństwa stanu procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ jest znany. Jest to wynik D. P. Gavera [5], który podajemy bez dowodu.

TWIERDZENIE 6.2. *W systemie $M^B/G/1$ (bez sprzężenia) rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j\}$ procesu $\{n(t), t \geqslant 0\}$ ma następującą funkcję tworzącą:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j = \frac{(1-\rho)(1-s)h^*(\lambda(1-\bar{a}(s)))}{h^*(\lambda(1-\bar{a}(s))) - s}, \tag{6.5}$$

gdzie

$$h^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x), \qquad \bar{a}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \bar{P}_j, \qquad \rho = \lambda\bar{a}/\mu, \qquad \bar{a} = \sum_{j=1}^{\infty} j\bar{P}_j,$$

przy czym $\{\bar{P}_j\}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa liczby zgłoszeń w grupie natomiast λ jest intensywnością zgłoszeń grup.

Z twierdzenia 6.1, wzoru (6.4), korzystając z oznaczeń z twierdzenia 6.2 otrzymujemy:

WNIOSEK 6.2. *W systemie $M^B/G/1$ (bez sprzężenia) rozkłady prawdopodobieństwa $\{p_j^*\}$ i $\{p_j\}$, jeżeli istnieją, spełniają następujące równości:*

$$(6.6)\qquad \begin{aligned} \bar{a}\, p_{j+1}^* &= \sum_{i=0}^{j} \bar{r}_{j-i}\, p_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, \\ p_1^* &= \left(\frac{1}{\bar{a}} - \frac{\lambda}{\mu}\right)(1 - P_0), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{r}_m = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{P}_{m+j}$.

6.3. System jednostek dodatkowych bez sprzężenia intensywności zgłoszeń i liczby jednostek w systemie. Przypuśćmy, że do systemu Takácsa konserwacji maszyn napływa poissonowski strumień jednostek dodatkowych ze stałą intensywnością ν. Rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j'\}$ liczby jednostek w systemie w czasie t' otrzymujemy z twierdzenia 6.2. Potrzebne do tego charakterystyki strumienia zgłoszeń są następujące:

Rozkład liczby jednostek w grupie

$$P_j = \int_0^{\infty} \frac{(\nu x)^j}{j!} e^{-\nu x} dG_N(x), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

którego funkcją tworzącą jest

$$\sum_{j=0}^{\infty} s^j P_j = g_N^* (\nu(1 - s)).$$

Intensywność mieszanki strumieni zgłoszeń jest równa sumie intensywności mieszanych strumieni

$$(6.7)\qquad \bar{\nu} = (N + 1)\,\lambda + \nu,$$

rozkład liczby jednostek w grupie w mieszanym strumieniu

$$(6.8)\qquad \bar{P}_j = \frac{1}{\bar{\nu}} ((N + 1)\,\lambda P_j + \nu\delta_{j1}), \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

gdzie δ jest deltą Kroneckera, funkcja tworząca tego rozkładu ma postać

$$(6.9)\qquad \bar{a}(s) = \frac{1}{\bar{\nu}} ((N + 1)\,\lambda\, g_N^* (\nu(1 - s)) + \nu s),$$

natomiast wartość oczekiwana

$$(6.9')\qquad \bar{a} = \frac{\nu}{\bar{\nu}} ((N + 1)\,\lambda\gamma_N + 1),$$

gdzie γ_N jest wartością oczekiwaną długości okresu zajętości konserwatora obsługą maszyn (zob. (5.4)).

Przejdziemy teraz do znalezienia rozkładu prawdopodobieństwa liczby jednostek znajdujących się w systemie w chwili t oraz rozkładów prawdopodobieństwa stanu włożonych łańcuchów Markowa. Niech $n'(t')$ oznacza liczbę jednostek znajdujących się w systemie w chwili t', $\{S'_m\}$ oznacza chwile zgłoszeń strumienia grupowego jednostek, które w czasie t przybyły w okresach zajętości konserwatora obsługą maszyn, $\{\sigma'_m\}$ oznacza ciąg chwil zakończenia obsługi jednostek w czasie t'. Jest oczywiste, że stacjonarne łańcuchy stochastyczne $\{n(S_m)\}$ i $\{n'(S'_m - 0)\}$ oraz $\{n(\sigma_m - 0)\}$ i $\{n'(\sigma'_m - 0)\}$ mają odpowiednio jednakowe rozkłady prawdopodobieństwa:

$$\Pr\{n(S_m) = j\} = \Pr\{n'(S'_m - 0) = j\} = p_j^-,$$

$$\Pr\{n(\sigma_m - 0) = j\} = \Pr\{n'(\sigma'_m - 0) = j\} = p_j^*, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Poniższe twierdzenie daje związki wymienionych prawdopodobieństw oraz rozkładów $\{p_j\}$ i $\{p'_j\}$ (M. Jankiewicz [9]).

TWIERDZENIE 6.3. *W systemie jednostek dodatkowych jeżeli strumień zgłoszeń jest poissonowski ze stałą intensywnością ν, to rozkłady prawdopodobieństwa $\{p_j\}$ i $\{p'_j\}$ oraz rozkłady prawdopodobieństwa $\{p_j^-\}$ i $\{p_j^*\}$ włożonych łańcuchów Markowa spełniają następujące równości:*

$$\bar{a}\, p_{j+1}^* = \sum_{i=0}^{j} \bar{r}_{j-i}\, p'_i, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{6.10}$$

$$p_1^* = \left(\frac{1}{\bar{a}} - \frac{\bar{\nu}}{\beta}\right)(1 - P_0), \qquad p'_0 = 1 - \frac{\bar{a}\bar{\nu}}{\beta}, \tag{6.11}$$

$$(N+1)\lambda\left(p_j^- - \sum_{i=0}^{j} P_{j-i}\,\bar{p}_i\right) + \nu\,(p'_j - p'_{j-1}) + $$
$$+ (1 - p'_0)\,\beta\,(p_j^* - p_{j+1}^*) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{6.12}$$

$$p_j^- = p'_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, \tag{6.13}$$

$$p_{j+1}^* = p_j, \qquad j = 0, 1, \ldots \tag{6.14}$$

D o w ó d t w i e r d z e n i a 6.3. System dodatkowych jednostek rozpatrywany w czasie t' może być interpretowany jako system $M^B/G/1$. Wobec tego wzór (6.10) wynika z wniosku 6.2. Także wzór na prawdopodobieństwo p_1^* znajdujemy z wniosku 6.2, a stąd i z (6.10) dla $j = 0$ otrzymujemy prawdopodobieństwo p'_0.

Przechodzimy do dowodu (6.12). Niech $X'(t')$ będzie długością czasu od chwili t' do najbliższego sygnału w strumieniu grupowym będącym składnikiem mieszanki strumieni zgłoszeń, natomiast $Y'(t')$ jest czasem potrzebnym do zakończenia obsługi jednostki znajdującej się w obsłudze w chwili t'. Proces stochastyczny $\{(n'(t'), X'(t'), Y'(t')), t' \geqslant 0\}$ jest procesem Markowa, bowiem proces $\{(n'(t'), Y'(t')), t' \geqslant 0\}$ jest procesem Markowa a składowa $X'(t')$ jest niezależną od niego charakterystyką poissonowskiego strumienia sygnałów. Przyjmijmy oznaczenia:

$$P_0(x) = \Pr\{n'(t') = j,\ X'(t') < x\},$$
$$P_j(x, y) = \Pr\{n'(t') = j,\ X'(t') < x,\ Y'(t') < y\}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Używając tej samej techniki rachunkowej co w dowodzie twierdzenia 2.3, a mianowicie, analizując stan badanego procesu w chwilach t' i $t' + h$, przechodząc do granicy przy $h \to 0$, a następnie przy $x \to \infty$ i $y \to \infty$, otrzymujemy następujący układ równań:

$$(6.15) \qquad -\frac{\partial}{\partial x} P_j(0, \infty) - \frac{\partial}{\partial y} P_j(\infty, 0) - \nu p_j' +$$
$$+ \sum_{i=0}^{j} \frac{\partial}{\partial x} P_i(0, \infty) P_{j-i} + \nu p_{j-i}' + \frac{\partial}{\partial y} P_{j+1}(\infty, 0) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

przy czym niezdefiniowane symbole oznaczają: $p'_{-1} = 0$, $P_0(0, \infty) = P_0(0)$, $\frac{\partial}{\partial y} P_0(\infty, 0) = 0$.

Oczywiście,

$$\Pr\{X'(t') < x\} = 1 - e^{-(N+1)\lambda x}, \qquad \Pr\{0 < Y'(t') < y\} = (1 - p_0')\beta \int_0^y (1 - B(u))\, du.$$

Stąd otrzymujemy

$$(6.16) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_j(0, \infty) &= (N + 1)\lambda p_j^-, \qquad && j = 0, 1, \ldots, \\ \frac{\partial}{\partial y} P_j(\infty, 0) &= (1 - p_0')\beta p_j^*, \qquad && j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Podstawiając (6.16) do (6.15) otrzymujemy (6.12).

Wzór (6.13) wynika z (6.12) i (6.11). Dla sprawdzenia podstawmy (6.11) do (6.12) oraz skorzystajmy z (6.7) i (6.8). Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$p_j^- - \sum_{i=0}^{j} P_{j-i} p_i^- = p_j' - \sum_{i=0}^{j} P_{j-i} p_i', \qquad j = 0, 1, \ldots$$

co dowodzi (6.13).

Dla dowodu (6.14) zdefiniujmy proces stochastyczny

$$\{(n(t),\ s(t),\ Y(t),\ Z(t)),\ t \geqslant 0\},$$

gdzie $s(t) = 1$, gdy w chwili t wszystkie maszyny pracują i konserwator może obsługiwać jednostki oraz $s(t) = 0$, gdy w chwili t konserwator jest zajęty obsługą maszyn. Jeżeli $n(t) > 0$, to $Y(t)$ definiujemy jako czas potrzebny do zakończenia obsługi jednostki (przy $s(t) = 0$ jest to czas obsługi liczony od chwili wznowienia obsługi po zakończeniu okresu zajętości konserwatora obsługą maszyn). Jeżeli $s(t) = 0$, to $Z(t)$ oznacza czas od chwili t do zakończenia okresu zajętości konserwatora obsługą maszyn.

Zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Markowa. Prawdopodobieństwa stanu tego procesu oznaczamy następująco:

$$P_{j0}(y,z) = \Pr\{n(t)=j,\ s(t)=0,\ Y(t)<y,\ Z(t)<z\}, \qquad j=1,2,\ldots,$$

$$P_{00}(z) = \Pr\{n(t)=0,\ s(t)=0,\ Z(t)<z\},$$

$$P_{j1}(y) = \Pr\{n(t)=j,\ s(t)=1,\ Y(t)<y\}, \qquad j=1,2,\ldots,$$

$$P_{01} = \Pr\{n(t)=0,\ s(t)=1\}.$$

Analizując stan procesu w chwilach t i $t+h$, a następnie przechodząc do granicy przy $h\to 0$, $y\to\infty$, $z\to\infty$, otrzymujemy

$$-\frac{\partial}{\partial z}P_{00}(0) - \nu P_{00}(\infty) + (N+1)\lambda P_{01} = 0,$$

$$(6.17) \qquad -\nu P_{01} - (N+1)\lambda P_{01} + \frac{\partial}{\partial y}P_{1,1}(0) + \frac{\partial}{\partial z}P_{00}(0) = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}P_{j0}(\infty,0) - P_{j0}(\infty,\infty) + P_{j-1,0}(\infty,\infty) + (N+1)\lambda P_{j1}(\infty) = 0, \qquad j=1,2,\ldots$$

Oczywiście zachodzą równości

$$p_0 = P_{00}(\infty) + P_{01}(\infty),$$

$$p_j = P_{j0}(\infty,\infty) + P_{j1}(\infty,\infty), \qquad j=1,2,\ldots$$

Stąd i z (6.17) otrzymujemy

$$(6.18) \qquad \frac{\partial}{\partial y}P_{j+1,1}(0) = p_j, \qquad j=0,1,\ldots$$

Ponieważ

$$\Pr\{s(t)=1,\ 0<Y(t)<y\} = (1-P_{01})\beta\int_0^y (1-B(u))\,du,$$

więc

$$(6.19) \qquad \frac{\partial}{\partial y}P_{j1}(0) = (1-P_{01})\beta p_j^*, \qquad j=1,2,\ldots$$

Podstawiając (6.18) do (6.19) otrzymujemy

$$p_{j+1}^* = \frac{\nu}{(1-P_{01})\beta}p_j, \qquad j=0,1,\ldots$$

Z warunku zupełności prawdopodobieństwa otrzymujemy $1-P_{01} = \nu/\beta$ co kończy dowód (6.14) i dowód twierdzenia 6.3.

6.4. System cykliczny jednostek dodatkowych. Przypuśćmy, że w systemie Takácsa konserwacji maszyn mamy dodatkowo M jednostek, które podobnie jak maszyny pracują, ulegają

uszkodzeniom i są konserwowane. Załóżmy, że czas pracy jednostek ma rozkład wykładniczy z parametrem ν natomiast czas obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem β. Wówczas strumień zgłoszeń jednostek uszkodzonych w czasie t jest poissonowski z intensywnością $\nu_i = (M-i)\nu$, $i = 0, 1, \ldots, M$, przy warunku, że i jednostek znajduje się w systemie. Liczba zgłoszeń jednostek w okresie zajętości konserwatora obsługą maszyn ma natomiast rozkład

$$P_{ij} = \int_0^\infty \binom{M-i}{j} (1-e^{-\nu x})^j e^{-\nu x(M-i-j)}\, dG_N(x),$$

$$j = 0, 1, \ldots, M-i, \quad i = 0, 1, \ldots, M.$$

TWIERDZENIE 6.4. *W systemie cyklicznym jednostek dodatkowych rozkład prawdopodobieństwa $\{p_j^-\}$ liczby jednostek w systemie w chwilach rozpoczęcia okresów zajętości konserwatora obsługą maszyn i rozkład prawdopodobieństwa liczby jednostek w systemie spełniają następujący układ równań:*

$$\sum_{k=0}^{j-1}\left(\sum_{i=0}^{j-k-1} \frac{(M-i-1)!}{(M-j)!}\rho^{j-i-1} r_{k,i-k}\right) p_k^- = \frac{\beta}{(N+1)\lambda}\left(p_j' - \frac{M!}{(M-j)!}\rho^j p_0'\right),$$

(6.20) $$j = 0, 1, \ldots, M,$$

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{j-1} \frac{(M-i-1)!}{(M-j)!}\rho^{j-i-1}\sum_{k=0}^{i} r_{k,i-k}\, p_k^- = \frac{\beta}{(N+1)\lambda}\left(1 - \sum_{j=0}^{M}\frac{M!}{(M-j)!}\rho^j p_0'\right),$$

gdzie $\rho = \nu/\beta$ natomiast prawdopodobieństwa $\{p_j'\}$ spełniają równania

$$-(N+1)\lambda \sum_{k=0}^{j} r_{k,j-k}\, p_k' - (M-j)\nu p_j' + \beta p_{j+1}' = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, M-1,$$

(6.21)

$$r_{k,m} = \sum_{i=1}^{M-k} P_{k,m+i}, \qquad m = 0, 1, \ldots, M-k.$$

Dowód twierdzenia 6.4. Wzory (6.20) wynikają z twierdzenia 4.1 przez podstawienie odpowiednich intensywności. Łatwo zauważyć, że w czasie t' system jednostek dodatkowych jest systemem $(M^B + M)/M/1$, a więc proces stochastyczny $\{n'(t'),\ t' \geqslant 0\}$ jest procesem Markowa. Podstawiając odpowiednie intensywności otrzymujemy układ równań

$$(N+1)\lambda\sum_{k=0}^{j-1} P_{k,j-k}\, p_k' + (M-j+1)\nu p_{j-1}' -$$

$$-((1-P_{j0})(N+1)\lambda + (M-j)\nu + \beta)p_j' + \beta p_{j+1}' = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, M.$$

Sumując stronami równości o wskaźnikach $0, 1, \ldots, j$ otrzymujemy (6.21), co kończy dowód twierdzenia 6.4.

Bibliografia

[1] С. М. Броди, И. А. Погосян, *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания*, Киев 1973.

[2] A. J. Fabens, *The solution of queueing and inventory models by semi-Markov processes*, J. Roy. Stat. Soc. B 23 (1961), str. 113–127.

[3] F. G. Foster, *Batched queueing processes*, Operat. Res. 12 (1964), str. 441–449.

[4] F. G. Foster, A. G. A. D. Perrera, *Queues with batch arrivals, II*, Acta Math. Hung. 16 (1965), str. 275–287.

[5] D. P. Gaver, *Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line processes in continuous time*, Ann. Math. Statist. 30, 3 (1959), str. 698–720.

[6] B. W. Gniedenko, I. N. Kowalenko, *Wstęp do teorii obsługi masowej*, Warszawa 1968.

[7] Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниелян, Б. Н. Димитров, Г. П. Климов, В. Ф. Матвеев, *Приоритетные системы обслуживания*, Москва 1973.

[8] N. K. Jaiswal, *Priority queues*, New York–London 1968.

[9] M. Jankiewicz, *Cyclic systems with preemptive priority*, Zastos. Matem. 14 (1974), str. 165–176.

[10] Г. П. Климов, *Стохастические системы обслуживания*, Москва 1966.

[11] I. Kopocińska, *On a M/G/1 queueing model with feedback*, Zastos. Matem. 9 (1967), str. 161–171.

[12] – *GI/M/1 queueing systems with service rates depending on the length of queue*, ibidem 11 (1970), str. 265–279.

[13] – *Repairman problem*, Dissertat. Math. 101 (1973), str. 1–40.

[14] – *Zagadnienie konserwatora*, Matematyka Stosowana 2 (1974), str. 109–129.

[15] I. Kopocińska, B. Kopociński, *Queueing systems with feedback*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 19 (1971), str. 397–401.

[16] – – *Queueing systems with feedback*, Zastos. Matem. 12 (1972), str. 373–384.

[17] – – *Queueing systems with mixed input stream and feedback*, Zastos. Matem. 14 (1974), str. 177–183.

[18] B. Kopociński, *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, Warszawa 1973.

[19] A. Kuczura, *Queues with mixed reneval and Poisson inputs*, Bell System Techn. J. 51 (1972), str. 1305–1326.

[20] – *Piecewise Markov processes*, Siam J. Appl. Math. 24, 2 (1973), str. 169–181.

[21] – *Loss systems with mixed reneval and Poisson inputs*, Operat. Res. 21, 3 (1973), str. 787–795.

[22] T. Ryba, *Remark on a service system with mixed input stream*, Operat. Res. 20 (1972), str. 452–454.

[23] – *Queueing system with merging of two inputs streams*, Zastos. Matem. 13 (1973), str. 419–427.

[24] W. L. Smith, *Renewal theory and its ramifications*, J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 20 (1958), str. 243–302.

[25] L. Takács, *Introduction to the Theory of Queues*, New York 1962.

[26] J. P. Young, *Administrative control of multiple-channel queueing systems with parallel input streams*, Operat. Res. 14 (1966), str. 145–156.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO