

Andrzej MATUSZEWSKI (Warszawa)

Teoria pomiaru i jej zastosowania w teorii prawdopodobieństwa

Zarys historii teorii pomiaru. Pod koniec lat czterdziestych i w latach pięćdziesiątych badacze-empirycy (nie fizycy) dostrzegli, że występujące w ich badaniach zmienne ilościowe wygodnie jest podzielić na pewne kategorie ze względu na ich zawartość informacyjną. Najbardziej przekonujący i jednocześnie najużyteczniejszy praktycznie wydaje się poniższy podział.

1) *Zmienne klasyfikujące.* Zachowują one pewną empiryczną relację równoważności. Można je przekształcać za pomocą dowolnego przekształcenia wzajemnie jednoznacznego. Przykłady zastosowań: typy chorób, płeć, pochodzenie społeczne, typ etniczny.

2) *Zmienne porządkowe.* Zachowują dodatkowo empiryczną relację słabego porządku liniowego. Można je przekształcać za pomocą dowolnego przekształcenia ściśle rosnącego. Przykłady zastosowań: odpowiedzi typu: nie – częściowo – tak, wykształcenie, stopień oparzenia, miejsce w grupie, twardość materiałów.

3) *Zmienne przedziałowe.* Zachowują one dodatkowo pewną empiryczną odległość. Można je przekształcać za pomocą dodatnich liniowych przekształceń. Przykłady zastosowań: temperatura, niektóre testy inteligencji, czas.

4) *Zmienne stosunkowe.* Mające dodatkowo naturalne zero. Dopuszczalne są przekształcenia podobnościowe. Przykłady zastosowań: temperatura liczona od zera absolutnego, długość, wiek, szybkość.

5) *Zmienne absolutne.* Posiadające dodatkowo naturalną jednostkę. Nie można ich przekształcać na coś od nich różnego. Przykłady: procenty, prawdopodobieństwo.

Za pomocą tego lub podobnych podziałów dokonano nowej klasyfikacji metod statystycznych. Klasyfikacja ta jest rozszerzeniem tradycyjnego podziału na metody parametryczne i nieparametryczne.

We wstępnym etapie rozwoju teorii pomiaru największy udział mieli: S. S. Stevens, C. H. Coombs, C. G. Hempel, P. Suppes i S. Siegel.

Kolejnym etapem rozwoju teorii pomiaru było wprowadzenie doń pojęcia struktury relacyjnej. Miało to miejsce w pracy Suppesa i Zinnesa [8].

$A = \langle A; R_1, \dots, R_n \rangle$, gdzie $R_i - k_i$ -krotna relacja na zbiorze mierzonych obiektów A ,
jest empiryczną strukturą relacyjną $\overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$, relacje R_i mają sens empiryczny (mogą być empirycznie sprawdzalne);

$N = \langle \text{Re}; S_1, \dots, S_n \rangle$, gdzie Re – zbiór liczb rzeczywistych, jest strukturą numeryczną
odpowiadającą $A \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ relacje S_i mają krotność k_i .

Na bazie tych pojęć autorzy wprowadzili następującą definicję:

Φ -skala (niektórzy autorzy np. [1] nazywają ją *miarą*) struktury A związana ze strukturą N (odpowiadającą A) $\stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \Phi$ -homomorfizm: $A \rightarrow N$.

Niektórzy autorzy (np. [6]) próbowali uogólnić to podejście poprzez zamianę struktury numerycznej na tzw. strukturę formalną, niekoniecznie związaną z liczbami rzeczywistymi. Jest to moim zdaniem kierunek niewłaściwy z punktu widzenia dających się przewidzieć zastosowań. Nie chodzi tylko o to, że struktury związane z Re mają dobrze opracowane teorie i są powszechnie znane. Chodzi również o to, że liczby rzeczywiste (a również wektory, czyli punkty Re^w) są realizowane na elektronicznych maszynach cyfrowych. Wiele maszyn posiada zmienny przecinek już w-hardware.

W latach sześćdziesiątych pojawiło się wiele prac rozwijających ideę Suppesa i Zinnesa. Rozwinęła się m.in. zapoczątkowana pracą [4], teoria tzw. pomiaru łącznego, umożliwiającą badanie głębokich związków między różnymi pomiarami dotyczącymi tego samego zbioru obiektów.

Zasadnicze rysy aktualnej teorii pomiaru. W roku 1971 ukazał się pierwszy tom dzieła „Podstawy mierzenia” [2]. Nosi ono wszelkie znamiona wykładu filozofii badań ilościowych. Między innymi podana jest nowa klasyfikacja pomiarów (nie ma w niej pomiaru klasyfikującego, uznanego zapewne za nieilościowy):

1) *Pomiar porządkowy.* Dotyczy on zbiorów skończonych i przeliczalnych. Relacjom empirycznej równoważności i słabego liniowego porządku odpowiadają w liczbach rzeczywistych relacje: $=$ i \geq .

2) *Pomiar poprzez liczenie jednostek.* Zakłada się dodatkowo istnienie empirycznego dodawania (dołączania). Podstawą pomiaru jest ciąg standardowy składający się z obiektu i z kolejno dołączanych do niego jego idealnych kopii. Poprzez zmniejszenie obiektu podstawowego można zwiększać dokładność pomiaru.

3) *Pomiar poprzez rozwiązywanie nierówności.* Oprócz powyższego zakłada się jeszcze istnienie ograniczeń pomiędzy poszczególnymi mierzonymi obiektami. W liczbach rzeczywistych prowadzi to do konieczności spełnienia pewnego układu nierówności liniowych.

Definicję pomiaru rozszerzono teraz do następującej:

$A = \langle A_1 \times \dots \times A_w; R_1, \dots, R_n \rangle$ – struktura empiryczna; relacje określone są na całym iloczynie $A_1 \times \dots \times A_w$, tzn.:

$$R_i \subset A_1^{k_i^1} \times \dots \times A_w^{k_i^w},$$

przy czym pewne k_i^j mogą być równe 0.

$N = \langle \text{Re}^w; S_1, \dots, S_n \rangle$ – struktura numeryczna odpowiadająca A ,

$[\Phi_1, \dots, \Phi_w]$, gdzie $\Phi_i: A_i \rightarrow \text{Re}$, jest skalą pomiarową $\stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} [\Phi_1, \dots, \Phi_w]$ jest wektorowym homomorfizmem: $A \rightarrow N$.

Jednym z zasadniczych celów teorii pomiaru jest sformułowanie i dowodzenie twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności powyższych homomorfizmów dla danych systemów A i N .

Na zakończenie ogólnych rozważań o teorii pomiaru warto, jak się wydaje, zwrócić uwagę na pewien jej aspekt ważny z punktu widzenia zastosowań statystyki matematycznej. Chodzi o to, że wielu statystyków interesuje tylko ten etap pracy badawczej czy inżynier-

skiej, w którym występują już uzyskane wcześniej dane liczbowe. Teoria pomiaru umożliwia sformalizowanie wcześniejszego etapu, na którym liczby te się uzyskuje.

Prawdopodobieństwo jako pomiar. Przedstawimy obecnie główne rysy przedstawionej w [2] koncepcji potraktowania pojęcia prawdopodobieństwa jako pewnego typu pomiaru. Autorzy występują przeciwko czysto indywidualistycznemu podejściu do pojęcia prawdopodobieństwa. Uważają oni, że wokół tego pojęcia nie powinno być więcej kontrowersji niż wokół np. pojęć masy czy długości.

Na wstępie rozpatrzmy przypadek, gdy chcemy uzyskać miarę skończenie addytywną.

$\langle \mathcal{E}_X; \preceq \rangle$, gdzie \mathcal{E}_X – ciało podzbiorów pewnego niepustego zbioru X , jest *strukturą prawdopodobieństwa jakościowego* (w skrócie SPJ) $\stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow}$.

1) $\langle \mathcal{E}_X; \preceq \rangle$ – struktura słabego porządku liniowego (tzn. relacja \preceq jest przechodnia i spójna dla ciała \mathcal{E}_X).

Dodajmy tu od razu, że każda relacja słabego porządku liniowego \preceq generuje pewną niezwrótną, przechodnią relację \sim i relację równoważności \sim .

2) $X \not\prec \emptyset, A \not\prec \emptyset$ (o wszelkich występujących tu zbiorach będziemy zakładać, że należą one do ciała \mathcal{E}_X , \emptyset – zbiór pusty).

3) $A \cap B = A \cap C = \emptyset \Rightarrow (B \preceq C \Leftrightarrow A \cup B \preceq A \cup C)$.

4) Dowolny ciąg standardowy odpowiadający $A \not\prec \emptyset$ jest skończony.

$\{A_i\}$ – ciąg standardowy odpowiadający $A \stackrel{\text{df}}{\not\prec} \emptyset$.

Istnieją ciągi $\{B_i\}, \{C_i\}$ spełniające warunki:

$$B_i \sim A_i, \quad C_i \sim A, \quad B_i \cap C_i = \emptyset,$$

$$A_1 = B_1, \quad B_1 \sim A,$$

$$A_{i+1} = B_i \cup C_i.$$

WNIOSEK. Jeśli na \mathcal{E}_X określona jest miara skończenie addytywna P i określimy relację \preceq następująco:

$$A \preceq B \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} P(A) \geq P(B),$$

to $\langle \mathcal{E}_X; \preceq \rangle$ będzie SPJ. Jednak nie na odwrót, tzn. struktura prawdopodobieństwa jakościowego nie musi jednoznacznie generować miary prawdopodobieństwa.

Można podać kontrprzykład nawet dla pięcioelementowego X .

Wielu autorów podawało sformułowanie piątego aksjomatu, w taki sposób by zapewnić istnienie prawdopodobieństwa (w tym przypadku skończenie addytywnego). Najogólniejszy podał Luce [3].

AKSJOMAT. Dla dowolnych A, B, C, D spełniających warunki:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \not\prec C, \quad B \preceq D,$$

istnieją C', D', E spełniające warunki:

$$E \sim A \cup B, \quad C' \cap D' = \emptyset,$$

$$C' \cup D' \not\subset E, \quad C' \sim C, \quad D' \sim D.$$

TWIERDZENIE. *Struktura prawdopodobieństwa jakościowego spełniająca aksjomat Luce'a jest w sposób jednoznaczny reprezentowalna w $[0, 1]$ poprzez funkcję P zachowującą porządek. Funkcja ta jest miarą z warunkiem skończonej addytywności.*

Przejdźmy teraz do σ -ciał. Niech $\langle \mathcal{E}_X; \xi \rangle$ – SPJ przy czym \mathcal{E}_X – σ -ciało.

Relacja ξ jest *monotonicznie ciągła* na \mathcal{E}_X $\stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ Jeśli dla dowolnego, wstępującego ciągu zbiorów $\{A_i\}$ istnieje zbiór B taki, że $B \xi A_i$, to $B \xi \bigcup_i A_i$.

Pojęcie monotonicznej ciągłości porządku, wprowadzone w pracy [9], umożliwia sformułowanie następującego mocnego twierdzenia.

TWIERDZENIE. *Niech istnieje reprezentacja $P: \mathcal{E}_X \rightarrow [0, 1]$, skończenie addytywna. Jest ona przeliczalnie addytywna wtedy i tylko wtedy gdy porządek SPJ jest monotonicznie ciągły.*

Dla przestrzeni X skończonych sytuacja jest prostsza. Dla wzmocnienia twierdzeń wygodnie jest w tym przypadku wprowadzić pojęcie atomu. Załóżmy dalej, że rozważana przez nas struktura $\langle \mathcal{E}_X; \xi \rangle$ jest SPJ.

$$A - \text{atom} \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \begin{aligned} &1) A \xi \emptyset, \\ &2) B \subset A \Rightarrow (B \sim A \vee B \sim \emptyset). \end{aligned}$$

TWIERDZENIE. *Założmy, że spełniony jest warunek Suppesa [7]:*

$$A \xi B \Rightarrow \bigvee_C A \sim B \cup C.$$

Istnieje wówczas jednoznaczna reprezentacja probabilistyczna.

Ponieważ

- 1) wszystkie atomy są równoważne,
 - 2) każde zdarzenie jest rozłączną sumą atomów,
- prawdopodobieństwo można bardzo łatwo wyliczyć.*

Zastosowania teorii pomiaru do probabilistyki idą poza tym w następujących kierunkach.

1) Szukanie jakościowych warunków dla prawdopodobieństwa rozważanego w mechanice kwantowej. Rozważa się tam tzw. *QM*-ciała, gdyż „zwykłe” ciała nie są adekwatne. Chodzi o to, że w mechanice kwantowej iloczyn dwóch zdarzeń nie może być w wielu przypadkach uważany za zdarzenie.

2) Definiowanie porządku odpowiadającego nie „zwykłemu” prawdopodobieństwu, a prawdopodobieństwu warunkowemu. Argumentami takiej relacji są więc nie pojedyncze zdarzenia, a pary $A|B$.

3) Wprowadzanie jako pojęcia podstawowego relacji niezależności zdarzeń.

Rozważania własne. Głównym kierunkiem rozważań były próby przedstawienia pojęcia przestrzeni probabilistycznej w języku struktur relacyjnych. Uzyskana obecnie struktura jest jednak nieco innego typu niż rozważane w teorii pomiaru. Jej bowiem „teorio-pomiarowy” odpowiednik przedstawiony w pracy [5] nie wydaje się być naturalnym. $\langle X; R \rangle$, gdzie R jest relacją określoną na $[0, 1] \times 2^X$, jest *strukturą typu Prob* $\stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow}$

- 1) $R(1, X)$,
- 2) $(p \geq p' \wedge R(p, A)) \Rightarrow R(p', A)$,
- 3) $R(0, A) \Rightarrow R(0, A^C)$, gdzie A^C – dopełnienie A ,
- 4) $\bigwedge_i R(0, A_i) \Rightarrow R(0, \bigcup_i A_i)$,

5) $\bigwedge_i R(0, A_i)$, A_i – parami rozłączne \Rightarrow

$$\sup \{p: R(p, \bigcup_i A_i)\} = \sum_i \sup \{p: R(p, A_i)\}.$$

U w a g i:

- 1) To, że warunki 3, 4, 5 dotyczą „czegoś” wynika z 1 i 2, bowiem zachodzi $R(0, X)$.
- 2) To, że zbiór występujący po lewej stronie równości 5 jest niepusty, wynika z warunku 4.
- 3) Jeśli chcemy aksjomatykę dostosować do ciał skończenie addytywnych lub *QM*-ciał, należy odpowiednio zmienić 4.

TWIERDZENIE. 1. *Każda struktura $\langle X, R \rangle$ typu Prob jednoznacznie definiuje przestrzeń probabilistyczną $\langle X, \mathcal{E}, P \rangle$, przy czym składowe tej ostatniej są określone następująco:*

$$\mathcal{E} = \{A: R(0, A)\} \cup \emptyset,$$

$$P(A) = \begin{cases} \sup \{p: R(p, A)\} & \text{jeśli } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{jeśli } A = \emptyset. \end{cases}$$

2. *Każda przestrzeń $\langle X, \mathcal{E}, P \rangle$ wyznacza dokładnie jedną strukturę Prob przy czym:*

$$R(p, A) \Leftrightarrow (A \in \mathcal{E} \wedge P(A) \geq p).$$

Twierdzenie powyższe zapewnia więc nie tylko wystarczalność dla uzyskania miary prawdopodobieństwa, lecz również konieczność warunków nakładanych na strukturę relacyjną. Trudno jednak uznać na razie te warunki za „dostatecznie empiryczne”.

Literatura

- [1] S. K a n g e r, *Measurement: An essay in philosophy of science*, Theoria 38 (1–2) (1972), str. 1–44.
- [2] D. H. K r a n t z, R. D. L u c e, P. S u p p e s and A. T v e r s k y, *Foundations of measurement*, vol. I, New York – London 1971.
- [3] R. D. L u c e, *Sufficient conditions for the existence of a finitely additive probability measure*, Ann. Math. Statist. 38 (1967), str. 780–786.
- [4] – and J. W. T u k e y, *Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement*, Journ. Math. Psych. 1 (1964), str. 1–27.
- [5] A. M a t u s z e w s k i, *Probability space as relational structure*, Prace COPAN 156, Warszawa 1974.
- [6] W. W. R o z e b o o m, *Scaling theory and the nature of measurement*, Synthese 16 (1966), str. 170–233.
- [7] P. S u p p e s, *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, Dordrecht 1969.
- [8] – and J. L. Z i n n e s, *Basic measurement theory* w zbiorze pod redakcją R. D. L u c e’a, R. R. B u s h a i E. G a l a n t e r a: *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. I, New York 1963, str. 1–76.
- [9] C. V i l l e g a s, *On qualitative probability σ -algebras*, Ann. Math. Statist. 35 (1964), str. 1787–1796.