ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA V (1975)

A. RYBARSKI i C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław)

O filtracji beznaporowej w ośrodku jednorodnym i izotropowym (I)

Termin „filtracja" oznacza w tej pracy przepływ cieczy przez ośrodek stały i porowaty. Jako typowe przykłady filtracji można wymienić przesączanie się wody przez grunt i ropy naftowej przez ośrodek skalny. Badanie tych zjawisk ma doniosłe znaczenie gospodarcze. Zagadnieniom filtracji poświęcano więc od dawna liczne badania doświadczalne i teoretyczne, których wyniki przedstawia obszerna literatura fachowa. W szczególności, fenomenologicznej teorii filtracji wiele miejsca udzielają monografie [1], [2] i [3]. Z tych monografii bierzemy używane w naszej pracy oznaczenia, potrzebne do zapisu podstawowych równań, podanych poniżej w punktach 1 i 2. Na końcu punktu 2 znajduje się omówienie celów pracy.

1. Filtracja w obszarze nasycenia. Ośrodek porowaty, w którym przebiega filtracja, odnosimy do prostokątnego układu współrzędnych x, y, z, kierując oś z przeciwnie do działania siły ciężkości. Niech w chwili t ciecz zapełnia kompletnie pory ośrodka w pewnym obszarze $D(t)$. Będzie to *obszar nasycenia.* Filtracja powoduje w nim transport cieczy, z szybkością określoną polem wektorowym $\mathbf{u}$, o składowych u_x, u_y, u_z. Dla dowolnego jednostkowego wektora $\mathbf{n}$, zaczepionego w punkcie obszaru nasycenia, skalarny iloczyn $\mathbf{nu}$ jest równy objętości cieczy przepływającej w jednostce czasu przez jednostkowy element powierzchni skierowany prostopadle do wektora $\mathbf{n}$ (por. [1], 5.2). Wektor $\mathbf{u}$ nosi nazwę wektora objętościowej gęstości strumienia filtracji lub, krócej, *szybkości filtracji.*

Prawo zachowania masy filtrującej cieczy ma w obszarze nasycenia następujący kształt

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho n_e) = 0,$$

(por. [1], 6.3). Przez ρ oznaczono tutaj gęstość cieczy, a przez n_e — współczynnik efektywnej porowatości objętościowej. Jest on równy porowatości geometrycznej, pomniejszonej o objętościową koncentrację cieczy „martwej", zalegającej w porach i nie biorącej udziału w filtracji.

W dalszym ciągu rozważamy wyłącznie ciecz nieściśliwą, to jest przyjmujemy, iż $\rho = \text{const}$. Przyjmujemy także stale, że $n_e = \text{const}$. W tych warunkach bilans masy filtrującej cieczy przybiera postać równania

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{1.1}$$

Niech p oznacza ciśnienie w interesującej nas części środka, zajmowanej aktualnie przez strumień filtrującej cieczy. Będziemy zakładali, że przestrzenny rozkład ciśnienia wyznacza rozkład szybkości filtracji, zgodnie z prawem Darcy'ego

$$\mathbf{u} = -k \operatorname{grad} H, \tag{1.2}$$

(H. Darcy, 1856), gdzie k jest współczynnikiem filtracji, a H – *naporem*, określonym wzorem

$$H = \frac{1}{\rho g} p + z, \tag{1.3}$$

w którym g oznacza przyśpieszenie ziemskie (por. [1], 5.8). Tym samym ograniczamy rozważania do tak zwanych „ruchów pełzających", dla których siły inercji można pomijać przy układaniu bilansu sił działających w strumieniu filtracji. Prawo Darcy'ego oznacza proporcjonalność „siły oporu" do szybkości filtracji.

Jeżeli teraz współczynnik filtracji zachowuje w obszarze nasycenia wartość stałą, to z równań (1.1) i (1.2) wynika natychmiast

$$\Delta H = 0. \tag{1.4}$$

Przy poczynionych założeniach napór jest więc funkcją harmoniczną w obszarze nasycenia (por. [2], II, § 2, wzór (II. 14) i dalszy komentarz).

Zgodnie z prawem Darcy'ego, rozwiązania równania (1.4) określają rozkład szybkości filtracji w obszarze $D(t)$. Przy wyznaczaniu tych rozwiązań uwzględnia się jeszcze pewne naturalne warunki brzegowe. Przejdziemy obecnie do ich przedstawiania (por. [1], 6.7–6.10).

Warunki brzegowe mają proste sformułowanie na tych częściach brzegu, gdzie obszar $D(t)$ styka się z warstwami nieprzepuszczalnymi. Rzeczywiście, niech $\mathbf{n}$ będzie wektorem normalnym w pewnym punkcie nieprzepuszczalnego brzegu. Wtedy znika składowa normalna szybkości filtracji $u_n = \mathbf{nu}$, a więc także

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0, \tag{1.5}$$

na mocy prawa Darcy'ego.

Obszar nasycenia może się również stykać z otwartymi zbiornikami cieczy. Na odpowiednich częściach brzegu warunek brzegowy można wtedy otrzymać z postulatu ciągłości naporu. I tak, gdy ciecz w zbiorniku znajduje się w stanie równowagi hydrostatycznej, to warunek brzegowy ma postać równania

$$H = \text{const.} \tag{1.6}$$

Nieco ogólniej, na styku ze zbiornikami cieczy mamy do czynienia z warunkami typu Dirichleta.

Obecnie przystąpimy do rozważania brzegu trzeciego rodzaju, jaki stanowi powierzchnia swobodna.

2. Powierzchnia swobodna. Zgodnie z tytułem pracy zajmujemy się wyłącznie filtracją beznaporową, którą charakteryzuje występowanie w ośrodku swobodnej powierzchni strumienia filtrującej cieczy, zwanej też *powierzchnią depresji* (por. [2], II, § 2). W przypadku filtracji ustalonej, gdy funkcja H i obszar D nie zależą od czasu, warunek brzegowy na powierzchni depresji dany jest równaniem Devisona (B. B. Devison, 1938). Jego uogólnienie dla filtracji nieustalonej wyprowadzone przez Połubarinową–Koczinę (1947, por. [3], XIII, § 1), będziemy nazywać krótko równaniem P–K; jest ono właśnie głównym przedmiotem rozważań tej pracy.

W hydromechanice do opisu *powierzchni swobodnej* służy następujący układ równań:

$$p = 0, \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d}{dt} p = 0, \tag{2.1}$$

gdzie pochodna substancjalna $\frac{d}{dt}$ jest dana wzorem

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.2}$$

w którym v_x, v_y, v_z oznaczają składowe (ściślej współrzędne) wektora $\mathbf{v}$ prędkości cząstek cieczy. Pierwsze z równań (2.1) mówi, że ciśnienie na powierzchni swobodnej jest równe ciśnieniu zewnętrznemu, stałemu i równemu umownie zeru. Drugie równanie wyraża fakt, iż powierzchnia swobodna składa się zawsze z tych samych cząstek cieczy, a więc cząstki te „nie toną" w strumieniu cieczy.

W teorii filtracji równanie $p = 0$ opisuje tak zwaną *powierzchnię freatyczną* (por. [1], 4.2). W dalszym ciągu oznaczamy ją symbolem $\Gamma(t)$. Na mocy wzoru (1.3) mamy

$$H = z, \qquad \text{na} \qquad \Gamma(t). \tag{2.3}$$

Mówiąc ściśle, powierzchnia freatyczna nie jest brzegiem obszaru nasycenia. Można jednak to przyjąć zaniedbując pewne efekty kapilarne – tak też dalej postępujemy.

Dla zapisu stwierdzenia iż powierzchnia freatyczna składa się zawsze z tych samych cząstek filtrującej cieczy nie można użyć bezpośrednio wzoru (2.2); prędkość cząstek filtrującej cieczy nie figuruje bowiem jawnie w równaniach punktu 1. Wprowadza się ją wzorem

$$\mathbf{u} = n_e \mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Powszechnie uznaje się prawdziwość tego wzoru dla ośrodków izotropowych, wewnątrz obszaru nasycenia; oznacza to równość współczynnika porowatości objętościowej ze współczynnikiem porowatości powierzchniowej (por. [1], 2.8 i 5.4). Na powierzchni swobodnej izotropia ulega jednak istotnemu zaburzeniu i w miejsce równania (2.4) należy przyjąć inny związek, mianowicie

$$u_s = n_e v_s, \qquad u_n = \mu v_n. \tag{2.5}$$

Indeksy s i n oznaczają tutaj, odpowiednio, składowe styczną i normalną do powierzchni freatycznej. Nowy współczynnik μ jest równy współczynnikowi zwrotu cieczy, gdy $v_n < 0$, zaś współczynnikowi niedostatku nasycenia ośrodka, gdy $v_n > 0$ (por. [1], 5.23 oraz [2], II, § 2). Normalna skierowana została na zewnątrz obszaru $D(t)$.

Obecnie możemy już podać wyprowadzenie równania P–K. W tym celu zauważamy, że na powierzchni freatycznej mamy $\partial p/\partial s = 0$. Z równań (2.1) i (2.2) wynika więc równość

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_n \frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

Stosując kolejno wzór (2.5), a potem prawo Darcy'ego, przekształcamy tę równość do postaci równania

$$\frac{\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial n} \cdot \frac{\partial p}{\partial n}, \tag{2.6'}$$

które można także zapisać w następującym kształcie

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{grad} H \cdot \operatorname{grad} p, \qquad \text{na} \qquad \Gamma(t). \tag{2.6''}$$

Na koniec, rugując stąd funkcję p, z pomocą wzoru (1.3), otrzymujemy wreszcie równanie

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial H}{\partial t} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial H}{\partial z}, \tag{2.7}$$

na $\Gamma(t)$. Jest to właśnie równanie P–K, w formie podanej w [2] (por. wzór (II.21), dla $w = 0$).

Zakończyliśmy listę oznaczeń i podstawowych równań, którymi będziemy dalej operowali. Dla uniknięcia nieporozumień zaznaczamy, iż wielkości $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i p przedstawiają wielkości „makroskopowe", które należy starannie odróżniać od odpowiednich wielkości hydromechanicznych, związanych z mikrostrumieniem cieczy, płynącym przez wnętrza por ośrodka (por. [1], 4.10).

Obecnie prezentujemy cele naszej pracy. Jak wynika z przytoczonych wyżej rozważań, funkcję H oraz powierzchnię $\Gamma(t)$ – ruchomą część brzegu obszaru $D(t)$ – należy wyznaczać z układu równań (1.4), (2.3) i (2.7). Do tego dochodzą wspomniane już warunki typu Dirichleta lub Neumanna (por. (1.5) i (1.6)) oraz odpowiedni warunek początkowy $\Gamma(0) = \Gamma_0$. Tak sformułowany problem brzegowy (mieszany) nazywamy dalej krótko *problemem* (H,Γ).

Pomimo swego znaczenia w teorii filtracji nieustalonej, problem (H,Γ) jest bardzo mało zbadany. Główną trudność stanowi w nim nieliniowość równania (2.7) na ruchomym brzegu obszaru $D(t)$.

Dla przezwyciężenia wskazanej trudności, w teorii filtracji stosuje się następujący sposób:

Po pierwsze, układ równań (1.4), (2.3) i (2.7) przestaje być traktowany jako formalny model zagadnienia. Za nowy punkt wyjścia służy infinitezymalny bilans przepływu filtrującej cieczy, ułożony na podstawie dosyć przekonywujących fizycznych przesłanek.

Po drugie, w układanym bilansie przepływu przyjmuje się pewne uproszczenia, znane pod nazwą założenia (hipotezy) Dupuit'a. W wyniku takiego postępowania otrzymuje się bardzo konkretną korzyść – różniczkowe równanie powierzchni depresji nie zawierające funkcji H, które można rozwiązywać niezależnie od całego problemu (H,Γ). Jest to znane równanie Boussinesq'a.

Być może w sposób nadmiernie uproszczony streszczono powyżej – w ślad za [1], 8.6 – zastosowanie do problemu (H,Γ) przybliżeń Dupuit'a i Bussinesq'a, opracowanych jeszcze w XIX wieku do badania tak zwanych przepływów hydraulicznych (w literaturze mówi się też o stosowaniu „przybliżenia hydraulicznego", por. [1], 8; [2], II, § 3; [3], XIII, § § 1 i 2). Stosowanie takich metod jest oparte głównie na inżynierskim doświadczeniu i znajomości fizycznej strony zjawiska, a mniej na czysto matematycznych modelach formalnych.

Należy teraz podkreślić, że cytowane w punktach 1 i 2 podstawowe równania filtracji są spełnione w rzeczywistości jedynie z pewnym przybliżeniem, niekiedy bardzo grubym. Wprawdzie znane są zależności bardziej dokładne (na przykład równanie Dupuit'a–Forchheimera, przedstawiające uogólnienie prawa Darcy'ego; por. [1], 5.18), ale ich stosowanie jest utrudnione, ponieważ odpowiednik problemu (H,Γ) jest jeszcze trudniejszy do rozwiązywania. W tym stanie rzeczy stosowanie „przybliżenia hydraulicznego" jest ciągle aktualne, a równanie Bussinesq'a po dziś dzień stanowi praktyczną podstawę teorii filtracji nieustalonej. Naturalnie, sytuację może zmienić jedynie istotny postęp w badaniach problemu (H,Γ).

Obecnie przedstawimy krótko treść następnych punktów pracy. W punkcie 3 zaczynamy od równania P—K i przekształcamy je do postaci, w której powierzchnia depresji figuruje już jawnie, a nie w formie uwikłanej. Wyprowadzone równanie będzie się odtąd nazywało krótko *równaniem depresji*. W punkcie 4 wykazujemy równoważność (warunkową) równania depresji z pewną specjalną postacią bilansu przepływu filtrującej cieczy. Różniczkowa postać tego bilansu pozwala nam, w punkcie 5, wyprowadzić równanie Boussinesq'a na podstawie osłabionej, całkowej wersji założenia Dupuit'a.

W powyższy sposób od problemu (H, Γ) do klasycznego równania Boussinesq'a zostaje przerzucony pomost bardziej formalny. Na zakończenie pracy porównujemy równania Boussinesq'a z równaniem depresji. To pozwala sformułować warunek zgodności równania Boussinesq'a z wyjściowym problemem brzegowym, w oderwaniu od założenia Dupuit'a.

Dyskutowanie kwestii regularności występujących funkcji i obszarów zostanie pominięte; w pracy przyjmujemy dostatecznie wysoki stopień ich gładkości.

3. Równanie depresji. Od tego miejsca będą używane zwykłe skróty grad $\equiv \nabla$, oraz $\nabla^2 = \Delta$, pochodne cząstkowe względem zmiennych t, x, y, z oznaczamy przez indeksy, z tradycyjnym wyjątkiem dla składowych szybkości filtracji i wektorów jednostkowych. Dla wygody wprowadzamy także nowy czas kt/μ, mierzony w jednostkach długości, natomiast wektor $\mathbf{u}$ odnosimy do współczynnika k, mającego wymiar prędkości. Nowy wektor $\mathbf{u}$ jest więc bezwymiarowy. Po dokonaniu odpowiednich podstawień, które zapisujemy symbolicznie w postaci

$$t \to \frac{k}{\mu} t, \qquad \mathbf{u} \to \frac{1}{k}\mathbf{u}, \tag{3.1}$$

prawo Darcy'ego i równanie P—K przyjmują postać

$$\mathbf{u} = -\nabla H, \tag{3.2}$$

oraz

$$H_t = (\nabla H)^2 - H_z, \qquad \text{na} \qquad \Gamma(t). \tag{3.3}$$

Natomiast równania (1.4)—(1.6) oraz równanie (2.3) pozostają niezmienione.

Przyjmujemy obecnie istotne założenie

$$H_z \neq 1, \qquad \text{na} \qquad \Gamma(t). \tag{3.4}$$

Powierzchnia freatyczna (depresji) da się wtedy przedstawić równaniem

$$z = h(x, y; t), \tag{3.5}$$

przy czym podstawienie $z = h$ przekształca równanie (2.3) w równość

$$H(x, y, h; t) = h, \tag{3.6}$$

spełnioną tożsamościowo względem zmiennych x, y, t. Stąd wynikają wzory

$$H_x = (1 - H_z) h_x, \qquad H_y = (1 - H_z) h_y, \qquad H_t = (1 - H_z) h_t, \tag{3.7}$$

spełnione tożsamościowo dla $z = h$.

Po wstawieniu (3.7) do równania (3.3) i skróceniu przez $1 - H_z$ otrzymujemy ostatecznie następujące równanie

$$h_t = -H_z|_{z=h} + (1 - H_z|_{z=h})(h_x^2 + h_y^2). \tag{3.8}$$

Jest to właśnie *równanie depresji*, którym będziemy się systematycznie posługiwać w dalszych punktach tej pracy.

Obecnie wyjaśnimy, jaki jest prosty, kinematyczny sens równania depresji. W tym celu oznaczmy przez $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ wektor normalny do powierzchni $\Gamma(t)$. Przyjmujemy, iż $n_z > 0$. Jak wiadomo mamy wtedy

$$n_x = -n_z h_x, \qquad n_y = -n_z h_y, \qquad n_z = (1 + h_x^2 + h_y^2)^{-1/2}.$$

Stosując wzory (3.7) obliczamy teraz pochodną normalną $\partial H/\partial n$ i otrzymujemy

$$\frac{\partial H}{\partial n} = n_z\{H_z|_{z=h} - (1 - H_z|_{z=h})(h_x^2 + h_y^2)\}.$$

Dzięki zależności (3.2) równanie depresji (3.8) przyjmuje obecnie postać

$$h_t \cos \measuredangle (\mathbf{n}, z) = u_n. \tag{3.9}$$

Jak widać od razu z tej postaci, powierzchnia depresji jest unoszona przez strumień filtracji, stąd normalna składowa szybkość unoszenia równa się odpowiedniej składowej szybkości filtracji.

Na zakończenie tego punktu zastosujemy równanie depresji do przypadku filtracji poziomej. Filtracja nazywa się filtracją *poziomą*, gdy tożsamościowo $u_z = 0$. W dalszym ciągu będziemy mieli na myśli przypadek, gdy powierzchnia depresji jest dobrze określona dla dowolnych wartości współrzędnych x, y. Mając na celu przyszłą analizę założeń Dupuit'a uzasadnimy:

Filtracja jest pozioma wyłącznie wtedy, gdy

$$h = ax + by + (a^2 + b^2)t + \text{const}, \tag{3.10}$$

gdzie wielkości a i b są dowolnymi stałymi.

Dla dowodu zauważmy najpierw, że z założenia $u_z \equiv 0$, czyli $H_z \equiv 0$, wynika na mocy (3.6) tożsamość $H \equiv h$, więc $\Delta h = 0$, na mocy równania (1.4). Z równania depresji, które przybiera teraz kształt $h_t = (\nabla h)^2$, otrzymujemy dodatkową równość $\Delta[(\nabla h)^2] = 0$, czyli w formie rozwiniętej

$$h_{xx}^2 + 2h_{xy}^2 + h_{yy}^2 + h_x(\Delta h)_x + h_y(\Delta h)_y = 0.$$

Mamy więc $h_{xx} = h_{xy} = h_{yy} = 0$, co określa typ funkcji h, mianowicie $h = ax + by + c$, gdzie współczynniki a, b, c zależeć mogą jedynie od t. Ponownie stosując równanie depresji otrzymujemy zależność $a_t x + b_t y + c_t = a^2 + b^2$, skąd już wynika, że $a_t = b_t = 0$, oraz $c_t = a^2 + b^2$. To kończy dowód wzoru (3.10) dla filtracji poziomej.

Odwrotnie, załóżmy teraz, że powierzchnia depresji ma równanie dane wzorem (3.10). Na podstawie równania depresji łatwo wyliczyć, że wtedy $H_z = 0$ dla $z = h$. Ponieważ funkcja $G = H - h$ jest harmoniczna pod (nad) powierzchnią depresji i spełnia warunki brzegowe

$G|_\Gamma = 0$, oraz $G_z|_\Gamma = 0$, zależność $G = 0$, czyli $H = h$, zachodzi tożsamościowo, co zamyka dowód.

Jak widać z wzoru (3.10), filtracja pozioma jest zawsze filtracją płaską w pewnym przekroju, to znaczy przez odpowiedni obrót układu współrzędnych dookoła osi z można osiągnąć spełnienie warunku $H_y \equiv 0$. W takim układzie współrzędnych równanie (3.10) przybiera szczególnie prostą postać $h = ax + a^2 t + \text{const}$ i przedstawia linię prostą o stałym w czasie pochyleniu $-a$ sunącą jednostajnie z szybkością równą pochyleniu.

4. Poziomy bilans przepływu. W tym punkcie, a również i w punkcie następnym, stale przyjmujemy, że płaszczyzna $z = 0$ jest *spągiem*, to jest tworzy warstwę nieprzepuszczalną. Mamy więc $u_z = 0$, dla $z = 0$, a stąd

$$H_z = 0, \qquad \text{dla} \qquad z = 0, \tag{4.1}$$

na mocy prawa Darcy'ego. Wprowadzamy teraz pomocniczą funkcję

$$W = \frac{1}{\rho g}\int_0^h p\,dz, \tag{4.2'}$$

którą, dzięki wzorowi (1.3) możemy też napisać w postaci

$$W = \int_0^h H\,dz - \tfrac{1}{2}h^2. \tag{4.2''}$$

Oczywiście, funkcja W nie zależy od zmiennej z. Dlatego od tej chwili umawiamy się, że operatory ∇ oraz Δ będą działały wyłącznie na zmienne x, y. Pochodne względem z, o ile wystąpią, będą wypisane *explicite*.

Dla dalszych celów obliczamy gradient obu stron równości (4.2″)

$$\nabla W = \int_0^h \nabla H\,dz, \tag{4.3}$$

a następnie diwergencję i otrzymujemy

$$\Delta W = \nabla h \cdot \nabla H|_{z=h} + \int_0^h \Delta H\,dz.$$

W rachunku tym pamiętamy, że operatory ∇ oraz Δ działają wyłącznie na zmienne x, y. Korzystając teraz z wzorów (3.7), równania (1.4) i warunku (4.1) możemy doprowadzić ostatnią równość do postaci

$$\Delta W = (1 - H_z|_{z=h})(\nabla h)^2 - H_z|_{z=h}. \tag{4.4}$$

Rzut oka na równanie (3.8) i (4.4) pozwala od razu stwierdzić, że:

W obecności poziomego spągu, przy przyjęciu równania (1.4), *równanie depresji jest równoważne równaniu*

$$h_t = \Delta W. \tag{4.5}$$

Obecnie wyprowadzimy całkową wersję otrzymanego równania. W tym celu w płaszczyźnie spągu $z = 0$ obieramy dowolny obszar płaski S, ograniczony konturem L. Teraz obustronnie całkujemy równanie (4.5) po obszarze S i przekształcamy prawą stronę z pomocą wzoru Greena. W ten sposób dostajemy zależność

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S h\, dS = \oint_L - W_y\, dx + W_x\, dy. \tag{4.6}$$

Z (4.3) i (3.2) obliczamy

$$- W_x = \int_0^h u_x\, dz, \qquad - W_y = \int_0^h u_y\, dz. \tag{4.7}$$

Po podstawieniu tych wartości do równania (4.6) otrzymujemy wreszcie

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_S h\, dS = -\iint_{\bar{Z}} u_n\, dz, \tag{4.6''}$$

gdzie $\bar{Z}$ oznacza pobocznicę pionowego walca przeprowadzonego przez kontur L, od spągu do przecięcia z powierzchnią depresji. Przez u_n oznaczono tutaj składową normalną (do pobocznicy $\bar{Z}$) szybkości filtracji.

Równoważne sobie równania (4.6) są właśnie zapowiedzianą całkową postacią równania (4.5). W związku (4.6″) rozpoznajemy bilans przepływu filtrującej cieczy, która przenika przez pobocznicę $\bar{Z}$ i gromadzi się w przestrzennym obszarze, ograniczonym przez „denko" S, pobocznicę $\bar{Z}$ i odpowiedni ruchomy wycinek powierzchni depresji (por. [3], str. 326–329). Dzięki równaniom (4.6) i (4.7) funkcję W możemy interpretować jako potencjał przepływu, wziętego sumarycznie w pionie, od spągu aż do powierzchni depresji.

Równania (4.6) są równoważne równaniu (4.5). Widzimy więc, że warunek brzegowy dla równania (1.4) na brzegu swobodnym możemy formułować w postaci równań (3.8), (4.5) lub (4.6), do wyboru. Funkcja h jest wówczas określona równaniem (2.3), a ponadto należy żądać spełnienia warunków (3.4) i (4.1).

Równanie (4.5) pozwoli nam wyprowadzić równanie Boussinesq'a. Chcemy jeszcze podkreślić znaczenie tego równania dla przypadku filtracji ustalonej, gdy

$$\Delta W = 0, \tag{4.8}$$

co oznacza, iż funkcja W jest harmoniczna. W szczególności takimi są funkcje

$$W = a + bx, \qquad W = a\ln r + b, \tag{4.9}$$

gdzie a, b oznaczają dowolne stałe, zaś $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

W nieco innej postaci równania (4.9) są dobrze znane specjalistom teorii filtracji (pierwsze z nich jest ogólną postacią funkcji harmonicznej jednej zmiennej x, a druga funkcja – jedyną harmoniczną zależną tylko od r). Z pomocą pierwszego z nich i wzorów (4.7) J. A. Czarny obliczył wielkość ustalonego przepływu przez tamę o prostokątnym profilu. Analogiczny rezultat otrzymała Połubarinowa-Koczina dla przypadku studni doskonałej, za pomocą drugiego ze wzorów (4.9). Należy jednocześnie zaznaczyć, że w obu wspomnianych przypadkach powierzchnie depresji obliczono jedynie w przybliżeniu (por. [3], VII, § 9 i następne).

5. Założenie Dupuit'a i równanie Boussinesq'a. Należy dobrze zdawać sobie sprawę z faktu, że ani równanie (3.8), ani równanie (4.5) nie umożliwiają znalezienia powierzchni depresji bez dodatkowych informacji o przebiegu funkcji H w pionie. W charakterze informacji występuje czasem tak zwane założenie Dupuit'a (warunki Dupuit'a). W naszym przypadku mają one postać następujących równości

$$H_x = h_x, \qquad H_y = h_y, \tag{5.1}$$

dla wartości z poniżej powierzchni depresji (por. [1], 8.2). Naturalnie, równości te są jedynie przybliżone, a celem ich przyjęcia jest uniknięcie całkowania problemu (H, Γ) w ogólnym jego sformułowaniu. Oczywiście, powinno się jednocześnie badać, w jakim stopniu równości te mogą być zgodne z równaniem (1.4). Udowodnimy teraz co następuje:

Warunki (5.1) *są zgodne z równaniem* (1.4) *jedynie dla przypadków filtracji poziomej* (*tj., gdy* $H_z \equiv 0$), *bądź też filtracji pionowej* (*tj., gdy* $H_x \equiv H_y \equiv 0$).

Dla dowodu zauważymy najpierw, iż z równań (5.1) wynika przedstawialność funkcji H w postaci

$$H = h + \varphi(z, t). \tag{i}$$

Równanie (1.4) przybiera więc kształt $\Delta h = -\varphi_{zz}$, w którym zmienne x, y występują jedynie po stronie lewej, zaś zmienna z – po stronie prawej. Mamy więc

$$\Delta h = -\alpha, \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\alpha z^2 + \beta z + \gamma, \tag{ii}$$

gdzie wielkości α, β i γ mogą zależeć jedynie od t.

Obecnie wykorzystujemy równanie (3.6). Na mocy (i) oraz (ii) przyjmuje ono postać

$$\tfrac{1}{2}\alpha h^2 + \beta h + \gamma = 0. \tag{iii}$$

Jeżeli teraz choć jedna z wielkości α, β nie znika, to z tego równania wynika, iż funkcja h nie zależy od zmiennych x, y. Wtedy jednak $\alpha = 0$, na mocy pierwszego z równań (ii), zatem $h = -\gamma/\beta$ oraz $H = -\gamma/\beta + \beta z + \gamma$. Jest to przypadek filtracji pionowej, gdyż $H_x \equiv H_y \equiv 0$.

Na zakończenie rozważmy pozostały przypadek, gdy znikają obie wielkości α i β. Wtedy jednak również $\gamma = 0$, na mocy (iii), więc $H \equiv h$, na mocy (i) oraz (ii). Jest to właśnie przypadek filtracji poziomej, gdyż $H_z \equiv 0$. Dowód można uważać za zakończony.

Dla przypadku filtracji poziomej ogólny kształt funkcji h został znaleziony w punkcie 3. Jak widzieliśmy, w przypadku filtracji pionowej funkcja h nie zależy od zmiennych x, y, co odpowiada płaskiej i poziomej powierzchni depresji. Jej ruch w pionie nie jest jednak bliżej wyznaczony przez nasze równania. Równanie depresji daje jedynie związek $H = h + (h - z) h_t$.

Widzimy teraz, że korzystanie w sposób rygorystyczny z założeń Dupuit'a w formie (5.1) skrajnie zawęża klasę rozwiązań problemu (H, Γ). Dlatego przyjmujemy założenia upraszczające w osłabionej (całkowej) formie

$$\int_0^h H_x \, dz = h h_x, \qquad \int_0^h H_y \, dz = h h_y. \tag{5.2}$$

Jeżeli powierzchnia depresji ma pewne punkty wspólne ze spągiem, to równaniom (5.2) można też nadać następującą postać

$$\int_0^h H\,dz = h^2, \tag{5.3'}$$

a to przez krzywoliniowe całkowanie. Ta ostatnia równość mówi, że średni napór nad danym punktem spągu jest równy przewyższeniu powierzchni depresji nad spągiem.

Przyjęcie równości (5.3′) wystarcza nam do zakończenia wywodów. Z wzorów (5.3′) i (4.2) wynika bowiem zależność

$$W = \frac{1}{2} h^2, \tag{5.3''}$$

a wówczas równanie (4.5) przyjmuje postać

$$h_t = \frac{1}{2} \Delta h^2. \tag{5.4}$$

To jest właśnie równanie Boussinesq'a.

W przeciwieństwie do równań (3.8) i (4.5) można rozwiązywać równania (5.4) niezależnie od równania (1.4), a to dostarcza tak cennej separacji problemu (H, Γ). Na tym właśnie, wydaje się, polega istota założeń Dupuit'a, napisanych w formie (5.1), (5.2), bądź też (5.3).

Zgodność warunku (5.3) z równaniem (1.4) powinna być przedmiotem dalszych badań. Można jednak postąpić w sposób bezpośredni i porównać wprost prawe strony równania Boussinesq'a i równania depresji (3.8). Są one równe jedynie wtedy, gdy zachodzi równość

$$H_z\big|_{z=h} = -\frac{h\Delta h}{1 + (\nabla h)^2}. \tag{5.5}$$

W pewnych przypadkach równanie Boussinesq'a prowadzi do krzywych (powierzchni) depresji o kształtach i zachowaniu znacznie odbiegających od filtracji poziomej. Dla tych właśnie przypadków warto podjąć obliczenia, mające na celu sprawdzenie stopnia dokładności formuły (5.3), bądź też wzoru (5.5).

Prace cytowane

[1] J. Bear, O. Zaslawsky, S. Irmay (ed.), *Physical principles of water perlocation and seepage*, UNESCO 1968; przekład rosyjski, Moskwa 1971.

[2] Ф. М. Бочевер, Ю. В. Харманов, А. В. Лебедев, В. М. Шостаков, *Основы гидрогеологических расчетов*, 2 изд., Москва 1969.

[3] П. Я. Полубаринa-Кочина, *Теория движений грунтовых вод*, Москва 1952.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO