ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA I (1973)

R. ZUBER (Wrocław)

Metoda redukcji zmiennych

1. Wstęp. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody rozwiązywania równań postaci

$$a(\vec{x})S_1P_1u(\vec{x},\vec{y}) + b(\vec{x})S_2P_2u(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y}), \tag{1.1}$$

gdzie $a(\vec{x})$, $b(\vec{x})$, $f(\vec{x},\vec{y})$ – dane funkcje, $u(\vec{x},\vec{y})$ – funkcja szukana, S_1, P_1, S_2, P_2 – liniowe i jednorodne operatory o własnościach sformułowanych niżej.

Dla uproszczenia zapisu przez $\vec{x}$ oznaczyliśmy n-wymiarowy wektor $\vec{x} = (x_1,x_2, \ldots, x_n)$, natomiast przez $\vec{y}$ – m-wymiarowy wektor $\vec{y} = (y_1,y_2, \ldots, y_m)$. Zatem (1.1) jest równaniem $(n+m)$-wymiarowym.

W wielu konkretnych zagadnieniach prócz równania (1.1) dane są jeszcze dodatkowe warunki

$$Ru = \varphi \tag{1.2}$$

(np. w równaniach różniczkowych warunki początkowe, brzegowe, graniczne itp.).

Metoda redukcji polega na zastąpieniu równania (1.1) ciągiem (skończonym lub nieskończonym) równań, w których niewiadome funkcje są zależne tylko od zmiennej $\vec{x}$. Zatem zadanie $(n+m)$-wymiarowe zostaje zredukowane do zadań n-wymiarowych. Z rozwiązań tych zadań konstruuje sie następnie przybliżone rozwiązanie zagadnienia (1.1), (1.2).

Metoda redukcji zmiennych umożliwia jednolite potraktowanie kilku znanych w literaturze metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, a mianowicie: metody Fouriera rozdzielenia zmiennych, metody sum [1], opracowaną przez G. N. Położego i metody transformacji macierzowej [2], [3].

W niniejszej pracy podamy ogólne sformułowanie metody redukcji zmiennych oraz wykażemy, że metoda rozdzielenia zmiennych Fouriera oraz metoda transformacji macierzowej są szczególnymi przypadkami metody redukcji zmiennych. Podamy również zastosowanie metody transformacji macierzowej do konkretnych zadań oraz omówimy sposoby rozwiązywania niektórych zadań związanych z metodą transformacji.

2. Ogólne sformułowanie metody redukcji zmiennych. Oznaczmy przez W_n zbiór wszystkich funkcji $w(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ określonych i wystarczająco regularnych na obszarze I, przez V_m – zbiór wszystkich funkcji $v(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ określonych i odpowiednio regularnych na obszarze J, oraz przez U_{n+m} – zbiór wszystkich funkcji postaci $u(x_1,x_2, \ldots, x_n,y_1,y_2, \ldots, y_m)$ określonych i odpowiednio regularnych w obszarze $D = I \times J$. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, w celu uproszczenia zapisu, będziemy po-

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA III: MATEMATYKA STOSOWANA I (1973)

R. ZUBER (Wrocław)

Metoda redukcji zmiennych

1. Wstęp. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody rozwiązywania równań postaci

$$a(\vec{x})S_1P_1u(\vec{x},\vec{y}) + b(\vec{x})S_2P_2u(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y}), \tag{1.1}$$

gdzie $a(\vec{x})$, $b(\vec{x})$, $f(\vec{x},\vec{y})$ — dane funkcje, $u(\vec{x},\vec{y})$ — funkcja szukana, S_1, P_1, S_2, P_2 — liniowe i jednorodne operatory o własnościach sformułowanych niżej.

Dla uproszczenia zapisu przez $\vec{x}$ oznaczyliśmy n-wymiarowy wektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, natomiast przez $\vec{y}$ — m-wymiarowy wektor $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Zatem (1.1) jest równaniem $(n+m)$-wymiarowym.

W wielu konkretnych zagadnieniach prócz równania (1.1) dane są jeszcze dodatkowe warunki

$$Ru = \varphi \tag{1.2}$$

(np. w równaniach różniczkowych warunki początkowe, brzegowe, graniczne itp.).

Metoda redukcji polega na zastąpieniu równania (1.1) ciągiem (skończonym lub nieskończonym) równań, w których niewiadome funkcje są zależne tylko od zmiennej $\vec{x}$. Zatem zadanie $(n+m)$-wymiarowe zostaje zredukowane do zadań n-wymiarowych. Z rozwiązań tych zadań konstruuje sie następnie przybliżone rozwiązanie zagadnienia (1.1), (1.2).

Metoda redukcji zmiennych umożliwia jednolite potraktowanie kilku znanych w literaturze metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, a mianowicie: metody Fouriera rozdzielenia zmiennych, metody sum [1], opracowaną przez G. N. Położego i metody transformacji macierzowej [2], [3].

W niniejszej pracy podamy ogólne sformułowanie metody redukcji zmiennych oraz wykażemy, że metoda rozdzielenia zmiennych Fouriera oraz metoda transformacji macierzowej są szczególnymi przypadkami metody redukcji zmiennych. Podamy również zastosowanie metody transformacji macierzowej do konkretnych zadań oraz omówimy sposoby rozwiązywania niektórych zadań związanych z metodą transformacji.

2. Ogólne sformułowanie metody redukcji zmiennych. Oznaczmy przez W_n zbiór wszystkich funkcji $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ określonych i wystarczająco regularnych na obszarze I, przez V_m — zbiór wszystkich funkcji $v(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ określonych i odpowiednio regularnych na obszarze J, oraz przez U_{n+m} — zbiór wszystkich funkcji postaci $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ określonych i odpowiednio regularnych w obszarze $D = I \times J$. Jak już wspomnieliśmy we wstępie, w celu uproszczenia zapisu, będziemy po-

szczególne funkcje należące do W_n, V_m i U_{n+m} oznaczali odpowiednio przez $w(\vec{x})$, $v(\vec{y})$, $u(\vec{x},\vec{y})$, ...

Wprowadźmy *iloczyn skalarny* $(u(\vec{x},\vec{y}), v(\vec{y}))$, który działając na parę funkcji $u(\vec{x},\vec{y})$ i $v(\vec{y})$ daje w wyniku funkcję zależną tylko od zmiennej $\vec{x}$. Iloczyn skalarny będziemy oznaczali krótko symbolem (u,v). Rozpatrzmy teraz dwa liniowe i jednorodne operatory P i S, przekształcające funkcje $u \in U_{n+m}$ w funkcje $Pu \in U'_{n+m}$ i odpowiednio $Su \in U''_{n+m}$ oraz spełniające następujące warunki, gdzie $U'_{n+m} \subset U_{n+m}$, $U''_{n+m} \subset U_{n+m}$:

a) $PSu = SPu$,

b) istnieje operator S', przekształcający funkcje $w \in W_n$ w funkcje $S'w \in W_n$ taki, że dla dowolnych dwu funkcji $u(\vec{x},\vec{y})$ i $v(\vec{y})$ spełniona jest równość

$$(v,Su) = S'(v,u), \tag{2.1}$$

c) istnieje operator P', przekształcający funkcje $v \in V_m$ w funkcje $P'v \in V_m$ taki, że dla dowolnych dwu funkcji $u(\vec{x},\vec{y})$ i $v(\vec{y})$ spełniona jest równość

$$(v,Pu) = (u,P'v) + g_\varphi(\vec{x}), \tag{2.2}$$

gdzie funkcja $g_\varphi(\vec{x})$ jest określona i jednoznacznie wyznaczona za pomocą funkcji φ, występującej w dodatkowym warunku (1.2).

W celu wyrugowania zmiennej $\vec{y}$ z równania (1.1) i przedstawienia zagadnienia (1.1), (1.2) w postaci ciągu (skończonego lub nieskończonego) zagadnień n-wymiarowych, tzn. zależnych tylko od zmiennej $\vec{x}$, należy wyznaczyć wpierw wartości własne i funkcje własne następującego zagadnienia:

$$P'_2 v(\vec{y}) = \lambda P'_1 v(\vec{y}), \tag{2.3}$$

$$R'v = \varphi', \tag{2.4}$$

gdzie $v(\vec{y}) \neq 0$, $\lambda \neq 0$, a warunek (2.4) jest zależny od warunku (1.2) oraz postaci funkcji $g_\varphi(\vec{x})$.

Przypuśćmy, że zagadnienie (2.3), (2.4) potrafimy rozwiązać, a w wyniku rozwiązania otrzymujemy ciąg (skończony lub nieskończony) wartości własnych

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$$

oraz odpowiadający mu ciąg funkcji własnych

$$v^{(1)}(\vec{y}), v^{(2)}(\vec{y}), ..., v^{(n)}(\vec{y}), ...$$

Pomnóżmy teraz równanie (1.1) skalarnie przez funkcję $v^{(k)}(\vec{y})$, $k = 1, 2, ..., n, ...$, i wykorzystajmy warunek liniowości i jednorodności iloczynu skalarnego. Otrzymamy

$$a(\vec{x})(v^{(k)}, S_1P_1u) + b(\vec{x})(v^{(k)}, S_2P_2u) = (v^{(k)}, f).$$

Wykorzystując teraz wzory (2.1) i (2.2) odpowiednio dla operatorów S_1, P_1, S_2, P_2, otrzymamy

$$a(\vec{x})S'_1[(u,P'_1v^{(k)}) + g_{1\varphi}(\vec{x})] + b(\vec{x})S'_2[(u,P'_2v^{(k)}) + g_{2\varphi}(\vec{x})] = (f,v^{(k)}).$$

Jeśli skorzystamy teraz z równości (2.3), a ponadto wprowadzimy oznaczenie

$$w_k(\vec{x}) = (u, P_1' v^{(k)}), \tag{2.5}$$

to powyższe równanie możemy napisać w postaci

$$a(\vec{x})\, S_1' w_k(\vec{x}) + \lambda_k\, b(\vec{x})\, S_2' w_k(\vec{x}) = F_k(\vec{x}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots), \tag{2.6}$$

przy czym

$$F_k(\vec{x}) = (f, v^{(k)}) - a(\vec{x})\, S_1' g_{1\varphi_k}(\vec{x}) - b(\vec{x})\, S_2' g_{2\varphi_k}(\vec{x}).$$

Przyjmijmy również, że na podstawie warunków dodatkowych (1.2) dadzą się również sformułować potrzebne warunki dodatkowe dla funkcji $w_k(\vec{x})$, spełniających równania (2.6). Zapiszmy te warunki w postaci

$$r w_k = \psi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots). \tag{2.7}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ciąg (skończony lub nieskończony) zagadnień (2.6), (2.7), w których niewiadome funkcje $w_k(\vec{x})$ zależą już tylko od jednej zmiennej $\vec{x}$. Przypuśćmy teraz, że każde z zadań (2.6), (2.7) umiemy rozwiązać i że w wyniku rozwiązania otrzymaliśmy ciąg funkcji $w_1(\vec{x})$, $w_2(\vec{x})$, ..., $w_n(\vec{x})$, ... (każda z nich obliczona bądź dokładnie bądź metodami przybliżonymi).

Pozostaje jeszcze do rozwiązania zagadnienie polegające na wyznaczeniu funkcji $u(\vec{x}, \vec{y})$ z równań (2.5). Będziemy to zadanie nazywali *zagadnieniem odwrotnym.*

Zagadnienie odwrotne można łatwo rozwiązać wtedy, gdy funkcje własne $v^{(k)}(\vec{y})$ $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ spełniają warunki

$$(P_1' v^{(i)}, P_1' v^{(j)}) = \delta_{ij},$$

a prócz tego funkcje

$$P_1' v^{(1)}(\vec{y}),\ P_1' v^{(2)}(\vec{y}),\ \ldots,\ P_1' v^{(n)}(\vec{y}),\ \ldots$$

tworzą układ zupełny. W takim przypadku funkcję $u(\vec{x}, \vec{y})$ można przedstawić w postaci sumy (skończonej lub nieskończonej)

$$u(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\vec{x})\, P_1' v^{(i)}(\vec{y}), \tag{2.8}$$

gdzie współczynniki $a_i(\vec{x})$ można przedstawić w postaci

$$a_i(\vec{x}) = \frac{w_i(\vec{x})}{(P_1' v^{(i)}, P_1' v^{(i)})} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Z powyższego wynika, że stosowanie metody redukcji zmiennych do konkretnych zagadnień jest możliwe wówczas, gdy znane są metody rozwiązywania następujących zagadnień:

1° zagadnienia (2.3), (2.4) znajdywania wartości własnych i funkcji własnych,

2° skończonego lub nieskończonego ciągu zagadnień (2.6), (2.7) pozwalających wyznaczyć funkcje $w_k(\vec{x})$,

3° zagadnienia odwrotnego (2.5).

W dalszych paragrafach zajmiemy się zastosowaniem opisanej tu metody do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Założymy w tej chwili, że wszystkie rozpatrywane dalej zagadnienia mają rozwiązania jednoznaczne.

3. Metoda Fouriera rozdzielenia zmiennych. Przykładem przedstawionego wyżej postępowania może służyć znana w literaturze metoda rozdzielenia zmiennych Fouriera w równaniach różniczkowych cząstkowych.

Rozpatrzmy następujące płaskie zagadnienia brzegowe. Znaleźć funkcję dwu zmiennych $u(x,y)$, spełniającą na prostokącie

$$D:\{0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, a(x) = f(x,y) \tag{3.1}$$

oraz następujące warunki brzegowe

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u(x,1) = \varphi_2(x), \tag{3.2}$$

$$u(0,y) = \psi_1(y), \qquad u(2,y) = \psi_2(y). \tag{3.3}$$

Wprowadźmy iloczyn skalarny

$$(v,u) = \int_0^1 v(y)\, u(x,y)\, dy$$

oraz operatory

$$Su = u_{xx}, \qquad Pu = u_{yy}.$$

Wiadomo, że zdefiniowany tu iloczyn skalarny spełnia warunek liniowości i jednorodności. Łatwo również sprawdzić, że operator S spełnia warunek (2.1), który w tym przypadku ma postać

$$\left(v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\,(v,u).$$

Pokażemy również, że operator P spełnia warunek (2.2).

Z definicji iloczynu skalarnego mamy

$$(v,Pu) = \int_0^1 v(y)\, u_{yy}(x,y)\, dy.$$

Całkując dwukrotnie przez części otrzymamy wzór (2.2), w którym należy podstawić

$$P'v(y) = \frac{d^2}{dy^2} v(y),$$

$$g_\varphi(x) = v(1)\, u_y(x,1) - v(0)\, u_y(x,0) - v'(1)\, u(x,1) + v'(0)\, u(x,0),$$

gdzie oznacza tu różniczkowanie względem zmiennej y.

Równanie (3.1) możemy zapisać w postaci

$$Su(x,y) + a(x)\, Pu(x,y) = f(x,y) \tag{3.4}$$

i uważać go za szczególny przypadek równania (1.1).

Zagadnienie (2.3), (2.4) w tym przypadku przyjmie postać

$$v''(y) = \lambda\, v(y),$$

$$v(0) = v(1) = 0.$$

Warunki brzegowe powyższego zagadnienia zostały tak dobrane, aby wykorzystując warunki brzegowe równania (3.2) można było wyznaczyć funkcję $g_\varphi(x)$.

Wiadomo, że w wyniku rozwiązania powyższego zagadnienia na wartości własne i funkcje własne otrzymuje się w tym przypadku nieskończony ciąg wartości własnych i odpowiadający mu nieskończony ciąg ortonormalnych funkcji własnych

$$\lambda_k = -k^2\pi^2,$$

$$v^{(k)}(y) = \sqrt{2}\sin k\pi y \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dla funkcji $w_k(x)$ określonych wzorami

$$w_k(x) = (v^{(k)}, u) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x,y) \sin k\pi y\; dy,$$

postępując zgodnie z teorią wyłożoną w § 2, otrzymamy równania różniczkowe zwyczajne

$$\begin{aligned} &w_k''(x) + \lambda_k\, a(x)\, w_k(x) = \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 f(x,y) \sin k\pi y\; dy - a(x)\sqrt{2}\, k\pi\, [\varphi_1(x) + (-1)^k \varphi_2(x)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Natomiast z warunków brzegowych (3.3) znajdujemy warunki brzegowe dla funkcji $w_k(x)$

$$w_k(0) = \sqrt{2} \int_0^1 \psi_1(y) \sin k\pi y \; dy,$$

(3.6)

$$w_k(2) = \sqrt{2} \int_0^1 \psi_2(y) \sin k\pi y \; dy.$$

Ponieważ układ funkcji własnych $\{\sqrt{2}\sin k\pi y\}$ jest układem ortonormalnym i zamkniętym, więc w tym przypadku funkcję $u(x,y)$, to znaczy rozwiązanie zagadnienia (3.1), (3.2), (3.3), można przedstawić w postaci szeregu (2.8). Oczywiście, przed tym musimy rozwiązać układ zagadnień brzegowych (3.5), (3.6). Te zagadnienia brzegowe będziemy musieli, na ogół, rozwiązywać metodami numerycznymi.

Zauważmy, że metoda Fouriera prowadzi do rozwiązania wyrażonego z pomocą nieskończonego szeregu. W praktyce możemy wyznaczyć tylko skończoną liczbę wyrazów tego szeregu. Określenie liczby wyrazów tego szeregu, zabezpieczających określoną dokładność rozwiązania,jest nie łatwym do rozwiązania problemem. W następnych paragrafach omówimy taką realizację metody redukcji zmiennych, która prowadzi do przybliżonych rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych w postaci skończonych sum. Tego typu rozwiązania uzyskuje się w wyniku dyskretyzacji jednej ze zmiennych. W tym przypadku operator P' będzie miał skończoną liczbę wartości własnych i funkcji własnych. Z tego względu równanie (1.1) można zastąpić skończonym układem niezależnych równań, w których niewiadome funkcje $w_k(x)$ będą zależały tylko od jednej zmiennej. Zagadnienie obliczania wartości własnych i funkcji własnych operatora P' daje się wówczas sprowadzić do zagadnienia obliczania wartości własnych i wektorów własnych pewnej macierzy kwadratowej. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego sprowadzi się wówczas do odwrócenia macierzy fundamentalnej, tzn. macierzy zbudowanej z wektorów własnych operatora P'. Oczywiście, odwrócenie macierzy fundamentalnej będzie zadaniem zupełnie trywialnym w przypadku, gdy wektory własne będą tworzyły układ ortonormalny.

Metodę redukcji zmiennych, w przypadku gdy zmienną redukowaną będzie zmienna dyskretna, będziemy w dalszych rozważaniach nazywali *metodą transformacji macierzowej.* Dodajmy jeszcze, że metodę tranformacji macierzowej można stosować do bardzo obszernej klasy równań różniczkowych cząstkowych. Należy przy tym podkreślić, że wiele zagadnień fizyki matematycznej można rozwiązać tą metodą z dużą dokładnością, przy stosunkowo małym nakładzie pracy obliczeniowej.

W następnym paragrafie omówimy pewną ważną klasę operatorów, nazwanych operatorami różnicowymi, które odgrywają ważną rolę w metodzie transformacji macierzowej.

4. Operatory różnicowe. Rozpatrzmy następujące zbiory:

$$I = \{x : a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$J = \{y : y = y_0 + kh,\; h > 0,\; k \in C\}.$$

Oznaczmy przez W zbiór wszystkich funkcji ciągłych i wystarczająco regularnych na zbiorze I, przez V zbiór funkcji określonych na zbiorze J, oraz przez U zbiór funkcji określonych i odpowiednio regularnych na zbiorze $D = I \times J$.

Rozpatrzmy teraz operatory różnicowe P i P' określone wzorami

$$Pu(x,y) = \sum_{j=-s}^{l} a^{(j)}(y)\, u(x,y+jh), \tag{4.1}$$

$$P'u(x,y) = \sum_{j=-s}^{l} a^{(j)}(y-jh)\, u(x,y-jh), \tag{4.2}$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$y_k = y_0 + kh, \qquad v_k = v(y_k), \qquad u_k(x) = u(x,y_k), \qquad Pu_k(x) = Pu(x,y_k).$$

Rozpatrzmy teraz wektory

$$\vec{u}\,(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)),$$

$$\vec{v}_k = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

$$P\vec{u}\,(x) = (Pu_1(x), Pu_2(x), \ldots, Pu_n(x))$$

oraz oznaczmy symbolem $(\vec{v},\vec{u})$ iloczyn skalarny dwu wektorów. Można łatwo udowodnić prawdziwość następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. *Niech λ i $\vec{v}$ oznaczają wartość własną i odpowiedni wektor własny zagadnienia*

$$P\vec{v} = \lambda\vec{v}, \qquad r\vec{v} = g,$$

gdzie równością $r\vec{v} = g$ oznaczyliśmy układ warunków konieczny dla jednoznacznego określenia rozwiązania.

Dla każdego naturalnego m zachodzi tożsamość

$$(\vec{v},P^m\vec{u}) = \lambda^m(\vec{v},\vec{u}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda^{m-i}\Big\{[\vec{v},P^{i-1}\vec{u}]_0 - [\vec{v},P^{i-1}\vec{u}]_n\Big\}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$[\vec{v},\vec{u}]_p = \sum_{j=-s}^{-1}\ \sum_{i=p+j+1}^{p} a^{(j)}_{i-j} v_{i-j} u_i(x) - \sum_{j=1}^{l}\ \sum_{i=p+1}^{p+j} a^{(j)}_{i-j} v_{i-j} u_i(x).$$

Dowód powyższego twierdzenia jest trywialny ale wymaga wykonania dość żmudnych rachunków. Zauważmy jedynie, że przez P^m oznaczyliśmy tu m-tą potęgę operatora (4.1), którą można zdefiniować rekurencyjnie wzorem

$$P^m u = P(P^{m-1}u), \qquad P^0 u = u.$$

Rzędem operatora różniczkowego (4.1) będziemy nazywali liczbę $r = l + s$.

PRZYKŁAD 4.1. Rozpatrzmy operator drugiego rzędu postaci

$$Pu(x,y) = a(y)\,u(x,y-h) + b(y)\,u(x,y) + c(y)\,u(x,y+h). \tag{4.4}$$

W tym przypadku mamy $s = 1$, $l = 1$. Dla łatwiejszego zapisu operatora zmieniliśmy oznaczenia w stosunku do wzoru (4.1), wprowadzając $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$ zamiast $a^{(-1)}(y)$, $a^{(0)}(y)$, $a^{(1)}(y)$. Przyjmijmy, że rozwiązując zagadnienie brzegowe

$$P\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad v_0 = \alpha v_1, \quad v_{n+1} = \beta v_n, \tag{4.5}$$

gdzie α i β są dowolnymi stałymi, otrzymujemy wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ i odpowiawiadające im wektory własne $\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \ldots, \vec{v}^{(n)}$. W tym przypadku wzór (4.3) dla $m = 1$ przyjmie postać

$$(\vec{v}^{(k)}, P\vec{u}) = \lambda_k\,(\vec{v}^{(k)}, \vec{u}) + v_1^{(k)}\,(a_1 u_0(x) - \alpha c_0 u_1(x)) - \tag{4.6}$$
$$- v_n^{(k)}\,(a_{n+1}\,\beta u_n(x) - c_n u_{n+1}(x)).$$

Łatwo można wywnioskować, że zagadnienie brzegowe (4.5) jest równoważne zagadnieniu obliczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy

$$Q' = \begin{bmatrix} s & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_n & t \end{bmatrix},$$

gdzie $s = a_1\,\alpha + b_1$, $t = b_n + \beta\,c_n$.

PRZYKŁAD 4.2. Zagadnienie (4.5) przyjmie szczególnie prostą postać, gdy operator P określimy równością

$$Pu(x,y) = u(x,y-h) + u(x,y+h). \tag{4.7}$$

W tym przypadku (4.5) można zapisać w postaci różnicowego zagadnienia brzegowego

$$v_{k+1} = \lambda\,v_k - v_{k-1}, \quad v_0 = \alpha\,v_1, \quad v_{n+1} = \beta\,v_n.$$

Wartości własne i wektory własne tego zagadnienia można łatwo wyznaczyć po obliczeniu pierwiastków $x_1, x_2, \ldots, x_n$ równania

$$U_n(x) - (\alpha + \beta)\, U_{n-1}(x) + \alpha\beta\, U_{n-2}(x) = 0, \tag{4.8}$$

gdzie przez $U_l(x)$ oznaczyliśmy l-ty wielomian Czebyszewa drugiego rodzaju. Wartości własne i wektory własne obliczamy wówczas ze wzorów

$$\lambda_k = 2x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.9}$$

$$\vec{v}^{(k)} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}), \tag{4.10}$$

gdzie

$$v_i^{(k)} = c_k\, [(1 - 2\,\alpha\, x_k)\, U_{i-1}\,(x_k) + \alpha\, U_i\,(x_k)],$$

$$c_k = \left\{\sum_{i=1}^{n} [(1 - 2\,\alpha\, x_k)\, U_{i-1}\,(x_k) + \alpha\, U_i\,(x_k)]^2\right\}^{-1/2}.$$

Równanie (4.8) rozwiązuje się na ogół numerycznie. Dokładne rozwiązania można uzyskać w następujących przypadkach:

1° $\alpha = 1, \beta = -1$ lub $\alpha = -1, \beta = 1$;

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

2° $\alpha\beta = 1$;

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad x_n = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}.$$

3° $\alpha = \beta = 0$;

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

5. Numeryczne obliczanie wartości własnych i wektorów własnych operatorów różnicowych drugiego rzędu. W poprzednim paragrafie zwróciliśmy uwagę na to, że zagadnienie (4.5) jest równoważne zagadnieniu obliczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy trójprzekątniowej Q'. W dalszych zastosowaniach będą nas interesowały takie macierze Q', których wszystkie wartości własne są rzeczywiste. Dlatego przytoczymy teraz twierdzenie, w którym będą podane warunki wystarczające na to, by macierz Q' miała rzeczywiste wartości własne. (Twierdzenie to wypowiemy dla macierzy transponowanej Q).

TWIERDZENIE 2. *Rozpatrzmy macierz*

$$
(5.1)\qquad Q = \begin{bmatrix} s & a_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{n-2} & b_{n-1} & \dots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & \dots & t \end{bmatrix}.
$$

Jeśli $\operatorname{sgn}(c_k \cdot a_{k+1}) = 1$, $a_{k+1} \neq 0$, $c_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, *to wszystkie wartości własne macierzy* Q *są rzeczywiste.*

D o w ó d. Niech D będzie dowolną nieosobliwą macierzą diagonalną

$$
(5.2)\qquad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.
$$

Skonstruujmy teraz macierz

$$
B = DQD^{-1},
$$

podobną do macierzy Q i zażądajmy, aby macierz B była symetryczna. Żądanie to prowadzi do warunków

$$
d_i^2\, c_{i-1} = d_{i-1}^2 a_i \qquad (i = 2, 3, \dots, n).
$$

Stąd obliczamy

$$
(5.3)\qquad d_i = d_1 \sqrt{\frac{a_2 a_3 \dots a_i}{c_1 c_2 \dots c_{i-1}}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),
$$

przy czym d_1 jest dowolną liczbą różną od zera. Ostatecznie otrzymaliśmy macierz diagonalną D, która przekształca przez podobieństwo macierz Q w macierz symetryczną

$$
(5.4)\qquad B = \begin{bmatrix} s & \sqrt{c_1 a_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{c_1 a_2} & b_2 & \sqrt{c_2 a_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{c_2 a_3} & b_3 & \sqrt{c_3 a_4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{c_{n-2} a_{n-1}} & b_{n-1} & \dots & \sqrt{c_{n-1} a_n} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_{n-1} a_n} & \dots & t \end{bmatrix}.
$$

Ponieważ wszystkie wartości własne macierzy symetrycznej są rzeczywiste, a przekształcenie przez podobieństwo wartości własnych nie zmienia, więc tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Dodajmy jeszcze następujące uwagi, podkreślające korzyści uzyskane przez sprowadzenie zagadnienia (4.5) do postaci symetrycznej.

1° Wektory własne macierzy symetrycznej odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. W przypadku gdy wszystkie wartości własne są rzeczywiste i różne, a wektory własne tworzą układ ortonormalny, wówczas macierz odwrotna do macierzy fundamentalnej jest równa macierzy transponowanej. W takiej sytuacji bardzo łatwo rozwiązuje się zagadnienie odwrotne w metodzie redukcji zmiennych.

2° Znane są bardzo dobre i szybkie metody numeryczne obliczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy trójprzekątniowych symetrycznych (na przykład metoda bisekcji Givensa lub metoda Wilandta).

Operatory różnicowe, które znajdują zastosowanie w metodzie transformacji macierzowej, najczęściej uzyskujemy w wyniku dyskretyzacji jednej ze zmiennych w równaniu różniczkowym cząstkowym. Natomiast zagadnienia dla wartości i wektorów własnych są często analogonami różnicowymi pewnych zagadnień w równaniach różniczkowych zwyczajnych. Na przykład zagadnienie (4.5) jest różnicowym analogonem następujacego zagadnienia Sturma - Liouville'a

$$\alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = \lambda y(x). \tag{5.5}$$

Warunków brzegowych nie będziemy tu precyzowali. Załóżmy jedynie, że są one zadane w punktach x_0 i x_{n+1}.

Podzielmy przedział $< x_0, x_{n+1} >$ równo odległymi punktami $x_1, x_2, ..., x_n$ na $n+1$ równych części i oznaczmy $y_k = y(x_k)$. W każdym z punktów x_k równanie (5.5) możemy aproksymować następującym równaniem różnicowym:

$$\alpha_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \beta_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \gamma_k y_k = \lambda y_k,$$

$$k = 1, 2, ..., n, \qquad h = x_{k+1} - x_k.$$

Podstawiając

$$a_k = \frac{\alpha_k}{h^2} - \frac{\beta_k}{2h}, \quad b_k = \gamma_k - \frac{2\alpha_k}{h^2}, \quad c_k = \frac{\alpha_k}{h^2} + \frac{\beta_k}{2h}$$

otrzymujemy zagadnienie równoważne znajdywaniu wartości własnych i wektorów własnych macierzy Q danej wzorem (5.1) (z dokładnością do wielkości s i t, które zależą od warunków brzegowych).

Wykażemy, że otrzymany tą drogą różnicowy analogon zagadnienia (5.5) ma wszystkie wartości własne rzeczywiste. Należy tylko założyć, że funkcje $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ są ciągłe w przedziale $< x_0, x_{n+1} >$ i że funkcja $\alpha(x)$ nie zmienia w tym przedziale znaku. Z wzorów na a_k i c_k znajdujemy

$$a_{k+1} = \frac{1}{h^2}\left\{\alpha\,[x_0 + (k+1)h] - \frac{h}{2}\beta\,[x_0 + (k+1)h]\right\},$$

$$c_k = \frac{1}{h^2}\left\{\alpha\,[x_0 + kh] + \frac{h}{2}\beta\,[x_0 + kh]\right\}.$$

Z powyższych wzorów widać, że dla dostatecznie małych wartości h znak a_{k+1} i c_k jest taki sam i równa się znakowi funkcji $\alpha(x)$. Zatem dla dostatecznie małych h spełnione są warunki twierdzenia 2.

Nie trudno też wywnioskować, że przy dostatecznie małym h wszystkie wartości własne rozpatrywanego wyżej analogonu różnicowego są różne.

W dalszej części niniejszego opracowania zajmiemy się omówieniem metody transformacji macierzowej. Omówimy ją na przykładach.

6. Omówienie metody transformacji macierzowej na przykładzie płaskiego zagadnienia brzegowego drugiego rzędu typu eliptycznego. Niech dane będzie następujące zagadnienie. Znaleźć funkcję dwu zmiennych $u(x,y)$, która na prostokącie

$$D:\{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

spełnia równanie różniczkowe typu eliptycznego

$$a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u + a_4(x)\,[\alpha(y)u_{yy} + \beta(y)u_y + \gamma(y)u] = f(x,y) \tag{6.1}$$

oraz warunki brzegowe postaci

$$b_1u_y + c_1u\,\big|_{y=c} = \varphi_1(x), \quad b_2u_y + c_2u\big|_{y=d} = \varphi_2(x), \tag{6.2}$$

$$b_3u_x + c_3u\,\big|_{x=a} = \varphi_3(x), \quad b_4u_x + c_4u\big|_{x=b} = \varphi_4(x). \tag{6.3}$$

W pierwszym etapie metody transformacji macierzowej należy dokonać aproksymacji równania (6.1) takim równaniem, w którym zmienna y będzie przyjmowała wartości dyskretne $y_k = y_0 + kh$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Jeden ze sposobów dyskretyzacji zmiennej y polega na zastąpieniu wszystkich pochodnych cząstkowych względem y odpowiednimi wyrażeniami różnicowymi. Wprowadźmy oznaczenia:

$$u_k(x) = u(x,y_k), \quad f(x,y_k) = f_k(x), \quad \alpha_k = \alpha(y_k), \ldots$$

Dla ustalonych wartości $y = y_k$ możemy równanie (6.1) aproksymować następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$a_1(x)u_k''(x) + a_2(x)u_k'(x) + a_3(x)u_k(x) + a_4(x)\left[\alpha_k\frac{u_{k-1}(x) - 2u_k(x) + u_{k+1}(x)}{h^2} + \right.$$

$$\left. + \beta_k\frac{u_{k+1}(x) - u_{k-1}(x)}{2h} + \gamma_k\,u_k(x)\right] = f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Wprowadźmy dalej wektory

$$\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)),$$

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

$$P\vec{u}(x) = (Pu_1(x), Pu_2(x), \ldots, Pu_n(x)),$$

gdzie operator P jest dany wzorem (4.4), natomiast

$$a(y) = \frac{\alpha(y)}{h^2} - \frac{\beta(y)}{2h},$$

$$b(y) = \gamma(y) - \frac{2\,\alpha(y)}{h^2},$$

$$c(y) = \frac{\alpha(y)}{h^2} + \frac{\beta(y)}{2h}.$$

Oprócz tego wprowadźmy operator różniczkowy S przekształcający wektor $\vec{u}(x)$ w wektor $S\vec{u}(x)$ według wzoru

$$S\vec{u}(x) = a_1(x)\,\vec{u}''(x) + a_2(x)\,\vec{u}'(x) + a_3(x)\,\vec{u}(x).$$

Otrzymany wyżej układ równań różniczkowych możemy zapisać w postaci wektorowej

(6.4) $$S\vec{u}(x) + a_4(x)\,P\vec{u}(x) - \vec{f}(x).$$

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego wektora $\vec{v}$ prawdziwy jest wzór

(6.5) $$(\vec{v}, S\vec{u}(x)) = S\,(\vec{v}, \vec{u}(x)).$$

Zatem równanie (6.4) jest równaniem postaci (1.1), w którym operatory S i P spełniają odpowiednio warunek (2.1) oraz warunek (2.2), a dokładniej, warunek (4.6). Możemy więc do równania (6.4) zastosować metodę redukcji zmiennych. Postępując zgodnie z tą metodą, opisaną w § 2, przekształcamy równanie (6.4) w układ n niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych postaci

(6.6) $$a_1(x)\,w_k''(x) + a_2(x)\,w_k'(x) + [a_3(x) + \lambda_k a_4(x)]\,w_k(x) =$$
$$= (\vec{v}^{(k)}, \vec{f}(x)) - a_4(x)\,g_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie

(6.7) $$w_k(x) = (\vec{v}^{(k)}, \vec{u}(x)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

(6.8) $$g_k(x) = v_1^{(k)}\,(a_1 u_0(x) - c_0 \alpha u_1(x)) - v_n^{(k)}\,(a_{n+1} \beta u_n(x) - c_n u_{n+1}(x)).$$

natomiast $\vec{v}^{(k)}$, λ_k — wektory własne i wartości własne zagadnienia (4.5). We wzorach (6.8) i w zagadnieniu (4.5) występują jeszcze dwa parametry α i β, które w tej chwili nie

są jeszcze ustalone. Zarówno funkcje $g_k(x)$, występujące po prawej stronie równania (6.6), jak i oba wspomniane parametry można wyznaczyć z warunków brzegowych (6.2).

W tym celu aproksymujemy warunki różniczkowe (6.2) odpowiednimi wyrażeniami różnicowymi. Wówczas otrzymamy

$$b_1 \frac{u_1(x) - u_0(x)}{h} + c_1 u_0(x) = \varphi_1(x),$$

$$b_2 \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{h} + c_2 u_{n+1}(x) = \varphi_2(x).$$

Po przekształceniu powyższych warunków, dostajemy

$$(6.9) \qquad d_1 u_0(x) + e_1 u_1(x) = \varphi_1(x), \qquad d_2 u_n(x) + e_2 u_{n+1}(x) = \varphi_2(x),$$

gdzie

$$d_1 = c_1 - \frac{a_1}{h}, \qquad e_1 = \frac{b_1}{h}, \qquad d_2 = -\frac{b_2}{h}, \qquad e_2 = c_2 + \frac{b_2}{h}.$$

Dobierzemy teraz stałe α i β w (6.8) w ten sposób, aby wyrażenie występujące tam w pierwszym nawiasie było identyczne z pierwszym wyrażeniem (6.9), natomiast wyrażenie w drugim nawiasie wzoru (6.8) było identyczne z drugim wyrażeniem (6.9). Okazuje się, że w tym celu musimy przyjąć

$$\alpha = -\frac{a_1 e_1}{c_0 d_1}, \qquad \beta = \frac{c_n d_2}{a_{n+1} e_2}.$$

Otrzymamy wówczas

$$g_k(x) = \frac{v_1^{(k)} a_1}{d_1} \varphi_1(x) + \frac{v_n^{(k)} c_n}{e_2} \varphi_2(x).$$

Z powyższych rozważań wynika zarówno sposób wyznaczanie stałych α i β występujących w warunkach brzegowych zagadnienia (4.5), jak i sposób wyznaczania funkcji $g_k(x)$.

Równania (6.6) można będzie jednoznacznie rozwiązać wówczas, gdy będą określone dla nich odpowiednie warunki brzegowe. W tym celu wykorzystamy warunki brzegowe (6.3). Zapiszemy je w postaci wektorowej

$$b_3 \vec{u}'(a) + c_3 \vec{u}(a) = \vec{\varphi}_3,$$

$$b_4 \vec{u}'(b) + c_4 \vec{u}(b) = \vec{\varphi}_4,$$

gdzie

$$\vec{\varphi}_3 = (\varphi_3(y_1), \varphi_3(y_2), ..., \varphi_3(y_n)),$$

$$\vec{\varphi}_4 = (\varphi_4(y_1), \varphi_4(y_2), ..., \varphi_4(y_n)).$$

Mnożąc powyższe warunki brzegowe skalarnie przez wektory własne $\vec{v}^{(k)}$ $(k = 1, 2, ..., n)$, zagadnienia (4.5) i uwzględniając wzory (6.7), otrzymamy następujące warunki brzegowe dla równań (6.6):

(6.10) $$b_3 w_k'(a) + c_3 w_k(a) = (\vec{v}^{(k)}, \vec{\varphi}_3), \qquad b_4 w_k'(b) + c_4 w_k(b) = (\vec{v}^{(k)}, \vec{\varphi}_4).$$

W wyniku rozwiązania (najczęściej metodami numerycznymi) zagadnień (6.6), (6.10), otrzymamy wektor

$$\vec{w}(x) = (w_1(x), w_2(x), ..., w_n(x)).$$

Pozostaje jeszcze do rozwiązania zagadnienie odwrotne, polegające na wyznaczeniu wektora $\vec{u}(x)$ z równań (6.7).

Zauważmy, że jeśli przez V oznaczymy macierz fundamentalną

$$V = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \dots & v_n^{(1)} \\ v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \dots & v_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \dots & v_n^{(n)} \end{bmatrix},$$

to układ równań (6.7) możemy zapisać w postaci macierzowej

(6.11) $$V\vec{u}(x) = \vec{w}(x),$$

skąd znajdujemy

$$\vec{u}(x) = V^{-1}\vec{w}(x).$$

Układ równań (6.11) można szczególnie łatwo rozwiązać w przypadku, gdy operator różnicowy P jest symetryczny. Wówczas macierz V jest macierzą ortogonalną i

$$V^{-1} = V'$$

(symbolem $'$ oznaczyliśmy tu macierz transponowaną).

Bibliografia

[1] Г. Н. Положий, *Численное решение двухмерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента*, Издат. Киевского Университета, 1962.

[2] R. Zuber, *Matrix transformation method of approximate solution of partial differential equations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), Nr 7.
[3] – *Matrix transformation method of approximate solution of partial differential equations*, Zastos. Matematyki 11 (1970), str. 177-193.