Witold Więsław (Wrocław)

PRACE LEONHARDA EULERA Z ALGEBRY

0. Wstęp

Dzieła Eulera ([2], *Opera Omnia*, vol. VI, 1921) zawierają 24 prace sklasyfikowane na początku XX wieku jako prace z algebry: [4-29] bez pracy [6]. Należałoby dodać do nich jeszcze jedną pracę, mianowicie [6], poświęconą twierdzeniu nazywanemu twierdzeniem Bezouta, które dziś formułujemy następująco: *jeżeli dwie krzywe algebraiczne, stopnia odpowiednio m i n, przecinają się w skończenie wielu punktach, to liczba ich przecięć nie przekracza mn*. Dziś twierdzenie to zaliczylibyśmy do geometrii algebraicznej, choć dowód Eulera jest czysto algebraiczny. Euler podał pełny opis macierzy ortogonalnych w przestrzeniach euklidesowych wymiaru 3, 4, i 5 [29]. Znamienne jest to, że matematyka XVIII stulecia nie dysponowała jeszcze ani pojęciem macierzy, ani tym bardziej pojęciem przekształcenia liniowego. Ponadto Euler zajmuje się zasadniczym twierdzeniem algebry w wersji rzeczywistej, liczbami zespolonymi, rozwiązywaniem równań algebraicznych przez pierwiastniki, różnymi zagadnieniami dotyczącymi numerycznego obliczania pierwiastków wielomianu i algorytmami rozkładu funkcji wymiernych na ułamki proste.

Zagadnienia te zostaną poniżej krótko omówione.

1. Zasadnicze twierdzenie algebry. Liczby zespolone

Rozpocznijmy od najważniejszej pracy Eulera z algebry, rozprawy [7]. Praca poświęcona jest dowodowi zasadniczego twierdzenia algebry w wersji rzeczywistej. Co prawda przed pięćdziesięciu laty Baszmakowa [1], przy okazji 250-lecia urodzin Leonharda Eulera, dość krytycznie oceniła tę rozprawę, jednak dziś jego dowód wydaje się być w pełni poprawnym, jeśli tylko uściślić to, czego Euler znać nie mógł. Przede wszystkim należy uzupełnić jego dowód o pojęcie algebraicznego domknięcia ciała (tu: ciałem algebraicznie domykanym jest ciało liczb rzeczywistych), a ponadto niezbędne są najprostsze własności rzeczywistych funkcji ciągłych.

Na początku Euler odnotowuje, nie podając nazwiska, twierdzenie Kartezjusza: a jest pierwiastkiem wielomianu f, wtedy i tylko wtedy, gdy $x - a$ dzieli $f(x)$. Następnie podaje wzory Viéty, wiążące pierwiastki wielomianu jednej zmiennej z jego współczynnikami. Stwierdza, że jeżeli wielomian ma pierwiastek urojony, to ma ich parzystą liczbę. Euler nie cytuje książki Saundersona[1], którą powinien był znać.

W dalszym ciągu wszystkie rozpatrywanie wielomiany mają współczynniki rzeczywiste. Euler stwierdza na wstępie, że zamierza dowieść, iż:

---

[1] NICHOLAS SAUNDERSON, THE ELEMENTS OF ALGEBRA IN TEN BOOKS: [...] *CAMBRIDGE* [...] MDCCXL. Nicholas Sounderson, niewidomy matematyk z Cambridge, młodszy od Newtona o 41 lat, jest autorem monumentalnego podręcznika, wydanego rok po jego śmierci. Mimo, że dzieło jest (*verte* cd.)

1) wielomian stopnia $2m$ rozkłada się na iloczyn m czynników kwadratowych;
2) wielomian stopnia $2m + 1$ ma w rozkładzie czynnik rzeczywisty stopnia 1 i m czynników kwadratowych.

Następnie formułuje i dowodzi czternastu twierdzeń, które wymieniamy poniżej. We wszystkich twierdzeniach wielomiany mają współczynniki rzeczywiste.

Tw. I. Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma [rzeczywisty] pierwiastek.
Tw. II. Każdy wielomian stopnia parzystego albo nie ma pierwiastków rzeczywistych, albo ich liczba jest parzysta.
Tw. III. Każde równanie postaci $x^{2m} + Ax^{2m-1} + \ldots - O^2 = 0$ ma co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste, dodatni i ujemny.
Tw. IV. Każdy wielomian stopnia 4 jest iloczynem dwóch czynników stopnia 2.
Tw. V. Każdy wielomian stopnia 8 jest iloczynem dwóch czynników stopnia 4.
Tw. VI. Każdy wielomian stopnia 16 jest iloczynem dwóch czynników stopnia 8.
Tw. VII. Każdy wielomian stopnia 2^n jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia 2^{n-1}.
Tw. VIII. Każdy wielomian stopnia 6 na co najmniej jeden czynnik stopnia 2.
Tw. IX. Każdy wielomian stopnia postaci $4n + 2$ ma co najmniej jeden czynnik stopnia 2.
Tw. X. Każdy wielomian stopnia postaci $8n + 4$ ma co najmniej jeden czynnik stopnia 4.
Tw. XI. Każde równanie algebraiczne ma pierwiastki urojone. Są one postaci $M + N\,i$, gdzie N i M oznaczają liczby rzeczywiste.
Tw. XII. Zbiór wszystkich liczb postaci $M + Ni$ [zbiór $\boldsymbol{C}$ liczb zespolonych] jest zamknięty względem operacji algebraicznych: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia [tzn. $\boldsymbol{C}$ jest ciałem].
Tw. XIII. Pierwiastek dowolnego stopnia z liczby zespolonej jest liczbą zespoloną.
Tw. XIV. Równanie algebraiczne dowolnego stopnia ma pierwiastek zespolony.

Dalsza część tej obszernej rozprawy Eulera poświęcona jest logarytmom z liczb zespolonych, funkcjom trygonometrycznym określonym w $\boldsymbol{C}$, w szczególności wzorowi Eulera $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, gdzie x niekoniecznie jest liczbą rzeczywistą i wzorowi de Moivre'a, w postaci dziś stosowanej: $(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$, oraz ich zastosowaniom.

Pracę kończy stwierdzenie, że operacje przestępne na liczbach zespolonych (logarytmowanie, potęgowanie z dowolnym wykładnikiem zespolonym, wartości funkcji trygonometrycznych i odwrotnych do nich, a ogólnie: sumy szeregów liczb zespolonych) nie wyprowadzają poza zbiór $\boldsymbol{C}$ liczb zespolonych.

Przejdźmy do dowodu zasadniczego twierdzenia algebry, podanego przez Eulera.

Euler pisze: wielomian ma tyle pierwiastków rzeczywistych, ile razy jego wykres przecina oś x – ów. Jeżeli więc wielomian jest stopnia nieparzystego, to dla x nieskończenie

---

(cd.) ogromne (748 stron) i dość rozwlekle napisane, jest podręcznikiem algebry klasycznej, który dziś można bez trudu czytać i rozumieć. Szczegółowy wykład obejmuje algebrę wielomianów jednej zmiennej, usuwanie niewymierności w mianowniku, rozwiązywanie równań stopnia 2, 3, 4, rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste itd. Wykład Soundersona odwołuje się, zarówno w dowodach, jak i zastosowaniach, do geometrii. W szczególności zawiera elementy geometrii analitycznej. Dzieło niewątpliwie przewyższa pod względem jasności i precyzji wykładu *Algebrę* Eulera [14].

dużego, lub $x = \infty$, jest jasne że $y = \infty^{2m+1} = \infty$, natomiast dla odciętej, która jest nieskończona i ujemna, czyli $x = -\infty$, $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$. Ponieważ gałąź [wykres] krzywej jest ciągła, leży pod osią i nad osią, musi więc ją przeciąć.

Podobne rozumowanie daje dowód tw. II i tw. III.

Równanie stopnia 4: $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + d = 0$ można, przez podstawienie $y = x - \frac{1}{4}A$ przekształcić w równanie postaci: $x^4 + Bx^2 + Cx + d = 0$. Przyjmijmy, że jest ono iloczynem dwóch trójmianów:

$$x^4 + Bx^2 + Cx + d = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta) .$$

Porównanie współczynników w obu wielomianach prowadzi do równań:

$$B = \alpha + \beta - u^2 , \quad C = (\beta - \alpha)u , \quad D = \alpha\beta ,$$

tzn. $\alpha + \beta = B + u^2$, $\beta - \alpha = \frac{C}{u}$, skąd łatwo wynika, że $u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0$. Równanie to, na mocy tw. III, ma pierwiastek rzeczywisty, skąd już wynika, że α i β sa liczbami rzeczywistymi. Kończy to dowód tw. IV.

Idea dowodu tw. V jest podobna, choć tu pojawiają się elementy kombinatoryki. Euler zakłada, że wielomian stopnia 8 jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia 4 o współczynnikach rzeczywistych: jednego postaci $x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ i drugiego $x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \varsigma$, tzn. $x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H =$

$= (x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)(x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \varsigma)$. .

Po wymnożeniu otrzymamy tyle równości, ile jest niewiadomych, tzn. siedem. Z tych równań możemy wyeliminować litery greckie, bez wyciągania pierwiastków. Daje to jedno równanie z niewiadomą *u*. Ostatecznie *u* może przyjąć tyle wartości, ile jest różnych sum czterech pierwiastków wyjściowego wielomianu, spośród wszystkich ośmiu, tzn. $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$. Zatem, jeśli *p* jest jedną z wartości *u*, to *u* jest sumą czterech pierwiastków wyjściowego wielomianu, tzn. suma pozostałych czterech jest równa $-p$. Jeżeli więc $u - p$ jest czynnikiem tego wielomianu stopnia 70, to $u + p$ też jest jego czynnikiem. A zatem wielomian stopnia 70 ma 35 czynników postaci $u^2 - p^2$, tzn. jego wyraz wolny jest ujemny. Z tw. III wynika, że wielomian stopnia 70 ma pierwiastek rzeczywisty *u*. Z jego pomocą można wyliczyć wszystkie współczynniki szukanych wielomianów stopnia 4.

Jest to najdelikatniejsze miejsce w dowodzie Eulera: przyjmuje on mianowicie, że wielomian ma pierwiastki w jakimś większym, bliżej nie określonym zbiorze. Dziś powiedzielibyśmy, że rozwiązujemy równanie w algebraicznym domknięciu ciała liczb rzeczywistych.

Dowody pozostałych twierdzeń Eulera w omawianej pracy są ideowo podobne do przytoczonych dowodów.

Warto na koniec odnotować, że współczesna wersja dowodu twierdzenia Eulera, opisująca algebraiczne domknięcie ciała rzeczywiście domkniętego, także wykorzystuje dwie podstawowe własności takich ciał:

1) Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach z ciała rzeczywiście domkniętego, ma pierwiastek w tym ciele;
2) pierwiastek kwadratowy z elementu dodatniego ciała rzeczywiście domkniętego, leży w tym ciele.[2]

Na zakończenie warto przytoczyć dwie wypowiedzi na temat dowodów zasadniczego twierdzenia algebry. liście do kolegi ze studiów w Getyndze, Farkasa Bolyaia, Carl Friedrich Gauss pisał[3]:

> *Praca poświęcona jest tylko w 1/3 dowodowi twierdzenia. Reszta zawiera głównie historię i uwagi krytyczne o dowodach innych matematyków (d'Alemberta, Boungainville'a, Eulera, de Foncenex, Lagrange'a).*

Znany algebraik drugiej połowy XIX wieku, Georg Frobenius (1849-1917), tak pisał w roku 1917, po zapoznaniu się z pracą Eulera[4]:

> *On przeprowadził dla istnienia pierwiastków równania dowód w większej części algebraiczny, który oparty był na tym, że każde równanie stopnia nieparzystego ma rzeczywisty pierwiastek. Uważam za niesprawiedliwe, że dowód ten przypisuje się wyłącznie Gaussowi, który tylko nadał mu ostateczną postać.*

W pełni podzielam opinię Frobeniusa.

2. Rozwiązywanie równań algebraicznych przez pierwiastniki

Euler podejmował próby rozstrzygnięcia problemu rozwiązalności równań algebraicznych przez pierwiastniki. Próby te nie zakończyły się powodzeniem. Euler uzyskał jedynie wyniki częściowe, a później przestał się tym zagadnieniem zajmować.

W pracy [4] Euler powtarza, ale w postaci algebraicznej, algorytmy rozwiązywania równań stopnia 3 i 4, odkryte przez uczonych włoskich w wieku XVI (Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano, Lodovico Ferrari, Rafaelo Bombelli). Pierwiastki równania stopnia 3: $x^3 = ax + b$ są postaci $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, gdzie A i B są pierwiastkami pewnego równania stopnia 2. Podobny algorytm podaje Euler dla równań stopnia 3. Algorytmy rozwiązywania równań stopnia 3 i 4 opisał Euler szczegółowo w swojej *Algebrze* [14]. W przypadku równań stopnia 5 Euler stawia hipotezę, że pierwiastki takich równań są postaci: $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$, gdzie A, B, C i D spełniają odpowiednie równanie stopnia 4. W ogólnym przypadku równań stopnia n Euler przypuszcza, że pierwiastki takich równań otrzymuje się w postaci

$$x = \sqrt[n]{A_1} + \sqrt[n]{A_2} + \ldots + \sqrt[n]{A_{n-1}},$$

---

[2] *vide*: np. Nathan Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, vol. III, Princetown, New Jersey, 1964. (Chapter VI).

[3] *vide*: W. K. Bühler, *Gauss. A biographical study*. Springer 1981. (s. 181: list # XVIII Gaussa do Farkasa Bolyai, z 16. XII 1799).

[4] Georg Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von J.-P. Serrre, Bde I – III. Springer 1968. W tomie III, s. 733, czytamy: Für die Existenz der Wurzeln einer Gleichung führte er jenen am meisten algebraischen Beweis, der darauf fußt, daß jede reelle Gleichung unpaaren Grades eine reelle Wurzel besitzt. Ich halte es für unrecht, diesen Beweis ausschließlich *Gauss* zuzuschreiben, des doch nur die letzte Feile daran gelegt hat.

gdzie A_1, A_2, … , A_{n-1} są pierwiastkami odpowiedniego równania stopnia n - 1. Nie podaje jednak żadnych argumentów, ani też przykładów numerycznych, ilustrujących to przypuszczenie. W tej samej pracy Euler zwraca uwagę, że całkowanie funkcji wymiernych wymaga znajomości rozkładu mianownika tej funkcji na czynniki nieprzywiedlne.

Rozważania rozpoczęte w pracy [4] Euler kontynuuje w rozprawie [10]. Praca ta jest rozszerzoną wersją [4]. Euler zauważa, że jeżeli pierwiastki wielomianu stopnia n mają opisaną wyżej postać, to $A_k = v^k$, a przed pierwiastkami są odpowiednie współczynniki. W szczególności więc dla równania stopni 5 mamy następujące wyrażenia na pierwiastki: $x = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}$. Podane są przykłady równań stopnia 5, których pierwiastki wyrażają się przez pierwiastniki.

Równaniom algebraicznym poświęcona jest jeszcze praca [24]. Euler podaje tam klasę równań algebraicznych stopnia $n \geq 5$ których pierwiastki wyrażają się przez pierwiastniki. Równania te otrzymał z równości: $\frac{(a+x)^n}{(b+x)^n} = \frac{a}{b}$, zapisując ją w postaci wielomianu zależnego od parametrów a i b.

3. Macierze ortogonalne

W zakresie matematyki czystej Euler często wyprzedzał epokę. Na przykład, aby dowieść, że każdy obrót kuli wokół jej środka jest obrotem wokół pewnej osi, w pracy: *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (por. [29]), wprowadza macierze, zapisuje warunki ortogonalności macierzy w postaci układu dwunastu równań z dziewięcioma niewiadomymi, po czym wyznacza wszystkie macierze ortogonalne, wyprowadzając z ich opisu wspomniane twierdzenie. Warto nadmienić, że wystarczy rozpatrywać sześć pierwszych równań, gdyż pozostałe równania opisują ortogonalność macierzy transponowanej. We wstępie do wspomnianej pracy Euler pisze:

SUMMARIUM

Problema, quod in hac dissertatione resolvitur, cum quadratis magicis multum habet affinitatis, sed ob affectiones prorsus singulares longe magis est memorabile. Inveniendae nimirum sunt novem quantitates A, B, C, D etc., quae sint eius indolis, ut in quadratum hoc modo dispositae

$$A,\ B,\ C,$$
$$D,\ E,\ F,$$
$$G,\ H,\ I,$$

duodecim his conditionibus satisfaciant

1.	A^2	+ D^2	+ G^2	= 1,	4.	AB	+ DE	+ GH	= 0,
2.	B^2	+ E^2	+ H^2	= 1,	5.	AC	+ DF	+ GI	= 0,
3.	C^2	+ F^2	+ I^2	= 1,	6.	BC	+ EF	+ HI	= 0,
7.	A^2	+ B^2	+ C^2	= 1,	10.	AD	+ BE	+ CF	= 0,
8.	D^2	+ E^2	+ F^2	= 1,	11.	AG	+ BH	+ CI	= 0,
9.	G^2	+ H^2	+ I^2	= 1,	12.	DG	+ EH	+ FI	= 0.

[…]

Jak widać, pierwszych sześć równań to warunek ortonormalności trzech kolumn macierzy, a pozostałych sześć równań to warunek ortonormalności trzech wierszy macierzy opisującej izometrię liniową trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Nie było wtedy jeszcze jakichkolwiek pojęć algebry liniowej, a jednak Euler umiał sobie z tym poradzić. W tej samej pracy Euler podaje opis macierzy ortogonalnych w przestrzeni cztero – i pięciowymiarowej. W jakim celu? Nie wiadomo. Pojęciowo dowód Eulera jest łatwy: w przypadku trójwymiarowym należało rozwiązać powyższy układ dwunastu równań z dziewięcioma niewiadomymi, redukujący się do pierwszych sześciu równań. Zatem rozwiązania w tym przypadku zależą od trzech parametrów, współrzędnych sferycznych w przestrzeni trójwymiarowej. W pozostałych przypadkach (wymiary 4 i 5) dowody Eulera są podobne, choć rachunkowo bardziej skomplikowane.

4. *Zupełny wykład algebry* Eulera [14a-b]

Książka [14] składa się z dwóch niezależnych części: tomu I [14a] i tomu II [14b]. Tom 1 poświęcony jest elementarnej arytmetyce i nie wymaga od czytelnika żadnego dodatkowego przygotowania, prócz umiejętności czytania i znajomości notacji liczb. Tom II jest wykładem elementów teorii liczb i algebry, z dużym naciskiem na równania diofantyczne. Omówimy kolejne oba tomy.

Tom I.
Część 1. O różnych rachunkach na pojedynczych wielkościach. [23 rozdziały]
Część 2. O różnych rodzajach rachunków na wielkościach złożonych.
Część 3. O stosunkach i proporcjach.
Tom II.
Część 1. Równania algebraiczne i ich rozwiązywanie.
Część 2. Analiza nieoznaczona.
Tom I podzielony jest na 562 ustępy, na ogół krótkie, od 6 do 20 wierszy. Poza nielicznymi wyjątkami, brak jest definicji, twierdzeń i dowodów.
Tom I.
Część 1. Ustępy 1-255.
– 1-67: elementarna arytmetyka, liczbowa i literowa.
– 68-114: ułamki.
– 124-127: $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną; kolejne przybliżenia. Brak jest jednak formalnej definicji liczb niewymiernych. Euler podaje ją później (Ustęp 129).
– 131-138: działania na liczbach niewymiernych.
– 139-151: liczby niemożliwe albo urojone (*Ohnmögliche oder imaginären*).
– 152-215: sześciany, potęgi.
– 220-236: logarytmy i tablice logarytmów.
Część 2. Ustępy 256-377.
– 256-325: wielomiany, głównie jednej zmiennej.
– 326-332: działania na liczbach niewymiernych[5].

— 333-360: wzór dwumienny $(a+b)^n = \ldots$, n – wykładnik naturalny.
— 361-377: rozwinięcia w szeregi – wzór Newtona $(1+x)^n = \ldots$ z wykładnikiem niecałkowitym n.

Część 3. Ustępy 378-562. Stosunki i proporcje
[porównywanie wielkości, np. objętości, długości; proporcje liczba całkowitych; stosunki arytmetyczne[6]]
— 378-424: ciągi arytmetyczne. Wzory sumacyjne.
— 425-450: liczby figuratywne lub wielokątne.
— 440-250: stosunki geometryczne.
— 451-460: największy wspólny dzielnik dwóch liczb całkowitych.
— 461-476: proporcje geometryczne [z dowodami].
— 477-504: uwagi o proporcjach i ich użyciu.
— 505-524: postępy geometryczne.
— 525-539: nieskończone ułamki dziesiętne.
— 540-562: arytmetyka kupiecka.

Tom II jest mniej elementarny, aniżeli tom I. Oba tomy są zupełnie odrębnymi dziełami. Część 1 tomu II podzielona jest na 240 ustępów, a Część 2 na 250 ustępów.

Tom II. Część 1.
Ustępy 1-43: ogólnie o równaniach. Równania stopnia 1. Wyłącznie przykłady.
— 44-61: układy równań liniowych $n \times n$, $n = 2, 3, 4$. Zadania.
— 61-143: Równania kwadratowe. Przykłady, dowody, zadania.
— 144-171: równania stopnia 3, w tym dwumienne: $x^3 = A$. Wzory Vièty (nie nazwane), pierwiastki calkowite, rozkład wielomianu na czynniki.
— 172-188: metoda Cardano i Scipio del Ferro rozwiązywania równań stopnia 3.
189-222: równania stopnia 4, wzory Vièty (nie nazwane), pierwiastki całkowite; metoda Bombelliego – redukcja do równania stopnia 3.
— 212-222: nowa metoda rozwiązywania równania stopnia 4; przypuśćmy, że pierwiastek wielomianu stopnia 4 ma postać $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, gdzie p, q, r są pierwiastkami odpowiedniego równania stopnia 3.
— 223-240: rozwiązywanie równań przez aproksymację – opis metody stycznych zilustrowany jedynie na przykładach.

Tom II. Część 2.
Ustępy 1-23: równania liniowe; przykłady na chińskie twierdzenie o resztach.
— 24-30: układy równań liniowych.

---

[5] Przypomina to pod względem treści dzieło Michaela Stifela: ARITHMETICA INTEGRA, Authore Michaele Stifelio. Cum praefatione Philippi Melanchtchonis, Norimbergae apud Iohan. Petreium. Anno Christi M. D. XLIIII.

[6] stosunki arytmetyczne a do b i p do q są równe, gdy $a - b = p - q$.

— 31-37: układy równań dwóch zmiennych, z których jedno jest stopnia 1.
— 38-62: usuwanie niewymierności postaci $\sqrt{cx^2 + bx + a}$.
— 63-78: przy jakich założeniach $cx^2 + bx + a$ nigdy nie jest kwadratem liczby całkowitej.
— 79-111: równania diofantyczne postaci $cx^2 + b = y^2$, w szczególności gdy $b = 1$.
— 112-146: równania postaci $f(x) = y^2$, gdzie $f \in \mathbf{Z}[x]$, st(f) = 3, 4.
— 147-167: równania postaci $f(x) = y^3$, gdzie $f \in \mathbf{Z}[x]$, st(f) = 3.
— 168-201: rozkład liczb naturalnych na sumę dwóch kwadratów: $N = x^2 + y^2$. Inne rozkłady uzyskiwane z pomocą arytmetyki pierścienia $\mathbf{Z}[i]$. Rozwiązania równania $N = x^2 + 2y^2$ w liczbach całkowitych uzyskane z pomocą arytmetyki pierścienia $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-2}]$.
— 202-250: Dowód, że równanie diofantyczne $ax^4 + by^4 = z^2 (a, b \in \boldsymbol{N})$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z. Ponadto liczne zadania dotyczące kwadratów.

Część 2 tomu II kończy dodatek Lagrange'a: *Additions a l'Analyse indéterminée par Joseph Louis Lagrange*, opublikowany w 1774 roku w wydaniu francuskim książki Eulera przez Jeana III Bernoulliego (Lyon, 1774). W omawianej edycji *Algebry* Eulera dodatki Lagrange'a są w tomie II, s. 369-664.

5. Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Praca [23] podaje algorytm rozkładu funkcji wymiernej jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych na ułamki proste. Euler rozważa rozkłady jedynie na ułamki proste, których mianownikami są wielomiany postaci $(x - a)^n$. W przypadku, gdy a jest liczbą zespoloną, Euler pokazuje, jak z rozkładu na ułamki proste nad $\boldsymbol{C}$ przejść do rozkładu nad $\boldsymbol{R}$.

Natomiast w [27] opisany jest ogólny algorytm rozwijania funkcji wymiernej na ułamki proste, bezpośrednio nad $\boldsymbol{R}$. Podane są różne przykłady numeryczne ilustrujące ten algorytm. Ponadto autor wykazuje, że celowym jest rozłożenie licznika jako wielomianu względem mianownika, poprzez zastosowanie algorytmu dzielenia wielomianów.

6. Teoria eliminacji. Przecięcia krzywych algebraicznych

Twierdzenie o punktach wspólnych dwóch krzywych algebraicznych, zwane tradycyjnie twierdzeniem Bézouta, podał Euler w [6]. Zagadnienia eliminacji rozważane są zarówno w [6], jak i [11]. Obie prace są ze sobą ściśle związane, mimo że napisane w odstępie prawie 20 lat. W [6] Euler formułuje twierdzenie, a następnie próbuje dowieść, że jeżeli dwie krzywe algebraiczne, stopni odpowiednio m i n, nie mają wspólnej komponenty, to liczba ich przecięć nie przekracza mn. Próbę dowodu

Eulera można by nazwać podejściem indukcyjnym. Rozpoczyna od przecięcia krzywej stopnia *n* krzywą stopnia 1, tzn. prostą. Wtedy liczba przecięć nie przekracza $n = mn$. Kolejno rozpatruje przypadki, gdy $m = 2$, a krzywa jest parą prostych. Wtedy teza też jest prawdziwa, bo każda z prostych przecina krzywą stopnia *n* w co najwyżej *n* punktach, tzn. dwie proste przecina w nie więcej niż $n + n = mn$ punktach.

W praca [11] Euler pokazuje, krok po kroku, jak wyznaczać warunek na to, aby dwa równania algebraiczne jednej zmiennej miały wspólne rozwiązanie. Euler wyznacza jedynie warunki konieczne w poszczególnych przypadkach, gdy krzywe są odpowiednio stopni (1, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 3). Opisane szczególne przypadki, pozwalają mu opisać sposób znalezienia warunku koniecznego (jak sam pisze) na to, aby dwa równania algebraiczne miały wspólny pierwiastek. Oczywiście za każdym razem znaleziony warunek jest niczym innym jak rugownikiem obu wielomianów. Euler jednak nie dysponuje techniką pozwalającą podać ogólną postać rugownika dwóch wielomianów. Nie dysponuje niezbędnym do tego pojęciem wyznacznika. Co prawda, gdyby Euler znał pracę Gabriela Cramera *Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques*, Genèva, 1750, zapewne byłby w stanie zauważyć ogólną prawidłowość. Jednak jego technika sprowadza się do elementarnych przekształceń algebraicznych. Warta jest jednak odrębnego omówienia.

7. Inne prace Eulera zaliczone do algebry

Wydawcy dzieł Eulera zaliczyli do algebry prace dotyczące numerycznego wyznaczania pierwiastków i innych niewymierności, wykorzystujące wzór dwumienny Newtona dla wykładników niecałkowitych. Są to prace [8], [18] i [19].

Natomiast algebraiczna część pracy [17] jest ilustracją twierdzenia o wielomianach symetrycznych, którego jednak Euler nie formułuje: wielomian symetryczny względem pierwiastków danego wielomianu jest wielomianem względem wielomianów symetrycznych podstawowych. Euler ilustruje to twierdzenie, wyznaczając jawne wzory na sumy *m* – tych potęg pierwiastków danego wielomianu *u* stopnia *n*. Dalsza część pracy podaje algorytmy rozwijania pierwiastków wielomianu w szeregi. Zilustrowane jest to dla wielomianów stopnia trzy.

Prace [20], [21] i [26] poświęcone są numerycznemu rozwiązywaniu równań postaci:

$1 = \frac{A_1}{B_1} + \ldots + \frac{A_n}{B_n}$, gdzie liczniki są stałymi, a mianowniki różnymi potęgami zmiennej *x*.

Inne prace wymienione w Bibliografii nie wymagają osobnego omówienia - nie wnoszą istotnie nowych idei.

8. Algebra w korespondencji Eulera

W korespondencji Eulera [30] tematyka algebraiczna pojawia się incydentalnie. W liście do Christiana Goldbacha ([30], Lettre XLIX, Berlin, 15. Dec. 1742) podaje rozkład wielomianu $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ na iloczyn dwóch czynników rzeczywistych

$x^2-(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}})x+1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}}$ i $x^2-(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}})x+1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}$,

uzyskany przez wyliczenie pierwiastków tego wielomianu, a następnie przez wymnożenie odpowiednich czynników postaci $x - a$ i $x-\bar{a}$. W dalszej części listu odnotowuje, że *bardzo jest pożądany dowód jego twierdzenia*:

> [...] *eine richtige Demonstration meines Satzes: Omnem expressionem algebraicam* $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+etc.$ *vel in factores reales simplices p + qx, vel saltem in factores reales quadratros ? resolvi posse, welcher Satz* [...] *in der analysi von sehr grossem Nutzen ist.* [...]

Widać więc, że Euler nie tylko uważa się za odkrywcę zasadniczego twierdzenia algebry, lecz także ma pełną świadomość znaczenia tego twierdzenia dla analizy.

Rok później, w liście do Goldbacha (*loc. cit.*, Lettre LVI, Berlin, 26. Februar 1743) Euler podaje całą klasę wielomianów stopnia 4 i ich rozkłady na rzeczywiste trójmiany kwadratowe.

Kilka lat później (*loc. cit.*, Lettre CXV, Berlin, 4. Mai 1748) Euler odkrywa tożsamość wyrażającą iloczyn dwóch sum czterech kwadratów jako sumę czterech kwadratów, która pojawi się sto lat później u Williama Rowana Hamiltona w jego dziele *Quaternions*, jako multyplikatywność normy kwaternionu:

jeżeli $n=a^2+b^2+c^2+d^2$, $m=p^2+q^2+r^2+s^2$, to $mn=A^2+B^2+C^2+D^2$, gdzie $A = ap + bq + cr + ds$, $B = aq - bp - cs + dr$, $C = ar + bs + cp - dq$, $D = as - br + cq - dp$.

Euler usiłował dowieść z pomocą tej tożsamości twierdzenia o czterech kwadratach: *każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb całkowitych*, i choć był blisko uzyskania tego wyniku, pełnego dowodu jednak nie podał. Dopiero Joseph-Louis Lagrange podał dowód tego twierdzenia kilka lat później, w oparciu o tę samą tożsamość.

W innym liście do Goldbacha (*loc. cit.*, Lettre XCXX, Berlin, 9. Juni 1750) Euler wyprowadza liczne tożsamości wiążące różne sumy trzech kwadratów, wszystko w związku z cytowanym wyżej twierdzeniem.

Dwa lata później w liście do Goldbacha (*loc. cit.*, Lettre CLI, Berlin 16. December 1752) Euler podał rozwiązanie równania, które nazwał równaniem de Moivre'a:

liczba $x=\sqrt[5]{\frac{\beta^2}{\alpha}}+\sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^5=5\alpha x^2+5\beta x+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^3}{\beta}$.

Wypowiedział także przypuszczenie, że jeżeli ogólne równanie stopnia pięć jest rozwiązalne przez pierwiastniki, to jego pierwiastki mają postać:

$$x=A\sqrt[5]{s}+B\sqrt[5]{s^2}+C\sqrt[5]{s^3}+D\sqrt[5]{s^4}$$

gdzie s jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 4.

W cytowanym liście Euler pisał:

> *Und da die obige Aequation general ist, so glaube ich, dass in dieser Form alle radices aequationum 5ti gradus enthalten sind, und in einem jeglich vorgelegten Fall kommt es nur auf die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D und* s *an, und zuletzt wird s nur per aequationum 4ti ordinis bestimmt werden, wie ich vermuthe.* [...]

Następnie Euler formułuje analogiczną hipotezę dla dowolnego równania stopnia n. W ogólnym przypadku pierwiastek równania stopnia n ma być kombinacją linową kolejnych

$n-1$ potęg liczby postaci $\sqrt[n]{s}$, gdzie s jest pierwiastkiem pewnego wielomianu stopnia $n-1$.

Euler nie wniósł tak wiele do algebry, jak do analizy i nauk dziś już nie zaliczanych do matematyki (astronomia, mechanika, hydrostatyka, hydrodynamika, optyka, itp.). Jednak i tu jego wkład jest znaczący. Przede wszystkim wskazał on dalsze kierunki badań w tej dziedzinie.

Bibliografia

[1] Н. Г. Башмакова, *О доказательстве основной теоремы алгебры*, Историко–математические исследования, Выпуск X (1957), 257–304.
[2] *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Sub Auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1911.
[3] *Leonard Euler. - Czyli wiadomość o życiu i dziełach tego nieśmiertelney pamięci człowieka,* PAMIĘTNIK HISTORYCZNO=POLITYCZNY. Przypadków, Ustaw, Osób, Mieysc i Pism, wiek nasz szczeólniey interesuiących. ROKU CZWARTEGO CZĘŚĆ III. [1785], 234–239; O życiu i zasługach Pana Eulera, tamże, ROKU CZWARTEGO CZĘŚĆ IV. (DOKONCZENIE), 313–316.
[4] – , *De formis radicvm aeqvationvm cvivsqve ordinis coniectatio*, Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 6 (1732/33), 1738, 216 – 231. [*Opera Omnia*, ser. I, vol.VI, 1–19. E 30]
[5] – , *De extractione radicvm ex qvantitatibvs irrationalibvs*, Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 18 (1741/3), 1751, 16–60. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 31–77. E 157]
[6] – *, Démonstration sur la nombre des points, ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin 4 (1748), 1750, 234–248. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. 26, 46–59. E 148]
[7] – , *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin 5 (1749), 1751, 222–288. [Opera Omnia, ser. I, vol. VI, 78–147. E 170]
[8] – , *Deomstratio Gemina THEOREMATIS NEUTONIANI quo traditur relatio inter coëfficientes cujusvis æquationis algebraicæ & summas potestatum radicum ejusdem*, Opuscula varii argumenti 2 (1750), 108–120. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 20–30. E 153]
[9] – , *Continuatio Fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromtorum*, Opera postuma 1 (1862), 487–518.
[10] – , *De resolvtione aeqvationvm cvivsvis gradvs*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 9 (1762/63), 1764, 70 – 98. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 170–196. E 282]
[11] – , *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations*, Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin 20 (1766), 91-104. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 197-211. E 310]
[12] – , *Nova criteria radices aeqvationvm imaginarias dignoscendi*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 13 (1768), 1769, 89–119. [*Opera Omnia*, seri. I, vol. VI, 212--239. E 570]
[13] – , *De inventione qvotcvnqve mediarvm proportionalivm citra radicvm extractionem*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 14 (1769), I, 1770, 188–214. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 240–262. E 395]
[14a] – , *Vollständige Anleitung zur Algebra, Erster Theil von den verschiedenen Rechnungs = Arten, Verhältnißen und Proportionen*. St. Petersburg, 1770.
[14b] – , *Zweyter Theil. von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic*. St. Petersburg, 1770. [Euler Leonhard, *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange,* Leipzig und Berlin, 1911. *Opera Omnia*, series prima, volumen primum]
[15] – , *Observationes circa radices aeqvationvm*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 51–74. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 263–286. E 406]
[16] – *, Problema algebraicvm ob affectiones prorsvs singvlares memorabile*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 75–106. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 287--315. E 407]
[17] – , *Observationes circa radices aeqvationvm*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 51–74. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 263–286. E 406]
[18] – , *Nova ratio qvantitates irrationales proxime exprimendi*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 18 (1773), 136–170. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 316–349. E 450]

[19] – , *Deomonstratio theorematis Nevtoniani de evolutione potestatvm binomii pro casibvs qvibus exponentes non svnt nvmeri integri*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 19 (1775), 103–111. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. XV, 207–216]
[20] – , *De innvmeris generibvs seriervm maxime memorabilivm, qvibvs omnivm aeqvationvm algebraicarvm non solvm radices ipsae sed etiam qvaecvnqve earvm potestates exprimi possvnt*, Nova Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 4 (1776), 74–95. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 405–424 . E 632]
[21] – , *Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrvsas perdvcens, qvibvs omnivm aeqvationvm algebraicarvm non solvm radices ipsae, sed etiam qvaevis earvm potestates exprimi possvnt*, Nova Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 4 (1776), 55–73. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 384–404. E 631]
[22] – , *De serie Lambertina, plvrimisqve eivs insignibvs proprietatibvs*, Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae II (1779), 1783, 29–51. [*Opera Omnia*, ser. I. vol. VI, 350–369. E 532]
[23] – , *Nova methodvs fractiones qvascvnqve rationales in fractiones simplices resolvendi*, Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae I (1780), 1783, 32–46. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 370–383. E 540]
[24] – , *Innvmerae aeqvationvm formae, ex omnibvs ordinibvs, qvarvm resolvtio exhiberi potest*, Nova Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 6 (1788), 1790, 25–35. [Opera Omnia, ser. I, vol. VI, 434–446. E 644]
[25] – , *Methodvs generalis investigandi radices omnivm aeqvationvm per approximationem*, Nova Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 6 (1788), 1790, 16–24 [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 425–433. E 643]
[26] – , *Methodvs nova ac facilis omnivm aeqvationvm algebraicarvm radices non solvm ipsas sed etiam qvascvnqve earvm potestates per series concinnas exprimendi*, Nova Acta Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, 71–90. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 447–464. E 711]
[27] – , *De resolutione fractionum compositarum in simpliciores*, Mémoires de l'Académie des imperiale des sciences de St.-Pétersbourg 1 (1803/06), 1809, 3–25. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 465-485. E 728]
[28] – , *Problema algebraicum de inveniendis quatuor numeris, ex datis totidem productis uniuscujusque horum numerorum in summas trium reliquorum,* Opera postuma 1 (1862), 282–287. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 316 – 349. E 808]
[29] – , *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*, Novi Commentarii Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 1771, 75–106. [*Opera Omnia*, ser. I, vol. VI, 287–315. E 407]
[30] P. – H. Fuss, *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célébres Géométres du XVIIIéme Siécle*, Tome I–II, St. – Pétersbourg, 1843.
[31] Историко–математические исследования, Выпуск X (1957). Памяти Леонарда Эйлера.
[32] Историко–математические исследования, Выпуск XXVII (1983). Памяти Леонарда Эйлера.
[33] *Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел*, САНКТ–ПЕТЕРБУРГ "НАУКА" 1997.
[34] *Развтие идеи Леонарда Эйлера и современная наука*, Сборник статей под редакцией Н. Н. Боголюбова, Г. К. Михайлова, А. П. Юшкевича, Москва 1988.
[35] Otto Spiess, *Leonhard Euler,* Verlag von Huber & Co. Aktiengesellschaft Frauenfeld/Leipzig 1929.
[36] Rüdiger Thiele, *Leonhard Euler,* B. G. Teubner, 1982.
[37] Witold Więsław, *Leonhard Euler – matematyk wszech czasów* (nieopublikowany rękopis książki, 1995, str. 71).
[38] – , *Matematyka i jej historia,* Wydawnictwo NOWIK, Opole 1997.
[39] – , *Odkrycie wzoru Eulera*, Matematyka 6 (1997) (268), 336–338.
[40] – , Leonhard Euler (1707-1783) – człowiek i epoka (w tomie: *Matematyka XVIII wieku*, XIII Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Kołobrzeg 17-21 maja 1999, pod redakcją Stanisława Fudalego, Uniwersytet Szczeciński. Materiały, Konferencje Nr 51, 2000), 9–25.
[41] – , *Leohard Euler* (1707-1783) – *tytan pracy*, Matematyka 6 (2006), 323–331.

Witold Więsław
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
e-mail: witold.wieslaw@poczta.onet.pl