ANTIQUITATES MATHEMATICAE
Vol. 12(1) 2018, p. 81–97
doi: 10.14708/am.v12i0.5125

Władysław Wilczyński (Łódź)

Polskie osiągnięcia dotyczące klasyfikacji Baire'a.

Streszczenie. W pracy opisane są niektóre wyniki polskich matematyków XX wieku dotyczące klasyfikacji Baire'a funkcji oraz klasyfikacji zbiorów borelowskich. Jak zwykle, duża część rezultatów osiągnięta została przez Wacława Sierpińskiego, pozostałe pochodzą od Kazimierza Kuratowskiego, Stefana Banacha, Stefana Kempistego, Edwarda Szpilrajna (Marczewskiego), Andrzeja Alexiewicza, Władysława Orlicza, Adolfa Lindenbauma, Romana Sikorskiego, Ryszarda Engelkinga, Włodzimierza Holsztyńskiego, Tadeusza Traczyka, Janiny Staniszewskiej, Zygmunta Zahorskiego i Samuela Eilenberga.

2010 Klasyfikacja tematyczna AMS (2010): 01A60, 26A21, 28A05, 54-03.

Słowa kluczowe: klasyfikacja Baire'a, zbiory borelowskie, historia matematyki.

Zasługą wielkich matematyków francuskich przełomu XIX i XX stulecia, René Baire'a, Emila Borela i Henri Lebesgue'a, było wprowadzenie do matematyki klasyfikacji funkcji i zbiorów oraz udowodnienie fundamentalnych twierdzeń odnoszących się do obydwu klasyfikacji. Matematycy polscy, wypełniając program nakreślony przez Zygmunta Janiszewskiego, bardzo aktywnie włączyli się do badań w nowej wówczas dziedzinie funkcji rzeczywistych. W poniższym opracowaniu przedstawimy niektóre wyniki polskich uczonych (głównie szkoły warszawskiej) dotyczące klasyfikacji Baire'a funkcji oraz klasyfikacji zbiorów borelowskich.

Oznaczenia i terminologia nie odbiegają od powszechnie stosowanych. I tak: $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich), $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, ω - najmniejszą liczbę porządkową nieskończoną, ω_1 - najmniejszą liczbę porządkową nieprzeliczalną.

Niech X będzie przestrzenią metryczną. W niniejszym artykule będziemy rozważać rodziny funkcji rzeczywistych określonych na X, najczęściej X będzie prostą $\mathbb{R}$ lub przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^k$. Klasą funkcji Baire'a nazywać będziemy najmniejszą klasę funkcji zawierającą

wszystkie funkcje ciągłe na X i zamkniętą ze względu na punktowe przejście do granicy. Dowód istnienia takiej najmniejszej rodziny jest prosty: istnieją rodziny funkcji zawierające funkcje ciągłe i zamknięte ze względu na punktowe przejście do granicy (jest taka na przykład rodzina wszystkich funkcji określonych na X), część wspólna wszystkich takich rodzin jest najmniejszą rodziną spełniającą obydwa warunki. Inną metodą budowania klasy Baire'a jest iteracja: niech B_0 będzie rodziną funkcji ciągłych, B_1 - rodziną funkcji, które są granicami punktowo zbieżnych ciągów funkcji ciągłych, B_2 - rodziną funkcji, które są granicami ciągów funkcji klasy B_1, ogólnie - dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej $\alpha > 0$, B_α jest rodziną funkcji, które są granicami punktowo zbieżnych ciągów funkcji z rodziny $\bigcup_{\gamma<\alpha} B_\gamma$. Oznaczmy $\bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$ przez B_{ω_1}. Klasa funkcji Baire'a pokrywa się z B_{ω_1}.

Funkcje należące do B_{ω_1} nazywamy funkcjami Baire'a lub funkcjami przedstawialnymi analitycznie. Ta klasa funkcji pojawiła się w pracy René Baire'a [Ba]

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów. Przez $\mathcal{A}_\sigma$ oznaczmy rodzinę wszystkich zbiorów, które są przeliczalnymi sumami zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$, przez $\mathcal{A}_\delta$ będziemy oznaczać rodzinę wszystkich zbiorów, które są przeliczalnymi iloczynami zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_\sigma$ nazywamy klasą addytywną, $\mathcal{A}_\delta$ – klasą multyplikatywną. Łatwo spostrzec, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\sigma$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\delta$, $\mathcal{A}_{\sigma\sigma} = \mathcal{A}_\sigma$ i $\mathcal{A}_{\delta\delta} = \mathcal{A}_\delta$. Jeśli X jest przestrzenią metryczną, $\mathcal{F}$ rodziną zbiorów domkniętych, $\mathcal{G}$ rodziną zbiorów otwartych w X, to $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma} \subset \ldots$ oraz $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{G}_{\delta\sigma} \subset \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta} \subset \ldots$. W przestrzeniach euklidesowych powyższe zawierania są istotne. Niech teraz $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ oraz dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej α

$$\mathcal{F}_\alpha = \begin{cases} \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi\right)_\sigma, & \text{gdy } \alpha \text{ jest nieparzyste,} \\ \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{F}_\xi\right)_\delta, & \text{gdy } \alpha \text{ jest parzyste} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_\alpha = \begin{cases} \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{G}_\xi\right)_\delta, & \text{gdy } \alpha \text{ jest nieparzyste} \\ \left(\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{G}_\xi\right)_\sigma, & \text{gdy } \alpha \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Przypomnijmy w tym miejscu, że liczba porządkowa α jest nieparzysta, gdy $\alpha = \beta + (2k+1)$, zaś parzysta, gdy $\alpha = \beta + 2k$, gdzie β jest liczbą porządkową graniczną, czyli niemającą poprzednika oraz $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Połóżmy $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$. $\mathcal{B}$ nazywamy rodziną zbiorów borelowskich w X. Dowodzi się, że $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{G}_\alpha$. Wynika to w prosty sposób z inkluzji $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{G}_{\alpha+1}$

i $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{F}_{\alpha+1}$dla $\alpha < \omega_1$. $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem generowanym przez rodzinę zbiorów otwartych (najmniejszym σ-ciałem zawierającym rodzinę zbiorów otwartych).

Związek między klasą funkcji Baire'a i σ-ciałem zbiorów borelowskich opisują następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1 Klasa funkcji Baire'a pokrywa się z klasą funkcji mierzalnych względem σ-ciała zbiorów borelowskich ($f \in B_{\omega_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(G) \in \mathcal{B}$ dla dowolnego zbioru otwartego G).

Twierdzenie 2 Niech B^*_α będzie rodziną funkcji f takich, że dla dowolnego zbioru otwartego U zbiór $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_\alpha$, gdy α jest liczbą porządkową nieparzystą, zaś $f^{-1}(U) \in \mathcal{G}_\alpha$, gdy α jest liczbą porządkową parzystą. Wtedy $B_\alpha = B^*_\alpha$, gdy α jest liczbą skończoną oraz $B_\alpha = B^*_{\alpha+1}$, gdy α jest liczbą nieskończoną.

Ostatnie twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Lebesgue'a - Hausdorffa. Dowód znajduje się w pracy Lebesgue'a [L] i książce Hausdorffa [H2]. Obszerny wykład można znaleźć także w [S8], [K3], [Bo] oraz [Ma].

Jeśli X jest przestrzenią euklidesową, to dla dowolnych liczb porządkowych przeliczalnych α, β, jeśli $\alpha < \beta$, to $B_\alpha \subsetneq B_\beta$, $\mathcal{F}_\alpha \subsetneq \mathcal{F}_\beta$ i $\mathcal{G}_\alpha \subsetneq \mathcal{G}_\beta$. Dowód jest pomysłowy i opiera się na tak zwanych funkcjach uniwersalnych (zob. [L]), jednak nie opisuje metody konstrukcji zbioru należącego do klasy $\mathcal{F}_\alpha$ lub $\mathcal{G}_\alpha$ ani też funkcji z klasy B_α dla danej liczby porządkowej przeliczalnej α. Kazimierz Kuratowski w pracy [K1] jako pierwszy pokazał, jak można efektywnie zbudować funkcję dowolnej klasy Baire'a, a Wacław Sierpiński rok później w pracy [S7] używając innej metody zbudował efektywny przykład zbioru borelowskiego dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej α, a następnie przedstawił swoją konstrukcję w książeczce [S8]. Warto w tym miejscu przypomnieć, jak Sierpiński w pracy [S15] opisuje znaczenie słowa „efektywny". Jako przykład zbioru efektywnie przeliczalnego podany jest zbiór $\mathbb{N}$ liczb naturalnych, jeśli wielkie twierdzenie Fermata jest prawdziwe, zaś $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, jeśli twierdzenie to jest fałszywe. W obu przypadkach można określić ciąg $\{u_1, u_2, \ldots\}$ złożony ze wszystkich elementów tego zbioru. Wtedy dla $n \in \mathbb{N}$ wyraz u_n jest dobrze określony, chociaż nie do obliczenia (*non calculable dans l'etat actuel de la science*). Obecnie sytuacja jest inna, ponieważ znany jest dowód Andrew Wilesa.

Wacław Sierpiński wcześniej zajął się badaniem własności funkcji przedstawialnych analitycznie. W pracy [S1] z roku 1918 udowodnił, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest przedstawialna analitycznie, to zbiór $f(\mathbb{R})$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Zauważył najpierw, że jeśli $f \in B_\alpha$

dla pewnej liczby porządkowej przeliczalnej, to funkcja $F(x) = y - f(x)$ należy również do klasy B_α (jako funkcja dwóch zmiennych $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Wtedy zbiór $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon F(x,y) = 0\}$ jest zbiorem borelowskim, a ponieważ $f(\mathbb{R}) = \mathrm{proj}_y Z$, więc zbiór $f(\mathbb{R})$ jest zbiorem analitycznym jako obraz ciągły zbioru borelowskiego (rzutowanie na oś Oy jest funkcją ciągłą), więc jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

W kolejnej pracy ([S3]) Sierpiński szczegółowo badał własności zbiorów $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq x_{n+1}\}$ i $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < x_{n+1}\}$ dla funkcji $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ przedstawialnych analitycznie. Przytoczymy jedno twierdzenie z tej pracy: funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest przedstawialna analitycznie wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres (zwany w pracy *image*), czyli zbiór $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ jest zbiorem borelowskim. W dowodzie istotną rolę odgrywa fakt, że zbiór analityczny, którego dopełnienie jest zbiorem analitycznym, jest zbiorem borelowskim.

Funkcje pierwszej klasy Baire'a odgrywają ważną rolę w teorii funkcji rzeczywistych. Wacław Sierpiński w pracy [S2] zajął się odpowiedzią na pytanie, czy klasa B_1 pokrywa się z rodziną funkcji, które są sumami bezwzględnie zbieżnych szeregów funkcji ciągłych. Najpierw dowodzi następującego twierdzenia: na to, aby funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ była sumą bezwzględnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych potrzeba i wystarcza, aby była różnicą dwóch funkcji półciągłych z góry (przypomnijmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest półciągła z góry wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x\colon f(x) < a\}$ jest otwarty, a twierdzenie Baire'a ([Ba]) orzeka, że każda funkcja półciągła z góry jest granicą nierosnącego ciągu funkcji ciągłych). Dowód przytoczonego twierdzenia nie jest trudny, przedstawimy go w całości. Załóżmy, że $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, funkcje f_n są ciągłe i szereg ten jest bezwzględnie zbieżny. Połóżmy $\phi_n(x) = 0$, $\psi_n(x) = -f_n(x)$, gdy $f_n(x) \geq 0$ oraz $\phi_n(x) = f_n(x)$, $\psi_n(x) = 0$ gdy $f_n(x) < 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy $f_n(x) = \phi_n(x) - \psi_n(x)$, $|f_n(x)| = -\phi_n(x) - \psi_n(x)$, $\phi_n(x) \leq 0$, $\psi_n(x) \leq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz funkcje ϕ_n i ψ_n są ciągłe. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n(x) - \psi_n(x))$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} (-\phi_n(x) - \psi_n(x))$ są zbieżne dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc szeregi $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$, $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ również są zbieżne, ponadto $F(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$, a funkcje Φ i Ψ są półciągłe z góry na mocy twierdzenia Baire'a. Załóżmy teraz, że $F(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$, gdzie funkcje Φ i Ψ są półciągłe z góry. Istnieją zatem nierosnące ciągi $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji ciągłych takie, że $\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_n$, $\Psi = \lim_{n\to\infty} \Psi_n$. Połóżmy $\phi_1 = \Phi_1$, $\psi_1 = \Psi_1$, $\phi_n = \Phi_n - \Phi_{n-1}$,

$\psi_n = \Psi_n - \Psi_{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Wtedy $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$, $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$. Funkcje ϕ_n, ψ_n są niedodatnie dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Jeśli $f_n = \phi_n - \psi_n$, to $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Mamy $|f_n(x)| \le |\phi_n(x)| + |\psi_n(x)| = -\phi_n(x) - \psi_n(x)$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, stąd wynika, że $\sum_{n=1}^{m} |f_n(x)| \le |f_1(x)| - \Phi(x) - \Psi(x) + \Phi_1(x) + \Psi_1(x)$ dla $m \in \mathbb{N}$, czyli szereg ten jest bezwzględnie zbieżny. Korzystając z powyższego twierdzenia Sierpiński konstruuje funkcję pierwszej klasy Baire'a, której nie można przedstawić w postaci sumy bezwzględnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych (dowód zajmuje 8 stron). Podobną tematyką zajął się Stefan Mazurkiewicz w pracy [M2] dowodząc, że każda funkcja pierwszej klasy Baire'a jest sumą bezwzględnie zbieżnego szeregu funkcji będących sumami bezwzględnie zbieżnych szeregów funkcji ciągłych oraz Stefan Kempisty w pracy [Ke1], który pokazał, że rodzina funkcji zawierająca funkcje ciągłe oraz zamknięta ze względu na sumę szeregów bezwzględnie zbieżnych pokrywa się z rodziną funkcji przedstawialnych analitycznie.

Stefan Mazurkiewicz udowodnił w pracy [M1], że funkcja odwrotna do funkcji pierwszej klasy Baire'a nie musi być funkcją pierwszej klasy Baire'a. Wacław Sierpiński znacznie wzmocnił ten wynik w pracy [S4]. Praca ta zawiera następujące twierdzenie: dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej α istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pierwszej klasy Baire'a taka, że funkcja odwrotna należy do klasy o numerze większym lub równym α. Zbudowane funkcje są ciągłe poza zbiorem przeliczalnym (zbiorem liczb wymiernych), skąd oczywiście wynika, że należą do pierwszej klasy.

Mówimy, że zbiór E jest obustronnie klasy α, jeśli jest elementem addytywnej klasy borelowskiej α oraz multyplikatywnej klasy α. Ciekawą własność zbiorów obustronnie klasy α udowodnił Wacław Sierpiński w pracy [S6]: jeżeli G jest zbiorem addytywnej klasy α, H jest zbiorem multyplikatywnej klasy α oraz $G \supset H$, to istnieje zbiór E obustronnie klasy α taki, że $G \supset E \supset H$. Oto dowód: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, zbiory G_n i H_n należą do klas o numerach mniejszych od α. Możemy przyjąć, że ciąg $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępujący, a ciąg $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępujący zastępując zbiory G_n sumami $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$, a zbiory H_n iloczynami $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$. Zamiana ta pozostawia nowe zbiory w klasach odpowiednio addytywnych i multyplikatywnych o numerach mniejszych od α. Wtedy, jak nietrudno obliczyć, zbiór $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap H_n) = H_1 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cup H_{n+1})$ jest szukanym zbiorem. W tej samej pracy Sierpiński pokazał, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy o numerze nie większym od α, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy o numerze nie większym od α taka, że $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz g przyjmuje tylko wartości będące wielokrotnościami liczby ε ($g(\mathbb{R}) \subset \{n\varepsilon : n \in \mathbb{Z}\}$). Twierdzenie to jest uogólnieniem wyniku Stefana Kempistego ([Ke2]) dotyczącego funkcji pierwszej klasy.

Oryginalny wynik zawarty jest w pracy [NS], której autorami są Otto Nikodym oraz Wacław Sierpiński. Zbudowali oni w przestrzeni trójwymiarowej zbiór otwarty o tej własności, że suma wszystkich prostych całkowicie zawartych w tym zbiorze nie jest zbiorem borelowskim. Dokładniej, dla dowolnego zbioru analitycznego $E \subset (0,1)$ skonstruowali zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^3$ mający następującą własność: jeśli V jest sumą wszystkich prostych całkowicie zawartych w U, to $U \cap Ox$ (Ox jest osią x) traktowany jest zbiór na prostej pokrywa się z E. Wystarczy wziąć $E \subset (0,1)$ analityczny, ale nie borelowski, aby otrzymać zapowiedziany wynik. Ta sama praca zawiera również twierdzenie orzekające że dla dowolnego zbioru otwartego (także typu $\mathcal{G}_\delta$) w przestrzeni $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, suma wszystkich prostych zawartych w tym zbiorze jest zbiorem analitycznym oraz uwagę, że dla zbiorów typu $\mathcal{F}_\sigma$ sytuacja jest odmienna.

W pracy dotyczącej funkcji półciągłych ([H1]) Hausdorff rozważał następującą klasyfikację zbiorów: Q_1 jest to rodzina zbiorów domkniętych, P_1 - rodzina zbiorów otwartych, jeśli α jest liczbą porządkową przeliczalną i dla wszystkich liczb $\gamma < \alpha$ klasy Q_γ i P_γ zostały określone, to P_α jest rodziną przeliczalnych sum zbiorów należących do $\bigcup_{\gamma<\alpha}(Q_\gamma \cup P_\gamma)$, zaś Q_α jest rodziną dopełnień zbiorów z rodziny P_α. Klasyfikacja Wacława Sierpińskiego różni się tym, że żąda się, aby składniki przeliczalnych sum były rozłączne i odpowiednie klasy oznaczane są P^*_α i Q^*_α. Praca [S9] dotyczy porównania klas Hausdorffa i Sierpińskiego. Okazuje się, że na prostej zachodzą równości $P_\alpha = P^*_\alpha$, $Q_\alpha = Q^*_\alpha$ dla wszystkich liczb porządkowych przeliczalnych. W tej samej pracy Sierpiński pokazuje, że własność ta nie przenosi się na przestrzenie euklidesowe o większym wymiarze. Zbiór $(0,1] \times \{0\}$ jako zbiór typu $\mathcal{F}_\sigma$ oczywiście należy do klasy P_2 na płaszczyźnie, natomiast nie należy do klasy P^*_2.

Z rodziną zbiorów borelowskich w dość specyficzny sposób wiąże się problem Hausdorffa: niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną zbiorów. Oznaczmy przez $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ najmniejszą rodzinę zbiorów $\mathcal{F}$ zawierającą $\mathcal{M}$ i zamkniętą ze względu na przeliczalne sumy i przeliczalne iloczyny. Niech $\mathcal{N}$ będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych, zaś $\Psi(\mathcal{M},\mathcal{N})$ będzie rodziną wszystkich zbiorów postaci $\Phi(E_1, E_2, \ldots) = \bigcup_{\mathcal{N}}(E_{n_1} \cap E_{n_2} \cap \ldots)$ dla $E_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ i sumowanie rozciągnięte jest na wszystkie ciągi $(n_1, n_2, \ldots) \in \mathcal{N}$. Czy istnieje zbiór ciągów $\mathcal{N}$ taki, że $\Psi(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathcal{B}(\mathcal{M})$? Wacław Sierpiński w pracy [S10] znalazł przykład rodziny $\mathcal{M}$, dla której nie istnieje

zbiór $\mathcal{N}$ o żądanej własności. Taką rodziną jest rodzina podzbiorów otwartych (relatywnie) zbioru liczb niewymiernych z przedziału $(0,1)$. Okazuje się, że nie zawsze zbiory borelowskie moga być konstruowane w sposób proponowany przez Hausdorffa.

Nietrudno spostrzec, że jeśli $E \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem przeliczalnym, to każda funkcja rzeczywista określona na E należy do klasy B_0 lub B_1. W związku z tym Stefan Banach postawił pytanie: czy dla dowolnego zbioru nieprzeliczalnego $E \subset \mathbb{R}$ i dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej α istnieją funkcje $f\colon E \to \mathbb{R}$ należące do klasy B_α, które nie należą do rodziny $\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} B_\gamma$? Wacław Sierpiński zauważył (wynik nie został opublikowany, szczegóły można znaleźć w pracy Mauldina [Ma]), że jeśli $L \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem Łuzina, czyli nieprzeliczalnym zbiorem mającym przeliczalną część wspólną z każdym zbiorem nigdzie gęstym, to każda funkcja określona na tym zbiorze i przedstawialna analitycznie należy do klasy B_2, przy czym $B_2 \setminus B_1 \neq \varnothing$. Edward Szpilrajn pokazał ([Sz]), że jeśli $M \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem Sierpińskiego, czyli zbiorem nieprzeliczalnym mającym przeliczalną część wspólną z każdym zbiorem miary zero, to każda funkcja przedstawialna analitycznie określona na M należy do klasy B_1, przy czym $B_1 \setminus B_0 \neq \varnothing$. Jeśli najmniejszą liczbę porządkową α, dla której, przy czym $B_\alpha = B_{\alpha+1}$ dla funkcji rzeczywistych określonych na pewnym zbiorze, nazwiemy rzędem Baire'a, to w tej terminologii rząd Baire'a prostej równa się ω_1, zbioru Łuzina równa się 2, a zbioru Sierpińskiego równa się 1. György Alexits w pracy [A] pokazał, że jeśli $E \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem, α - liczbą porządkową przeliczalną oraz $f\colon E \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy Baire'a o numerze nieprzekraczającym α, to istnieje funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która należy do klasy Baire'a o numerze nieprzekraczającym $\alpha + 2$ taka, że $g|_E = f$. Wacław Sierpiński poprawił ten wynik w pracy [S11] zastępując $\alpha + 2$ przez $\alpha + 1$. Jasne, że jest to najlepszy rezultat dotyczący rozszerzania funkcji przedstawialnych analitycznie.

Do tej pory wszystkie rozważane funkcje były rzeczywiste, to znaczy przeciwdziedzina była równa $\mathbb{R}$. Większość definicji można powtórzyć dla funkcji określonych na zbiorze punktów przestrzeni metrycznej przyjmujących wartości w przestrzeni ośrodkowej. W tym przypadku zbiór wszystkich funkcji mierzalnych względem σ-ciała zbiorów borelowskich może być szerszy niż zbiór funkcji przedstawialnych analitycznie. Jeśli dziedziną funkcji jest przedział $[0,1]$, a przeciwdziedziną zbiór złożony z dwóch punktów $\{0,1\}$, to wszystkie funkcje ciągłe, zatem również wszystkie funkcje przedstawialne analitycznie, są stałe, a na przykład funkcja $f = \chi_{\{1\}}$ (funkcja charakterystyczna zbioru jednopunktowego)

jest mierzalna względem σ-ciała zbiorów borelowskich. Wystarczy tylko rozpocząć klasyfikację Baire'a od klasy pierwszej, a sytuacja się poprawia. Stefan Banach ([B2]) pokazał, że najmniejszy zbiór funkcji zawierający wszystkie funkcje pierwszej klasy (takie, dla których przeciwobraz zbioru otwartego jest zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$) i zamkniety ze względu na punktowe przejście do granicy pokrywa się z rodziną funkcji mierzalnych względem σ-ciała zbiorów borelowskich.

W pracy [S12] Wacław Sierpiński rozważa abstrakcyjną wersję klasyfikacji Baire'a dla struktury funkcji (*anneaux de fonctions*), czyli rodziny funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze X zamkniętej ze względu na maksimum i minimum dwóch funkcji. Jego ogólne twierdzenia można sformułować w następujący sposób: jeśli funkcja jest jednocześnie granicą niemalejącego ciągu funkcji klasy α oraz nierosnącego ciągu funkcji klasy α, to sama też należy do klasy α (dla $\alpha > 0$); jeśli $\mathcal{F}$ jest strukturą funkcji, to funkcja f jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji z rodziny $\mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa ciągi $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji z rodziny $\mathcal{F}$ takie, że $f = \liminf_{n\to\infty} \phi_n = \limsup_{n\to\infty} \psi_n$. Przejrzyste dowody tych twierdzeń można znaleźć w monografii Romana Sikorskiego [Si1], str. 174.

De la Vallée Poussin w monografii [V] rozważał następującą klasyfikację zbiorów: jeśli X jest dowolnym zbiorem, $\mathcal{F} \subset 2^X$ jest rodziną zbiorów zamkniętą ze względu na skończone sumy i przeliczalne iloczyny (na przykład X jest przestrzenią metryczną, $\mathcal{F}$ - rodziną domkniętych podzbiorów zbioru X), to kładziemy $L_0 = \mathcal{F}$, a jeśli zdefiniowane są zbiory klasy L_γ dla $\gamma < \alpha$, to L_α określamy jako rodzinę wszystkich zbiorów, które są granicami ciągów zbiorów z rodziny $\bigcup_{\gamma<\alpha} L_\gamma$. Przypomnijmy, że $E = \lim_{n\to\infty} E_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E = \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n$, gdzie $\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$ i $\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$. Wacław Siepiński w pracy [S13] porównał klasyfikację Hausdorffa z klasyfikacją de la Vallée Poussina uzyskując następujący wynik: $L_{2n} = Q_{2n+1}$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $L_{2n-1} = P_{2n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $L_\alpha = P_{\alpha+1} \cap Q_{\alpha+1}$ dla $\omega \le \alpha < \omega_1$.

Adolf Lindenbaum w pracy [Li] udowodnił, że funkcja f należy do klasy B_{n+m}, $n, m \in \mathbb{N}$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $g \in B_n$ i $h \in B_m$ takie, że $f = g \circ h$. W tej samej pracy badał złożenia funkcji połączone z przejściem do granicy. Jeśli $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ są rodzinami funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, to przez $\ldots \circ \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$ będziemy rozumieć funkcje postaci $f = \lim_{n\to\infty} f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots f_2 \circ f_1$, gdzie $f_i \in \mathcal{A}_i$ dla $i \in \mathbb{N}$. Lindenbaum pokazał, że $\ldots \circ B_1 \circ B_1 = B_{\omega+1}$. Powyższa praca zawiera także obszerny przegląd wcześniejszych wyników dotyczących

klasyfikacji Baire'a. W podobny sposób, jak powyżej, możemy określić klasę funkcji $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2 \circ \ldots$ jako zbiór funkcji postaci $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$, gdzie $f_i \in \mathcal{A}_i$ dla $i \in \mathbb{N}$. Wacław Sierpiński najpierw pokazał w pracy [S14], że $\ldots \circ B_0 \circ B_0$ jest właściwym podzbiorem B_1, czyli istnieje funkcja klasy B_1, której nie można przedstawić w postaci $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$, gdzie wszystkie funkcje f_i są ciągłe, a potem w pracy [S16] udowodnił, że $B_0 \circ B_0 \circ \ldots = B_1$, przy czym wszystkie funkcje z B_0 moga dodatkowo mieć wahanie skończone na każdym przedziale. Sierpiński powołując się na Samuela Eilenberga informuje, że każda funkcja klasy B_1, która jest różnowartościowa, ale nie monotoniczna, nie należy do $\ldots \circ B_0 \circ B_0$.

Wiadomo, co oznacza ciągłość funkcji przekształcających przestrzeń metryczną zupełną U w przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich funkcji ciągłych przez B_0, a klasy Baire'a generowane przez B_0, jak zwykle, B_α dla $1 \leq \alpha \leq \omega_1$. Andrzej Alexiewicz i Władysław Orlicz w pracy [AO] rozważali klasę funkcji przekształcających U w X zwanych funkcjami słabo ciągłymi. Przypomnijmy definicję takich funkcji. Niech Z będzie przestrzenią sprzężoną do X, $\|\cdot\|_Z$ - normą w przestrzeni Z ($\| \xi \|_Z = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\xi(x)|$ dla $\xi \in Z$). Mówimy, że $Z_0 \subset Z$ jest podstawowym (normującym) zbiorem funkcjonałów liniowych, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $x \in X$ istnieje kombinacja liniowa $\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots a_n\xi_n$ elementów z Z_0 taka, że $\| \xi \|_Z \leq 1$ oraz $\xi(x) \geq \| x \| - \varepsilon$. Funkcja $x{:}\, U \to X$ nazywa się słabo (*faiblement*) ciągła względem Z_0 w punkcie $u_0 \in U$, jeśli dla każdego funkcjonału $\xi \in Z_0$ funkcja rzeczywista $\xi \circ x$ jest ciągła w punkcie u_0. Funkcja x jest słabo ciągła względem Z_0, jeśli jest słabo ciągła w każdym punkcie. Oznaczmy rodzinę funkcji słabo ciągłych przez S_0, a S_α dla $1 \leq \alpha \leq \omega_1$ niech oznacza klasę Baire'a o numerze α generowaną przez S_0 (słabą klasę Baire'a). Alexiewicz i Orlicz udowodnili w cytowanej pracy wiele interesujących twierdzeń o funkcjach słabo ciągłych. Badania tej tematyki znalazły licznych kontynuatorów. Przytoczymy tylko niektóre wyniki: jeżeli funkcja $x{:}\, U \to X$ jest słabo ciągła względem podstawowego zbioru funkcjonałów Z_0 oraz $x(U) \subset X$ jest przestrzenią ośrodkową, to $x \in B_1$ ($S_0 \subset B_1$); co więcej, jeśli $x \in S_\alpha$ i $x(U)$ jest przestrzenią ośrodkową, to $x \in B_{\alpha+1}$ dla dowolnej liczby porządkowej przeliczalnej α. Jeśli $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji przekształcających U w X, $x_n(U)$ jest przestrzenią ośrodkową, $x_n \in S_\alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, to $x \in S_{\alpha+1}$. W ostatnim twierdzeniu zakłada się silną zbieżność $\{x_n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ do $x(u)$ dla $u \in U$, założenie słabej zbieżności jest niewystarczające.

Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi, Y jest zupełna, $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem podzbiorów zbioru X. Przypomnijmy, że σ-ideał jest to rodzina zbiorów zamknięta ze względu na przeliczalne sumy oraz branie podzbiorów, σ-ideał jest właściwy, gdy $X \notin \mathcal{I}$. Będziemy mówili, że funkcja $f\colon X \to Y$ ma własność $\mathcal{D}_\alpha$ w punkcie $x_0 \in X$ jeśli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie G punktu x_0 oraz odwzorowanie $g \in B_\alpha$ takie, że $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ $\mathcal{I}$-prawie wszędzie na G (czyli $\{x \in G\colon |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$). Tadeusz Traczyk ([T]) udowodnił, że jeśli $\alpha > 0$ oraz dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subset X$ funkcja $f|_F$ ma własność $\mathcal{D}_\alpha$ względem F w co najmniej jednym punkcie zbioru F, to istnieje funkcja $g\colon X \to Y$ taka, że $g \in B_\alpha$ oraz $f(x) = g(x)$ $\mathcal{I}$-prawie wszędzie. Jest to uogólnienie wyniku Georga Lederera [Le], który rozważał funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej. W dowodzie istotną rolę odegrało twierdzenie Sierpińskiego z pracy [S6].

Wiadomo, że zbieżność jednostajna zachowuje klasę Baire'a. Jeśli $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (zbieżność jest punktowa) oraz $f_n \in B_\alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $f \in B_\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją dowolnie duże liczby n, dla których $\{x \in G\colon |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}$ jest zbiorem addytywnej klasy α. Wynik ten Kazimierz Kuratowski przypisuje Edwardowi Szpilrajn-Marczewskiemu ([K3], str. 387). Warunek konieczny i dostateczny dla zachowania klasy Baire'a jest więc o wiele słabszy niż zbieżność jednostajna.

Roman Sikorski w pracy [Si2] przedstawił prostą konstrukcję zbiorów addytywnej i multyplikatywnej klasy α w kostce Hilberta H. Konstrukcja ta przebiega w sposób następujący: M_0 jest jednopunktowym podzbiorem H, $A_0 = H \setminus M_0$. Jeśli zbiory M_γ i A_γ zostały już określone dla liczb porządkowych przeliczalnych $\gamma < \alpha$, to w przypadku, gdy α ma poprzednik, $\alpha = \beta + 1$, kładziemy $M_\alpha = A_\beta \times A_\beta \times \ldots A_\beta \times \ldots \subset H^{\aleph_0}$, a jeśli α jest liczbą graniczną, wówczas $M_\alpha = A_0 \times A_1 \times \ldots A_\gamma \times \ldots = \prod\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma \subset H^{\aleph_0}$ (ostatni iloczyn kartezjański ma przeliczalną liczbę czynników). Ponieważ $H^{\aleph_0}$ jest przestrzenią homeomorficzną z H, możemy traktować M_α jako podzbiór H. Niech na koniec $A_\alpha = H \setminus M_\alpha$. Widać, że M_α jest zbiorem borelowskim multyplikatywnej klasy α, a A_α jest zbiorem borelowskim addytywnej klasy α w H. Sikorski zauważa również, że (przy założeniu, że struktura zbiorów borelowskich jest wystarczająco bogata w pewnych przestrzeniach metrycznych) M_α nie należy do addytywnej klasy α, zaś A_α nie należy do multyplikatywnej klasy α.

Kilka lat później Ryszard Engelking, Włodzimierz Holsztyński i Roman Sikorski w pracy [EHS], opisując dokładnie zasługi każdego z nich, pokazali, że zbiory M_α i A_α zbudowane wcześniej przez Sikorskiego, są

dokładnie klasy α (czyli nie należą do żadnej klasy o numerze $\gamma < \alpha$). W dowodzie wykorzystali twierdzenie Brouwera o punkcie stałym dla H oraz metodę funkcji uniwersalnych.

Kazimierz Kuratowski w latach siedemdziesiątych XX wieku badał klasy Baire'a dla funkcji wielowartościowych. Przypomnijmy podstawowe definicje: niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi, X - przestrzenią zwartą. Oznaczmy przez 2^X rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów domkniętych przestrzeni X. Wiadomo (zob. [Mi]), że rodzina zbiorów, które są postaci $\{K \in 2^X : K \subset G\}$ lub $\{K \in 2^X : K \cap G \neq \varnothing\}$, gdzie G jest zbiorem otwartym w X jest podbazą przestrzeni potęgowej (przestrzeni podzbiorów domkniętych) zwanej topologią Vietorisa. Kuratowski w pracach [K5], [K6] wprowadził następujące definicje: niech $F : Y \to 2^X$ będzie domkniętym odwzorowaniem wielowartościowym. Mówimy, że F należy do klasy α^+ (dla liczby porządkowej przeliczalnej α), jeśli zbiór $\{y : F(y) \in G\}$ jest addytywnej klasy α dla dowolnego zbioru otwartego G lub równoważnie, jeśli zbiór $\{y : F(y) \cap K \neq \varnothing\}$ jest multyplikatywnej klasy α dla dowolnego zbioru domkniętego K. Mówimy, że F należy do klasy α_- jeśli $\{y : F(y) \cap G \neq \varnothing\}$ jest addytywnej klasy α dla dowolnego zbioru otwartego G, lub równoważnie, jeśli $\{y : F(y) \subset K\}$ jest multyplikatywnej klasy α dla dowolnego zbioru domkniętego K. W podanych pracach udowodnił on podstawowe własności tych klas. Przytoczymy niektóre z nich: odwzorowanie $F : Y \to 2^X$ należy do klasy α (co oznacza, że $\{y : F(y) \in G\}$ jest addytywnej klasy α w Y dla dowolnego zbioru G otwartego w 2^X) wtedy i tylko wtedy, gdy F należy jednocześnie do klasy α^+ i α_-. Jeśli F_1 i F_2 należą do klasy α^+ (lub do α_- jednocześnie), to $F = F_1 \cup F_2$ też należy do α^+ (odpowiednio α_-). Jeśli F_1 i F_2 należą do klasy α^+, to $F_1 \cap F_2$ też należy do α^+. W pracy [K7], dedykowanej Edwardowi Marczewskiemu, znajdujemy ciekawe przykłady odwzorowań wielowartościowych oraz obliczanie numerów klas, do których one należą. I tak: odwzorowanie $F : 2^X \to 2^X$, które zbiorowi domkniętemu K przyporządkowuje jego brzeg, czyli $F(K) = K \cap \overline{X \setminus K}$ jest klasy 1^+, odwzorowanie $F(K) = \overline{\mathrm{Int}(K)}$ jest klasy 1_-, odwzorowanie $F(K) = K^d$ (K^d - pochodna zbioru K, czyli zbiór jego punktów skupienia) jest klasy 1^+, ale odwzorowanie przyporządkowujące zbiorowi K zbiór jego punktów kondensacji nie jest objęte klasyfikacją. Kuratowski informuje, że inspiracją tej pracy była jego wspólna publikacja z Edwardem Szpilrajnem (Marczewskim) z roku 1932 ([KS]).

Polscy matematycy badali także klasy funkcji pojawiające się w naturalny sposób w analizie matematycznej lub teorii funkcji rzeczywistych. Przypomnijmy niezbędne definicje: górną prawostronną po-

chodną Diniego funkcji f w punkcie x_0 nazywamy liczbę $\limsup_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ i oznaczamy $\overline{f}_+(x_0)$. Podobnie określamy pochodne: dolną prawostronną $\underline{f}_+(x_0)$, górną lewostronną $\overline{f}_-(x_0)$ i dolną lewostronną $\underline{f}_-(x_0)$. Wacław Sierpiński w pracy [S5] udowodnił, że pochodne Diniego funkcji mierzalnej względem σ-ciała zbiorów borelowskich także są mierzalne względem tego σ-ciała. Dokładniej: jeżeli funkcja należy do klasy Baire'a o numerze nieprzekraczającym α, to jej pochodne Diniego należą do klasy Baire'a o numerze nieprzekraczającym $\alpha + 3$. Powołując się na wynik Aleksandra Rajchmanna (nieopublikowany) orzekający, że pochodne Diniego funkcji ciągłej są pierwszej lub drugiej klasy Baire'a Sierpiński stwierdził, że modyfikacja dowodu pozwala zmniejszyć liczbę $\alpha+3$ do $\alpha+2$. W tej samej pracy podaje przykłady funkcji niemierzalnej, której pochodne Diniego są niemierzalne oraz funkcji mierzalnej, której pochodne Diniego nie są mierzalne względem σ-ciała zbiorów borelowskich i stawia pytanie, czy mierzalność (w sensie Lebesgue'a) funkcji pociąga mierzalność jej pochodnych Diniego. Twierdząco na to pytanie odpowiedział Stefan Banach w pracy [B1] opublikowanej na następnych stronach tego samego zeszytu Fundamenta Mathematicae, przy okazji poprawiając $\alpha + 3$ na $\alpha + 2$. Zupełnie inaczej niż pochodne Diniego zachowują się pochodna górna i pochodna dolna. Przypomnijmy: $\overline{f}(x_0) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nazywa się pochodną górną funkcji f w punkcie x_0, podobnie określa się pochodną dolną $\underline{f}(x_0)$. Stefan Kempisty w pracy [Ke4] pokazał, że pochodna górna i pochodna dolna dowolnej funkcji są co najwyżej trzeciej klasy Baire'a. Dokładniej: pochodna górna jest klasy *ulu* (*upper-lower-upper*) w klasyfikacji Younga, a pochodna dolna jest klasy *lul* (klasa funkcji, które są granicami nierosnącego ciągu funkcji ciągłych oznaczona jest przez Younga literą u, klasa funkcji będących granicami niemalejącego ciągu funkcji klasy u to klasa *ul*, itd.). Porównanie klasyfikacji Baire'a i Younga mozna znaleźć w pracy [Ke3]. Otomar Hajek w pracy [Ha] poprawił wynik Kempistego dowodząc, że obydwie pochodne ekstremalne są co najwyżej drugiej klasy Baire'a. Ostatnie słowo w tej dziedzinie należy do Janiny Staniszewskiej, która w pracy [St] zbudowała funkcję spełniającą warunek Lipschitza, której górna pochodna nie należy do pierwszej klasy Baire'a.

W teorii funkcji rzeczywistych ważną rolę odgrywa aproksymatywna ciągłość funkcji oraz pochodne aproksymatywne. Przypomnijmy, że x_0 jest punktem gęstości mierzalnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeśli $\lim_{h\to 0+} \frac{\lambda(A\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h} = 1$ (λ - miara Lebesgue'a na prostej). Mówimy, że f ma w x_0 granicę aproksymatywną g, jeżeli istnieje zbiór mierzalny $A \subset \mathbb{R}$ taki, że x_0

jest jego punktem gęstości oraz $g = \lim\limits_{x\to x_0, x\in A} f(x)$. Zapisujemy to $g = \lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{ap} f(x)$. Funkcja f jest aproksymatywnie ciągła w x_0, jeżeli $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{ap} f(x)$. Pochodna aproksymatywna to granica aproksymatywna ilorazu różnicowego: $f'_{\mathrm{ap}}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \operatorname{ap} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Wiadomo, że funkcja aproksymatywnie ciągła (w każdym punkcie) należy do pierwszej klasy Baire'a i ma własność Darboux. Aleksandr Khintchine [Kh1, Kh2] pokazał, że te własności przysługują również pochodnej aproksymatywnej, jeżeli w każdym punkcie jest skończona. Zygmunt Zahorski w pracy [Z] zbudował przykład funkcji, która ma w każdym punkcie pochodną aproksymatywną (niekoniecznie skończoną), która nie należy do pierwszej klasy Baire'a ani nie ma własności Darboux, ale należy do klasy drugiej, a sama funkcja też jest drugiej klasy Baire'a.

Polscy matematycy badali również przestrzenie składające się ze zbiorów. Stefan Mazurkiewicz w [M3] pokazał, że w przestrzeni, której elementami są kontinua zawarte w kwadracie $[0,1]\times[0,1]$, wyposażonej w metrykę Hausdorffa, rodzina dziedzicznie nierozkładalnych kontinuów jest gęstym podzbiorem typu $\mathcal{G}_\delta$. Przypomnijmy, że kontinuum K jest dziedzicznie nierozkładalne, jeżeli każde kontinuum $C \subset K$ jest nierozkładalne, czyli nie jest sumą dwóch rozłącznych kontinuów różnych od C (zob. także [K4], str. 206). Kazimierz Kuratowski udowodnił [K2] twierdzenie ogólniejsze orzekające, że jeśli $\mathcal{L}$ jest przestrzenią, której elementami są kontinua zawarte w przestrzeni zwartej X, a metryka jest metryką Hausdorffa oraz $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ jest zbiorem kontinuów stanowiącym zbiór typu $\mathcal{G}_\delta$ w przestrzeni $\mathcal{L}$, to rodzina tych kontinuów z rodziny $\mathcal{M}$, których wszystkie podkontinua też należą do $\mathcal{M}$, jest również typu $\mathcal{G}_\delta$. W szczególności rodzina kontinuów dziedzicznie nierozkładalnych jest typu $\mathcal{G}_\delta$.

Podziękowanie: Dziękuję Panu Profesorowi Lechowi Maligrandzie za zwrócenie mojej uwagi na publikację Alexiewicza i Orlicza oraz recenzentowi za informację o pracach Mazurkiewicza i Kuratowskiego o kontinuach.

Bibliografia

[AO] A. Alexiewicz, W.Orlicz, *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fund. Math. 35 (1948), 105–126, MR 0027445 (CP I, 535-556). Cited on p. 89.

[B1] S. Banach, *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*, Fund. Math. 3 (1922), 128–132, JFM 48.0279.03 (O I, 58–62). Cited on p. 92.

[B2] S. Banach, *Über analytisch darstelbarre Operationen in abstrakten Räumen*, Fund. Math. 17 (1931), 283–295, JFM 7.0290.02 (O I, 207–217). Cited on p. 88.

[EHS] R. Engelking, W. Holsztyński, R. Sikorski, *Some examples of Borel sets*, Coll. Math. 15.2 (1966), 271–274, MR 0201314. Cited on p. 90.

[Ke1] S. Kempisty, *Sur les séries itérées des fonctions continues*, Fund. Math. 2 (1921), 64–73, JFM 48.0276.04. Cited on p. 85.

[Ke2] S. Kempisty, *Sur l'approximation des fonctions de premiére classe*, Fund. Math. 2 (1921), 131–135, JFM 48.0276.05. Cited on p. 86.

[Ke3] S. Kempisty, *O trzech klasyfikacjach funkcji przedstawialnych analitycznie*, Dodatek do Roczników Polskiego Tow. Matematycznego (= Annales de la Société Polonaise de Mathématique. Supplement) 1 (1922), 41–49, JFM 48.0277.02. Cited on p. 92.

[Ke4] S. Kempisty, *The extreme derivates of functions of one and more variables*, J. London Math. Soc. 9 (1934), 303–308. JFM 60.0213.02, Zbl 0010.15901. Cited on p. 92.

[K1] K. Kuratowski, *Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire*, C. R. Acad. Sci. Paris 176 (1923), 229–232 (SP 156–158). Cited on p. 83.

[K2] K. Kuratowski, *Evaluation de la classe boréllienne on projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. 17 (1931), 249–272 (SP 376–399). Cited on p. 93.

[K3] K. Kuratowski, *Topology, Vol. I*, Academic Press 1966, MR 0217751. Cited on pp. 83 and 90.

[K4] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press 1966. Cited on p. 93.

[K5] K. Kuratowski, *A general approach to the theory of set-valued mappings*, Proc. of the III Prague Topological Symposium (1972), 271–280, MR 0413040. Cited on p. 91.

[K6] K. Kuratowski, *On the set-valued B-measurable mappings and a theorem of Hausdorff. Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff)*, Berlin (1972), 355–362, MR 0353249. Cited on p. 91.

[K7] K. Kuratowski, *Some remarks on the relation of classical set-valued mappings to the Baire classification*, Coll. Math. 42, Dédié á la mémoire d'Edward Marczewski (1979), 273–277, MR 0567563 (SP 606–610). Cited on p. 91.

[KS] K. Kuratowski, E. Szpilrajn, *Sur les cribles ferniés et leurs applications*, Fund. Math. 18 (1932), 160–170 (CMP 36–40). Cited on p. 91.

[Li] A. Lindenbaum, *Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 23 (1934), (1913), 15–27, errata 304. Cited on p. 88.

[M1] S. Mazurkiewicz, *Sur l'inversion des fonctions de premiére classe*, Wektor 3 (1913–14), 206–208. Cited on p. 85.

[M2] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions de classe 1*, Fund. Math. 2 (1921), 28–36. Cited on p. 85.

[M3] S. Mazurkiewicz, *Sur les continus absolument indécomposables*, Fund. Math. 16 (1930), 151–156. Cited on p. 93.

[NS] O. Nikodym, W. Sierpiński, *Sur un ensemble ouvert tel que la somme de toutés les droites qu'il contient est un ensemble non mesurable (B)*, Fund. Math. 7

(1925), 259–262, JFM 51.0170.02 (OC II, 577–579). Cited on p. 86.

[S1] W. Sierpiński, *Sur une propriété des fonctions représentables analytiquement*, Acad. Sci. Cracovie A (1918), 179–189 (OC II, 261–266), JFM 46.0298.03. Cited on p. 83.

[S2] W. Sierpiński, *Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues*, Fund. Math. 2 (1921), 15–27 (OC II, 346–357), JFM 48.0276.01. Cited on p. 84.

[S3] W. Sierpiński, *Sur les images des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 2 (1921), 74–80 (OC II, 369–374), JFM 48.0277.03. Cited on p. 84.

[S4] W. Sierpiński, *Sur l'inversion des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 3 (1922), 26–34 (OC II, 428–435), JFM 48.0278.01. Cited on p. 85.

[S5] W. Sierpiński, *Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues*, Fund. Math. 3 (1922), 123–127, JFM 48.0279.02. Cited on p. 92.

[S6] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ambigus*, Fund. Math. 6 (1924), 1–5 (OC II, 544–548), JFM 50.0141.05. Cited on pp. 85 and 90.

[S7] W. Sierpiński, *Un example effectif d'un ensemble mesurable de classe α*, Fund. Math. 6 (1924), 39–44 (OC II, 549–554), JFM 50.0142.01. Cited on p. 83.

[S8] W. Sierpiński, *Funkcje przedstawialne analitycznie*, Lwów-Warszawa-Kraków, Wydawnictwo Zakładu Narodowego Ossolińskich, 1925, JFM 51.0215.06. Cited on p. 83.

[S9] W. Sierpiński, *Sur une classification des ensembles mesurables (B)*, Fund. Math. 10 (1927), 320–327, (OC II, 654–661), JFM 53.0172.02. Cited on p. 86.

[S10] W. Sierpiński, *Sur un probléme de M. Hausdorff*, Fund. Math. 10 (1927), 427–430, (OC II, 661–664), JFM 53.0173.06. Cited on p. 86.

[S11] W. Sierpiński, *Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques*, Fund. Math. 16 (1930), 81–89 (OC III, 36–43), JFM 56.0234.05. Cited on p. 87.

[S12] W. Sierpiński, *Sur les anneaux de fonctions*, Fund. Math. 18 (1932), 1–22 (OC III, 57–76), JFM 58.1055.04. Cited on p. 88.

[S13] W. Sierpiński, *Sur les rapports entre les classifications des ensembles de M. M. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin*, Fund. Math. 19 (1932), 257–264 (OC III, 113–120), JFM 58.0082.01. Cited on p. 88.

[S14] W. Sierpiński, *Remarque sur les superpositions de fonctions continues*, C. R. Soc. Sc. Varsovie 26 (1933), 12–14, JFM 59.0988.02. Cited on p. 89.

[S15] W. Sierpiński, *Un example effectif d'un ensemble de nombres réels qui n'est pas effectivement énumérable*, Fund. Math. 21 (1933), 46–47 (OC III, 140–141), JFM 59.0883.03. Cited on p. 83.

[S16] W. Sierpiński, *Les superpositions transfinies des fonctions continues et les fonctions de Baire*, Fund. Math. 24 (1935), 1–7, JFM 61.0228.01. Cited on p. 89.

[Si1] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste, tom I*, Warszawa 1957, MR 0091312. Cited on p. 88.

[Si2] R. Sikorski, *Some examples of Borel sets*, Coll. Math. 5.2 (1958), 170–171, MR 0104583. Cited on p. 90.

[St] J. Staniszewska, *Sur la classe de Baire des dérivées de Dini*, Fund. Math. 47 (1959), 215–217, MR 0162893. Cited on p. 92.

[Sz] E. Szpilrajn, *Sur un probléme de Banach*, Fund. Math. 15 (1930), 212–214 (CMP 9–11), JFM 56.0234.01. Cited on p. 87.

[T] T. Traczyk, *On the approximation of mappings by Baire mappings*, Coll. Math. 8.1 (1961), 67–70, MR 0133804. Cited on p. 90.

[Z] Z. Zahorski, *Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque*, Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948), 306–323, MR 0031034. Cited on p. 93.

Bibliografia dodatkowa

[A] G. v. Alexits, *Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion*, Fund. Math. 15 (1930), 51–56, JFM 56.0234.04. Cited on p. 87.

[Ba] R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. di Mat. Ser. 3 (1899), 1–122, JFM 30.0359.01. Cited on pp. 82 and 84.

[Bo] E. Borel, *Lecons sur la theorie des fonctions* Gauthier-Villars, Paris 1898, JFM 29.0336.01. Cited on p. 83.

[Ha] O. Hajek, *Note sur la mesurabilité B de la dérivée supérieure*, Fund. Math. 44 (1957), 238–240, MR 0095228. Cited on p. 92.

[H1] F. Hausdorff, *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*, Math. Zeitschrift 5 (1919), 292–309, JFM 47.0240.01. Cited on p. 86.

[H2] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, de Gruyter, Berlin 1927, JFM 53.0169.01. Cited on p. 83.

[Kh1] Хинчин, А.Я. Исследования о строении измеримых функций. *Математический сборник.*, 31(2):265–285, 1923. A. Ya. Khintchine, "Recherches sur la structure des fonctions mesurables", Mat. Sb., 31:2 (1923), 265–285(in Russian). JFM 49.0178.01, EuDML: 64422. Cited on p. 93.

[Kh2] Хинчин, А.Я. Исследования о строении измеримых функций. ГЛАВА ВТОРАЯ . *Математический сборник.*, 31(2):377–433, 1924. A. Ya. Khintchine, "Recherches sur la structure des fonctions mesurables", Mat. Sb., 31:3-4(1924), 377–433 (in Russian). JFM 50.0189.04, GDZ. Cited on p. 93.

[L] H. Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement*, Journ. de math. 1 (6) (1905), 139–216, JFM 36.0453.02. Cited on p. 83.

[Le] G. Lederer, *A problem on Baire classes*, Fund. Math. 48 (1960), 85–89, MR 0109859. Cited on p. 90.

[Ma] R. D. Mauldin, *Baire functions, Borel sets and ordinary function systems*, Adv. in Math. 12 (1974), 418–450, MR 0367911. Cited on pp. 83 and 87.

[Mi] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182, doi: 10.2307/1990864, MR 0042109. Cited on p. 91.

[V] Ch. de la Vallée Poussin, *Integrales [de Lebesgue]. Fonctions [d'ensembles]. Classes de Baire*, Paris 1916, JFM 46.1519.01. Cited on p. 88.

Oznaczenie skrótów w bibliografii:

O= Stefan Banach, *Oeuvres*, Vol. I, PWN, Warszawa 1967.

CP= Władysław Orlicz, *Collected papers*, PWN, Warszawa 1988.

OC= Wacław Sierpiński, *Oeuvres Choisies*, Tom I, Warszawa 1974; Tom II PWN, Warszawa 1975; Tom III, PWN, Warszawa 1976.

SP = Kazimierz Kuratowski, *Selected papers*, PWN, Warszawa 1988.

CMP = Edward Marczewski, *Collected Mathematical Papers*, Polish Academy of Sciences, Warszawa 1996.

Coll. Math. = Colloquium Mathematicum.

C. R. Soc. Sc. Varsovie = Comptes Rendus des Séances de la Sociéte des Sciences et des lettres de Varsovie lub Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

C. R. Acad. Sci. Paris = Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences.

Fund. Math. = Fundamenta Mathematicae.

Results of Polish mathematicians concerning the Baire classification.

Władysław Wilczyński

Abstract. The paper describes results of Polish mathematicians of XX century concerning the Baire classification of functions and Borel classification of sets. As usual, numerous theorems came from Wacław Sierpiński, remaining are due to Kazimierz Kuratowski, Stefan Banach, Stefan Kempisty, Edward Szpilrajn (Marczewski), Andrzej Alexiewicz, Władysław Orlicz, Adolf Lindenbaum, Roman Sikorski, Ryszard Engelking, Włodzimierz Holsztyński, Tadeusz Traczyk, Janina Staniszewska, Zygmunt Zahorski and Samuel Eilenberg.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A60, 28A05, 54-03.

Key words and phrases: Baire classification, Borel sets, history of mathematics.

Władysław Wilczyński
Łódź University
Faculty of Mathematics and Computer Science
ul. Stefana Banacha 22, 90-238 Łódź

E-mail: wladyslaw.wilczynski@wmii.uni.lodz.pl
Communicated by: Krzysztof Szajowski

(Zgłoszona: 19 października 2017; Wersja końcowa: 6 sierpnia 2018)