Antiquit. Math. 3(2009), 99–116
© 2009 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Witold Więsław (Wrocław)

PIERWSZE POLSKIE TEKSTY Z TEORII LICZB

W pracy omówione zostały pierwsze w języku polskim teksty z teorii liczb. Autorem ich jest Julian Bayer (1806–1872). Wskazane są też osoby (Karol Hube i Franciszek Szopowicz), które incydentalnie wykładały na Uniwersytecie Jagiellońskim pewne zagadnienia dziś zaliczane do teorii liczb.

0. Wstęp

Podstawowe pojęcia teorii liczb pojawiły się już w Starożytności. Przyjęły one formę zmaterializowaną w VII Księdze *Elementów* Euklidesa. Są tam podane podstawowe własności liczb reprezentowanych jako całkowite krotności odcinka jednostkowego: podzielność, pojęcie liczby pierwszej (odcinek długości $p > 1$ jest wg Euklidesa *liczbą pierwszą*, jeśli mierzy się tylko jedynką, tzn. odcinkiem jednostkowym). Euklides dowodzi, że każda liczba większa od jedynki ma dzielnik pierwszy, dowodzi że zbiór liczb pierwszych nie jest skończony (a dokładniej: dla każdego skończonego zbioru liczb pierwszych istnieje liczba pierwsza spoza tego zbioru), wprowadza (a może powtarza rzecz znaną w jego czasach) pojęcie największego wspólnego dzielnika dwóch liczb, nazwane przez niego ich *wspólna miarą* i podaje algorytm, dziś nazywany *algorytmem Euklidesa*. Następnie dowodzi, choć niepoprawnie, że każda liczba większa od jedynki jest iloczynem liczb pierwszych, wprowadza pojęcie liczby doskonałej, itd. Późniejsze pokolenia matematyków stopniowo zatraciły osiągnięcia Starożytności w zakresie teorii liczb. Pewne nowe osiągnięcia wnieśli uczeni islamu, Indii, Chin, itd. Teoria liczb zaczęła się odradzać w Europie w wieku XVII (Fermat, Mersenne, Wallis i inni). Pojawiły się nowe pojęcia i zagadnienia. Jednak pojęcia teorii liczb nie trafiły do podręczników (por. [25]–[27]).

Pomijając wykorzystywane w nauczaniu pojęcia elementarnej arytmetyki (por. [25], [27]), odnalazłem jedynie dwa miejsca w polskiej literaturze matematycznej sprzed XIX wieku, w których pojawia się pojęcie liczby pierwszej. Jest to polskojęzyczny rękopis [18], w którym jest użyty termin *liczba pierwsza*. Podobnie, w [23] (tom I, s. 96, przypis dolny (a)) czytamy:

> Liczby piérwsze nazywaią się w Arytmetyce, które nie maią innych dzielników prócz siebie samych i jedności.

Śniadecki poprzestaje na tym przypisie, w dalszym ciągu nie odwołując się do tego pojęcia. Dopiero jednak teksty Juliana Bayera ([1], [3]) zawierają pierwszy w języku polskim wykład elementów teorii liczb, jak też wprowadzają polską terminologię w tym zakresie.

Niezależnie, w kilku innych miejscach, w różnych wykładach, m.in. w wykładach na Uniwersytecie Krakowskim i Uniwersytecie Wileńskim, pojawiły się w I połowie XIX wieku zagadnienia, dziś zaliczane do teorii liczb[1].

Nie jest mi wiadomym (por. [26]), aby do 1830 roku ktoś wykładał elementy teorii liczb na którymś z uniwersytetów na ziemiach polskich, jako odrębny wykład. Przynajmniej tak wskazują na to zachowane spisy wykładów oraz inne dokumenty [26]. Były jedynie pewne zagadnienia, które teraz omówię.

1. Elementy teorii liczb w wykładach

W wykładach kilku uczonych polskich, głównie w wykładach uniwersyteckich, pojawiły się w I połowie XIX wieku elementy teorii liczb.

I. Wykłady Karola Hubego [17]

Notatki Jana Steczkowskiego (a właściwie Jana Steczki) pochodzą z wykładów Karola Hubego z roku 1823. Wykład Hubego, starannie przygotowany, obejmował podstawy algebry wielomianów jednej i wielu zmiennych, w tym elementy teorii eliminacji, elementy geometrii analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni, m. in. klasyfikację stożkowych w ujęciu algebraicznym (tzn. klasyfikację wg Jana Śniadeckiego równań stopnia 2 dwóch zmiennych), elementy trygonometrii płaskiej i sferycznej, oraz elementy analizy. Pojawiają się tam informacje z teorii liczb (*Elementy Analizy nieoznaczoney*) dotyczące równań diofantycznych stopnia 1, tzn. postaci $ax + by = c$. Ponadto Hube wykłada skrótowo ułamki łańcuchowe (*O Ułamkach Ciągłych*), gdzie nie ma niczego prócz algorytmu rozwijania liczby w ułamek łańcuchowy.

II. Wykłady Michała Pełki-Polińskiego [19]

Nie ma pewności, czy Poliński wykładał teorię liczb na Uniwersytecie Wi-

[1] Np. wg Fussa [14] ułamki łańcuchowe to nie teoria liczb, ale *analyse algébrique*, do której także zaliczano szeregi i liczby zespolone.

leńskim, gdyż swoje notatki [19] sporządził w czasie, gdy był nauczycielem w Gimnazjum w Mińsku. Główne hasła z teorii liczb w jego notatkach, to

> Zrównania nieoznaczone stopnia 1go.
> O ułamkach ciągłych.
> Szeregi Liczb figurowych: tróykątne, albo 3-go porządku, ostrosłupowe albo 4-go porządku.
> Szeregi liczb wielokątnych.

Rozdział o ułamkach łańcuchowych zawiera tylko przykłady. *Liczby figurowe* to *liczby figuralne*. Opisany jest sposób ich budowania (tzn. przykłady i ogólne wzory; np. *liczby trójkątne* obliczamy ze wzoru $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$). Ponadto tekst zawiera zadania ilustrujące chińskie twierdzenie o resztach. Autor nie używa jednak kongruencji.

III. Wykłady Franciszka Szopowicza ([21] i [22])

Wykłady Franciszka Szopowicza z roku 1821/1822 można odnaleźć wśród notatek z matematyki Jana Kantego Steczkowskiego [21]. Są tam informacje o ułamkach łańcuchowych i o równaniu Pella $x^2 - Ay^2 = 1$, zilustrowane jedynie na kilku przykładach.

Natomiast rękopisy Szopowicza [22], ogromne objętościowo, zawierają elementarny wykład arytmetyki na poziomie ówczesnego gimnazjum. Jeden z tekstów jest oryginalnym rękopisem Szopowicza, drugi zaś jego autoryzowaną kopią, sporządzoną przez Henryka, syna Franciszka Szopowicza. Tekst jest interesujący jedynie z historycznego punktu widzenia. Może jednak zainteresować dydaktyków matematyki, gdyż zawiera wiele przykładów i interesujących pomysłów dla nauczyciela. Jednak prócz elementarnej arytmetyki nie zawiera niczego z teorii liczb.

Szopowicz ([22] rks 1869/I) używa następujących terminów:

> liczby pierwsze albo pierwotne (s. 368),
> liczby pierwsze między sobą (s. 437),
> liczba całka (s. 508).

Liczby pierwsze między sobą to *liczby względnie pierwsze*; termin *liczba całka* oznacza *liczbę całkowitą*. Termin ten był w użyciu w Krakowie na przełomie XVIII/XIX wieku.

IV. Wykłady Jana Kantego Steczkowskiego ([20] i [21])

Rękopis [20] jest wykładem Steczkowskiego z roku 1845, spisanym przez Michała Grabowskiego. To interesujący przyczynek do tego, jak w połowie XIX wieku, na jedynym wówczas polskim uniwersytecie, wykładano analizę matematyczną. W największym skrócie można powiedzieć, że wykład Stecz-

kowskiego wzorowany był na wykładzie Lagrange'a[2] wg kolejnego wydania jego książki. Pisałem o tym w szerszym kontekście w [24]. Podstawową ideą Lagrange'a jest wykład w oparciu o formalne szeregi potęgowe.

W wykładzie Steczkowskiego jest niewiele tematów zaliczanych dziś do teorii liczb. Są to:

Rozdział V. O ułamkach ciągłych.
Rozdział VI. Szeregi arytmetyczne.
Teorya równań wyższych stopni.

Steczkowski rozważa najogólniejszą postać ułamków łańcuchowych, w szczególności rozwinięcia szeregów hipergeometrycznych Gaussa w ułamki łańcuchowe.

Szeregi arytmetyczne to wg Steczkowskiego skończone sumy ciągów liczb, różnice, postępy arytmetyczne wyższych rzędów. Omawiając równania wyższych stopni dowodzi modnych wówczas twierdzeń o lokalizacji rzeczywistych zer wielomianów (Sturm, Liouville), a następnie przytacza algorytm Lagrange'a rozwijania rzeczywistych pierwiastków wielomianu w klasyczne ułamki łańcuchowe.

Część swoich wykładów na Uniwersytecie Jagiellońskim opublikował Steczkowski w bardzo ładnych i elegancko wydanych podręcznikach[3]. Nie zawierają one jednak żadnych elementów teorii liczb.

Znacznie bogatsza w informacje z teorii liczb jest kolekcja [21] rękopisów Steczkowskiego. Wśród nich na szczególną uwagę zasługuje rękopis zatytułowany: *Dopełnienia Algiebry mianowicie rozwiązanie zrównań drugiego stopnia z dwiema nieznanemi wypadających z zadań nieoznaczonych* (rks BJ 4190). Jest tam opis (na przykładach) różnych typów równań diofantycznych stopnia 2 dwóch zmiennych, tzn. równań postaci

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0$$

z całkowitymi współczynnikami a, b, c, d, e, f (§ 2). Do rozwiązania w liczbach całkowitych pewnych równań postaci $x^2 + ay^2 = A$ stosuje, wzorem Eulera, liczby zespolone z pierścienia $Z[i\sqrt{a}]$ w przypadku gdy $a > 0$. Rozważane są równania (§ 11) postaci $x^2 - Ay^2 = Bz^2$, gdzie $A, B \in \mathbb{N}$ są liczbami wolnymi od czynników kwadratowych. W kolejnym § 17 opisuje rozwinięcia w ułamki łańcuchowe liczb postaci $\sqrt{A}$ dla $A = 13, 19, 47, 53, 61, 67, 991$, np.

[2] J. L. Lagrange, *Théorie des Fonctions Analytiques, contenant Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits a l'analyse algébrique des quantités finies*, Paris 1797.

[3] J. K. Steczkowski, *Elementarny wykład matematyki*. Część I. *Arytmetyka.* Kraków 1851; Część II. *Algebra*. Kraków 1852; Część III. *Geometryja. Trygonometryja prostokreślna i sferyczna.* Kraków 1859; Część IV. *Geometryja. Geometryja analityczna*. Kraków 1859.

$\sqrt{61} = [7; \overline{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14}]$. W szczególności rozważa (§ 22) tzw. równania Pella i nie-Pella, tzn. równania $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, rozwiązując je na przykładach, z pomocą rozwinięcia $\sqrt{A}$ w ułamek łańcuchowy, co było znane już Eulerowi i Lagrange'owi. Np. dla $A = 991$, najmniejsze rozwiązania x, y równania Pella są liczbami 24 cyfrowymi. W § 28 badane jest równanie postaci $x^2 - Ay^2 = P$. Algorytm rozwiązywania ogólnego równania diofantycznego stopnia 2 zilustrowany jest na przykładzie

$$13y^2 + 28xy + 5x^2 - 80y - 66x + 33 = 0.$$

Opisany jest też ogólny algorytm rozwiązywania takich równań sprowadzający się do równań postaci $f(x, y) = A$, gdzie f jest formą kwadratową o współczynnikach całkowitych. W tekście cytowane są prace z najnowszej literatury matematycznej. Świadczy to o tym, że Steczkowski śledził najnowszą literaturę i choć nie miał oryginalnych wyników z teorii liczb, dobrze wiedział, co się dzieje w tej dziedzinie.

W innym rękopisie z kolekcji ([21] rks BJ 4192/I) odnajdujemy twierdzenie: *Jeżeli A jest liczbą pierwszą kształtu* $8n + 7$*, natenczas zrównanie* $x^2 - Ay^2 = 2$ *zawsze w liczbach całkowitych rozwiązanem być może.*

Cytowane tam są też różne wyniki dotyczące π. Np. Steczkowski stwierdza błędnie, że autorem równości

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots$$

jest Cheveliet, nie wiedząc zapewne, że pochodzi ona od Vièty. W innym miejscu pisze:
W r. 1853 Prof. Richter w Elblągu obrachował π *w 333 cyfrach dziesiętnych pełnych*, zaś w rks BJ 4192/IV cytuje wzory Schlömilcha (Archive der Mathematik und Physik 40 (1850), 101–104), pozwalające dość efektywnie obliczać przybliżenia dziesiętne π, np. wzór:

$$\pi = \tfrac{24}{10}(1 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{10} + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \tfrac{1}{10^2} + \ldots) + \tfrac{56}{100}(1 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{100} + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}(\tfrac{2}{100})^2 + \ldots).$$

Zapewne znalazł te wzory w jakiejś innej pracy, bo w cytowanej jej nie ma. W tej części cytowanego rękopisu znajdujemy też krótki wykład ułamków łańcuchowych (*Rozdział V. O ułamkach ciągłych*). Zapewne jest to ten sam tekst, co w dokumencie [20].

Na zakończenie tego rozdziału można więc jednoznacznie stwierdzić, że do połowy XIX wieku wykłady na polskich uniwersytetach nie zawierały elementów teorii liczb, nie licząc incydentalnych informacji z elementarnej arytmetyki, ograniczające się tylko do definicji (liczby pierwsze, liczby względnie pierwsze), informacji o ułamkach łańcuchowych i przypadkowych przykładów najprostszych równań diofantycznych (np. opis trójek pitagorejskich).

Właściwy wykład teorii liczb znajdujemy dopiero u Juliana Bayera.

2. Elementy teorii liczb w podręcznikach szkolnych

Pierwszym znanym mi podręcznikiem, w którym są wstępne pojęcia teorii liczb, jest książka [15]–[16] Karola Libelta[4], dedykowana jego nauczycielom: Kazimierzowi Buchowskiemu (1784–1842), nauczycielowi w Gimnazjum św. Marii Magdaleny w Poznaniu i Martinowi Ohmowi (1792–1872), profesorowi Uniwersytetu Berlińskiego. Rozdział III tomu I (§§ 104–109, s. 87–90) poświęcony jest teorii liczb. Autor wprowadza tam pojęcie liczby pierwszej, liczb względnie pierwszych, opisuje algorytm Euklidesa wyznaczania największego wspólnego dzielnika, oraz podaje kryteria podzielności przez 2 i 3.

Interesująca jest terminologia autora:

terminologia Libelta	**współczesna terminologia**
liczba bezwzględnie całkowita	liczba naturalna
liczba niedzielna, a. niedziałek	liczba pierwsza
liczby współdzielne, a. współwymierne	liczby mające dzielnik różny od 1
niedziałki względne	liczby względnie pierwsze
liczba złożona	liczba złożona
największy dzielnik	największy wspólny dzielnik

3. Julian Bayer (16. II 1806–15. II 1872). Vita (wg [13])

Julian Bayer, syn Franciszka, urodził się w Krakowie. Szkołę średnią ukończył w Krakowie. Tam też rozpoczął studia, które kontynuował na Królewskim Uniwersytecie w Warszawie, kończąc je ze stopniem magistra[5] za pracę o biegu eliptycznym planet. Do roku 1834 pracował jako nauczyciel matematyki w Warszawie (Szkoła Wydziałowa przy Nowym Świecie i Szkoła Obwodowa przy ul. Długiej), przez kolejne dwa lata w Gimnazjum Wojewódzkim w Łukowie, a od 1836 w Gimnazjum Wojewódzkim w Warszawie. Notatka w jednym

[4] Karol Libelt (1807–1875), działacz niepodległościowy, matematyk, pedagog, filozof. Studiował w Berlinie w latach 1826–1831, gdzie się doktoryzował się z matematyki. W Bibliotece Jagiellońskiej zachowały się jego notatki ze studiów (*vide*: [26]). Wg tablicy pamiątkowej w gmachu głównym Uniwersytetu Wrocławskiego, Libelt studiował we Wrocławiu. Nie znajduje to jednak potwierdzenia w dokumentach. Praca S. Brzozowskiego: *Polskie studia w zakresie nauk ścisłych we Wrocławiu w latach 1811-1945* (Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej, ser. C, z. 20 (1975), 27–92) nie wymienia Karola Libelta jako studenta *Königliche Universität zu Breslau*.

[5] Stopień magistra był jednym z dwóch stopni akademickich, przyznawanych na Królewskim Uniwersytecie Warszawskim (por. [26] s. 236–237 i dalej). Stopień ten uzyskiwało się po ukończeniu studiów. Drugim, wyższym stopniem był stopień doktora (*doctoratus*). Program studiów był rozłożony na trzy lata (*loc. cit.*, s. 238).

z rękopisów[6] zdaje się sugerować, że Bayer wykładał także w *Seminaryum Głównėm* w Warszawie. Następnie podjął pacę w Banku Polskim, najpierw jako bibliotekarz, a potem jako urzędnik do specjalnych poruczeń. Przygotowywał m. in. plany operacji finansowych. Zaraz po powstaniu Szkoły Głównej Warszawskiej w 1864 roku, został powołany na wykładowcę matematyki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym. Wykładał rachunek prawdopodobieństwa i teorię liczb. Mianowicie, w roku akademickim 1864/65 wykładał rachunek prawdopodobieństwa (III rok studiów), 4 godziny tygodniowo przez cały rok. Ciekawe, co było treścią tak długiego wykładu. W roku 1865/66 wykładał teorię liczb (II rok), po 3 godziny tygodniowo i w takim samym wymiarze godzin rachunek prawdopodobieństwa (III rok). W roku 1866/67 wykładał rachunek prawdopodobieństwa (III rok i IV rok), każdy z wykładów po dwie godziny tygodniowo i teorię liczb, na II roku 2 godziny w I semestrze i 1 w II, a na III roku po dwie godziny rocznie. Natomiast w ostatnim roku pracy w Szkole Głównej Warszawskiej prowadził w I semestrze III roku wykład z teorii liczb (3 godziny tygodniowo), oraz rozpoczął wykład z rachunku prawdopodobieństwa na IV roku, wykładając w I semestrze po 3 godziny. W drugim semestrze zastąpił go Władysław Kwietniewski, w wymiarze godziny tygodniowo. Szkoła Główna została zamknięta pod koniec 1868 roku. Na jej miejsce władze rosyjskie utworzyły uniwersytet rosyjski, który funkcjonował do 1915 roku, po czym ewakuował się do Rostowa nad Donem.

Ze względu na stan zdrowia (paraliż), Julian Bayer został zwolniony z obowiązków w Szkole Głównej 6. XII 1867 roku. Zmarł w 15 lutego 1872 roku.

Lista publikacji Juliana Bayera (patrz: Bibliografia) wskazuje na jego główne zainteresowania: astronomię i teorię liczb.

4. Publikacja [1]

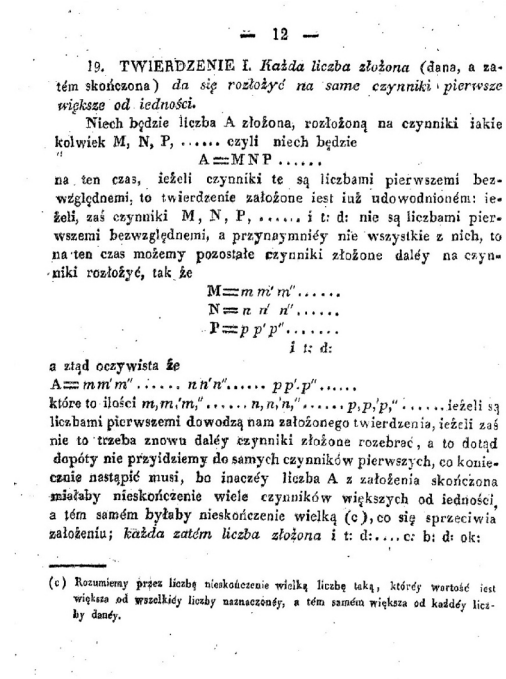
Sądzę, że publikacja [1] jest pierwszym drukowanym polskim tekstem, który jest poświęcony teorii liczb. Warto na wstępie odnotować, że mimo iż w podtytule książki [1] Bayer cytuje czwarte wydanie Bourdona [11], to jego praca nie ma żadnego związku z tą książką[7].

WSTĘP *Do Teoryi elementarnéy podzielności liczb zamykaiący w sobie potrzebne opisania i własności liczb szczególniéy co do ich spólnych dzielników,*

[6] W ([3] s. 933) czytamy: *Z Manus Kryptu P. Juliana Bayer. Kurs wykładany w Szkołach.* Można stąd wnosić, że Bayer wykładał także w *Seminarium Głównym*. Była to instytucja przygotowująca nauczycieli, po zamknięciu Królewskiego Uniwersytetu w Warszawie w roku 1831. Po kilku latach istnienia władze rosyjskie zamknęły *Seminaryum Główne*.

[7] Książka Bourdona [11], mimo iż sygnowana jako podręcznik uniwersytecki, zawiera bardzo elementarny materiał. Na 160 stronach odnajdujemy elementy arytmetyki, systemy numeracji, ułamki dziesiętne, ułamki łańcuchowe i wstęp do liczb zespolonych.

i spólnych wielokrotności 1–30
TEORYA PODZIELNOŚCI LICZB czyli o prawach podzielności liczb. 31–91
I. *Prawa podzielności dla* 2^n *lub* 5^n *lub* $2^n \times 5^n = 10^n$ 32–38
II. *Sposób naznaczenia prawa podzielności dla każdéy liczby pierwszéy* 38–53
III. *Zastosowanie sposobu poprzedzaiącego do liczb pierwszych* 2 *i* 5 *i do niektórych liczb złożonych.* 54–58
IV. *Ustanowienie praw podzielności dla liczb złożonych, gdy wiadome mamy prawa podzielności dla liczb pierwszych, z których liczby te są złożone*; *w tym tylko iednak przypadku, gdy liczby te pierwsze nie wchodzą więcéy nad ieden raz za czynniki do liczb tych złożonych.* 58–59
NIEKTÓRE ZADANIA z ARYTMETYKI, w KTÓRYCH TEORYA PODZIELNOŚCI LICZB MA SWOIE ZASTOSOWANIE. 60–91



— 12 —

19. TWIERDZENIE I. *Każda liczba złożona* (dana, a zatém skończona) *da się rozłożyć na same czynniki pierwsze większe od iedności.*

Niech będzie liczba A złożona, rozłożoną na czynniki iakie kolwiek M, N, P, ... czyli niech będzie

A = M N P .....

na ten czas, ieżeli czynniki te są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, to twierdzenie założone iest iuż udowodnioném: ieżeli, zaś czynniki M, N, P, ... i t: d: nie są liczbami pierwszemi bezwzględnemi, a przynaymniéy nie wszystkie z nich, to na ten czas możemy pozostałe czynniki złożone daléy na czynniki rozłożyć, tak że

M = m m' m'' .....
N = n n' n'' .....
P = p p' p'' .....
i t: d:

a ztąd oczywista że

A = m m' m'' ..... n n' n'' ..... p p' p'' .....

które to ilości $m, m', m'', \ldots\ldots n, n', n'', \ldots\ldots p, p', p'', \ldots\ldots$ ieżeli są liczbami pierwszemi dowodzą nam założonego twierdzenia, ieżeli zaś nie to trzeba znowu daléy czynniki złożone rozebrać, a to dotąd dopóty nie przyidziemy do samych czynników pierwszych, co koniecznie nastąpić musi, bo inaczéy liczba A z założenia skończona miałaby nieskończenie wiele czynników większych od iedności, a tém samém byłaby nieskończenie wielką (c), co się sprzeciwia założeniu; *każda zatém liczba złożona* i t: d: ..... c: b: d: ok:

(c) Rozumiemy przez liczbę nieskończenie wielką liczbę taką, któréy wartość iest większa od wszelkiéy liczby naznaczonéy, a tém samém większa od każdéy liczby danéy.

Fragment książki Bayera [1]

Omówienie treści książki

Treść Wstępu dość dobrze opisuje jego podtytuł. Wstęp zawiera wykład podzielności liczb naturalnych, algorytm Euklidesa (bez nazwy) i jego zastosowanie do wyznaczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb. Po wprowadzeniu pojęcia liczby pierwszej, autor dowodzi, że każda liczba naturalna $N > 1$ jest pierwsza albo jest iloczynem liczb pierwszych (Tw. 1, s. 12). Następnie dowodzi (Tw. 7, s. 16), że jeżeli liczba dzieli iloczyn dwóch liczb i jest względnie pierwsza z jednym czynnikiem, do dzieli drugi czynnik. Wyprowadza stąd *Zasadnicze*

Twierdzenie Arytmetyki. które już jest u Euklidesa (*Elementy*, księga VII): jeżeli liczba pierwsza dzieli iloczyn dwóch liczb, to dzieli któryś z czynników (Tw. 8, s. 18). Jako wniosek wyprowadza stąd, że jeżeli liczba pierwsza dzieli potęgę liczby, to dzieli i samą liczbę (Wn. 1, s. 18). Wyprowadza stąd (s. 20), że

> każda liczba złożona A nie może być rozłożoną na czynniki pierwsze, iak tylko iednym i tymże samym sposobem.

Pozostałe twierdzenia analizują drobiazgowo największy i najmniejszy wspólny dzielnik. Brak jednak stwierdzenia, że iloczyn największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb a i b jest równy iloczynowi ab.

W rozdziale I opisane są prawa podzielności liczb przez liczbę daną. W Rozdziale II autor opisuje, jak wyznaczyć prawo podzielności dla liczby N przez daną liczbę pierwszą p, w języku cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby N. Bayer zauważa, potęgi 10^n dla dowolnych n dają tylko skończenie wiele różnych reszt w wyniku dzielenia przez liczbę pierwszą p oraz, że wraz ze wzrostem n reszty te powtarzają się okresowo. Fakt ten pozwala na zastąpienie w wyrażeniu $N = a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0$ po podzieleniu przez p, składników postaci $frac 10^m p$ resztami z dzielenia przez p. W ten sposób, unikając kongruencji, uzyskuje autor *prawa podzielności przez* $3, 7, 11, 13, 37$, ilustrując uzyskane twierdzenia na przykładach. W Rozdziale III podane są kryteria podzielności przez 2, 5 oraz ich niektóre potęgi. Wreszcie w krótkim Rozdziale IV (s. 58–59) sformułowane są na kilku przykładach kryteria podzielności dla niektórych liczb złożonych, sprowadzające się do prostego faktu, że liczba podzielna przez dwie liczby względnie pierwsze, podzielna jest też przez ich iloczyn.

Ostatnia część książki, NIEKTÓRE ZADANIA..., jest najciekawsza. Zawiera podstawowe algorytmy jako ilustrację sformułowanych zadań. Wszystkie rozważania są bogato ilustrowane przykładami numerycznymi.

ZADANIE I. *daną liczbę rozłożyć na iéy czynniki pierwsze.*

Podany algorytm (sito Erarostenesa) oparty jest na następującym twierdzeniu:

> Jeżeli liczba N nie jest dokładnie podzielną przez żadną z liczb pierwszych całkowitych mnieyszych od $\sqrt{N}$, na ten czas liczba ta nie iest téż podzielną i przez żadną liczbę pierwszą większą od $\sqrt{N}$, a tém samem iest liczbą pierwszą.

Autor cytuje różne tablice liczb pierwszych, wydane w XVIII i na początku XIX wieku, w tym tablice Burckhardta z 1817 roku, zawierające dzielniki pierwsze liczb do 3 000 000. Do tekstu dołączona jest jednostronicowa *TABLICA Liczb pierwszych i czynników naymnieyszych liczb naturalnych od 1 do 2000*. Oznacza to, że można w tej tablicy sprawdzić, które liczby w danym przedziale są pierwsze, a w przypadku liczby złożonej odczytać jej najmniejszy dzielnik

pierwszy. Oczywiście tablica zawiera jedynie liczby nieparzyste i jest bardzo wygodna w użyciu.

ZADANIE II. *Maiąc rozłożoną liczbę daną na czynniki pierwsze, naznaczyć wszystkie dokładne dzielniki téyże liczby.*

Przeprowadzone rozumowanie prowadzi do opisu wszystkich dzielników liczby z danym rozkładem na czynniki pierwsze, jak też do wzoru na liczbę dzielników danej liczby.

ZADANIE III. *Wynaleść ilukolwiek liczb danych nawiększego spólnego dzielnika.*

Autor podaje dwa rozwiązania tego zadania. *Rozwiązanie 1* w przypadku, gdy znamy rozkłady liczb na czynniki pierwsze i *Rozwiązanie 2*, wykorzystujące algorytm Euklidesa dzielenia z resztą.

ZADANIE IV. *Wynaleść naymnieyszą wielokrotność dwóch trzech lub ilukolwiek liczb danych.*

W tym przypadku także podane są dwa algorytmy: pierwszy, gdy znany jest rozkład na czynniki pierwsze; drugi, wykorzystujący fakt, że iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy iloczynowi ich największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności.

ZADANIE V. *Przywieść dany Ułamek do Nayprostszego iego wyrażenia.*

Tu cytowane są trzy algorytmy. Pierwszy polega na rozkładzie licznika i mianownika na czynniki pierwsze, a następnie na redukcji wspólnych czynników. Sposób drugi sprowadza się do kolejnego sprawdzania, czy licznik i mianownik podzielne są przez tę samą liczbę, jak pisze Bayer:

> znając prawa podzielności liczb można ie tutay bardzo dogodnie zastosować, i zamiast rozkładania wyrazów ułamku danego na czynniki pierwsze, a potém wyrzucenia czynników spólnych, można te czynniki spólne, wynayduiąc ie przez upatrywanie praw podzielności spólnie do licznika i mianownika zastosować się mogących, cząstkowo wyrzucać dotąd, dopóki nie przyidziemy do wyrazów będących liczbami pierwszemi między sobą [...].
>
> ***Sposób trzeci.*** Chcąc działanie skracania ułamku wprost wykonać trzeba poszukać nayw. spóln. dzielnika ułamku, przez który podzieliwszy ten wyraz, ułamek przywiedziony zostanie do nayprostszego wyrażenia. [...]

ZADANIE VI. *Przywieść ilekolwiek ułamków danych do naymnieyszego spólnego mianownika.*

Także w tym przypadku proste rozważania zilustrowane są kilkoma wnikliwie przeanalizowanymi przykładami.

Książka jest starannie napisana i zredagowana. Z dzisiejszego punktu widzenia napisana jest dość rozwlekle, ale nawet dziś mogłaby po uwspółcześnieniu terminologii być pomocną w nauczaniu elementarnej teorii liczb.

Terminologia Bayera	**współczesna terminologia**
dokładny dzielnik liczby	dzielnik liczby
liczba zupełnie podzielna	liczba podzielna
liczby pierwsze bezwzględne a. liczby pierwsze	liczby pierwsze
liczby złożone	liczby złożone
liczby pierwsze między sobą	liczby względnie pierwsze
liczba zamyka w sobie czynnik	liczba zawiera czynnik
spólny dzielnik	wspólny dzielnik
spólna wielokrotność	wspólna wielokrotność
naymniéysza spólna wielokrotność a. naymniéysza spólna dzielna	najmniejsza wspólna wielokrotność
naywiększy spólny dzielnik	największy wspólny dzielnik
rozłożenie liczby danéy na czynniki	rozkład liczby danej na czynniki
rozłożenie liczby danéy na Jéy czynniki pierwsze	rozkład danej liczby na czynniki pierwsze
prawo podzielności liczb	kryterium podzielności liczb
sposób Eratostenesa wynalezienia liczb pierwszych	sito Eratostenesa

5. Rękopis [3]

Rękopis ten pisały dwie różne osoby. Na s. 933 rękopisu [3] znajduje się przypis: *Z Manus Kryptu P. Juliana Bayer*. Można więc przypuszczać, że przynajmniej część wyłożonego materiału pochodzi od Juliana Bayera, który wykładał w Seminarium Głównym w Warszawie przynajmniej w roku akademickim 1835/1836. Wykład obejmował elementy arytmetyki i algebry, geometrię analityczną na płaszczyźnie i w przestrzeni, oraz elementy analizy – rachunek różniczkowy i całkowy dla funkcji jednej zmiennej, a także wykład trygonometrii płaskiej i sferycznej. Z analizy tego rękopisu wynika, że Seminarium dawało przyszłym nauczycielom dobre podstawy w zakresie matematyki.

Poniżej przytaczam spis treści w części poświęconej arytmetyce (s. 1–614).

Wstęp. [elementy arytmetyki]; *Algebra* [symbolika literowa]; *dodawanie algebraiczne*; *mnożenie algebraiczne*; *dzielenie algebraiczne*; *O podzielności ilości całkowitych*; *Podzielność liczb* [ilości pierwsze, ilości względnie pierwsze, sito Eratostenesa (bez nazwy); największy wspólny dzielnik dla liczb i wielomianów]; *Ułomki zwyczajne*; *Ułomki dziesiętne*; *O Pierwiastkach ilości mnożonych jako potęgi* [algorytmy obliczania pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb zapisanych w systemie dziesiętnym]; *Pierwiastki przybliżone stopnia 2go*; *Pierwiastki sześcienne przybliżone*; *O Stosunkach i Proporcyach*; *O Potęgach*; *Zastosowania Proporcyi do Reguły 3ch*; *Reguła odtrącania*; *reguła spółki*; *Reguła łańcuchowa*; *Reguła mieszaniny.*

Matematyka [inny charakter pisma], *O logarytmach; Kombinacye*; *Binom Newtona*; *O Równaniach*; *Dodatek do Algebry. Rozdziały O Równaniach* (s. 427–

–558) i *Dodatek do Algebry* (s. 559–614) zawierają bogaty materiał z algebry wielomianów. Znajdujemy tam liczne zadania na równania stopnia 1 i 2, a także układy równań liniowych 2×2 i 3×3 ze wzorami Cramera w jawnej postaci, tak jak u Jana Śniadeckiego [23]. Omawiane też są równania wyższych stopni, rozkład wielomianu na czynniki, wyznaczanie pierwiastków wymiernych, wzory Viète'y, rozwijanie wielomianu względem danego wielomianu, przedziały, w których leżą pierwiastki rzeczywiste wielomianu, liczby zespolone i pierwiastki nierzeczywiste wielomianów, numeryczne wyznaczanie pierwiastków rzeczywistych. Dziś nie zawsze wykłada się algebrę wielomianów w takim zakresie, jak w omawianym rękopisie.

Autor tekstu korzystał z różnych, często archaicznych XVIII-wiecznych opracowań, których jednak nie cytuje. Nie było wtedy takiego zwyczaju. Dotyczy to wykładu arytmetyki i analizy. Wykład geometrii analitycznej i trygonometrii jest oparty na dobrych źródłach XIX-wiecznych. Wykład algebry jest poprawny, oparty na współczesnych opracowaniach. Jednak z teorii liczb nie ma tam praktycznie niczego.

6. Rękopis [10]

Rękopis [10] odnalazłem w Bibliotece PAU w Krakowie. Nie ma pewności, czy jest to oryginalny tekst, sporządzony ręką autora, ze względu na różne pomyłki, których zapewne nie popełniłby matematyk. Zapewne ktoś przepisywał ten tekst z rękopisu autora. Wskazywałaby na to data (Warszawa, d. 4. Kwietnia 1870 r.) umieszczona na stronie tytułowej (*vide*: reprodukcja). Wtedy Bayer był już sparaliżowany i mógł mieć kłopoty z pisaniem. Rękopis poprzedzony jest dwoma stronami tekstu, napisanymi inną ręką. Podane są tam źródła, z których korzystał Bayer. Zdaniem tej osoby, ustępy 1 i 2 pochodzą od Schefflera[8], ustępy 3–5 zostały zapożyczone od Dirichleta [12], a dowody twierdzeń Fermata i Eulera od samego Eulera.

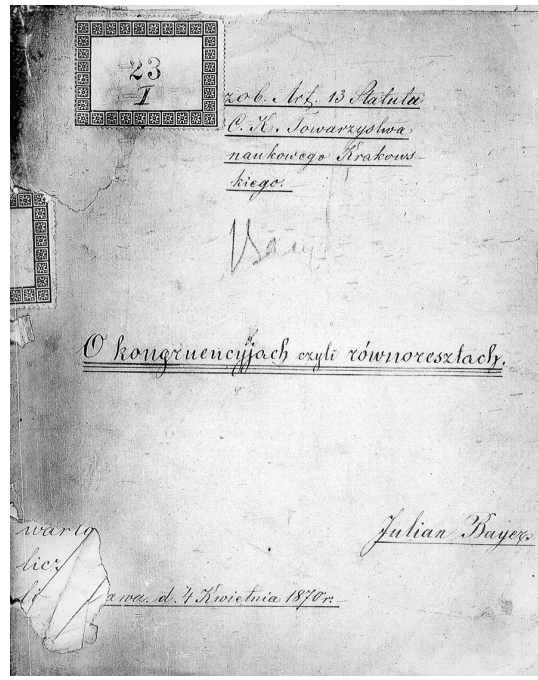
Rękopis składa się z następujących części:

O kongruencyach czyli równoresztach.

[0]. O kongruencyach czyli równoresztach.	k. 1–5
[1]. Własności dwóch i ilukolwiek równoreszt.	k. 5–6
[2]. Dalsze własności równoreszty.	k. 6–14
3. Wzory na liczbę liczb pierwszych względem liczby danéj.	k. 14–19
4. Układ zupełny reszt.	k. 20–24
5. Twierdzenie Fermata i jego uogólnienie.	k. 24–29
6. Twierdzenie Wilsona i jego uogólnienie.	k. 29–36
7. Prawo wzajemności liczb pierwszych.	k. 36–42

[8] Zapewne chodzi o książkę: A. C. W. H. Scheffler, *Die unbestimmte Analytik*, tomy 1–2. Hannover 1854.

Zawartość rękopisu.
Wstępny rozdział zawiera definicję kongruencji modulo n. Nawet dowodzi się jedyności ilorazu i reszty w algorytmie dzielenia liczb naturalnych, a potem definiuje kongruencję mod$n$. Dowodzi się, że kongruencja jest relacją równoważności (bez użycia tej nazwy), a następnie wykazuje, że na kongruencjach wg tego samego modułu można wykonywać operacje arytmetyczne. W ustępach 1–2 Autor odnotowuje dalsze elementarne własności



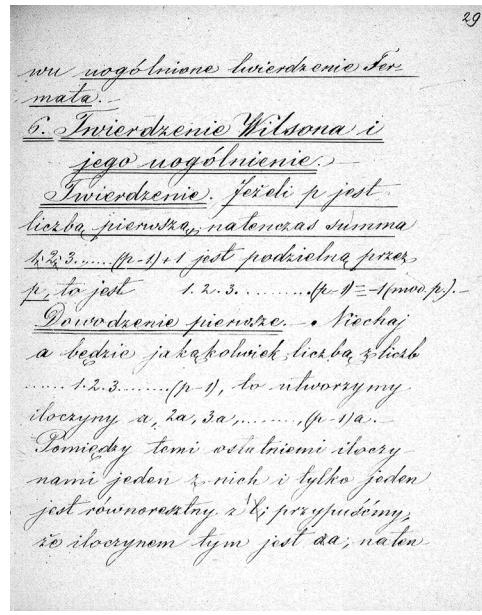
Strona tytułowa rękopisu [10]

kongruencji: jeśli $a \equiv b \pmod{n}$, to także $a \equiv b \pmod{d}$ dla każdego dzielnika d liczby n. Na odwrót: jeśli $a \equiv b \pmod{n}$ i $a \equiv b \pmod{m}$, a n i m są względnie pierwsze, to także $a \equiv b \pmod{nm}$. Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ dla dowolnych liczb a i b. W ustępie 3 udowodniony jest wzór dla funkcji φ Eulera: $\varphi(n) = n \prod(1 - \frac{1}{p})$, gdzie iloczyn rozciągnięty jest na różne dzielniki pierwsze p liczby n. Dowód tej równości, zapożyczony od Dirichleta, wszedł na stałe do podręczników teorii liczb (np. cytowany jest przez W. Sierpińskiego w jego licznych książkach z teorii liczb). Mimochodem odnotowana jest multyplikatywność funkcji Eulera: jeżeli n i m są względnie pierwsze, to $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Następnie Bayer dowodzi, że jeżeli liczba pierwsza p nie dzieli a, to kongruencja $ax \equiv b \pmod{p}$ ma jedyne mod$p$ rozwiązanie x. W ustępie 5 podane są dwa dowody Małego Twierdzenia Fermata,

w tym dowód indukcyjny Eulera. Ponadto udowodnione jest twierdzenie Eulera: jeżeli a i n są względnie pierwsze, to $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Ustęp 6 zawiera twierdzenie Wilsona[9] wraz z dwoma dowodami, a następnie jego uogólnienie (twierdzenie jest błędnie sformułowane w rękopisie). Niech $P = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ (k,n)=1}} k$. Wówczas zachodzi

Uogólnione twierdzenie Wilsona *Jeżeli* $n = 2, 4$, p^α *lub* $2p^\alpha$ (p – *nieparzysta liczba pierwsza*), *to* $P \equiv -1 \pmod{n}$. *W przeciwnym wypadku* $P \equiv 1 \pmod{n}$.


29

wu uogólnione twierdzenie Fermata.

6. Twierdzenie Wilsona i jego uogólnienie.

Twierdzenie. Jeżeli p jest liczbą pierwszą, natenczas summa $1.2.3.\ldots(p-1)+1$ jest podzielną przez p, to jest $1.2.3.\ldots(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$.

Dowodzenie pierwsze. Niechaj a będzie jakąkolwiek liczbą z liczb $\ldots 1.2.3.\ldots(p-1)$, to utworzymy iloczyny $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$. Pomiędzy temi ostatniemi iloczynami jeden z nich i tylko jeden jest równoresztny z k; przypuśćmy, że iloczynem tym jest ka; naten

Strona z twierdzeniem Wilsona w [10]

Euler (por. przypis 9) dowodzi twierdzenia Waringa–Wilsona okrężną drogą, wykorzystując istnienie pierwiastka pierwotnego mod$p$, tzn. wykorzystując fakt, że grupa multyplikatywna ciała reszt modulo p jest cykliczna. Dowód u Bayera jest powtórzeniem dowodu Dirichleta (*loc. cit.*). Fakt jest jednak znacznie ogólniejszy, a jego idea tkwi w cytowanym dowodzie Eulera. Istotnie, jeśli G jest grupą cykliczną rzędu parzystego N, a g jej generatorem, to iloczyn wszystkich elementów tej grupy

$$\prod_{k=1}^{N-1} g^k = g^{\frac{1}{2}N(N-1)} = g^{m(N-1)} = g^{-m} \quad \text{dla } N = 2m.$$

[9] Euler nazywa je konsekwentnie *twierdzeniem Waringa*, gdyż Waring pierwszy je sformułował (por. L. Euler, *Theorema a Cl. Waring sine demonstratione propositum*, Miscelanea Analytica. Op. anal. I (1775), 329–344.)

Element g^{-m} jest rzędu 2. Jeżeli teraz za G wziąć grupę multyplikatywną pierścienia reszt modulo n, to ma ona rząd $N = \varphi(n)$. W przypadku, gdy jest ona cykliczna (co ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $n = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, czyli wtedy, gdy istnieje pierwiastek pierwotny mod$n$), to iloczyn ten jest równy P, a zatem $P^2 \equiv 1 \pmod{n}$. Ponieważ P jest rzędu 2, więc $P \equiv -1 \pmod{n}$.

Ostatni ustęp 7 rękopisu Bayera poświęcony jest prawu wzajemności reszt kwadratowych i jest niemal dosłownym przytoczeniem rozumowań Dirichleta [12].

Terminologia Bayera	**współczesna terminologia**
liczby kongruentne	liczby przystające
liczby równoresztne względem modułu n	liczby przystające modulo n
liczba pierwsza	liczba pierwsza
wspólny dzielnik	wspólny dzielnik
liczba pierwsza względem danej	liczba względnie pierwsza z daną
układ zupełny reszt	układ zupełny reszt
prawo wzajemności liczb pierwszych	prawo wzajemności reszt kwadratowych

7. Informacja Dobrzyckiego [13]

W [13] odnajdujemy informację o skrypcie Bayera z teorii liczb[10], wydanym jako litografia w roku 1865 (*loc. cit.* s. 63–64). Skrypt liczył 256 stron. Ponieważ S. Dobrzycki podaje pełny spis rzeczy, ograniczę się tu więc do stwierdzenia, że tekst był nieco szerszy niż omówiony wyżej rękopis Bayera [10] i oparty na dziele Dirichleta [12]. Dobrzycki (*loc. cit.*) pisze m. in.:

> Na ss. 1–100 tego skryptu złożyła się jego rozprawa O niektórych własnościach liczb[11] [...]; pozostałe s. 101–170 stanowiły przekład (z niewielkimi skrótami) rozdziałów II, III i IV dzieła Dirichleta. Skrypt dzielił się na 3 rozdziały:
> I. Prawa podzielności i ich zastosowanie do rozwiązywania niektórych zadań arytmetycznych. [...]
> II. O resztach kwadratowych. [...]
> III. O kształtach kwadratowych. [...]

Skrypt był więc kompilacją jego wcześniejszej książki [1] i rękopisu [10], który mógł być przygotowany wcześniej, niż wynika to z podanej w tekście daty.

8. Podsumowanie

Z powyższego omówienia wynika, że do 1830 roku teoria liczb na ziemiach polskich była zupełnie nieznana. Jedynym i to elementarnym wstępem

[10] Nie udało mi się dotrzeć do tej publikacji (WW).
[11] tzn. praca [1].

do teorii liczb była książka Bayera [1]. Również na wykładach uniwersyteckich do połowy XIX wieku brakowało elementarnego wykładu teorii liczb. Pojawiały się i to tylko incydentalnie, drobne informacje dotyczące ułamków łańcuchowych i niektórych równań diofantycznych. Dopiero w drugiej połowie XIX wieku wprowadzono wykład teorii liczb w nowo powstałej Szkole Głównej Warszawskiej, mającej być kontynuacją Cesarskiego Uniwersytetu Warszawskiego (1815–1831). Ale Szkołę Główną Warszawską wkrótce zamknięto w wyniku represji po powstaniu styczniowym, jej miejsce zastępując uniwersytetem rosyjskim. W tym czasie pojawiła się w Krakowie postać, która postawiła teorię liczb na poziomie światowym. Tą postacią był Franciszek Mertens, początkowo profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, a później profesor uniwersytetów w Grazu i Wiedniu.

Bibliografia

[1] [Julian Bayer][12], O niektórych własnościach liczb, a szczególniéy o prawach ich podzielności, z zastosowaniem tychże do rozkładania liczb na czynniki całkowite pierwsze lub złożone, naznaczenia wszystkich czynników całkowitych czyli dzielników dokładnych tak pierwszych iako i złożonych, wynaydywania naywiększego spólnego dzielnika dwóch, trzech i t: d: lub ilukolwiek liczb, tudzież naymniéyszéy ich wielokrotności, skracania ułamków, i sprowadzania ich do spólnego naymniéyszégo mianownika. [Sprawozdania Szkoły Wydziałowej, Warszawa 1830. s. 91.]
La proprieté, dont jouissent certains nombres d'etre exactement divisibles par d'autres, et la recherche des des diviséurs d'un nombre forment une des theories les plus importantes de l'Arithmétique,
(*M. Bourdon Elemens d' Arithm, 4e Ed. stron 177*)

[2] _____, *Tablice liczb naturalnych od 1 do 100* (*włącznie do potęgi 2giey wymienionych*), Warszawa 1833.

[3] _____, *Kurs Matematyki w Seminaryum Głównem. 1835/36 r.*, Biblioteka Kórnicka, rks BK 1443, s. 1210 + 4 tabl. Tekst napisany b. czytelnie. Od s. 327 (do końca) inny charakter pisma.

[4] _____, *Buhalterya* (*podwójna, włoska*) *czyli Prowadzenie ksiąg handlowych*, Warszawa ok. 1860.

[5] _____, *Astronomia popularna, w druk. Banku Polskiego*, Warszawa 1861.

[6] _____, *Pogadanki astronomiczne* [*wg Amédée Guillemin*], druk. K. Kowalewski, Warszawa 1863.

[7] _____, *Rachunek prawdopodobieństwa*, Warszawa 1865.

[8] _____, *Pogadanki astronomiczne* [*wg Amédée Guillemin*], druk. K. Kowalewski, Warszawa 1868.

[12] Żaden ze znanych mi egzemplarzy tej książki nie posiada strony tytułowej. Być może oryginalne wydanie jej nie posiadało.

[9] _____, *Astrognozya czyli Nauka poznawania gwiazd*, druk. K. Kowalewski, Warszawa 1869.

[10] _____, *O kongruencyjach czyli równoresztach*, Julian Bayer, Warszawa d. 4 Kwietnia 1870 r. Biblioteka PAU, rks 23 I. k. 42.

[11] Pierre Louis Marie Bourdon, *Élémens d'Arithmétique par M. Bourdon*, ouvrage adopté par l'Université. Quatrième Édition, Paris, Bachelier 1826, s. 368.

[12] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von R. Dedekind, Professor der höheren Mathematik am Collegium Carolinum zu Braunschweig, Braunschweig 1863.

[12a] _____, *Number Theory, Supplements by R. Dedekind*, AMS and LMS 1999. przekład książki [12].

[13] Stanisław Dobrzycki, *Wydział Matematyczno-Fizyczny Szkoły Głównej Warszawskiej. Zakład Historii Nauki i Techniki PAN*, Monografie z Dziejów Nauki i Techniki, tom LXXII, Ossolineum 1971, s. 221.

[14] P.–H. Fuss, *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIIIéme Siècle*, Tome I–II, St. Pétersbourg 1843.

[15] Karol Libelt, *Wykład matematyki dla szkół gimnazyalnych.* Tom I. obejmuje: Matematykę dla klass średnich. Teoryą działań arytmetycznych i Planimetryą, Poznań. Nakładem i drukiem N. Kamieńskiego i Spółki 1844, s. 280+3 tabl.

[16] _____, *Wykład matematyki dla szkół gimnazyalnych.* Tom II. zawiera Matematykę dla klass wyższych. Teoryą Równań i Kombinacyi, tudzież Trigonometryą prostokreślną i Solidometryą, Poznań. Nakładem i drukiem N. Kamieńskiego i Spółki 1844, s. 281+3 tabl.

[17] [Karol Hube], *Kurs Wyższey Matematyki dawany w Uniwersytecie Krakowskim przez Karola Hubego. pisany przez J. Steczkowskiego w Krakowie 1823 r.*, rks BJ 4184.

[18] Jan Jaśkiewicz, *Arytmetyka*, BJ rks Acc 180/61. k. 67.1[13].

[19] Michał Pełka-Poliński, *Początki Algiebry pisane przez Mich. Pełkę Polińskiego w Mińssku od 1 Września 1810 do 1 Lipca 1813*, Bibl. Uniw. Wileńskiego rks F2 DC 150/I.

[20] Jan Kanty Steczkowski, *Kurs Analizy wyższéj wykładany w Uniwersytecie Jagiellońskim przez Prof. Jana Kant. Steczkowskiego spisany przez Słuchacza, h. Michała Grabowskiego, w Krakowie 1845 r.*, Bibl. Kórnicka: rks BK 687, k. 1–319.

[21] _____, *Wykłady matematyki*, rks BJ 4189–4192. Rks 4192 (I–IV) zawiera notatki Steczkowskiego z wykładów geometrii i algebry F. Szopowicza w roku 1821/1822.

[13] Osoby, które przeglądały ten tekst: Stefan Bryka (7. VIII 1964), Andrzej Pelczar (19. V 1998) uważały, zgodnie z kartą katalogową, że jest to rękopis Jana Śniadeckiego. Uważam jednak, że nie jest to jego rękopis, gdyż Jan Śniadecki miał inny charakter pisma. Są to zapewne notatki Jana Jaśkiewicza z wykładów Jana Śniadeckiego w Szkole Głównej Koronnej. Z pewnością nie był nim profesor Szkoły Głównej, noszący to samo imię i nazwisko, tylko inna osoba. Nie mogą to być notatki z wykładów Jana Śniadeckiego w Szkołach Nowodworskich, gdyż przez rok wykładał tam logikę, a potem wyjechał za granicę w 1778 roku. W ogóle nie ma pewności, czy ten tekst ma jakikolwiek związek z Janem Śniadeckim.

[22] Franciszek Szopowicz, *Arytmetyka czyli Nauka Liczenia przez Franciszka Szopowicza, Doktora Filozofii, Profes*: *Matematyki niższéj w Uniwersytecie Jagiellońskim* [...] *dziś Emerita Uniwersytetu Jagiellońskiego*, Kraków 1836. [Z rękopisu autora przepisał Henryk Szopowicz.] rks Ossol. 1870/II – oryginalny tekst Franciszka Szopowicza; rks Ossol. 1869/I – kopia poprzedniego dokumentu sporządzona przez Henryka, syna Franciszka Szopowicza, s. 749.

[23] Jan Śniadecki, Rachunku algebraicznego TEORYA Przystósowaná do Geometryi Linii Krzywych [...] TOM PIERWSZY Zawieraiący Algebrę na dwie części podzieloną. [...] Tom II. w którym się przez zrównaniá nieoznaczoné tłómaczą własności LINII i POWIERZCHNI KRZYWYCH. W Krakowie W Drukarni Szkoły Głównéy Koronnéy Roku 1783.

[24] Witold Więsław, Analiza matematyczna w Polsce w I połowie XIX wieku (w tomie pod red. Witolda Więsława i Włodzimierza Odyńca: *Matematyka czasów Gaussa* – XIV Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Zielona Góra 2001), 175–190.

[25] _____, *Stare polskie zadania z matematyki*, Wydawnictwo Nowik, Opole 2000, s. 152.

[26] _____, *Matematyka polska epoki Oświecenia*, Fraszka Edukacyjna, Warszawa 2007, s. 360.

[27] _____, *Podręczniki arytmetyki i algebry w Polsce w XVIII wieku*, Matematyka 1 (2008), 12–22.

The former Polish texts from number theory
Summary

We present contents of texts from number theory written for the first time in Polish, prepared by Julian Bayer (1806–1872). We mention also some persons (Karol Hube and Franciszek Szopowicz), who lectured at the Jagiellonian University incidentally some problems, now classified as number theory problems.

Witold Więsław
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
witold.wieslaw@poczta.onet.pl