Jacek Juzwiszyn, Andrzej Krzywicki (Wrocław)

LEONHARD EULER I JAKUB BERNOULLI – – POCZĄTKI TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

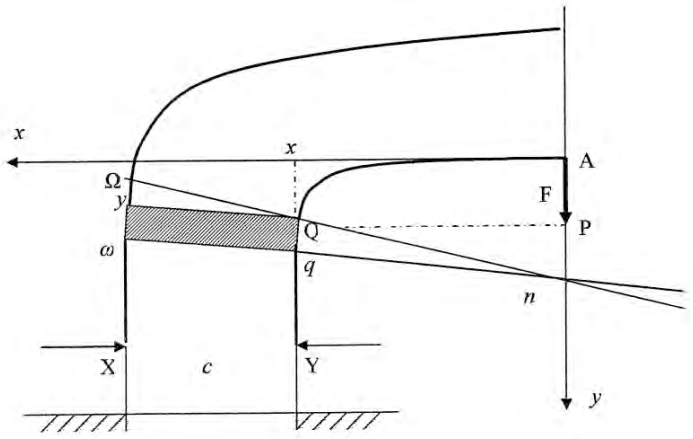
Przedmiotem naszego artykułu będą prace Leonharda Eulera z roku 1744 i Jakuba Bernoulliego z lat 1691 i 1694 poświęcone analizie kształtu płaskich krzywych sprężystych, poddanych działaniu sił zewnętrznych. Omawiając późniejszą o pół wieku pracę Eulera nie mogliśmy pominąć prac Bernoulliego – od tych właśnie prac datuje bowiem się początek nowej dziedziny mechaniki – teorii sprężystości, a porównanie ich z pracą Eulera znakomicie ilustruje wielkość przełomu, jaki dokonał się w matematyce w pierwszych dziesięcioleciach XVIII wieku, gdy do tego czasu powszechnie używane metody geometryczne zastąpiono metodami różniczkowymi. Interesująca nas praca Eulera ukazała się jako dodatek – *Additamentum I*: *De curvis elasticis* do jego traktatu poświęconego rachunkowi wariacyjnemu *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, *sive Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Lausanne 1744. Nie dysponując jej oryginalną wersją, korzystamy z niemieckiego tłumaczenia. Ukazało się ono w serii *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* nr 182, Lipsk, 1911. W tym samym tomie znajdują się również fragmenty interesujących nas prac Jakuba Bernoulliego: krótszy z pracy z roku 1691 i znacznie obszerniejszy z pracy z roku 1694. Same prace opublikowane były w *Acta Eruditorum* a następnie zamieszczone w I tomie pełnego wydania prac Jakuba: *Opera*, Geneve 1744.

Zaczniemy nasze omówienie od prac Bernoulliego. W ich tytule rozpatrywany obiekt został określony jako „taśma sprężysta" (dalej nazywać będziemy ją „belką"). W analizie Bernoulliego, jak zobaczymy dalej, istotną rolę odgrywa jej dodatnia grubość (w odróżnieniu od rozpatrywanych przez Eulera krzywych sprężystych o zerowej grubości). Rozpatrywane są tylko odkształcenia nie wychodzące z jednej płaszczyzny (jak i działające siły); belka jest jednorodna o stałej szerokości, w stanie nieodkształconym, prostoliniowa.

Bernoulli wykorzystuje dwa równania, pierwsze z nich ma czysto geometryczny charakter; dla jego przedstawienia posłużymy się, jak to czyni sam Bernoulli, rysunkiem (p. rys. 1), będącym małym fragmentem oryginalnej ryciny, zamieszczonej w pracy z roku 1694, a którą w całości reprodukujemy dalej, rys. 2.

Pionowo utwierdzona na dolnym końcu XY belka sprężysta o stałej szerokości c, której kształt opisany będzie równaniem $y = y(x)$ jej dolnego brzegu AY, obciążona na drugim końcu pionowo skierowaną siłą F; jej wielkość jest tak dobrana, że $y'(0) = 0$ (Bernoulli rozważa tylko ten szczególny przypadek).

DOI: 10.14708/am.v2i1.608



Rys. 1

„Nieskończenie cienki" element belki, mający w stanie nie odkształconym postać prostokąta ωyqQ = qQ, ωq = yQ = c (tak jak Bernoulli tym samym symbolem oznaczamy zarówno odcinek jak i jego długość) po przyłożeniu siły F przyjmie kształt $\omega\Omega q$Q, *włókno* ωy (tym pojęciem posługuje się autor) wydłuży się o wielkość $y\Omega = \Delta s$ (s – długość łuku krzywej). Z podobieństwa trójkątów $y\Omega$Q i qQn wynika równość

$$\frac{y\Omega}{yQ} = \frac{qQ}{Qn} \quad \text{czyli} \quad \frac{\Delta s}{c} = \frac{ds}{Qn} = \frac{d^2y}{dxds}\,ds\,,$$

gdyż Qn jest promieniem krzywizny krzywej w punkcie Q, $\frac{1}{Qn} = \frac{d^2y}{dxds}$ (trójścian Freneta!).

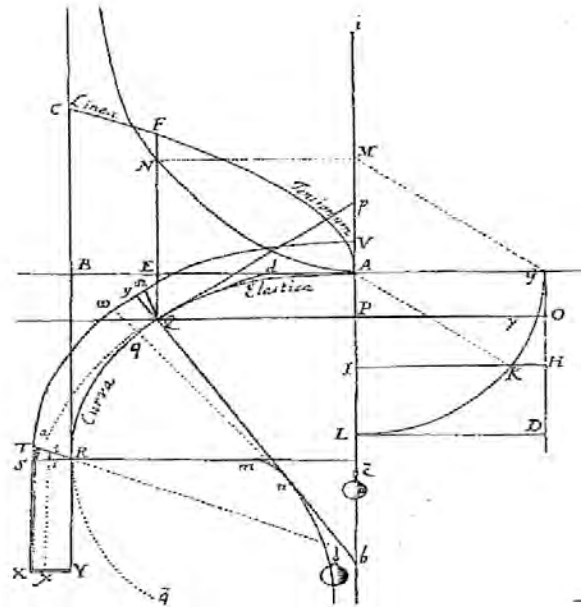
Drugie równanie, z którego korzysta Bernoulli, jest specjalną postacią prawa Hooke'a wyrażonego z pomocą pojęcia „momentu gnącego". Warto przypomnieć, że prawo to było jedynym istotnym odkryciem dokonanym w XVII wieku w zakresie zachowania się ośrodków sprężystych. Wyrażone w formule *ut tensio sic vis* dopuszczało możliwość różnego rozumienia obu terminów: *tensio* – zmiana kształtu, *vis* – przyczyna. Współczesną postać prawa liniowej zależności odkształcenia od siły działającej nadał mu Th. Young (1807). Bernoulli stosuje to prawo w postaci proporcjonalności momentu $F{\cdot}x$ siły F względem punktu Q i wydłużenia względnego $\Delta s/ds$, ($ds = \omega y$)

$$F{\cdot}x = const\ \Delta s/ds,$$

czyli proporcjonalności, przy ustalonej wielkości pionowo działającej siły F, wielkości $\Delta s/ds$ i współrzędnej x. Dla uzasadnienia tej równości, p. rys. 1.

Bernoulli proponuje zastąpić oddziaływanie, jakie na rozważany element wywiera część QA odkształconej belki równoważnym mu oddziaływaniem sztywnej dźwigni yQP „przyklejonej" wzdłuż boku yQ i mogącej się obracać swobodnie wokół nieruchomego punktu Q pod wpływem pionowo działającej siły F; równowaga nastąpi, gdy dźwignia przyjmie położenie ?QP. Rugując z dwóch ostatnich równań wielkość $\Delta s/ds$ otrzymamy równanie

$$x = const\frac{d^2y}{dxds}.$$



Rys. 2

Stałą (zależną od *F*) w ostatnim równaniu Bernoulli oznacza przez $a^2/2$. Całkując je względem *x* otrzymujemy $a^2 \frac{dy}{ds} = x^2$. Bernoulli pomija (zapomina?) stałą całkowania, przez co wyklucza całą klasę rozwiązań. Zapisane w różniczkach ostatnie równanie przyjmie postać

$$a^2 dy = x^2 \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

a stąd $dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ i ostatecznie wyznaczenie kształtu pręta sprowadza się do obliczenia całki eliptycznej.

Bernoulli podaje jeszcze inne wyprowadzenie równania dla szukanej funkcji bez wykorzystywania pojęcia momentu siły, przyjmując zamiast tego założenie, iż naprężenie w belce w punkcie Q jest proporcjonalne do jego współrzędnej *x*.

Przedstawiony wyżej wynik prezentuje Bernoulli zupełnie inaczej – mianowicie w postaci formalnego opisu kolejnych kroków elementarnych konstrukcji geometrycznych. Początek tego opisu wygląda tak: (p. rys. 2): jeśli krzywa AFC (*linea tensiorum*) przedstawia rozkład naprężeń wzdłuż pręta jako funkcję współrzędnej *x*, wówczas

> *należy narysować kwadrat AGDL, którego pole jest równe polu ABC, a w nim ćwiartkę okręgu GKL oraz prostokąt AGHI o polu równym polu figury AEF (E – bieżąca współrzędna punktu szukanej krzywej). Łączymy punkt K – przecięcia boku IH z ćwiartką okręgu – z punktem A, odcinek AK przenosimy równolegle do położenia MG itd...*

Zawoalowana forma przedstawienia wyniku była świadomym zamiarem Bernoulliego: w tytule pracy autor zapowiada, że znalezione rozwiązanie podane w niej będzie *w postaci rebusu*. Takie to były wtedy zwyczaje. Opis analityczny konstrukcji pojawił się dopiero w roku 1744 w komentarzu do omawianej pracy w I tomie zebranych dzieł autora. Czy jego autorem był sam Bernoulli skoro zmarł w roku 1705? Trudno oprzeć się

podejrzeniu, że znaleziony wcześniej na drodze analitycznej wynik autor „przetłumaczył" do opublikowanej postaci, a nieukrywana przez Bernoulliego niechęć do metod różniczkowych skłoniła go do ukrycia faktu korzystania z nich.

Praca Eulera ma – w porównaniu z omówionymi wyżej pracami – postać już niemal współczesną, temat jest potraktowany dużo obszerniej: rozpatrywane są krzywe niejednorodne, przypadek działania większej ilości sił, analizowane są również drgania sprężyste krzywych; podobnie jak poprzednie rozważania dotyczą sytuacji dwuwymiarowej.

W naszym omówieniu ograniczymy się do przypadku siły działającej na swobodny koniec krzywej, której drugi koniec jest sztywno utwierdzony (co oznacza, że oprócz położenia ustalony jest w nim również kierunek stycznej).

Punktem wyjścia Eulera jest sformułowanie wariacyjne. We wstępie Euler szeroko uzasadnia wybór tej metody. „Ponieważ cały wszechświat stworzony przez najmędrszego Stwórcę został zaplanowany w sposób najdoskonalszy, nic nie dzieje się w świecie inaczej niż wedle zasady maksimum lub minimum. Dlatego jest rzeczą niewątpliwą iż wszystkie procesy na świecie można wywieść z tej zasady". W rozpatrywanym przypadku *całkowita siła zawarta w odkształconej krzywej elastycznej* – pisze dalej Euler – *może być przedstawiona jedną wielkością nazwaną przez niego* [Daniela Bernoulliego] *siłą potencjalną i wielkość ta w przypadku krzywej elastycznej musi przyjmować wartość minimalną*. Ma ona postać całki

$$\int_E \frac{ds}{R^2},$$

gdzie $1/R$ jest krzywizną, s – długością łuku krzywej elastycznej E – o czym powiadomił Eulera Daniel Bernoulli w liście z dnia 20 października roku 1742, proponując Eulerowi rozwiązanie tego problemu z rachunku wariacyjnego, ponieważ *nikt tak świetnie jak on nie opanował metody izoperymetrycznej*. Jeśli więc E jest dowolnie odkształconą płaską krzywą sprężystą, jednorodną, która w stanie nie odkształconym ma postać odcinka prostoliniowego, jej kształt będzie określony przez rozwiązanie następującego zagadnienia wariacyjnego: wśród krzywych o zadanej długości łączących punkty A, B i zadanych kierunkach stycznych w tych punktach znaleźć krzywą dla której całka

$$I = \int_A^B \frac{ds}{R^2}$$

(w przypadku nieprostoliniowego stanu nieodkształconego E_0 wyrażenie $1/R$ w całce zastąpić należy przez $(1/R - 1/r)$, gdzie r – krzywizna krzywej E_0) przyjmuje wartość minimalną, a długość krzywej $\int_A^B ds$ jest dana.

Odpowiadające temu zagadnieniu równanie Eulera (Euler wie, jak uwzględnić warunek uboczny z pomocą *mnożnika Lagrange'a*) jest równaniem czwartego rzędu. Po trzykrotnym scałkowaniu i przeskalowaniu przyjmie ono postać równania różniczkowego

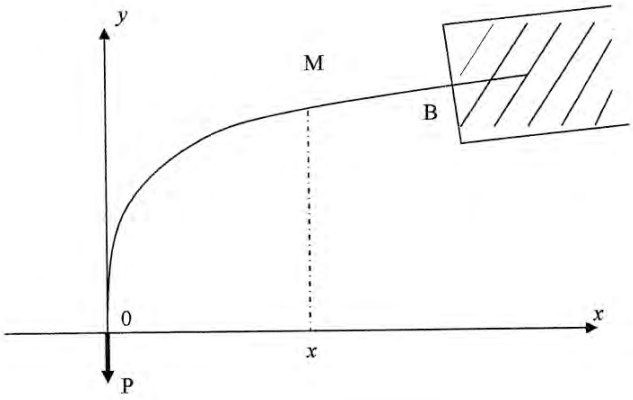
$$dy = \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}}, \tag{1}$$

w którym występują cztery stałe dowolne (doszedł mnożnik Lagrange'a), a stąd

$$ds = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}},$$

gdzie a, α, β, γ oznaczają stałe dowolne. Rozwiązania wyrażają się więc przez całki eliptyczne. Teraz Euler nawiązując do prac Bernoulliego pokazuje, że to samo równanie można otrzymać wychodząc z zasady momentów, obie metody są więc równoważne.

Rozpatrzmy sytuację, nieco uproszczoną w porównaniu z oryginalną w pracy, przedstawioną na rys. 3. Zginająca siła P ma kierunek prostopadły do osi Ox.



Rys. 3

Z zasady momentów wynika równość

$$-Mom_M P = \frac{Ek^2}{R}$$

(której prawą stronę Euler nazywa *siłą elastyczną*), czyli

$$Px = -\frac{Ek^2 y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

gdzie Ek^2 (oznaczenie Eulera) jest współczynnikiem sztywności krzywej (znak minus uwzględnia wklęsłość krzywej). Całkując ostatnie równanie otrzymujemy

$$P\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right) = -\frac{Ek^2 dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

a stąd

$$dy = -\frac{P\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)dx}{\sqrt{E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)^2}},$$

czyli równanie równoważne z (1). Z ich porównania otrzymujemy w szczególności

$$P = -\frac{2Ek^2\gamma}{a^2}. \tag{2}$$

Dalej Euler rozpatruje pewne szczególne sytuacje (np. gdy siła P ma kierunek stycznej do krzywej w punkcie zamocowania B krzywa jest półokręgiem).

Następuje teraz najciekawsza w całej pracy dyskusja nad możliwymi postaciami

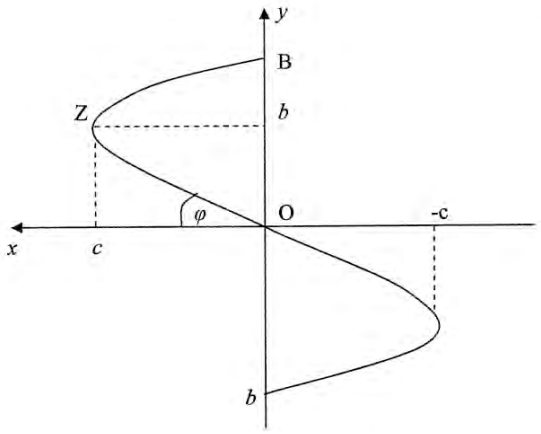
odkształconej krzywej. Punktem wyjścia jest równanie (1), w którym dokonano przesunięcia $x \to x + \beta/2\gamma$ i a^2/γ zastąpiono przez a^2:

$$dy = \frac{(\alpha + x^2)dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}}.$$

Kładąc $\alpha = a^2 - c^2$ otrzymujemy ostatecznie równanie

(3) $$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}.$$

Eulera interesują rozwiązania znikające w zerze. Zauważmy, że $y(x)$ jest funkcją nieparzystą



Rys. 4

(oś x tak właśnie skierował Euler). W punkcie $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - c^2}{c\sqrt{2a^2 - c^2}} = \operatorname{tg}\varphi$; stąd $\sin\varphi = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$. Porównując równania (1) i (3) widać, że $\gamma = 1$ we wzorze (2) można pominąć czynnik γ:

$$P = -2\frac{Ek^2}{a^2}.$$

Szukane rozwiązania Euler parametryzuje przy pomocy wielkości a^2. Zaczyna od przypadku, gdy $a = \infty$. Wtedy siła P = 0, sin φ = 1, a więc krzywa w punkcie $x = 0$ jest prostopadła do osi x. Rozwiązaniem jest linia prosta pokrywająca się z osią Oy – będąca postacią nieodkształconą krzywej – co zgadza się z faktem znikania siły P.

Gdy a^2 maleje, maleje też sin φ a więc i kąt φ. Dla $a^2 = c^2$, *sin* $\varphi = 0$ styczna do krzywej w punkcie $x = 0$ pokrywa się z osią x; $\varphi = 0$, a gdy $a^2 < c^2$ kąt φ jest ujemny, przyjmując wartość $-\pi/2$ dla $a^2 = 1/2c^2$. Dalej, pisze Euler, gdy $a^2 < 1/2c^2$, kąt φ *jest urojony, więc punkt A nie należy do żadnej części krzywej*.

W punktach $x = \pm c$ pochodna $dy/dx = \infty$, poza przedziałem (–c, c) prawa strona równania (3) jest nieokreślona, więc krzywa nie wykracza poza ten przedział. Mimo to Euler pyta o jej dalszy przebieg. Po przesunięciu początku układu do punktu Z, a więc kładąc

$t = c - x$, $u = b - y$, w nowych zmiennych t, u równanie (3) przyjmie postać

$$du = \frac{(a^2 - 2ct + t^2)dt}{\sqrt{t(2c-t)(2a^2 - 2ct + t^2)}},$$

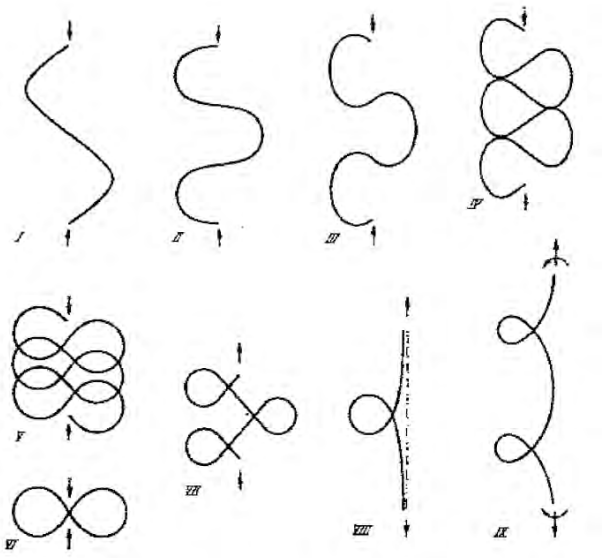
a stąd, dla małych t, ostatnie równanie będzie można zastąpić przez $du = \frac{a^2 dt}{2a\sqrt{ct}}$.

Po scałkowaniu $u = a\sqrt{\frac{t}{c}}$.

Ostatnie równanie pokazuje, że krzywa powyżej punktu Z biegnie do punktu B w podobny sposób jak biegła od punktu Z do punktu 0; dwuznaczność pierwiastka kwadratowego jest dla Eulera dostatecznym wyjaśnieniem faktu, że u może przyjąć zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Można więc znaleziony wcześniej odcinek krzywej przedłużyć do punktów b, B, w których sytuacja jest podobna jak w punkcie $x = 0$ itd. Powtarzając tę konstrukcję rozciągniemy krzywą wzdłuż całej osi Oy. W ten sposób Euler pokazuje okresowość pewnego szczególnego przypadku funkcji eliptycznej.

Przez dalsze zmniejszanie parametru a^2 Euler otrzymuje kolejne możliwe postacie krzywych; załączona ilustracja (zaczerpnięta z *Razvitě idej Lěonarda Eilera i sovreměnnaia nauka*, Moskwa 1988) wyjaśnia to lepiej niż opis słowny.



Rys. 5

Osobnej analizy wymagają przypadki noszące na rysunku numery VIII i IX, Eulera interesują też liczbowe charakterystyki krzywych, takie jak długość odcinka OB, łuku OB krzywej itd. Wyrażające je całki eliptyczne Euler rozwija w szeregi.

Powróćmy jeszcze do początkowej analizy równania (3): gdy $c = 0$ rozwiązaniem jest linia prosta – stan nieodkształcony. Bliskie mu rozwiązanie będzie odpowiadać

małym wartościom c; wielkość ta może więc być zaniedbana w porównaniu z a. Ale wtedy można również zaniedbać x, gdyż $|x| \le c$ i w tym przypadku przybliżoną postacią równania (3) będzie równanie

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}}, \tag{4}$$

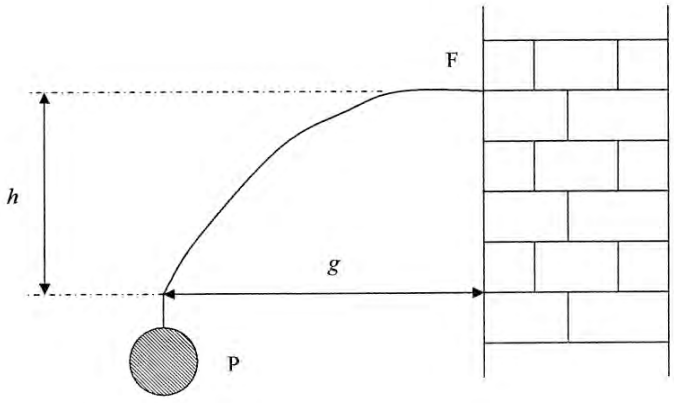
a jego całką $y = \frac{a}{\sqrt{2}} arc\sin\frac{x}{c}$ czyli $x = c\sin\sqrt{2}\frac{y}{a}$. Odcinek między kolejnymi zerami tej ostatniej funkcji ma długość $\frac{\pi a}{\sqrt{2}}$, która dla małych c, gdy krzywa jest bliska osi Oy, jest bliska długości $2f$ odcinka OZB krzywej czyli $a = \frac{2\sqrt{2}f}{\pi}$, patrz rys. 4. Podstawiając tę wartość do wzoru (2) ($z\ \gamma = 1$) określającego wielkość przyłożonej siły P otrzymujemy, z dokładnością do znaku,

$$P = \frac{Ek^2\pi^2}{4f^2}. \tag{5}$$

Wzór powyższy określa minimalną wartość siły, która spowoduje wygięcie odcinka OZB krzywej. Ale jeśli wyobrazimy sobie, że w miejsce krzywej mamy pionowo ustawioną kolumnę, a „wyboczenie" powoduje jej złamanie, znaleziona wartość P będzie określać jej wytrzymałość: pionowe obciążenie siłą mniejszą od P nie spowoduje jej zniszczenia.

Do sprawy tej jeszcze powrócimy. Zauważmy przy okazji, że Euler nie formułując tego wyraźnie, rozwiązał zagadnienie brzegowe dla równania (4) z zerowymi warunkami na końcach przedziału $(0, 2f)$.

Euler nie pozostawia bez wyjaśnienia pytania o wyznaczenie współczynnika Ek^2. W tym celu proponuje rozważyć następującą sytuację:

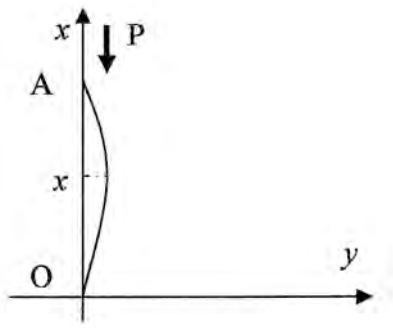


Rys. 6

Interesująca nas jednorodna krzywa sprężysta o równaniu $y = y(x)$ jest utwierdzona poziomo na końcu F. Na jej drugim końcu zawieszony jest ciężar P powodujący ugięcie belki na tyle małe, że możemy długość krzywej zastąpić wielkością jej rzutu g. W tym przybliżeniu współczynnik sztywności Ek^2 wyraża się wzorem

$$Ek^2 = \frac{Pg^2(2g-3h)}{6h}.$$

Ważnemu praktycznie zagadnieniu wytrzymałości kolumn poświęcił Euler wiele prac, wśród nich obszerną pracę *Sur la force des colonnes* (Mémoires de l'Académie roy. des sc. de Berlin XIII. 1757). Rozpatruje w niej kolumny o zmiennym przekroju, rozważa różne sposoby linearyzacji zagadnienia. Oto jeden z najprostszych: krzywa OA na rysunku poniżej obrazuje



Rys. 7

kolumnę jednorodną o stałym przekroju, której reakcję na zginanie określa współczynnik Ek^2; obciążona ciężarem P ulega wygięciu, jej kształt opisuje funkcja $y = y(x)$. Jeśli przyjmiemy, że odchylenie od pionu jest tak małe, że krzywiznę w punkcie x możemy zastąpić przez y'', wówczas stan jej równowagi opisany jest równaniem momentów $Py = -Ek^2 y''$, czyli $y'' + \frac{P}{Ek^2} y = 0$, uzupełnionym warunkami brzegowymi $y(0) = y = y(2f) = 0$; $2f$ = OA, oznacza wysokość kolumny. Rozwiązując to zagadnienie otrzymujemy wzór na wielkość siły P – wcześniej znalezione wyrażenie (5). A jeśli siła jest mniejsza? Euler pisze: *zasada ciągłości wymaga, aby również przy mniejszych obciążeniach nastąpiło niezauważalne wygięcie kolumny* (pamiętajmy, że w pojęciu Eulera funkcja nie mogła się „kończyć" w punkcie). Aby wyjaśnić ten paradoks musimy zgodzić się z tym, że jeśli *obciążenie kolumny jest mniejsze od P, wygięcie kolumny jest urojone*. Euler rozważa różne sposoby zamocowania kolumny; otrzymane wzory, jak i ten ostatni, są do dziś używane w zagadnieniach wytrzymałości.

Jacek Juzwiszyn, Andrzej Krzywicki
Wyższa Szkoła Handlowa we Wrocławiu
ul. Fabryczna 14
53–609 Wrocław