Lech Maligranda (Luleå)

SZEREGI W PRACACH EULERA

1. Leonard Euler – krótkie omówienie jego życia

Leonard Euler urodził się 15 kwietnia 1707 roku w Bazylei. W latach 1720-1723 odbył studia teologiczne na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu w Bazylei. Odnotujmy, że rozpoczynając studia miał zaledwie 13 lat! Dodatkowo studiował też matematykę i mechanikę pod kierunkiem Johana Bernoulliego. W 1725 roku napisał swoją pierwszą pracę naukową (miał wtedy tylko 18 lat).

W dniu 17 maja 1727 roku Euler został adiunktem w Akademii Petersburskiej w zakresie fizjologii. Otrzymał zaproszenie Piotra Wielkiego do objęcia posady po śmierci Mikołaja Bernoulliego, z pensją 300 rubli rocznie oraz 130 rubli diety na podróż do Petersburga. Euler miał za zadanie stosować metody matematyczne w fizjologii. W 1731 roku został profesorem fizyki i członkiem Akademii. Dwa lata później został profesorem matematyki na miejsce Daniela Bernoullego.

Siódmego stycznia 1734 roku ożenił się z Katarzyną Gsell (1707-1773), córką szwajcarskiego malarza pracującego w gimnazjum w Petersburgu. Mieli 13 dzieci, z których przeżyło tylko 5 tzn. trzech synów i dwie córki: Johann Albrecht (1734-1800), Karl Johann (1740-1790), Helena (1741-1781), Christoph (1743-1808) i Charlotte (1744-1780).

Euler twierdził, że

> *największych odkryć matematycznych dokonał gdy na rękach miał jedno dziecko, a z innym się bawił nogami.*

W roku 1735 Euler utracił wzrok w prawym oku. Euler opuścił Petersburg 19 czerwca 1741 roku. Otrzymał zaproszenie od króla Prus, Fryderyka II, by zorganizować Akademię Nauk w Berlinie. 25 lipca 1741 roku przybył więc do Berlina, gdzie zajmował się artylerią, hydrodynamiką, hydrauliką i teorią maszyn. W roku 1746 został członkiem Londyńskiego Towarzystwa Królewskiego, a w 1753 roku kupił posiadłość w Charlottenburgu (sprzedał ją w 1763 r.). W roku 1755 został członkiem Paryskiej Akademii Nauk.

Po problemach z królem Fryderykiem II (chodziło o sprawy związane z kierowaniem Akademią oraz jej finansami), Euler opuścił Berlin 7 czerwca 1766 roku by ponownie udać się do Petersburga. W czasie podróży do Petersburga był on około tygodnia w Warszawie, przyjmowany z wielkimi honorami przez króla Stanisława Augusta. Pod koniec czerwca 1766 roku Euler przybył do Petersburga, przyjęty przez carycę Katarzynę II. Otrzymał zadanie nadzoru nad Akademią Petersburską. Po kilku miesiącach Euler stracił widzenie na lewe oko w tym sensie, ze rozróżniał tylko duże litery. Swoje prace zaczął więc dyktować. W roku 1772 stracił wzrok całkowicie. Po operacji usunięcia katarakty oka na krótki czas odzyskał wzrok, ale po kilku tygodniach infekcja spowodowała jego całkowitą ślepotę na pozostałe 11 lat życia.

W 1773 roku zmarła mu żona i Euler ożenił się w 1776 roku z jej siostrą Salomeą Gsell. Euler do końca życia był obywatelem Szwajcarii, choć synowie przyjęli obywatelstwo rosyjskie.

Odznaczał się fenomenalną pamięcią. Był tym rzadkim typem człowieka, który raz czytając lub słysząc, zapamiętywał prawie wszystko dokładnie. Ta pamięć pozwoliła Eulerowi pracować, gdy stracił wzrok. Pamiętał np. *Eneidę* Wergiliusza i mógł całą recytować słowo po słowie, pamiętając na jakich słowach każda strona się kończy i następna zaczyna. Euler do ostatnich chwil życia zachował dużą sprawność fizyczną i umysłową. Zmarł 18 września 1783 roku na udar mózgu i pochowany został na cmentarzu luterańskim w Petersburgu. Dzień śmierci tak opisał Juszkiewicz ([Yo70, s. 473]):

> *18 września 1783 roku Euler pierwszą połowę dnia spędził jak zwykle. Miał lekcje matematyki dla jednego z wnuków, robił obliczenia kredą na dwóch tablicach odnośnie ruchu balonów. Dyskutował z Lexellem i Fussem niedawne odkrycie planety Uran. Około piątej po południu dostał udaru mózgu i wypowiedział tylko „umieram" przed tym jak stracił przytomność. Zmarł wieczorem około jedenastej.*

W 1837 roku Petersburska Akademia Nauk postawiła tam pomnik.
Euler żył więc: 20 lat w Szwajcarii (1707-1727), 14 lat w Rosji (1727-1741), 25 lat w Berlinie (1741-1766) i ponownie 17 lat w Rosji (1766-1783).

Euler był największym matematykiem swojej epoki. XVIII wiek można nazwać w historii nauk matematyczno-fizycznych wiekiem Eulera. W szczególny sposób wyraził to w swych listach do Eulera jego nauczyciel Jan Bernoulli, nazywając go:

> *w r. 1728 najbardziej uczonym i najzdolniejszym młodzieńcem,*
> *w r. 1731 najsławniejszym i najbardziej uczonym panem profesorem, najdroższym przyjacielem,*
> *wreszcie w r. 1746 księciem matematyków (mathematicorum princeps).*

Więcej o życiu Eulera można znaleźć np. w [Yu70], [OR06], [Va06], [Wi00] i [Wi06].

2. Dorobek naukowy Eulera i indeks Eneströma prac Eulera

Na dorobek naukowy Leonarda Eulera składają się prace naukowe i książki w liczbie około 800. Dokładną liczbę jest trudno ustalić liczba oficjalnych pozycji w indeksie Eneströma to 866, ale ten indeks ma w wykazie również listy i nieopublikowane manuskrypty Eulera.

Pierwszą pracę Euler napisał w 1725 roku. Została opublikowana w 1726 roku. Euler zmarł w 1783 r., ale prace były wydawane jeszcze do roku 1862 tzn. 79 lat po jego śmierci!

Rozkład w dekadach 816 książek i artykułów napisanych przez Eulera był następujący (wyliczone z indeksu Eneströma): 1720-30: 12, 1730-40: 71, 1740-50: 119, 1750-60: 131, 1760-70: 108, 1770-80: 308, 1780-90: 67. Z tego 10%, a dokładniej 82 prace dotyczyły szeregów.

Działy nauki w jakich Euler opublikował prace to: analiza rzeczywista i zespolona (w tym szeregi) – 107 prac, rachunek różniczkowy i całkowy – 101 prac, arytmetyka i teoria liczb – 85 prac, geometria – 138 prac, rachunek prawdopodobieństwa – 11 prac, mechanika – 137 prac, astronomia – 82 prace, kartografia, fizyka, optyka, filozofia, hydrostatyka i hydrodynamika, budowle, nauki morskie, artyleria i inne. Euler był autorem około 20 książek, mających czasami dwa lub trzy tomy. Trzy najważniejsze książki Eulera z analizy matematycznej to trylogia (*„trylogia"* Eulera):

1. *Wstęp do analizy nieskończoności* [*Introductio in analysin infonitorum*], Lozanna 1748 – 2 tomy.
2. *Rachunek różniczkowy...* [*Institutiones calculi dięrentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*], Akademia Peterburska, Berlin 1755 – 2 tomy.
3. *Rachunek całkowy* [*Institutionum calculi integralis*], Petersburg 1768-1770 – 3 tomy i suplement poświęcony równaniom różniczkowym.

Trylogia Eulera stała się wzorem dla następnych podręczników i dla nauczania analizy. Inne książki Eulera to: *Mechanika*, Petersburg 1736, 2 tomy; *Metoda znajdowania linii krzywych, mających pewne własności maksimum i minimum*, Lozanna-Genewa 1744; *Nowe zasady artylerii*, Berlin 1745 [był to niemiecki przekład angielskiego dzieła B. Robinsona, lecz uzupełnienia Eulera do balistyki przekraczają pięciokrotnie objętość tekstu autora]; *Nauka morska*, Petersburg 1749; *Teoria ruchu Księżyca*, 1753; *Teoria ruchu ciał sztywnych*, Rostok 1765; *Pełny wykład algebry*, Petersburg 1768, 1770; *Listy do niemieckiej księżniczki o różnych problemach filozofii i fizyki*, Petersburg 1768-1772, 3 tomy; *Dioptryka*, Petersburg 1769-1771, 3 tomy; *Teoria ruchu Księżyca, przedstawiona nową metodą, Petersburg* 1772 (wspólna z J. A. Eulerem, Kraftem i Lexellem); *Całokształt teorii budowy i sterowania okrętów*, Petersburg 1773.

Prace i książki Eulera zostały wydane w *Dziełach Zebranych* przez wydawnictwo Birkhäuser: *Leonhard Euler*, *Opera Omnia*. Są to 4 serie i liczą 80 tomów: Seria I – Matematyka = 29 tomów (publikowane włatach 1911-1956), Seria II – Mechanika i astronomia = 31 tomów (publikowane w latach 1912-1996), Seria III – Fizyka i rozmaite = 12 tomów (publikowane w latach 1926-1960), Seria IV A – Korespondencja = 8 tomów (publikowane w latach 1975 - obecnie), Seria IV B – Rękopisy = w przygotowaniu.

Książka Eulera *Wstęp do analizy nieskończoności* z 1748 roku to jedna z najbardziej znanych i najważniejszych książek matematycznych, kiedykolwiek napisanych. Moim zdaniem trzecia po *Elementach* Euklidesa i *Principiach* Newtona. Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Cambridge (USA) w 1950 roku, znany historyk matematyki Carl B. Boyer wygłosił nawet odczyt historyczny o książce Eulera pt. *Najważniejszy podręcznik czasów nowożytnych*, gdzie wymienia książę Eulera wśród najważniejszych podręczników matematycznych do których zalicza *Elementy* Euklidesa, *Algebrę* al-Chorezmi (*Al-jabr*, Al-Khwarizmi), *Geometrię* Kartezjusza, *Principia* Newtona i *Disquisitiones* Gaussa. Książka Eulera *Introductio* 260 i 20 lat temu ma, co jest zadziwiające, prawie współczesne oznaczenia i terminologię. Podobnie jest z jej zawartością.

Doczekała się ona 21 wydań w następujących językach: po łacinie – 1748, 1783, 1797, 1835, 1922, 1967, 1987, 1995; po francusku – 1786, 1796, 1835; po niemiecku – 1788, 1835, 1885, 1983; po rosyjsku – 1938, 1961; po angielsku – 1988 I tom, 1990 II tom; po hiszpańsku – 2000. Szeregi omawiane są w niej w rozdziałach: IV, VII, VIII i X.

Dorobek naukowy Eulera jest szeroko omawiany w książkach [Ju77], [Du99] i [Va06] oraz w [Yu70] i [OR06].

W latach 1910-1913 szwedzki matematyk Gustaf Eneström (1852–1923) skompletował prace Eulera.[1]

[1] Pierwszy spis prac Eulera opracował w 1843 roku Paweł N. Fuss (prawnuk Eulera) – patrz [Fu43].

3. Nazwisko Eulera w analizie matematycznej – kilka słów

Istnieje zbyt wiele rezultatów Eulera w analizie, aby je tu przedstawiać całościowo. Wspomnę więc tylko o najważniejszych jego wynikach. Po pierwsze, Euler wprowadził symbole i notacje, których używamy do dzisiaj. Można wśród nich wymienić następujące, z datą pojawienia się u Eulera: liczba e (1727), litera i na $\sqrt{-1}$, od 1734 roku używał symbolu $f(x)$ na funkcję, a od 1748 roku symboli sin x; cos x; tan x na funkcje trygonometryczne, od 1755 roku symbolu $\sum$ na sumę, a od 1755 roku symboli $\Delta^2 x$ na różnice. Z ważnych rezultatów Eulera w analizie wspomnimy tylko niektóre: wzór *Eulera*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$

z 1748 roku[2], w szczególności $e^{i\pi} = -1$ (1727); równości

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n, \tag{2}$$

skąd liczbę e Euler wyliczył z dokładnością do 18 miejsc po przecinku; *równość Eulera* z 1735 roku

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \tag{3}$$

stałą Eulera-Mascheroniego (1735): $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.577215\ldots;$

wzór sumaryczny Eulera-Maclaurina (1732, 1736, 1738). Używał też funkcji *gamma i beta:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \ \operatorname{Re} z > 0, \ B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

oraz wykazał lub zaobserwował, że gdy $z \in \mathbf{C} \setminus \{0; -1; -2; \ldots\}$, to

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}$$

oraz

$$\Gamma(n) = (n-1)! \ \text{ i } \ B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

[2] Musimy tutaj odnotować, że Roger Cotes wykazał tę równość jako pierwszy tzn. w 1714 roku w postaci $\ln(\cos x + i \sin x) = ix$.

4. Szeregi w pracach Eulera

Omawianie szeregów w pracach Eulera rozbijemy na 4 części, a słynny rezultat o sumie odwrotności kwadratów wraz z uogólnieniami przedstawimy w części piątej.

4a. Euler – mistrz przekształceń szeregów i „wszystko jest zbieżne"

Matematycy XVII i XVIII wieku nie całkiem rozróżniali szeregi zbieżne od rozbieżnych, choć mówili o skończonej sumie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Wiązało się to z różnymi paradoksami. Już Guido Grandi (1671-1742) w 1703 roku zauważył, że podstawiając $x = 1$ w rozwinięciu

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}$$

otrzymamy

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Z drugiej strony, grupując wyrazy parami otrzymamy

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

i interpretował to jako symbol stworzenia świata z niczego. Euler twierdził, że suma w (4) jest równa $\frac{1}{2}$. Miał też, oprócz powyższego, inny argument. Mianowicie, jeśli $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = s$, to $s = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - s$; czyli $2s = 1$ i stąd $s = \frac{1}{2}$.

Leibniz pisał w 1712 roku, że suma byłaby równa 0, gdyby nieskończona liczba wyrazów była parzysta i równa 1, gdyby była nieparzysta, ale nie ma rozsądnej podstawy z góry przypuszczać, że liczba ta jest parzysta albo nieparzysta. Twierdził też, że należy przyjąć sumę jako średnią arytmetyczną 0 i 1, czyli $\frac{1}{2}$.

W 1713 roku Mikołaj Bernoulli w liście do Leibniza używał określenia *series diverges*, a Leibniz w odpowiedzi używa terminu *series adverges*. Przypomnijmy, że znane już było kryterium całkowe zbieżności oraz kryterium Leibniza zbieżności szeregu naprzemiennego.

Euler nie troszczył się w ogóle o kwestie zbieżności szeregu, lecz przypisywał każdemu szeregowi po prostu wartość tego wyrażenia, które dało powód do utworzenia szeregu. Lagrange jeszcze w 1770 roku uważał, że każdy szereg, którego wyrazy maleją do zera, ma określoną wartość.

Euler bez wahania pisał, jako wniosek z równości

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x},$$

że mamy również równość dla $x = 2$:

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Ponadto różniczkował wyraz po wyrazie pisząc: $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \ldots = -\frac{1}{(1+x)^2}$ i po podstawieniu $x = 1$ otrzymywał $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4}$. Rozważał też np. szereg $1 - 2!x + 3!x^2 - 4!x^3 \ldots$, który jest zbieżny tylko dla $x = 0$.

Euler zawsze uważał szereg za dopuszczalny, jeśli wynikał w naturalny sposób przez rozwinięcie analitycznego wyrażenia, które miało ze swej strony określoną wartość. Tę to wartość uważał w każdym przypadku za sumę szeregu. W liście do Goldbacha z 7 sierpnia 1745 roku pisał (por. [Kn56], s. 496):

> *...w ten sposób dałem tę nową definicję sumy każdego szeregu: summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.*

Euler nie był zainteresowany ogólnymi rozważaniami o szeregach. W przypadku p-szeregu argumentował, że gdy $0 < p < 1$ to

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^p} > \frac{N}{(2N)^p} \frac{N^{1-p}}{2^p} \to \infty, \text{ przy } N \to \infty.$$

W 1734 roku sformułował jednak kryterium zbieżności, choć brak jest u niego terminu zbieżność i to nawet w książkach: jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny to $\lim_{n\to\infty}(S_{kn} - S_n) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Euler pisał:

> *gdy* $\sum a_n$ *ma skończoną sumę, to* $S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *są blisko* S *dla dostatecznie dużych N.*

Brak było jednak faktu, że $S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$ jest skończone, gdy S_N są bliskie siebie dla dużych N. To dopiero podał Cauchy w 1821 roku (obecnie nazywa się to warunkiem Cauch'ego).

Zacytujmy samego Eulera (patrz [OR06]):

> *Godnymi uwagi są kontrowersje wokół szeregu 1 - 1 + 1 - 1 + ..., którego suma została podana przez Leibniza jako 1/2, chociaż inni się nie zgadzają* [...]. *Rozumienia tej kwestii należy szukać w słowie ,,suma"; ta idea, jeśli zrozumiała - mianowicie, sumą szeregu nazywamy wielkość do której zbliżamy się coraz bardziej gdy bierzemy więcej składników szeregu - ma zastosowanie tylko do szeregów zbieżnych, i dlatego powinniśmy podać definicję sumy szeregu rozbieżnego.*

Jeszcze w 1826 roku Niels Henrik Abel pisał:

> *Szeregi rozbieżne to wymysł diabła, i to wstyd opierać na nich jakikolwiek dowód. Używając ich można wypisać dowolny wniosek jaki chcemy osiągnąć i to jest odpowiedź dlaczego te szeregi dają tyle błędów i tak wiele paradoksów.*

Z drugiej strony, Hardy stwierdził:

> *Definicje zbieżności i rozbieżności są teraz zwykłymi w analizie rzeczywistej. Idee były znane matematykom przed Newtonem i Leibnizem (rzeczywiście Archimedesowi); i wszyscy wielcy matematycy XVII i XVIII wieku, jednak beztrosko manipulowali szeregami wiedząc wystarczająco czy szereg jaki rozpatrują jest zbieżny.*

4b. Szeregi potęgowe jako wielomiany stopnia nieskończonego

Euler traktował szeregi potęgowe jako wielomiany stopnia nieskończonego. Różniczkował więc i całkował wyraz po wyrazie bez rozpatrywania zbieżności.

W 1748 roku wykazał wspomniany już słynny *wzór Eulera*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

a dowód tego wzoru przez szeregi przebiegał następująco: ponieważ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, więc

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x.$$

Euler pisał też, że dla $x = \pi$ mamy piękną równość

$$e^{i\pi} = -1.$$

Inny dowód powyższego wzoru, podany przez Eulera był następujący: kładąc

$$z = \cos x + i \sin x$$

otrzymujemy

$$dz = (-\sin x + i \cos x)\, dx = i(\cos x + i \sin x)\, dx = iz\, dx$$

czyli $\int \frac{dz}{z} = \int i dx$ i w konsekwencji $\ln z = ix$ oraz

$$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Euler przybliżał funkcję wykładniczą funkcją potęgową, o czym pisze np. w *książce Wstęp do analizy nieskończoności*:

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N,$$

gdy N jest nieskończenie wielką liczbą [*numerus infnite magnus*] i x jest skończoną liczbą [*numerus finitis*]. Jego dowód w naszej symbolice był następujący (por. [Ju77], str. 347):

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^N = 1 + \frac{N}{N}x + \frac{N(N-1)}{N^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3}\frac{x^3}{3!} + \ldots$$
$$= 1 + x + \frac{N-1}{N}\frac{x^2}{2!} + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}\frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

i gdy N jest duże, to ułamek $\frac{N-1}{N}$ stanie się równy jedności, i dokładnie tak samo $\frac{N-2}{N} \to 1$, $\frac{N-3}{N} \to 1$ itd. Zatem

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \to 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x.$$

4c. Przekształcenie Eulera lub metoda sumowalności Eulera

W artykule [E247] *O szeregach rozbieżnych* z 1746 roku (wydanym w 1760 roku) Euler przekształcił szereg naprzemienny w inny szereg, szybciej zbieżny. Sposób ten, znany już Newtonowi, pozwala przekształcić jeden szereg zbieżny w inny z tą samą sumą, lecz szybciej zbieżny.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{a_0 - a_1}{2^2} + \frac{a_0 - 2a_1 + a_2}{2^3} + \frac{a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3}{2^4} + \dots$$

Mamy więc *wzór Eulera*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}, \text{ gdzie } \Delta^n a_k - \Delta^{n-1}a_{k+1} \text{ i } \Delta^0 a_n = a_n. \tag{5}$$

Przykładowo $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \dots$ Odnotujmy jeszcze, że zbieżność tzn. prawdziwość wzoru (5) gdy lewa strona jest zbieżna została wykazana dopiero w 1901 roku przez L. D. Amesa.

Może się jednak zdarzyć, że drugi szereg w (5) jest zbieżny choć pierwszy nie jest (jest to sumowanie w sensie Eulera szeregu rozbieżnego). Jako przykłady można wziąć dwa proste szeregi i ich odpowiednie sumy Eulera w (5):

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ i } \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2}$$

oraz

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots \text{ i } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{4}.$$

Więcej informacji znajduje się w książce Knoppa [Kn56, s. 266-298].

4d. Wzór sumacyjny Eulera

Problem znalezienia $\zeta(n)$ prawdopodobnie spowodował odkrycie przez Eulera znanego wzoru sumacyjnego Eulera-Maclaurina. Wzór ten był anonsowany w 1732 roku i dyskutowany w 1736 roku oraz w książce z 1755 roku z rachunku różniczkowego.

Gdy $f \in C^{2N+1}([1, n])$, to

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{(2k!)}\left[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)\right] + R_n(f,N), \tag{6}$$

gdzie $R_n(f, N)$ *jest resztą, która szybko maleje, gdy N rośnie do* ∞.

W szczególności, gdy $f \in C^1([1, n])$, to

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n (x - [x])f'(x)dx + f(1)$$

$$= \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n (x - [x] - \frac{1}{2})f'(x)dx.$$

Szczegółowy opis dotyczący wzoru sumacyjnego Eulera–Maclaurina można znaleźć u Knoppa [Kn56, s. 559-577], Apostola [Ap99] i Varadarajana [Va06, Rozdział 4, s. 113-124].

5. Sumy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$

Znalezieniem sumy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ interesowało się wielu matematyków XVII i XVIII wieku. Problem ten został nazwany *problemem bazylejskim*. W dalszym ciągu sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ będę oznaczał tak jak Bernhard Riemann, tzn. przez $\zeta(k)$. Początkowo rezultaty Eulera dotyczyły wartości przybliżonych $\zeta(2)$. Odkrycia, że $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ dokonał Euler, nie później niż w 1732 roku i przedstawił Akademii w 1735 roku. Zostało to opublikowane w 1740 roku (a z szczegółami w książce *Wstęp do analizy nieskończoności*). Uwzględniając krytyczne uwagi Johanna I i Daniela Bernoullich, co do pierwszego dowodu, Euler zajmował się znalezieniem lepszego uzasadnienia i podał później inne ściślejsze dowody tej równości. Ponadto w 1740 roku wyliczył $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ i ogólnie

$$\zeta(2k) = a_{2k}\pi^{2k},$$

gdzie a_{2k} są liczbami wymiernymi dla k = 1, 2, …, 6. Nie potrafił jednak poradzić sobie z wyliczeniem $\zeta(3)$. Uzyskiwał przybliżone wartości oraz różne wzory na $\zeta(3)$, ale dokładnej wartości nie mógł znaleźć. Dowód faktu, że $\zeta(3)$ jest liczbą niewymierną pojawił się dopiero w 1977 roku, a dokładna wartość nie jest znana do dzisiaj. Dowód niewymierności $\zeta(5)$ jest również sprawą otwartą.

Historia tych zagadnień została dokładnie opisana przez Ayouba [Ay74], Juszkiewicza [Ju77], Kline [Kl83] i Varadarajana [Va06, Rozdział 3, s. 59-111], [Va07].

5a. Problem bazylejski

Problem bazylejski o znalezieniu sumy szeregu

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \tag{7}$$

postawił Pietro Mengoli (1625-1686) z Bolonii w 1644 roku. Powinniśmy więc mówić *problem boloński*, ale Jakub Bernoulli z Bazylei był pierwszym, który zwrócił uwagę szerszego ogółu na ten problem i dlatego został on nazwany *problemem bazylejskim*.

Johann i Jakub Bernoulli wykazali tylko, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{7}{4} = 1.75$ argumentując że

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{N}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2(N+1)} < \frac{7}{4},$$

ale sumy nie potrafili znaleźć. Można też szacować (patrz np. [MT97]):

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - 1/4} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1/2} - \frac{1}{n+1/2}\right) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{N+1/2} < \frac{5}{3},$$

czyli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{5}{3} = 1.66\ldots$.

Bez sukcesu atakowali też problem: John Wallis (1616-1703), Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Johann i Daniel Bernoulli (J 1667-1748, D 1700-1782), James Stirling (1692-1770), Christian Goldbach (1690-1764), Abraham de Moivre (1667-1754) i inni. Przybliżone wartości z ośmioma dokładnymi znakami dziesiętnymi znaleźli, co jest znane z ich korespondencji, w latach 1728-1729 Goldbach i D. Bernoulli oraz w 1730 Stirling (por. [Ju77], str. 367).

Johann II Bernoulli znalazł sumy wielu szeregów, ale $\zeta(2)$ nie mógł znaleźć. Napisał przy tym: *jeżeli ktoś znajdzie tę sumę i powie mi o tym, to będę mu bardzo wdzięczny*.

5b. Pierwsze osiągnięcia Eulera z lat 1731–1733

W 1731 roku w pracy [E020] Euler rozważał sumy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(an+b)^m}$ i w specjalnym przypadku obliczania $\zeta(2)$, wziął szereg dla logarytmu

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

w postaci

$$\frac{\ln(1-x)}{-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

Całkując otrzymał

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2).$$

Zamieniając zmienną x na $1-t$ i rozbijając na dwie całki

$$-\zeta(2)=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}dt=\int_0^x\frac{\ln t}{1-t}dt+\int_x^1\frac{\ln t}{1-t}dt=I+J,$$

i całkując przez części otrzymał

$$I=\int_0^x\frac{\ln t}{1-t}dt=\int_0^x\ln t\Big(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\Big)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\ln t\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^n}{n}\ln x-\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n}dt\Big)$$

$$=\ln x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=-\ln x\ln(1-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},$$

oraz

$$J=\int_x^1\frac{\ln t}{1-t}dt=\int_0^{1-x}\frac{\ln(1-u)}{u}du=\int_0^{1-x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{n-1}}{n}\right)du=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}.$$

Zatem

$$\zeta(2)=-I-J=\ln x\ln(1-x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}.$$

Kładąc $x = \frac{1}{2}$ dostał

$$\zeta(2) = (\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^{n-1}}. \tag{8}$$

Pytanie: Co Euler przez to osiągnął?

Szereg ten jest szybko zbieżny i dzięki tej równości Euler obliczył wartość przybliżoną $\zeta(2)$:

$$\ln 2 = -\ln(1-\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \approx 0.69315\ldots \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^{n-1}} \approx 1{,}164482\ldots,$$

a więc

$$\zeta(2) = (\ln 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^{n-1}} \approx 0{,}480453\ldots + 1{,}1{,}164482\ldots = 1{,}644934\ldots.$$

W 1732/33 roku, rozważając wzór sumacyjny, *Eulera-Maclaurina* znalazł, dokładniejszą wartość rozbijając sumę na dwa składniki

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

i licząc pierwszą sumę, a drugą oszacowując dość dokładnie.

5c. Twierdzenie Eulera z 1735 roku o sumie odwrotności kwadratów i jego dwa dowody

Euler podał w 1735 roku w pracy [E041] argumenty na równość

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{7}$$

Prawdopodobnie dowód miał już w 1732 roku, ale pracę przedstawił 3 lata później. Praca ta była złożona do druku w grudniu 1735 roku, a opublikowana w 1740 roku. Euler rozpoczął pracę słowami ([E041, s. 122]; por. [Va06, s. 60], gdzie jest cytowane angielskie tłumaczenie A. Weila pracy Eulera [E041]):

> *Tak dużo pracy zostało zrobione o szeregach* $\sum \frac{1}{n^k}$ *, że wydaje się trudnym znalezienie czegoś nowego. Ja również wykazałem nic więcej jak tylko przybliżone wartości tych sum* [...]. *Teraz jednak, całkiem niespodziewanie, znalazłem elegancki wzór na* $\sum \frac{1}{n^2}$ *, zależny od kwadratury koła* [tzn. od π].

Pierwszy dowód Eulera z 1735 roku równości (7). Rozważmy równość

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

(która jest rozwinięciem w szereg Maclanrina funkcji sinus), a także równanie $\frac{\sin x}{x} = 0$, które ma pierwiastki $x_k = k\pi$; $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Jak wiadomo równanie algebraiczne

$1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$, które ma pierwiastki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ można napisać w postaci

$$1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x}{x_n}\right),$$

gdzie ponadto $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=-$ współczynnik przy $x = -a_1$. Zakładając, że jest to prawdziwe dla „wielomianów nieskończonych" otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\\ &= (1-\tfrac{x}{\pi})(1+\tfrac{x}{\pi})(1-\tfrac{x}{2\pi})(1+\tfrac{x}{2\pi})\cdot(1-\tfrac{x}{n\pi})(1+\tfrac{x}{n\pi})\cdot\ldots\\ &= \left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right]\cdot\ldots\end{aligned}$$

skąd $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=-$ współczynnik przy $x^2=-\frac{1}{3!}$, czyli

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\ldots=\frac{1}{6}.$$

Zatem

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Sukces Eulera!

W liście do Daniela Bernoulliego Euler zakomunikował równości $\zeta(2) = \pi^2/6$ i $\zeta(4) = \pi^4/90$. Pojawiły się jednak wątpliwości Johanna I i Daniela Bernoullich oraz innych, czy argumenty Eulera są poprawne. Obliczenia przybliżone potwierdzały jednak ten rezultat. Wręcz proszono go o ściślejsze uzasadnienie tych rezultatów. Jednak, pomimo tych zastrzeżeń, Euler uzyskał wielkie uznanie za swój rezultat.

Euler próbował znaleźć lepszą argumentację swojego dowodu. Dokonał tego około 1742 roku, a opublikował w 1743 roku.

Drugi dowód Eulera z 1743 roku równości (7). Równość

$$arc\sin t = t+\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{t^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{t^7}{7}+\ldots$$

daje następną

$$\begin{aligned}\frac{(arc\sin x)^2}{2} &= \int_0^x \frac{arc\sin t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= \int_0^x\left(t+\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{t^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{t^7}{7}+\ldots\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.\end{aligned}$$

Dla $x = 1$ mamy więc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt+\frac{1}{2\cdot3}\int_0^1\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\int_0^1\frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt+\ldots,$$

a ponieważ $\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=1$ i z całkowania przez części

$$\begin{aligned}I_{n+2} &= \int_0^1\frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-t^{n+1}\sqrt{1-t^2}\;|_0^1+(n+1)\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt\\ &= (n+1)\int_0^1\frac{t^n(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2},\end{aligned}$$

więc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, skąd

$$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 = 1+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{2}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{4}{5}\frac{2}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}+\ldots$$
$$= 1+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots,$$

czyli

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{9}$$

Następnie, jak już wcześniej zauważył Euler, zachodzi równość

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots-\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots)=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots,$$

co łatwo widać, gdy używamy znaku sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

czyli

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{4}{3}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots)=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6},$$

co kończy dowód.

Uwaga 1. F. Goldscheider [Go13] zauważył w 1913 roku, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\,dxdy. \tag{10}$$

On też wyliczył całkę podwójną przez zamianę zmiennych i otrzymał inny dowód wzoru Eulera. Równość powyższą mamy gdyż, $\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy$ i stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}y^{n-1}\right)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\,dxdy.$$

Wyliczenie całki podwójnej można też znaleźć w [Ap83] i [Si85, s. 751-752].

Podobnie Eugenio Calabi [BKC93] w 1993 roku (patrz również Kalman [Ka93, s. 411-412], Arratia [Ar99, s. 173-175], Huylebrouck [Hu01, s. 223-224] i Elkies [El03, s. 563], Chapman [Ch03, s. 2-3], Kohas [Ko03, s. 13]) zauważył, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy,$$

a całka ma wartość $\frac{\pi^2}{8}$ i stąd $\zeta(2)=\frac{4}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Uwaga 2. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dxdy = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx. \tag{11}$$

Rzeczywiście, podstawiając $u = 1 - x$ oraz $u = e^x$ otrzymamy

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \int_0^1 \frac{\ln(1-xy)}{-x}\Big|_0^1\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{-x}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,du = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx.$$

Warto odnotować dowód Eulera z 1738 roku równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx.$$

Ponieważ

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^x (1+t+t^2+\ldots+t^{n-1})dt = x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n},$$

więc

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt\right)dx = \int_0^1 \left(1+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n}\right)dx = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

Stąd

$$\zeta(2) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt\right)dx = -\int_0^1 \frac{1}{x}\ln(1-x)dx.$$

Uwaga 3. Szereg w równości Eulera (7) jest wolno zbieżny i przybliżanie liczby π tym sposobem nie jest zbyt efektywne. Opierając się jednak na tożsamości

$$\frac{1}{n^3(n+1)^2} = 6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{3}{n^2}-\frac{3}{(n+1)^2},$$

dostajemy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3(n+1)^3} = 6\left(1-\frac{1}{N+1}\right)+1-\frac{1}{(N+1)^3}-3\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-3\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^2},$$

a stąd i ze wzoru Eulera (7) otrzymamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3} = 7-3\frac{\pi^2}{6}-3\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$, czyli

$$\pi^2 = 10-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3}$$

i szereg po prawej stronie jest szybciej zbieżny. Wzór ten wskazuje, że przybliżoną wartością liczby π^2 jest liczba 10, zatem przybliżoną wartością liczby π jest $\sqrt{10}$, którą Hindusi uważali w swoim czasie za dokładną wartość (por. Sierpiński [Si25], Cz. IV, s. 79-80).[3]

[3] Wynik ten wcześniej znali Chińczycy (*Red.*).

Uwaga 4. Zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n)!},$$

gdyż ostatnia suma to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(m-1)!}{(m+n-1)!} - \frac{m!}{(m+n)!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n} \cdot \frac{0!}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

W XX wieku pojawiło się wiele różnych dowodów równości Eulera (7). Wymieńmy niektóre nazwiska ich autorów w kolejności opublikowania: F. Goldscheider (1913), I. Schur i K. Knopp (1918), W. Sierpiński (1925), T. Estermann (1947), A. M. Yaglom i I. M. Yaglom (1953, 1954), G. T. Williams (1953), Y. Matsuoka (1961), G. M. Fichtenholz (1964), E. L. Stark (1969, 1970, 1972, 1973, 1974, 1979), F. Holme (1970), K. S. Williams (1971), D. P. Giesy (1972), I. Papadimitriou (1973), T. M. Apostol (1973, 1983, 1999), R. Ayoub (1974), G. F. Simmons (1985), B. R. Choe (1987), G. Kimble (1987), D. C. Russell (1991), M. B. McKinzie i C. D. Tuckey (1993), R. A. Kortram (1996), J. Choi i A. K. Rathie (1997), D. Huylebrouck (2001), J. Hofbauer (2002), N. D. Elkies (2003), J. D. Harper (2003).

Pojawiły się też opracowania z wieloma dowodami równości Eulera (7). Oprócz książek Knoppa [Kn56], Fichtenholza [Fi64], Simmonsa [Si85], Dunhama [Du99] i Vardarajana [Va06] oraz prac Choi-Rathie-Srivastavy [CRS99] z 4 dowodami opartymi na szeregach hipergeometrycznych i Arratii [Ar99] z 4 dowodami dla z(2k), znane są mi opracowania z 1993 Kalmana [Ka93] z 6 dowodami oraz z 2003 roku Chapmana [Ch03] z 14 dowodami i Kohasa [Ko03] również z 14 dowodami.

Najbardziej elementarne uzasadnienie równości (7), mające oszacowania sum częściowych szeregu (9), pochodzi z książki A. M. Yagloma i I. M. Yagloma [YY54, zadanie 143] (patrz również Holme [Ho70], Papadimitriou [Pa73], Stromberg [St81, s. 233-234] i Górnicki [Go95, s. 173-176]): ponieważ $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $0 < x < \pi/2$, to $\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ i stąd dla $x_n = \frac{n\pi}{2m+1}$, $n = 1, 2, \ldots, m$ mamy

$$\sum_{n=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 x_n < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 x_n.$$

Zauważając, że $\sum_{n=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$, otrzymujemy

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right) < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right),$$

co implikuje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5d. O wzorach na $\zeta(2k)$ i $\zeta(2k+1)$

Niech dla $k > 1$ będzie $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Oczywiście

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < 1 + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx,$$

więc

$$\max(1, \tfrac{1}{k-1}) \le \zeta(k) \le \tfrac{k}{k-1}.$$

Euler obliczył nie tylko $\zeta(2)$, ale też wykazał, że $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ i wyliczył też $\zeta(8)$, $\zeta(10)$, $\zeta(12)$, a później ogólnie

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}, \tag{12}$$

gdzie B_{2k} są liczbami Bernoulliego: $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = -\frac{1}{43}$, etc., zdefiniowanymi poprzez rozwinięcie $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

Euler znalazł również wzory na sumy szeregów naprzemiennych. Niech

$$\phi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^k} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} + \ldots,\ k \ge 1,$$

oraz

$$\theta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^k} = 1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{7^k} + \ldots,\ k > 1,$$

$$\psi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^k} = 1 - \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{7^k} + \ldots,\ k \ge 1.$$

Jak zauważył Euler

$$\begin{aligned}\zeta(k) - \frac{1}{2^k}\zeta(k) &= 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \ldots - \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{6^k} - \ldots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{7^k} + \ldots = \theta(k),\end{aligned}$$

czyli $\theta(k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\zeta(k)$. Ponadto

$$\begin{aligned}\zeta(k) - \frac{2}{2^k}\zeta(k) &= 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \ldots - \frac{2}{2^k} - \frac{2}{4^k} - \frac{2}{6^k} - \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} + \ldots = \phi(k),\end{aligned}$$

czyli $\phi(k) = (1 - 2^{1-k})\zeta(k)$. Zatem $\phi(k)$ i $\zeta(k)$ można wyliczyć gdy znamy $\zeta(k)$. W szczególności,

$$\phi(2k) = \frac{2^{2k-1} - 1}{2^{2k-1}}\zeta(2k) \tag{13}$$

oraz

$$\phi(2) = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\zeta(3) = \frac{8}{7}\theta(3) = \frac{8}{7}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots\right),$$

$$\zeta(3) = \frac{4}{3}\psi(3) = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots\right).$$

Euler wykazał też, że

$$\psi(2k+1) = \frac{(-1)^k E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!}\pi^{2k+1}, \tag{14}$$

gdzie E_k *są liczbami Eulera.* Można je wyliczyć ze wzoru

$$E_{2n} + \binom{2n}{2}E_{2n-2} + \binom{2n}{4}E_{2n-4} + \ldots + E_0 = 0,$$

przyjmując E_0 = 1 lub z równości $\frac{1}{\cos x} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}$.

W szczególności, otrzymujemy wzór Leibniza[4] z 1682 roku

$$\psi(1) = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots = \frac{\pi}{4},$$

oraz

$$\psi(3) = 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

W 1744 roku Euler wykazał równość (dziś nazywaną jego imieniem):

$$\zeta(k) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^k}\right)^{-1}, \tag{15}$$

gdzie p przebiega wszystkie liczby pierwsze.

Posługując się sumowaniem szeregów rozbieżnych, Euler w 1749 roku znalazł jeszcze jedną ważną własność funkcji dzeta:

$$\frac{\phi(1-k)}{\phi(k)} = -\frac{(k-1)!(2^k-1)\cos\frac{k\pi}{2}}{(2^{k-1}-1)\pi^k},$$

co można też zapisać jako

$$\zeta(1-k) = = \frac{2^{1-k}}{\pi^k}\cos\frac{k\pi}{2}\Gamma(k)\zeta(k). \tag{16}$$

Euler sformułował też hipotezę, że

$$\zeta(1-s) = = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

dla wszystkich rzeczywistych $s > 1$, przy czym wykazał ją dla wartości naturalnych i ułamkowych k w swoim artykule [E352]. To ważne równanie funkcyjne udowodnił *B.* Riemann w r. 1859, a co ważniejsze, przeniósł je również na przypadek zespolony [R859].

Następnie Euler zaobserwował, że

$$\phi(2k+1) = \frac{2(2^{2k}-1)\pi^{2k}}{(2k)!(2^{2k+1}-1)}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{2k}\ln n}{\cos k\pi}. \tag{17}$$

---

[4] *vide:* Acta Eruditorum MDC LXXXII, 40-46. Zależność tę odkrył uczony indyjski Madhava (1340-1425). (*Red.*).

W szczególności[5],

$$\phi(3)=\tfrac{3}{7}\pi^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n^2\ln n$$

i stąd

$$\theta(3)=\tfrac{7}{8}\zeta(3)=\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{4}{3}\phi(3)=\tfrac{\pi^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n^2\ln n$$

oraz

$$\zeta(3)=\tfrac{4}{7}\pi^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n^2\ln n. \tag{18}$$

Używając równości (10) Euler udowodnił w 1772 roku piękny wzór:

$$\theta(3)=1+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^3}+\ldots=\tfrac{\pi^2}{\ln 2}+2\int_0^{\pi/2}x\ln\sin x\,dx. \tag{19}$$

Oczywiście, Euler chciał też znaleźć wzór na $\zeta(3)$ jak również $\zeta(2k+1)$. Znalazł tylko wartość przybliżoną $\zeta(3)\approx 1{,}2020569$.

Euler sugerował, że stała $\zeta(3)$ powinna zależeć od liczby $\ln 2$, gdyż

$$\ln 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n\cdot 2^n}.$$

Dokładniej, *hipoteza Eulera* to równość

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^3}=a(\ln 2)^2+b\pi^2\ln 2, \tag{20}$$

gdzie a i b są liczbami wymiernymi.[6]

Ponadto Euler w 1772 roku podał reprezentację

$$\zeta(3)=\tfrac{\pi^2}{7}\left[1-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{(2n+1)(2n+2)2^{2n}}\right], \tag{21}$$

która była ponownie odkrywana i to wiele razy.

Współcześnie Roger Apéry (1916-1994) udowodnił w 1977 roku, że $\zeta(3)$ jest liczbą niewymierną, co było wielką sensacją Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Helsinkach w sierpniu 1978 roku, gdzie rezultat był prezentowany przez Henri Cohena ([Po78]). Liczba $\zeta(3)$ nazywana jest dziś *liczbą Apéry'ego*. Znalezienie wartości liczby $\zeta(3)$ pozostaje otwartym problemem od 1735 roku (problem Eulera).

Uwaga 5. Podobnie jak w uwadze 1, można łatwo wykazać równości

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^3}=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\tfrac{1}{1-xyz}\,dxdydz=-\tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\tfrac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy.$$

[5] Należy odnotować, że podane przez Eulera szeregi (17) i (18) są rozbieżne. (*Red.*).
[6] Euler, Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 4, s. 143-144.

W 2000 roku Tanguy Rivoal [Ri00] wykazał, że nieskończenie wiele z liczb $\zeta(2k+1)$ musi być niewymiernych, choć brak jest konkretnej z liczb $\zeta(2k+1)$, która musi być niewymierna. W 2001 roku Wadim Zudilin [Zu01], [Zu02] udowodnił, że jedna z liczb $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ jest niewymierna. ale nie ma jak na razie dowodu, że $\zeta(5)$ jest niewymierna.

Odnotujmy jeszcze, że Euler w 1775 roku wprowadził analogon funkcji dzeta dwóch zmiennych

$$\zeta(a,b)=\sum_{n\geq m>0}\frac{1}{n^a m^b}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^b}\right)\frac{1}{n^a},$$

gdzie $a, b \in \boldsymbol{N}$ i $a \geq 2$, by szereg był zbieżny i udowodnił przy tym, że $\zeta(2,1)=2\zeta(3)$. Szersze omówienie można znaleźć np. w książce Varadarajana [Va06].

Na zakończenie przytoczymy trzy opinie o matematyku Eulerze. Jeden ze współpracowników tak mówił:

> *W oczach Eulera wzory matematyczne żyły swym własnym życiem i opowiadały istotne i ważne rzeczy o przyrodzie. Wystarczyło mu tylko dotknąć się ich, aby z niemych przeradzały się w mówiące, dając odpowiedzi pełne głębokiego znaczenia,*

a Laplace tak wyraził się o wartości prac Eulera:

> *Czytajcie, czytajcie Eulera, on jest mistrzem nas wszystkich,*

natomiast Varadarajan stwierdził ([Va06], s. 15):

> *Nie jest możliwe czytać Eulera i nie poddać się jego urokowi. Jest on dla matematyki tym czym Szekspir dla literatury i Mozart dla muzyki: uniwersalny i sui generis.*[7]

Cytowane prace Eulera[8]

[E020] *De summatione innumerablium progressionum* [*The summation of an innumerable progression*], Comment. Acad. Sci. Petropolit. (presented 1731) 5(1738), 91–105; Przedruk w: L. Euler, Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 14, Leipzig-Berlin 1924, 25–41.

[E041] *De summis serierum reciprocarum* [*On the sums of series of reciprocals*], Comment. Acad. Sci. Petropolit. (presented 1735) 7(1740), 123–134; Przedruk w: L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol 14, Leipzig-Berlin 1924, 73–86; Angielskie tłumaczenie przez Jordana Bella.

[E061] *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur* [*On sums of series of reciprocals from powers of natural numbers from another discussion, in which the sums are derived principally from another source*], Miscellanea Berolinensia 7(1743), 172–192; Przedruk w: L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol 14, Leipzig-Berlin 1924, 138–155.

[E063] *Demonstration de la somme de cette suite* 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16... [*Demonstration of the sum of the following series*: 1 + 1 /4 + 1/9 + 1/16 ...], Journ. lit. d'Allemange, de Suisse et du Nord, 2:1, 1743, 115–127; Przedruk w: L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol 14, Leipzig-Berlin 1924, 177–186; Przedruk w: Bibl. Math. 83 (1907/8), 54–60.

[E247] *De seriebus divergentibus* [*On divergent series*], Comment. Acad. Sci. Petropolit. (read 1746, presented 1753) 5(1760), 205–237; Przedruk w: L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol 14, Leipzig-Berlin 1924, 585–617.

[E352] *Remarques sur un beau rapport entre les sęries des puissances tant directes que réciproques* [*Remarks on a beautiful relation between direct as well as reciprocal power series*], Memoires de l'Acad. des Sci. de Berlin 17(1768), 83–106; Przedruk w: L. Euler, Opera Omnia, Ser. 1, Vol 15, 70–90; Angielskie tłumaczenie przez Thomasa Oslera i Lucasa Willisa.

---

[7] jedyny w swym rodzaju, szczególny, osobliwy.

[8] Numeracja cytowanych prac Eulera jest tutaj zgodna z indeksem Eneströma.

Cytowane prace i książki innych autorów

[Ap79] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque 61 (1979), 11–13.
[Ap83] T. M. Apostol, *Proof that Euler missed: evaluating* $\zeta(2)$ *the easy way*, Math. Intelligencer 5 (1983), 59–60.
[Ap99] T. M. Apostol, *An elementary view of Eulers summation formula*, Amer. Math. Monthly 106 (1999), no. 5, 409–418.
[Ar99] A. Arratia, *Some youthful ways of evaluating* $\zeta(2k)$, Bol. Asoc. Mat. Venez. 6 (1999), no. 2, 167–176 (po hiszpańsku).
[Ay74] R. Ayoub, *Euler and the zeta function*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 1067–1086.
[BKC] F. Beukers, J. A. Kolk and E. Calabi, *Sums of generalized harmonic series and volumes*, Nieuw Arch. Wisk. (4) 11 (1993), no. 3, 217–224.
[Ch03] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, Preprint 2003, w: http : //www:secamlocal:ex:ac:uk/people/staff/rjchapma/rjc:html
[CRS99] J. Choi, A. K. Rathie and H. M. Srivastava, *Some hypergeometric and other evaluations of* $\zeta(2)$ *and allied series*, Appl. Math. Comput. 104 (1999), no. 2-3, 101–108.
[Du99] W. Dunham, *Euler – the master of us all*, Math. Association of America, Washington 1999.
[El03] N. D. Elkies, *On the sums* $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(4k+1)^{-n}$, Amer. Math. Monthly 110 (2003), no. 7, 561–573.
[Fi64] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Tom II, PWN, Warszawa 1964.
[Fu43] P. N. Fuss, *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célébres Géométres du VIIléme Siécle*, T. I-II, St. Petersburg 1843.
[Go13] F. Goldscheider, *Lösung zu 208* (*P. Stäckel*), Arch. Math. Phys. (3) 20 (1913), 323–324.
[Go95] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa 1995.
[Ho70] F. Holme, *A simple calculation of* $\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2$, Nordisk Mat. Tidskr. 18 (1970), 91-92 (po norwesku).
[Hu01] D. Huylebrouck, *Similarities in irrationality proofs for* p, ln 2, $\zeta(2)$, and $\zeta(3)$, Amer. Math. Monthly **108**(2001), no. 3, 222–231.
[Ju77] A. P. Juszkiewicz, *Historia matematyki*, *Tom III. Matematyka XVIII stulecia*, PWN, Warszawa 1977.
[Ka93] D. Kalman, *Six ways to sum a series*, College Math. J. 24 (1993), 402–421.
[Kl83] M. Kline, *Euler and infinite series*, Math. Mag. 56 (1983), no. 5, 307–314.
[Kn56] K. Knopp, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.
[Ko03] K. Kohas, *Suma odwrotności kwadratów*, St. Petersburg 2003, 1–16 (po rosyjsku); w: http : //www:math:spbu:ru/user/analysis/f – doska/index:html
[La97] D. Laugwitz, *On the historical development of infinitesimal mathematics*, Amer. Math. Monthly 104 (1997), 447–455.
[Ma08] L. Maligranda, *Gustaf Eneström* (*1852–1923*), Antiquitates Mathematicae 2 (2007), (w tym tomie).
[MT97] M. McKinzie and C. Tuckey, *Hidden lemmas in Euler's summation of the reciprocals of the squares*, Arch. Hist. Exact Sci. 51 (1997), no. 1, 29–57.
[OR06] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Leonhard Euler*, 2006, McTutor Website w: http : //www–history.mcs.st – and.ac.uk/history/Biographies/Euler.html.
[Pa73] I. Papadimitriou, *A simple proof of the formula*, $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}=\pi^2/6$, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 424–425.
[Po78] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer 1 (1978/79), no. 4, 195–203.
[R859] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Königl. Preuss. Akad.Wiss. Berlin, Nov. 1859, 671–680.
[Ri00] T. Rivoal, *There are innitely many irrational values of the Riemann zeta function at odd integers*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), no. 4, 267–270 (po francusku).
[Si25] W. Sierpiński, *Analiza, Tom I, Część III: Funkcje elementarne i Część IV: Rachunek różniczkowy*, Kasa Mianowskiego,Warszawa 1925; wyd. 2-ie niezmienione R*achunek różniczkowy poprzedzony badaniem funkcji elementarnych*, Monografie Matematyczne 14, Wyd. Czytelnik, Warszawa 1947; 2-gie wydanie z tytułem *Rachunek nieskończony* jest na stronie internetowej Biblioteki Wirtualnej Nauki http://matwbn:icm:edu:pl/ w Monografiach Matematycznych nr 14.
[Si85] G. F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York 1985.

[St07] P. Stäckel, *Eine vergessene Abhandlungłeonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natüralichen Zhalen*, Bibl. Math. (3) 8 (1907), 37–60; Przedruk w: L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol 14, Leipzig-Berlin 1924, 1–24.

[St81] K. R. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth International, Belmont, Calif., 1981.

[Va06] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: a New look at Old Themes*, American Math. Society, Providence, RI, 2006.

[Va07] V. S. Varadarajan, *Euler and his work on innite series*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), No 4, 515–539.

[Wi01] W. Więsław, *Leonhard Euler* (*1707-1783*) – *człowiek i epoka*, w: *Matematyka XVIII wieku*, Materiały z XIII Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 17-21 maja 1999 r., pod redakcją Stanisława Fudalego, Uniwersytet Szczeciński, Materiały i Konferencje Nr 51, Szczecin 2001, 9–25.

[Wi06] W. Więsław, *Leonhard Euler* (*1707-1783*) – *tytan pracy*, Matematyka 6 (2006), 3–11.

[YY53] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, *An elementary derivation of the formulas of Wallis*, *Leibniz and Euler for the number p*, Uspekhi Mat. Nauk 8 (1953), no. 5, 181-187 (po rosyjsku).

[YY54] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, *Non-elementary Problems in an Elementary Exposition*, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor.łit., Moscow 1954; tłumaczenie angielskie *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, Vol. II, Holden-Day, San Francisco 1967, Problem 145.

[Yu70] A. P. Youschkievitch, *Leonhard Euler*, w: Dictionary of Scientic Biography, Vol. 3, New York 1970, 467–484.

[Zu01] V. V. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$,$\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk 56 (2001), no. 4(340), 149–150; angielskie tłumaczenie w: Russian Math. Surveys 56(2001), no. 4, 774–776.

[Zu02] V. V. Zudilin, *On the irrationality of the values of the Riemann zeta function*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 66 (2002), no. 3, 49–102; angielskie tłumaczenie w: Izv. Math. 66(2002), no. 3, 489–542.

Lech Maligranda
Department of Mathematics
Luleå University of Technology
SE-971 87 Luleå, Szwecja
e-mail: lech@sm.luth.se
Website: http://www.sm.luth.se/~lech/