Krzysztof Tatarkiewicz (Warszawa)

PEWNE RÓWNANIE LEONHARDA EULERA

0.1. Wstęp

Praca poświęcona jest równaniu Eulera z 1748 roku

(0.1.1) $$x^y = y^x.$$

1. Historia pewnego oznaczenia

1.1. Starożytność. Starożytni Grecy mieli kłopoty z – całkiem oczywistym dla nas – zapisem potęg. Na przykład, gdy potrzebowali – wyprowadzając wzór na liczbę doskonałą – podawać liczby, które my zapisujemy jako $2^n - 1$ oraz jako $2^n(2^{n+1} - 1)$, to Euklides określał je w następujący sposób: „*weź* 1*, potem* 2*, potem pomnóż te* 2 *przez* 2*, to co uzyskasz jeszcze raz przez dwa, etc. Jeśli po odjęciu* 1 *od ostatniej liczby otrzymasz liczbę pierwszą, to masz ją pomnożyć przez przedostatnią liczbę i otrzymasz wtedy liczbę o którą nam chodzi…*". Przez 15 wieków mało co tu się zmieniło.

1.2. Średniowiecze. W średniowieczu książki – między innymi dlatego, iż były rękopiśmienne – były bardzo kosztowne. Ale mimo to, początkowo nie starano się robić oszczędności na ilości zużytego miejsca (podchodzono bowiem wtedy z dużym szacunkiem do pisma). Szczególnie do XII wieku, kiedy jeszcze pisano trzciną, a nie gęsim piórem (umożliwiającym stosowanie znacznie mniejszych liter). Skróty wtedy nie były specjalnie częstsze niż teraz: przecież nawet my dziś powszechnie piszemy chętnie „p.", „b.r.", „b.m.". I często te średniowieczne skróty były nie całkiem oczywiste: w obu średniowiecznych zachowanych odpisach *Kroniki* Galla Anonima, występuje skrót „XX", który należy oczywiście czytać nie „iks.iks", ale „Ch.Ch." jako *abreviatio græca*. I co gorzej nie należało go rozwijać błędnie – jak długi czas robiono – na „chrześcijanin chrześcijaninowi", lecz na „pomazaniec pomazańcowi".

Sytuacja zmieniła się jednak, gdy w XIV wieku, a szczególnie w XV wieku, zaczęły się książki rozpowszechniać. Starano się wtedy zmniejszyć ich objętość przez obfite stosowanie skrótów. I odnosi się to nie tylko do książek rękopiśmiennych, ale nawet do tych drukowanych, obficie powstających po 1450 roku. Miałem kiedyś w ręku inkunabuł z roku 1498, Było tam tak wiele skrótów (abrewiacji), że zrezygnowałem z czytania tego tekstu. Jakoś w historiach matematyki i historiach symbolik matematycznych nie mówi się o tym powszechnym w owym czasie stosowaniu skrótów i o jego wpływie na powstającą wtedy skrótową symbolikę matematyczną.

Prawdopodobnie dopiero w tego rodzaju panującej wtedy atmosferze (modzie?) zaczęto stosować skrótowe oznaczenia w tekstach matematycznych. Wprawdzie ze skrótami w tekstach matematycznych spotykamy się już w rękopisach XIV wiecznych – ale są to głównie skróty nazw miar i wag oraz różnych monet. Te skróty XV wieczne zaczęły odnosić się jednak już do pojęć matematycznych. Tendencja do stosowania

skrótów matematycznych rozwijała się jeszcze dalej, ale już bardziej powoli, w XVI wieku.

W XV wieku zaczęto – na przykład – stosować zapisy xx lub qx tam gdzie my dziś piszemy x^2, zaś xxx lub cx zamiast dzisiejszego x^3 oczywiście q = „quadratus" = „kwadrat", natomiast c = „cubus" = „sześcian". W XVI-wiecznych tekstach można nawet spotkać zapisy qqx lub ccx, zamiast dzisiejszego odpowiednio x^4 ewentualnie x^6. Właściwie wtedy każdy (czy niemal każdy) stosował inne zapisy matematyczne. Ich omówienie mogłoby zająć nawet gruby tom (tom taki zresztą istnieje – patrz pierwszy tom monografii [1] – jest on prawie w całości poświęcony tu umawianym kłopotom z symboliką). W tym kontekście zawsze cytuje się tutaj dzieła Franciszka Viéty. Nie wiem czemu, gdyż on sam najczęściej stosował zapisy słowne, nawet bardzo skomplikowanych tożsamości algebraicznych. A tam gdzie stosował skróty, to i tak nie były to te wygodne skróty, które ostatecznie przyjęły się powszechnie.

1.3. Kartezjusz. W I połowie XVII pojawiły się jednak symbole wygodne i dające rzeczywiste ułatwienia matematykom. Najważniejsze tego rodzaju osiągnięcia przypisać należy Ireneuszowi Kartezjuszowi (René Descartes; 1596-1650). Był jednym z tych, którzy rozpropagowali dziesiętne ułamki, zapisywane nie w oryginalnej postaci ich pomysłodawcy S. Stevina, lecz w dzisiejszej, wygodniejszej postaci („3,14", ewentualnie „3.14"). Co ważniejsze, w ten samo sposób co ułamki dziesiętne poprawił też i zapisy algebraiczne i po 1637 roku (patrz [2], ewentualnie [3]; już drugie łacińskie tłumaczenie ukazało się w Amsterdamie w 1659 roku), pisał tak jak my to dziś robimy „$x^3 + ax^2$" (ale przedtem – a nawet czasem i potem – sam pisywał też „C + aN" – nie mówiąc już o stosowaniu innych znaków dodawania … i znaku równości). *Nota bene* opublikował to w swej geometrii, będącej apendyksem do swego *Discours de la méthode*. Ale trzeba pamiętać, że przez cały XVII wiek raczej zapisano by te wyrażenie mniej więcej w postaci cx + a.qx, lub nawet xxx + axx. Interesujący nas L. Euler – przynajmniej w swym dziele *Introductio in analysin infinitorum* [5] (przedruk : [6]) – jak łatwo można sprawdzić – nigdy nie pisze „x^2", tylko zawsze pisze „xx". I podobnie – też chyba zawsze – pisze „xxx" zamiast „x^3". Dopiero pisze „x^4" (i oczywiście jednak „x^y"). Co się dziwić L. Eulerowi, kiedy nawet jeszcze C. F. Gauss bronił (już w XIX wieku!) zapisu xx, twierdząc jest on nie dłuższy niż x^2 i wygodniejszy do pisania od niego.

1.4. Koniec XVII wieku. Ale symbolika I. Kartezjusza powoli, ale jednak przyjmowała się. Pozwalała ona bowiem – między innymi – na formułowanie nieoczekiwanych przed tym problemów. Pamiętać jednak trzeba, iż Kartezjusz sam – z zasady – nie zajmował się funkcjami nie algebraicznymi, które nazywał „mechanicznymi". Chodziło mu głównie o to, że nie umiał on takich funkcji różniczkować (a tym bardziej całkować).

Natomiast już w roku 1679 (a więc 27 lat po przedwczesnej śmierci Kartezjusza) Godfryd Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) w liście do Chrystiana Huygensa (1629-1695) zajmował się równaniami wykładniczymi: $x^x - x = 24$, $x^z + z^x = b$ oraz

(1.4.1) $$x^x + z^z = c$$

(patrz Cajori [1], t. I, s. 354), Ale świadomość istnienia równań wykładniczych docierała do ludzi (nawet do matematyków) powoli. W dalszym ciągu były to tylko ciekawostki.

Struktura rozwoju matematyki w III ćwierci XVII wieku nie jest dla mnie całkiem jasna.

Wielu ludzi równocześnie (czy prawe równocześnie) znajdowało nowe fragmenty wiedzy matematycznej – nie tworzyły one jednak jakiejś dającej się uporządkować całości. Być może, że tym, któremu najwięcej zawdzięcza ówczesny rozwój znajomości funkcji wykładniczej i logarytmicznej był Niemiec Nicolaus (Mikołaj) Kauffman (1620-1687) powszechnie znanym pod zlatynizowanym nazwiskiem Mercator. Nie należy go mylić z Gheert (Gerhardem) Cremerem (1512-1594), Flamandem, też używającym zlatynizowanego nazwiska Mercator. Ten ostatni był tym pierwszym, który opublikował (1569) dużą mapę opracowaną w siatce zwanej do dziś *siatką Mercatora* (mniejsze takie mapy były już publikowane na początku XVI wieku). Mylenie obu Mercatorów z sobą jest o tyle łatwiejsze, iż młodszy Mikołaj też miał swój wkład w teorię mapy wydanej przez starszego Gerharda.

Być może, że wkład młodszego Mercatora, w teorię funkcji wykładniczych i logarytmicznych polega głównie na tym, iż całkując funkcję $f(x) = x^{-1}$ (w symbolice Karla Mengera funkcję j^{-1}), co było potrzebne przy obliczaniu powierzchni na mapie starszego tego nazwiska, „oswoił" ludzi z funkcją wykładniczą. Używali jej też i inni, między innemi robił to bardzo wcześnie, Izaak Newton (1643-1727).

1.5. Potęgowanie. Jasną jest rzeczą, że w XVII wieku nie zastanawiano się nad sprawami zasadniczymi, dla nas dziś oczywistymi. Na przykład, nie definiowano, co znaczy podnieść jakąś liczbę (nawet całkowitą) do potęgi niewymiernej – chociażby dlatego, nie było wtedy w ogóle teorii liczb niewymiernych. Jak wiadomo powstała ona dopiero w II połowie XIX wieku (przy okazji załatwiając sprawę potęg o wykładnikach niewymiernych).

Działania „+" i „·" oraz odwrotne do nich, to jest „–" i „:" były znane od bardzo dawna (nie można jednak wątpliwości, że te odwrotme są jednak późniejsze). Potęgi : drugą i trzecią – jak się zdaje – wprowadzili (jako kwadrat i sześcian) – dla potrzeb geometrii Grecy (stąd ich nazwy). Ale pojęcie dowolnej potęgi jest pojęciem dopiero XVII-wiecznym. Początkowo zresztą rozważano równania typu (1.4.1) jako ciekawostki, którymi zabawiali się matematycy. Niemniej jednak już II połowie XVII wieku stosujący matematykę zaczęli w zastosowaniach używać funkcję wykładniczą (działanie wykładnicze).To samo odnosi się do funkcji logarytmicznej (zarówno naturalnej jak i dziesiętnej). Przy tym długo nie było całkiem jasne, że są to funkcje odwrotne względem siebie (wiedziano już wcześniej, że kwadrat i pierwiastek są odwrotne do siebie, ale ogólnego pojęcia „funkcja odwrotna" jeszcze wtedy nie było).

1.6. Funkcja wykładnicza. Wydawać by się mogło, że rozpatrywanie równania (0.1.1) w zakresie liczb naturalnych powinno było bardzo wyprzedzać rozpatrywanie go w dziedzinie rzeczywistej. Istotnie, zauważenie, że równanie (0.1.1) ma nie tylko nieskończenie wiele rozwiązań $y = x$, $x = 1, 2, \ldots$ ale, że też ma dwa rozwiązania innej postaci:

(1.6.1) $\qquad x = 2, \quad y = 4 \qquad$ oraz $\qquad x = 4, \quad y = 2$

nie wymaga (dziś) jakichś genialnych zdolności matematycznych, raczej należy do „żartobliwych" wyników matematyki w stylu książeczki *Lilavati* Szczepana Jeleńskiego. Ale dawniej tak nie było. Starożytni w ogóle by nie mogli krótko sformułować równania

wykładniczego (0.1.1), zaś w I połowie XVII wieku, bywał jeszcze stosowany zapis

$$Q \quad C$$

(gdzie piszę – zgodnie z XVII zwyczajem „∞ ” zamiast „=”), który nie uwzględniał tego czego potęgą mają być 4 i 2 potęgą (miały by to być potęgi szukanej wielkości).

2. Leonhard Euler

2.1. Rozwiązanie Eulera. Koło potowy XVIII wieku funkcja wykładnicza weszła na dobre do powszechnej świadomości, I dlatego mógł się nią zająć też i L. Euler (1707--1783) w II tomie, ustęp 519, pracy [6] (patrz Rys.1) wydrukowanej w roku 1748 (a przedrukowanej w [7], str. 296 i 297). „Dziadzio” L. Euler miał niesamowitą zdolność dochodzenia do wzorów, trudnych do wyprowadzania. I dlatego zaproponował on, jako inne niż rozwiązanie zwane banalnym y = x, rozwiązanie parametryczne:

$$(2.1.1) \qquad x(t) = [1+\tfrac{1}{t}]^t, \quad y(t) = [1+\tfrac{1}{t}]^{t+1}$$

dla $t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. =: J, które należy uzupełnić punktem (e, e), wspólnym zresztą z rozwiązaniem banalnym x = y (patrz Rys. 2). Zbiór J jest dość dziwnym zbiorem, ale – jeśli uzupełnimy te rozwiązaniem owym punktem (e, e) – i chcemy ograniczyć się do dziedziny spójnej, zawartej w płaszczyźnie rzeczywistej – to nie możemy dopuścić do tego by we wzorze (2.1.1) było $t \in \langle -1; 0\rangle$.

Jak L. Euler wyprowadził wzory (2.1.1) ? W pierwszej chwili trudno się domyśleć jak on to zrobił. A zrobił to on tak.[1] Wprowadził on nową zmienną t wzorem

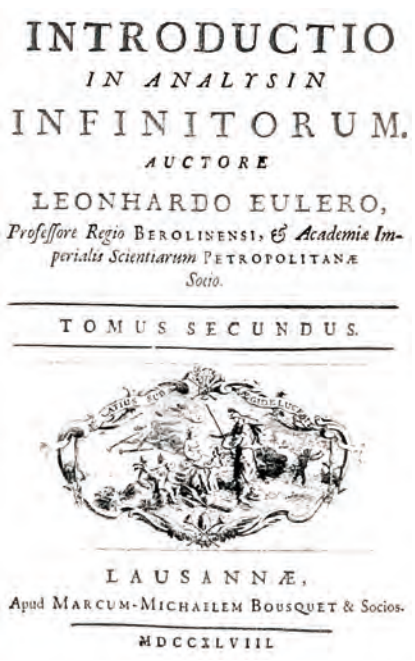
$$(2.1.2) \qquad y = t\,x.$$

A więc $x^{tx} = t^x x^x$. Skąd wyciągając najpierw obustronnie pierwiastek stopnia x, a potem piewiastek stopnia t – 1 i wreszcie położymy t – 1 = 1 : u, to otrzymamy poszukiwane właśnie wzory (2.1.1).

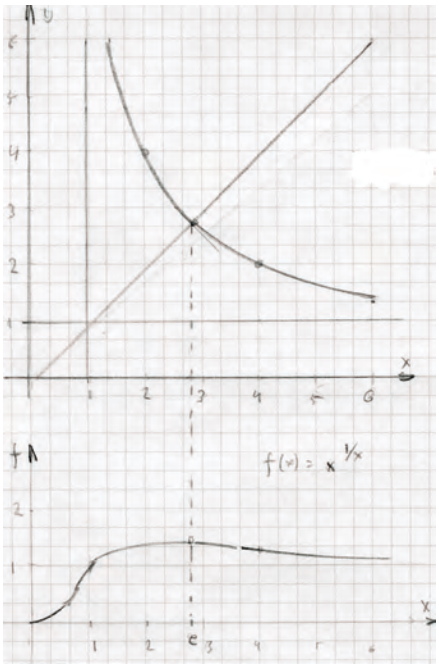
Między innymi, widzimy stąd, że już w połowie XVIII wieku stosowano rozwiązania parametryczne. Ze znanych elementarnych twierdzeń o funkcjach uwikłanych wynika, że w otoczeniach punktów (1.6.1) istnieją rozwiązania równania (0.1.1). Wzory (2.1.1) pokazują nie tylko lokalny charakter tych rozwiązań, ale jednak L. Euler *nie wykazał*, że poza rozwiązaniem banalnym x = y dla x > 0 oraz rozwiązaniem (2.1.1) nie ma już innych rozwiązań. Powstają tutaj też pytania co do sposobu przebiegu krzywej odpowiadającej równaniu (2.1.1).

---

[1] Pomysł ten pochodzi od Christiana Goldbacha. W liście do Daniela Bernoulliego z 31.I.1729 przyjmuje, że y = ax, skąd wyprowadza, że $x = a^{\frac{1}{a-1}}, y = a^{\frac{a}{a-1}}$ (*vide*: [12], t. II, s. 280–281). (*Red.*).


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
TOMUS SECUNDUS.
LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

Rys. 1. Strona tytułowa podręcznika



Rys. 2. Klasyczne równanie Eulera

2.2. Badanie rozwiązania Eulera. Łatwo można zauważyć, że krzywa (2.1.1) mieści się w otwartej ćwiartce płaszczyzny

(2.2.1) $$Q := \{(x, y) : x > 1, y > 1\}$$

i że ma dla x = 1 asymptotę pionową oraz dla y = 1 asymptotę poziomą. Obie te asymptoty tworzą brzeg owej ćwiartki Q, w której mieści się ta krzywa.

Też elementarnym wynikiem jest stwierdzenie, że zarówno dla $t \to +\infty$, jak i dla $t \to -\infty$ mamy

(2.2.2) $$x(t) \to e \qquad y(t) \to e.$$

Ponieważ funkcje *x* oraz *y* zdefiniowane przez wzory (2.1.1) są monotoniczne, więc możemy eliminować z (2.1.1) wielkość t. Otrzymamy w wyniku tego funkcję $y = h^*(x)$ zdefiniowaną w $(1; e) \cup (e; +\infty)$. Jest ona w swej dziedzinie różniczkowalna.

Wobec (2.2.1) jeśli położymy

$$h(e) = e \quad \text{oraz} \quad h(x) = h^*(x) \quad \text{dla} \quad x \in (1; e) \cup (e; +\infty),$$

to otrzymamy, że tak rozszerzona funkcja *h* jest zdefiniowana i ciągła w $(1; +\infty)$. A więc, krzywe odpowiadające rozwiązaniu banalnemu x = y oraz rozwiązaniu $y = h(x)$ przecinają się w punkcie (e, e). Wykazanie, że funkcja *h* jest różniczkowalna w punkcie przecięcia x = e z rozwiązaniem banalnym x = y, jest już znacznie trudniejsze (patrz niżej). W każdym razie, jeśli jest ona różniczkowalna dla x = e, to wtedy musi być $h'(e) = -1$.

2.3. E. J. Moulton. Za okres 249 lat które upłynęły od wydania książki L. Eulera znalazłem tylko jedną krótką pracę E.J. Moultona [8] z roku 1916 mającą za temat badanie równania (0.1.1) w dziedzinie rzeczywistej. Nie twierdzę, iż takich publikacji nie

było, ale nie było ich – jak się zdaje – na pewno tylko w wydawnictwach matematycznych „na serio". Czy coś nie było opublikowane w jakichś podręcznikach szkolnych (patrz na przykład niżej przykład 3.10.1) lub w jakichś zbiorach zadań dla nauczycieli jest w praktyce (w dzisiejszym stanie opracowania takich publikacji) niemożliwe do ostatecznego stwierdzenia (nawet dla wyspecjalizowanych zespołów, a cóż dopiero dla jednego człowieka – przecież chodzi tu o tysiące, najczęściej trudno dostępnych wydawnictw, zawierających dziesiątki tysięcy artykułów w kilkudziesięciu, a nawet możliwe, że w setkach języków, opublikowanych w czasie prawie 250 lat).

Praca E. J. Moultona [8] została opublikowana w znanym czasopiśmie, ale delikatnie mówiąc, nie jest pracą napisaną wzorowo. Nie zawiera ona żadnych odnośników do literatury. Autor chciał więc – chyba – sugerować, że pomysł pracy i jej wykonanie były całkowicie jego dziełem.

E. J. Moulton w części pierwszej pracy, by nie mieć kłopotów z podstawami ujemnymi, zastępuje *de facto* równanie (0.1.1) przez równanie z wartościami bezwzględnymi podstaw $|x|^y = |y|^x$, które logarytmując, otrzymuje (stosuję tu moje oznaczenia) $y \ln|x| = x \ln|y|$. Po czym następuje wypisanie równania typu $f(x) = f(y)$ (patrz niżej równanie (3.1.2)), gdzie położyliśmy

(2.4.1) $$f(x) = (\ln x) : x$$

Dokonuje się podstawienia podobnego do podstawienia Eulera z n°2.1. Sugeruje to, że autor jednak znał bezpośrednio lub pośrednio książkę L. Eulera [5] – może zresztą jest to niesłuszna insynuacja. Dalej uzależnia się wynik od badania przecięcia wykresu funkcji *f* danej wzorem (2.4.1) z prostymi rodziny $y = kx$. Ostatecznie wynikom E. J. Moultona można zarzucić, że

1° Prowadzą do bardziej skomplikowanych rachunków niż w niżej przedstawionej metodzie.

2° Nie dają się uogólnić na funkcje *f* mające więcej niż jedno ekstremum.

3° Przynajmniej w wersji podanej przez autora, nie pozwalają na wykazanie, że wyczerpało się wszystkie możliwe rozwiązania (co w podanej niżej teorii da się – jak zobaczymy – łatwo zrobić).

W tytule pracy E. J. Moultona jest podane, że chodzi w niej o rozwiązania rzeczywiste równania (01.1). Tymczasem 2/3 pracy poświęcone jest rozważaniom tego równania w dziedzinie zespolonej. W ostatnim zdaniu pracy jej autor podaje, że nie jest w stanie stwierdzić czy podał rzeczywiście wszystkie możliwe rozwiązania (rzeczywiste?).

2.4. Podręcznik licealny. Na jesieni roku 1937 zaczęły działać w Polsce (jako skutek tak zwanej jędrzejowiczowskiej reformy szkolnictwa) różne 2 letnie licea ogólnokształcące, będące dalszy ciągiem 4 letnich gimnazjów. Było ich kilkaset. Istniały główne typy (zwane wtedy „wydziałami") liceów ogólnokształcących: humanistyczne, matematyczno-fizyczne i przyrodnicze. Ponad to istniało parę typów jednostkowo (czy prawie jednostkowo) występujących liceów: klasyczne (neoklasyczne?), neofilologiczne, może były też jeszcze jakieś inne. Były też i licea zawodowe. Przygotowano podręczniki. Do nauki matematyki, jako jeden z kilku możliwych do wyboru ich kompletów, był komplet książeczek dwóch Stefanów: Kulczyckiego i Straszewicza. Jeden z zestawów był przeznaczony dla liceum matematyczno-fizycznego, a drugi dla pozostałych typów. Zestaw

matematyczno-fizyczny liczył po 3 książeczki na klasę. Były to: na II klasę rachunek różniczkowy i całkowy (może miał on inną nazwę, której już dziś nie pamiętam), geometria analityczna (patrz [7]) i geometria wykreślna. Otóż w którymś nich (a może jeszcze w przewidzianej na I klasę *Algebrze*?) jako zadanie było wykazanie, że parametryczne wzory (2.1.1) podają rzeczywiście rozwiązania równania (0.1.1). A więc w pewnym sensie myśl L. Eulera „trafiła pod strzechy" (to jest do szkoły średniej).

Dlaczego tutaj szeroko rozpisałem się o tych podręcznikach, zamiast po prostu podać dane bibliograficzne właściwego? Gdyż tych podręczników brak jest (a przynajmniej – jak się wydaje – brak jest w katalogach) w wielkich bibliotekach warszawskich (Bibliotece Uniwersytetu Warszawskiego, Bibliotece Narodowej, Bibliotece Publicznej miasta stołecznego Warszawy), z których co najmniej dwie miały w okresie międzywojennym przyznany sobie egzemplarz obowiązkowy. Znalazłem w ich katalogach tylko pozycję [7] – na pewno nie o nią mogło tu chodzić. Czy źle szukałem, czy też ich katalogi są niekompletne? Nie wiem. Figurują w katalogach tylko zestawy (i to niekompletne) powojennych (drukowanych po 1944 roku) podręczników owych autorów dla liceów zawodowych.

Z tym rozwiązaniem Eulera zapoznałem się po raz pierwszy na wiosnę 1940 roku, gdy sam z tych podręczników (dla liceum matematyczno-fizycznego) krzystałem. Ale później, na jesieni 1944 roku, gdy sam już byłem trochę obyty z matematyką, której w zakresie liceum sam wtedy kogoś uczyłem, znowu odpowiedni podręcznik dostał się do moich rąk. Wtedy też próbowałem przedstawić (z powodzeniem) (patrz Rys. 2) graficznie funkcję $y = h(x)$ daną parametrycznie równaniami (2.1.1) i wykazać (bezskutecznie), że wraz rozwiązaniem banalnym przedstawia ona wszystkie możliwe rozwiązania równania Eulera (0.1.1).

2.5. Jednoznaczność rozwiązania Eulera. Ważniejszą od sprawy różniczkowalności funkcji h w punkcie $x = e$, jest sprawa nie istnienia innych niż banalne i eulerowskie rozwiązać (pojęcie „inne" sprecyzujemy poniżej). Można próbować zrobić to „na chama" badając znak funkcji $g(x, y) = x^y - y^x$ w czterech obszarach, na które te rozwiązania dzielą ćwiartkę $x > 0$, $y > 0$. A z kolei jest to możliwe przez badanie znaków pochodnych funkcji g. Ale jak wydaje się jest to, droga, jak się wydaje, możliwa, ale katorżna – nie wiem czy ktoś w ogóle zdołał ją przeprowadzić do pomyślnego końca.

3. Inne podejście

3.1. Równanie Eulera. W dalszym ciągu będę stosować tutaj uproszczoną symbolikę K. Mengera, to jest wersaliki (nie kursywa) małe litery – liczby, duże litery (kapitaliki) nie kursywa – zbiory, kursywa małe litery – funkcje, j – funkcja tożsamościowa (to znaczy funkcja j taka, że dla każdego x mamy $j(x) = x$.

Kilkanaście lat temu przyszło mi do głowy, że równanie (0.1.1) warto by dla $x > 0$, $y > 0$, przekształcić do postaci

(3.1.1) $$x^{1/x} = y^{1/y},$$

to jest do postaci

(3.1.2) $$f(x) = f(y),$$

gdzie

(3.1.3) $$f(x) = x^{1/x}$$

i zbudować dla tego ostatniego równania teorię, na terenie której byłyby łatwiejsze do uzyskania szczegółowe wyniki dla $f(x)$ danego wzorem (3.1.3), gdzie $x > 0$).

3.2. Definicje. Niechaj I będzie otwartym spójnym podzbiorem prostej R, a więc jest całą prostą, otwartą półprostą lub otwartym przedziałem. Dalej niech $D := I \times I$. Weźmy pod rozwagę funkcję $f : I \to I$.

DEFINICJA 3.2.1. *Rozwiązaniem kompletnym* równania (3.1.2) nazywamy zbiór

$$K(f) := \{(x, y) : f(x) = f(y)\},$$

DEFINICJA 3.2.2. *Rozwiązaniem banalnym* równania (3.1.2) nazywamy zbiór

$$B(f) := \{(x, x\} : x \in I\}.$$

Oczywiście zbiór $K(f)$ jest symetrycznie położony względem prostej $y = x$ (to jest symetryczny względem rozwiązania banalnego).

DEFINICJA 3.2.3. *Rozwiązaniem niebanalnym* nazywamy każdy podzbiór zbioru $K(f)$ nie zawierający żadnego spójnego podzbioru co najmniej dwuelementowego, wspólnego ze zbiorem $B(f)$, ani też nie posiadający wspólnego z $B(f)$ podzbioru zawierającego punkt skupienia.

DEFINICJA 3.2.4. *Rozwiązaniem funkcyjnym* równania (3.2) nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ lub $x = x(y)$ zdefiniowaną w zbiorze spójnym $J \subset I$ i taką, że mamy $f(x) = f(y(x))$ dla wszystkich $x \in J$, lub odpowiednio $f(x(y)) = f(y)$ tak samo dla wszystkich $y \in J$. Natomiast *rozwiązaniem parametrycznym* równania (3.1) nazwiemy każdą parę funkcji $C^0 \ni (x; y) : J \to D \subset R_2$, taką że mamy

$f(x(t)) = f(y(t))$ dla wszystkich $t \in J$.

Wykresy rozwiązań funkcyjnych czy parametrycznych są zawarte w zbiorze $K(f)$ tworzącym rozwiązanie kompletne.

Dalej zauważmy, że jeśli g jest funkcją ciągłą, mocno monotoniczną, zdefiniowaną na przeciwdziedzinie funkcji f, to obu funkcjom $y = f(x)$ oraz $y = g(f(x))$, odpowiadają takie same zbiory $K(f) = K(g(f))$.

Jeśli istnieje spójny zbiór $J \subset I \subset R$, zawierający co najmniej dwa różne punkty (a więc zawierający jakiś przedział), taki że $f_{/J} = const$, to wtedy $J \times J \subset K(f)$, co znaczy, że wtedy zbiór $K(f)$ zawiera dwuwymiarowy kwadrat. Dlatego też w dalszym ciągu przyjmiemy jako stałe założenie następującą hipotezę

HIPOTEZA H. *Funkcja* $f : I \to R$ *nie jest stała na żadnym podprzedziale zbioru* I.

W podawanych niżej ogólnych twierdzeniach najczęściej będzie występować założenie, że f jest ciągłe, ale okazuje się, że w wielu konkretnych przykładach często można się obyć bez niego.

3.3. Indeksy. Istotną dla dalszego ciągu pracy będzie następująca

DEFINICJA 3.3.1. Niechaj x_o jest ustalone. Jeżeli równanie

(3.3.1) $$f(x_o) = f(x),$$

mające sens tylko dla $x_o \in I$, ma dokładnie k rozwiązań (licząc je pojedyńczo, ale z samą liczbą x_o włącznie), to powiemy, iż liczba x_o *ma indeks* k. Natomiast, jeżeli

$x_o \in I$, to powiemy, że ma *indeks równy* 0. Zbiór punktów o indeksie k oznaczymy H_k.

DEFINICJA 3.3.2. Ustalmy zbiór (a, b) =: L. Jeżeli dla $x_o \in L$ równanie (3.3.1) ma dokładnie k rozwiązań należących do L (z samym x_o włącznie), to powiemy, że x_o ma *indeks* k *w przedziale* L i zbiór takich x_o oznaczymy $H_k(L)$.

Jeżeli równanie (3.3.1) ma nieskończenie wiele rozwiązań, to będziemy pisać H_∞, ewentualnie $H_\infty(L)$.

Znaczenie obu ostatnich definicji wynika z fundamentalnego, acz niemal oczywistego, twierdzenia:

TWIERDZENIE 3.3.1. *Jeżeli liczba* x_o *ma indeks* k, *to wtedy proste* $x = x_o$ *oraz* $y = x_o$ *mają dokładnie po* k *punktów wspólnych ze zbiorem* K(*f*).

Jeżeli – dla ustalenia uwagi – założymy, że funkcja *f* ma dokładnie jedno właściwe ekstremum x_o, leżące (oczywiście) wewnątrz zbioru I := (a; b) (przy czym może być $a = -\infty$ lub $b = +\infty$), to wtedy zbiór H_2 jest sumą dwóch przedziałów $(a^*; x_o)$ oraz $(x_o; b^*)$ i będzie $a^* = a$ lub $b^* = b$ (może się zdarzyć, że równocześnie $a^* = a$ oraz $b^* = b$).

Bez trudu można wykazać

TWIERDZENIE 3.3.2. *Przypuśćmy, że* (a; b) $\subset$ I *gdzie* $-\infty \le a < b \le +\infty$ oraz $x_o \in (a; b)$. *Jeżeli f jest funkcją mocno malejącą* (*rosnącą*) *w* (a; x_o), *mocno rosnącą* (*malejącą*) *w* (x_o; *b*) *i taką, że*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x),$$

to istnieje funkcja y(x) *zdefiniowana, ciągła, i malejąca* (*rosnąca*) *w* (a; b), *która jest rozwiązaniem niebanalnym równania* (3.3.1). *Ponadto jest*

$$\lim_{x\to a^+} y(x) = b, \quad \lim_{x\to b^-} y(x) = a,$$

a więc w szczególności jeśli $-\infty < a$, $b = +\infty$ to $x = a$ *oraz* $y = a$ *są asymptotami odpowiednio pionową i poziomą tej funkcji y*; jeśli $-\infty = a$, $b < +\infty$, *to* $x = b$ *oraz* $y = b$ *to też są asymptotami odpowiednio pionową i poziomą tej funkcji y*; natomiast *jeśli* $-\infty = a$, $b = +\infty$, *to* (jak można by się spodziewać)

$$\lim_{x\to -\infty} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} y(x) = -\infty,$$

Czytelnik zechce zrobić samemu rysunek ilustrujący te twierdzenie, w czterech możliwych szczególnych przypadkach zbioru I.

3.4. Liczne ekstrema. Można uogólnić ostatni wynik na funkcje *f* posiadające dowolną, ale skończoną ilość ekstremów. Zauważmy, że charakter topologiczny zbioru K(*f*) zależy tylko od od ilości tych ekstremów i od ich stosunków wzajemnych. Sprecyzujmy tę uwagę, przyjmując – dla ustalenia uwagi – że funkcja *f* posiada dokładnie $n > 0$ ekstremów $x_1, \ldots, x_n$. Połóżmy $z_k = f(x_k)$ dla $k = 1,\ldots, n$ oraz dla $k = 0$ i $k = n + 1$ połóżmy:

$$z_0 := \lim_{x\to a^+} f(x), \quad z_{n+1} := \lim_{x\to b^-} f(x), \tag{3.4.1}$$

oraz dodatkowo jeśli *f* nie posiada ekstremów (to jest gdy jest funkcją monotoniczną), to połóżmy $n = 0$. Obie granice (3.4.1) – które mogą też przyjmować wartości $\pm\infty$ – zawsze istnieją.

Permutacja n + 2 liczb i_k, k = 0,1, ... n, n + 1 taka, że

(3.4.2) $$z_{i_0} \le z_{i_1} \le \ldots \le z_{i_n} \le z_{i_{n+1}}$$

oraz uporządkowany ciąg wielkości „<" oraz „=" jaki występuje faktycznie w ciągu (3.4.2) determinuje charakter topologiczny zbioru K (*f*).

Na przykład, gdy n = 0, (to jest gdy funkcja *f* jest monotoniczna), to wtedy rozwiązanie kompletne jest utworzone tylko przez rozwiązanie banalne, a więc zbiór *K* (*f*) jest homeomorficzny z odcinkiem.

Jeśli n = 1 (patrz Twierdzenie 3.2), to istnieje wprawdzie aż 4.(3!) = 24 możliwych kombinacji, ale jednak wtedy wszystkie możliwe zbiory *K* (*f*) są homeomorficzne z dwoma otwartymi odcinkami, mającymi jeden wspólny punkt.

3.5. Punkty wspólne. Mniej banalnym wynikiem jest następujące

TWIERDZENIE 3.5.1. *Przypuśćmy, że funkcja f jest zdefiniowana i klasy* C^2 *w* I *gdzie* $I \subset R$ *jest zbiorem nie pustym, otwartym i spójnym* (ale niekoniecznie symetrycznym w stosunku do 0) *i przypuśćmy, że istnieje liczba* $x_o \in I$ *taka,że*

(3.5.1) $$f'(x_o) = 0, \qquad c := f''(x_o) \neq 0.$$

Wtedy istnieje takie $c_1 > 0$, *że w przedziale* $(x_o - c_1; x_o + c_1)$ *istnieje rozwiązanie funkcyjne równania* (3.1.2) $y = y_o(x)$, klasy C^1 i takie, że $y_o(x_o) = x_o$ i $y_0'(x_o) = -1$.

Ponadto istnieje otoczenie $J := (x_o - c; x_o + c) * (x_o - c; x_o + c) \subset I * I$ (gdzie $0 < c \le c_1$) punktu (x_o, x_o) na płaszczyźnie (x, y), *takie, że w tym otoczeniu wszystkie punkty rozwiązania kompletnego* K (*f*) *albo należą do rozwiązania banalnego, albo też istnieje funkcja* y_o *taka, że mają one formę* $(x, y_o(x))$ *dla* $x \in (x_o - c; x_o + c)$.

3.6. Dwa przykłady. Ponieważ (opuszczony tu) dowód Twierdzenia 3.5.1 jest dość żmudny i techniczny, więc Czytelnik zechce rozwiązać poniższy przykład.

PRZYKŁAD 3.6.1. Połóżmy

$$g(x) = 2x^2, \qquad h(x) = 2x^2 + x^4$$

oraz niech funkcja *f* będzie dana następującym wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{dla} \quad x \le 0. \\ 2x^2 + x^4 & \quad\quad x > 0. \end{cases}$$

Jak łatwo można sprawdzić tu funkcja *f* istnieje w całym zbiorze R, $f \in C^2$, a przy tym $f(0) = 2 > 0$.

Nie można zrezygnować w Twierdzeniu 3.5.1 z założenia, że $f''(x_o) \neq 0$. Następujący przykład, wykazuje, że nawet założenie, iż x_o jest ekstremum funkcji *f* może tu nie wystarczyć.

PRZYKŁAD 3.6.2. Połóżmy

$$f(x) = \begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x \le 0. \\ x^3 & \quad\quad x > 0. \end{cases}$$

Tutaj $f \in C^2$, $f(0) = 0$ i $x_o = 0$ jest minimum właściwym (nawet absolutnym) funkcji *f*, ale $f''(0) = 0$. Rozwiązanie kompletne równania (3.1.2) składa się tu z rozwiązania banalnego y = x oraz z rozwiązania funkcyjnego danego przez funkcję

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \le 0. \\ -\sqrt{x} & \quad\quad\;\; x > 0. \end{cases}$$

Widzimy, że te rozwiązanie y jest klasy C^2 (a nawet analityczne) poza punktem $x_o = 0$, w którym jest ono tylko ciągłe, bowiem pochodna y'(0) nie istnieje. Na rysunku 6 są podane wykresy funkcji *f* i funkcji y (patrz rys. 6).

3.7. Ekstremum rozwiązania. Interesujące jest – acz nieoczywiste – twierdzenie, pozwalające na wyszukiwanie ekstremów rozwiązań funkcyjnych. Mianowicie mamy twierdzenie (którego założenia można by zresztą osłabić, a tezę wzmocnić). Jego dowód (niedługi) opuszczamy

TWIERDZENIE 3.7.1. *Niech* $f \in C^2$. *Załóżmy, że* $f'(x_o) = 0$ oraz $f''(x_o) < 0$ ($f''(x_o) > 0$), więc, że x_o *jest lokalnym, ostrym maksimum* (*minimum*) *funkcji f i ponadto* $x_o \in H_2$. *Istnieje więc wtedy* $x_1 \neq x_o$ *takie, że* $f(x_1) = f(x_o)$. *Niech* $f'(x_1) \neq 0$. *I wreszcie niech* $y = y(x)$ *jest rozwiązaniem funkcyjnym równania* (0.1.1) *takim, że* $y(x_o) = x_1$. *Wtedy ta funkcja y posiada w punkcie* x_o *lokalne, ostre maksimum* (*minimum*).

3.8. Punkty wyróżnione funkcji *f*. Są różne definicje wypukłości. Jeśli się je wprowadzi, to można badać wypukłość krzywych wchodzących w skład kompletnego rozwiązania $K(f)$ jako wynik pewnych własności funkcji *f*. Dalej przedstawimy w tym ustępie pewne rezultaty tyczące się rozwiązań równania (3.1.2). Ich uzyskanie jest zresztą dość skomplikowane, a one same są względnie mało ciekawe.

Załóżmy, że $f \in C^2$ dla $x \in I$, $f''(x_o) = 0$, że funkcja *f* w pewnym otoczeniu $U \subset I$ punktu x_o jest mocno malejąca (rosnąca) i, że $x_o \in H_2(U)$. A więc, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x_1 \neq x_o$ równania (3.3.1).

TWIERDZENIE 3.8.1. *Przy spełnieniu tych założeń i jeśli* $f'(x_1) \neq 0$, *to rozwiązanie niebanalne* $y = h(x)$ (*gdzie* $h \in C^1$) *równania* (3.1.2), *które przechodzi przez punkt* (x_o, x_1) (*to znaczy takie, że* $x_1 = h(x_o)$) *spełni warunek* $h'(x_o) = 0$, *natomiast rozwiązanie niebanalne* $x = g(y)$ (gdzie $g \subset C^1$) *równania* (3.1.2), *które przechodzi przez punkt* (x_1, x_o) (*to znaczy takie, że* $x_o = g(x_1)$) *spełni warunek* $g'(x_1) = 0$. *Ponadto punkty* x_o *oraz* x_1 *są punktami przegięcia odpowiednio funkcji h i g*.

Czytelnik może próbować badać również i przypadek w którym założenie $f'(x_1) \neq 0$ nie jest spełnione. Przypuśćmy teraz, że x_o jest ekstremum (lokalnym) funkcji *f* i ma jako indeks liczbę > 1. Istnieje więc co najmniej jedno rozwiązanie $x_1 \neq x_o$ równania (3.3.1).

TWIERDZENIE 3.8.2. *Jeśli będą spełnione te założenia i jeśli* $f'(x_o) \neq 0$, t*o niebanalne rozwiązanie funkcyjne* $y = h(x)$, *które przechodzi przez punkt* (x_o, x_1), *jest klasy* C^1 *i będzie miało w punkcie* x_o *ekstremum. Dokładniej*, x_o *jest minimum* (*maksimum*) *funkcji f to wtedy* x_o *będzie też minimum* (*maksimum*) *rozwiązania h. Natomiast niebanalne funkcyjne rozwiązanie* $x = g(y)$, *które przechodzi przez punkt* (x_o, x_1), *gdzie* $x_1 = g(x_o)$ jest klasy C^1 *będzie miało w punkcie* x_1 *ekstremum*.

Co więcej z tego twierdzenia wynika

TWIERDZENIE 3.8.3. *Jeśli* $x_1 \neq x_2$ *są dwoma maksymami (albo też dwoma minimami) funkcji f takimi, że* $f(x_1) = f(x_2)$, *to istnieją dwa funkcyjne rozwiązania niebanalne* $y = h_1(x)$ *oraz* $y = h_2(x)$ *równania* (3.1.2) *takie, że* $h_1(x_1) = h_2(x_1)$ *i w dostatecznie małym otoczeniu punktu* x_1 *mamy* $h_1(x) \neq h_2(x)$ *dla* $x \neq x_1$.

Czytelnik zechce spróbować obliczyć kąt między tymi krzywymi w punkcie ich przecięcia się. Ilustrację do tego twierdzenia daje Przykład 3.11.3 oraz rysunek 4.

PRZYKŁAD 3.8.1. Jeślibyśmy wśród założeń Twierdzenia 10.4 zamiast założenia, że istnieją dwa minima lub dwa maksyma, założyli mniej, a mianowicie tylko, że mamy dwa ekstrema x_1 i x_2 funkcji f takie, że $f(x_1) = f(x_2)$, to teza tego twierdzenia może być fałszywa. W tym celu wystarczy wziąć pod rozwagę funkcję f zdefiniowaną w przedziale $I := \langle 0; 8\rangle$ i mającą jako wykres łamaną o wierzchołkach w punktach: (0, 2), (2, 0), (3, 1), (5, −1), (6, 0), (8, −2) Wtedy zbiór $K(f)$ utworzony jest przez rozwiązanie banalne $y = x$ dla $x \in \langle 0; 8\rangle$ (ewentualnie dla $x \in R$) i dwa rozłączne prostokąty obrócone o 45° w stosunku do osi; prosta rozwiązania banalnego dzieli każdy z nich na dwa (symetrycznie położone względem niej) kwadraty o bokach = $\sqrt{2}$ (patrz rysunek 7).

Uwaga. W tym przykładzie (też i w niektórych innych) posługujemy się nie funkcją f klasy C^1, czy nawet C^2, ale łamaną, a więc tylko funkcją ciągłą, to jest klasy C^0. Chodzi o to, że tutaj nie tylko łatwiej jest rysować funkcję f jako łamaną niż – na przykład – jako jakąś funkcję algebraiczną, ale też wtedy zbiór $K(f)$ też składać się będzie tylko z odcinków (i – ewentualnie – punktów). Natomiast jakościowo (topologicznie) rysunki będą ilustrować nasze twierdzenia z dokładnością do homeomorfii (tyle tylko, że uzyskane na rysunkach krzywe nie będą „gładkie", a będą łamanymi będą się one składać z odcinków, a więc nie będą to na ogół dyffeomorfie). Porównaj niżej parę Przykładów: 3.11.1 oraz 3.12.1.

3.9. Dalszy ciąg teorii równania Eulera. Wróćmy do klasycznego równania.

PRZYKŁAD 3.9.1. Rozpatrzmy w dziedzinie rzeczywistej równanie (0.1.1) dla $x > 0$, $y > 0$. Czyli równanie (3.1.10) dla f danego wzorem (3.1.3), to jest dla $f(x) = x^{1/x}$.

Ponieważ – jak nawet uczeń ze szkoły podstawowej potrafi sprawdzić – równanie (0.1.1) ma też rozwiązania (2, 4) oraz (4, 2), więc posiadać ono musi nie tylko rozwiązanie banalne $y = x$, ale też i rozwiązania nie banalne.

Na to by je wszystkie (!) znaleźć, możemy zastosować wyłożoną wyżej (w n° 3.2-3.8) teorię. Powinniśmy więc znaleźć ekstrema funkcji f. Jedynym zerem pochodnej f' jest $x = e$. Znajdujemy też, że $f''(e) < 0$. A więc funkcja f ma w punkcie $x_o = e$ maksimum i to jedyne (mniej obliczeń jest potrzebnych, jeśli będziemy badali nie samą funkcję f lecz funkcję $\ln f(x)$, czyli jeśli zamiast pochodnej f będziemy badać jej pochodną logarytmiczną).

Wynika stąd natychmiast (patrz rysunek 2) z Twierdzeń 3.3.1, 3.3.2 oraz 3.6.1, że równanie (0.1.1) zdefiniowane dla $x, y \in (0; +\infty)$ ma w dziedzinie rzeczywistej rozwiązanie banalne $y = x$ (albo jeśli ktoś woli to możemy je zapisać jako $y_o(x) = x$ dla $x \in (0; +\infty)$, albo w symbolice K. Mengera $y_o = j_{/(0;\,+\infty)}$) oraz jedno jedyne rozwiązanie niebanalne, dane w postaci parametrycznej wzorami Eulera (2.1.1) i z punktu (e, e). W postaci funkcyjnej mogło by ono być zapisane jako $y = y_1(x)$, gdzie $x \in (1; +\infty)$, gdzie y_1 jest funkcją malejącą i wklęsłą. Oba rozwiązania y_o oraz y_1 przecinają się pod kątem prostym w punkcie (e, e). Przy tym funkcja y_1 ma poziomą asymptotę $y = 1$ oraz pionową $x = 1$. To znaczy, że jest

$$\lim_{x\to 1^+} y_1(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y_1(x) = 1.$$

3.10. Równanie Eulera dla liczb naturalnych. Można rozpatrywać równanie (0.1.1) w innym zbiorze liczb niż w zbiorze liczb rzeczywistych.

PRZYKŁAD 3.10.1. Znając już poprzedni Przykład, 3.9.1 rozpatrzmy teraz równanie (0.1.1) w dziedzinie liczb naturalnych. Rozwiązanie w liczbach naturalnych musi być podzbiorem rozwiązania w liczbach rzeczywistych, to jest rozwiązania kompletnego $K(f)$. Rozwiązaniem banalnym jest tu $x = y$ dla $x = 1, 2, \ldots$ Poszukamy teraz rozwiązań niebanalnych w liczbach naturalnych takich, że $0 < y < x$. Takie rozwiązanie naturalne musi leżeć na poprzednio wprowadzonej krzywej $y = y_1(x)$ dla $e < x$. Skoro funkcja y_1 jest mocno malejąca, $y_1(e) = e$ oraz $y_1(x) > 1$, to na niej jedyny punkt o naturalnej rzędnej będzie mieć rzędną $y = 2$ (jako jedyną liczbę naturalną zawartą między 1 a liczbą e). Wtedy pierwszym element tego rozwiązania jest $x = 4$ i rozwiązaniem jest znana nam już para (4, 2). Oczywiście drugim rozwiązaniem (symetrycznym) jest para (4, 2) i innych rozwiązań brak. Jest to chyba najprostsza droga do uzyskania tego rezultatu.

Fakt, że pary (2, 4) oraz (4, 2) są rozwiązaniami równania (0.1.1) musiał być znany od dawna (ale jednak nie dawniej niż od drugiej połowy XVII wieku). Jego dalszą historię znaleźć można w kilkunastowierszowej wzmiance w monografii L. E. Dicksona [4], tom II, str. 687. Najpierw pisze on, że rozwiązaniami równania w liczbach wymiernych są pary (2, 4), $((3/2)^2, (3/2)^2)$ oraz $((4/3)^3, (4/3)^3)$ – nie zauważając, że pierwsza para jest jedną z dwóch par niebanalnych liczb całkowitych, a dwie pozostałe są przykładami nieskończonej ilości wymiernych par banalnych. Potem dodaje, że Daniel Bernoulli (1700-1780) w liście z 29.VI.1728 roku, do Krystiana Goldbacha (1690-1764), napisał, że jedynym rozwiązaniem niebanalnym w liczbach całkowitych równania (0.1.1) jest para (2. 4) oraz że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach wymiernych. Jak się zdaje, nie był podany tam dowód jedyności tej pary (2, 4) liczb (oczywiście zakłada się milcząco, że rozwiązania są symetryczne względem obu swych elementów). Cały ten list został zresztą opublikowany dopiero w 1843 roku.[2]

Po czym następuje wzmiankowanie kilku bardzo trudnych – poza pracą Multona [8] – do odszukania prac (przyczyna tej trudności była już podana wyżej w n° 2.3). Prace te mają podawać jedyność niebanalnych rozwiązań (1.6.1) w dziedzinie liczb naturalnych. Są to mianowicie prace J. von Hengela a 1888 roku, C. Herbsta z 1909, dalej są to trzy prace z lat 1910, 1911, 1912 oraz praca A. Tanturiego z 1915 roku – wszystko są to prace, które w Polsce są, chyba, całkowicie niedostępne.

Znam natomiast pełne zawartości dwu – ale jeszcze późniejszych prac – obu zresztą związanych z Polską. Mianowicie wyniki opublikowane przez Stanisława Ruziewicza (1889-1941) oraz Wacława Sierpińskiego (1882-1969) w pracach odpowiednio [9] i [10]. Ponieważ prace te wydają się być niemal równoczesne, podaję więc ich autorów w kolejności alfabetycznej. Nie wiem w jakim stopniu są one związane z pracami podanym przez L. Dicksona – bowiem II tom monografii [4] ukazał się od nich później.

---

[2] Jest to krótki list (7 linijek tekstu), tylko odnotowujący ten fakt, bez dowodów (*vide*: [12], t. I, s. 262). (*Red.*).

W swej króciutkiej pracy [9] St. Ruziewicz posługuje się wprowadzeniem nowej zmiennej danej wzorem Eulera (to jest wprowadzonej wzorem (2.1.2)), co po kilku dalszych przekształceniach dostarcza nam poszukiwanej jedyności rozwiązań (1.6.1) w dziedzinie liczb całkowitych.

Natomiast w swym (rzekomym) podręczniku [10] W. Sierpiński załącza do jego § 47 w Części I jako „Ćwiczenie 2" zadanie do udowodnienia, że dla wszystkich par liczb naturalnych (m, n) takich, że $0 < m \leq n$ para (2, 4) jest jednym rozwiązaniem równania (0.1.1). W. Sierpiński najpierw sprowadza równanie (0.1.1) w dziedzinie liczb całkowitych do postaci (3.1.1), to jest do postaci (3.1.2), gdzie funkcja f dana jest wzorem (3.1.3) – stosuję to moje oznaczenia i sposoby zapisywania wzorów, inne niż oryginalne W. Sierpińskiego. Wychodząc z wzorów udowodnionych w owym § 47 Sierpiński nie dłużej niż w pracy St. Ruziewicza, ale całkiem od niego inaczej, udowadnia wynik ćwiczenia. Sądząc po tym, że podany jest dokładny sposób rozwiązanie tego ćwiczenia, autor musiał uważać je za trudne.

3.11. Dalsze przykłady. Opierając się o wyżej uzyskane wyniki Czytelnik zechce samemu przerobić (to jest wykonać potrzebne rachunki i zilustrować je odpowiednimi rysunkami) poniższe przykłady.

PRZYKŁAD 3.11.1. Niech $f(x) = x^2$. Wtedy zbiór $K(f) = K(j^2)$ utworzony jest przez dwie proste: $y = x$, to jest przez rozwiązanie banalne oraz przez rozwiązanie niebanalne $y = -x$ (patrz Rys. 3b).

PRZYKŁAD 3.11.2. Niech $f(x) = |x|$. Wtedy zbiór $K(f) = K(|j|)$ utworzony jest, jak w poprzednim przykładzie, przez dwie proste: $y = x$ (rozwiązanie banalne) oraz $y = -x$ (rozwiązanie niebanalne). Tu wprawdzie funkcja f jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna mimo to tutaj patrz rysunek 3c) jest $K(j^2) = K(|j|)$ – czytelnik zechce zajrzeć też do uwagi umieszczonej po Przykładzie 3.8.1 przy końcu ustępu n° 3.8.

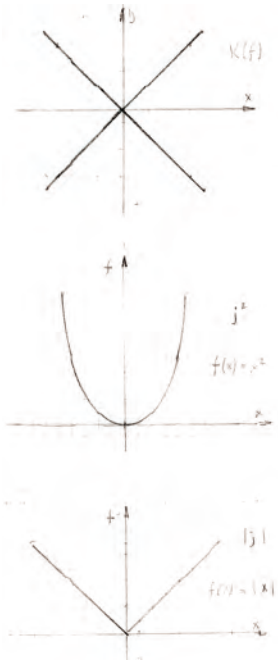
PRZYKŁAD 3.11.3. Niech $f(x) = (1 - x^2)^2$. Wtedy zbiór

$$K(f) = K((1 - j^2)^2)$$

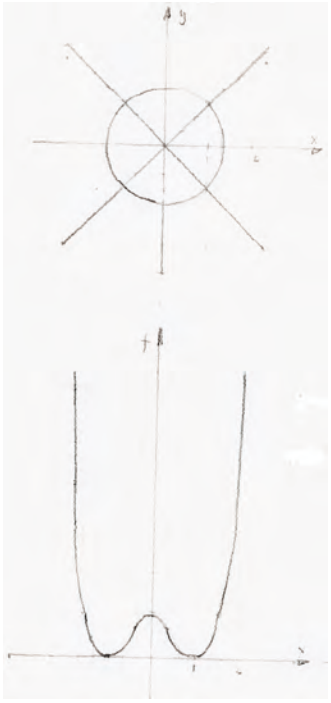
utworzony jest przez dwie proste: $y = x$ (rozwiązanie banalne) i $y = -x$ oraz przez koło $x^2 + y^2 = 2$ (patrz Rys. 4).

PRZYKŁAD 3.11.4. Niech $f(x) = x^5 - x^3$. Wtedy zbiór $K(f)$ utworzony jest przez prostą: $y = x$ (rozwiązanie banalne) oraz przez zamkniętą krzywą algebraiczną (stopnia 4), która posiada 4 punkty przegięcia.

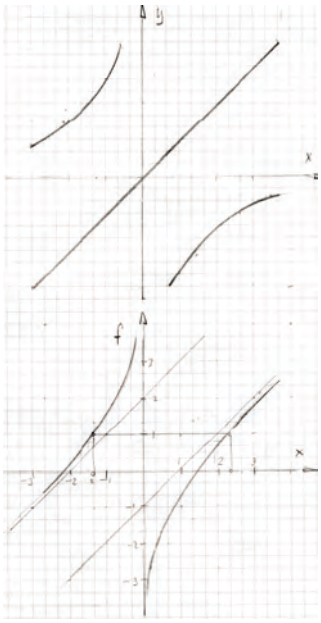
PRZYKŁAD 3.11.5. Niechaj f będzie funkcją klasy C^2 zdefiniowaną w $\langle 0; +\infty \rangle$, taką, że $f(0) > f(x_5) > 0 > f(x_3)$, gdzie $x_5 > x_3 > 0$. Zakładamy, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (0; x_3) \cup (x_5; +\infty)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_3; x_5)$, ponad to $f(x) \to 0$ dla $x \to +\infty$. Oczywiście wtedy $f'(x_3) = 0 = f'(x_5)$. Istnieją wtedy też dwie liczby $x_2 \in (0; x_3)$ i $x_4 \in (x_3; x_5)$ takie, że $f(x_2) = 0 = f(x_4)$ oraz $x_1 \in (0; x_2)$ takie, że $f(x_1) = f(x_5)$. Dla tak określonej funkcji f zbiór $K(f)$ składa się z rozwiązania banalnego oraz z dwóch krzywych nieograniczonych posiadających po dwie asymptoty (poziomą i pionową), które mają jako równania odpowiednio $y = x_2$ i $x = x_2$ oraz $y = x_4$ i $x = x_4$.



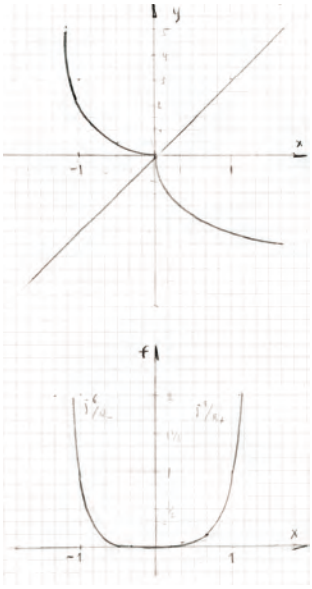
Rys. 3



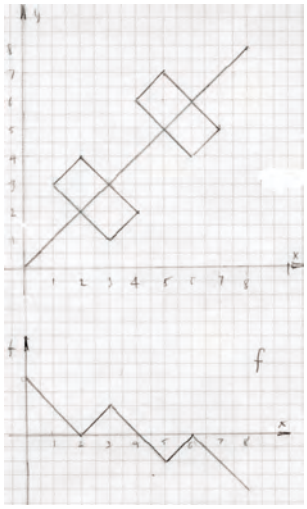
Rys. 4



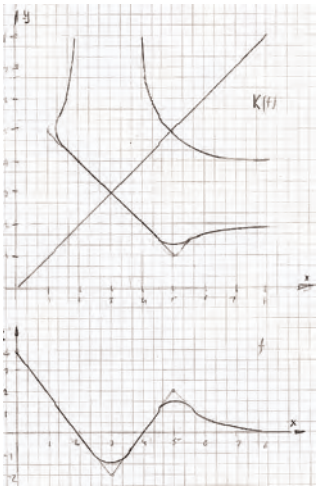
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Dokładniej, istnieją trzy funkcje będące tutaj nie banalnymi rozwiązaniami funkcjonalnymi równania (3.1.2). Patrz Rys. 8. Dwie z nich sklejają się do jednej krzywej klasy C^2, nie dającej się w całości przedstawić ani w postaci y = *y* (x) ani też w postaci x = *x* (y). Na to by uzyskać przykład w którym założenia naszych twierdzeń są spełnione, na tymże rysunku są też zaokrąglone kąty wykresu funkcji *f* w punktach x_3 oraz x_5 – daje to wykres nowej funkcji *f*. Zaokrąglenie w punkcie 3 nie pociąga za sobą żadnych zmian w zbiorze K (*f*). Natomiast zaokrąglenie w punkcie 5 pociąga za sobą zniknięcie kątów krzywych wchodzących. Czytelnik zechce przekonać się, że naniesione na rysunek korekty są wprowadzone poprawnie.

PRZYKŁAD 3.11.6. Czytelnik może zechce badać równania dla których zbiór K (*f*) ma nieskończoną ilość ekstremów, na przykład dla funkcji *f* (x) = x + *sin* x (jednak w tym wypadku zbiór H_∞ będzie pusty).

PRZYKŁAD 3.11.7. Podobnie, Czytelnik może zechce badać równania dla których zbiór K(*f*) ma nieskończoną ilość ekstremów i zbiór H_∞ będzie niepusty). Na przykład dla *f* (x) = *sin* x. Tu zbiór K (*f*) utworzony jest dwie rodziny prostych $y_{1k}(x) = x \pm 2k\pi$ oraz $y_{2k}(x) = \pi \pm x + 2k\pi$ dla k = 0,1,2,… .

PRZYKŁAD 3.11.8. Czytelnik zechce zbadać zbiór K(*f*) = K(sin^2) równania (3.1.2.) dla funkcji *f* (x) = sin^2x (tu K (*f*) składa się z 2 rodzin prostych: y = kπ + x oraz y = kπ – x, k = 0, ±1, ±2, …).

PRZYKŁAD 3.11.9. Podobnie dla dla *f* (x) = *sin* x^2 zbiór K (*f*) = K (*sin* · *j* ^{2}) będzie utworzony przez dwie proste y = ±x, rodzinę elips i dwie rodziny hiperbol.

PRZYKŁAD 3.11.10. Czytelnik zechce sam rozpatrzyć przykład funkcji *f* (x) = *tg*x^2. Wtedy zbiór K (*f*) = K (*tg* · *j*) składa się z dwóch prostych, z rodziny kół i z dwóch rodzin hiperbol.

PRZYKŁAD 3.11.11. Można też badać rozwiązanie kompletne K(*f*) dla równań (3.1.2) zbudowanych przy pomocy funkcji *f*, które nie spełniają w pełni naszych założeń regularności. Na przykład, ze względu na dalsze zastosowania (patrz niżej następny Przykład 3.12.1) warto poszukać rozwiązania kompletnego dla funkcji elementarnej

(3.11.1) $$f(x) = x - cth\, x,$$

zdefiniowanej w zbiorze niespójnym J = R – {0} i w zbiorze R nieciągłej (w punkcie x = 0). Jej wykres można znaleźć w K. Tatarkiewicz [11], (patrz Przykład 7.9.4, tom II, str. 91-94; rysunek 7.3, tu – umieszczony jest on też – jako mniej dokładnie wykonana dolna część Rysunku 5). Natomiast odpowiednie kompletne rozwiązanie K(*f*) składa się z prostej (rozwiązania banalnego) y = x, oraz z dwóch krzywych rozłącznych (i rozłącznych z rozwiązaniem banalnym) mających jako asymptoty obie osie x = 0 i y = 0 (zawarte są one całkowicie odpowiednio w ćwiartce x > 0 i y < 0, oraz w ćwiartce x < 0 i y > 0.

3.12. Zastosowania. Wyniki tej części mogą znaleźć dość nietypowe zastosowania.

PRZYKŁAD 3.12.1. W rachunku wariacyjnym rozpatruje się pewien klasyczny przykład. Niechaj będą dane dwie równoległe płaszczyzny P_1 i P_2 odległe od siebie o d. Poprowadźmy prostą L prostopadłą do nich. Jej przecięciami z owymi płaszczyznami będą punkty q_1 i q_2. Na płaszczyznach weźmy pod rozwagę okręgi o środkach w tych dwóch

punktach, mające jako promienie odpowiednio r_1 i r_2. Szukamy powierzchni obrotowej o najmniejszej mierze napiętej na tych dwóch okręgach (jest to tak zwany problem najmniejszej powierzchni obrotowej). Rozwiązując ten problem należy sprawdzić, czy warunek Jacobiego jest spełniony, a to prowadzi do badania niebanalnego rozwiązania równania (3.1.2) dla badanej już wyżej funkcji (3.11.11), lub badania tak zwanej krzywej Mac Neisha.

Gdy pisałem książkę [11], nie zbudowałem jeszcze swojej teorii równania (3.1.2) i dlatego ograniczyłem się do znanych od 150 lat dość ewazywnych wniosków co do tego nietypowego rozwiązania ekstremalnego. Natomiast wykorzystując rozwiązanie Przykładu 3.11.11 otrzymujemy tutaj, ostateczny, dość precyzyjny, wniosek: obracana katenoida daje powierzchnię o najmniejszej mierze powierzchniowej, o ile odległość d (łatwa do oszacowania) jest dostatecznie mała w stosunku do r_1 i r_2. W przeciwnym razie rozwiązanie (tak zwane rozwiązanie Goldschmidta) jest topologiczne inne (tarcze obu okręgów i jeśli rozwiązanie ma być spójne, to łączące je odcinek prostej L).

Można tu dodać dalsze zastosowania. Na przykład, w jakościowej teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Są one jednak zbyt specjalne, by móc o ich tu mówić.

4. Uogólnienia równań

4.1. Możliwe uogólnienia. Można rozpatrywać równanie (3.1.2) w dziedzinie zespolonej (wtedy *f* powinno by być funkcją analityczną). Natomiast startując z funkcji *f* wielu zmiennych można rozpatrywać analogony równania (3.1.2) różnych typów.

Niedługo po Konferencji w Iwoniczu otrzymałem pocztą przesyłkę zawierającą ksero pracy [9], która była mi wtedy nieznana. Niestety, do przesyłki nie był dołączony żaden list, a adres zwrotny na kopercie był zniszczony. Nie wiem więc komu za zwrócenie mojej uwagi na pracę [9] mam podziękować.

Literatura

[1] F. Cajori : *A history od mathematical notations*, t. 2, La Salle 1928, 1929. Wyd. 2, w jednym tomie, New York 1993.
[2] R. Descartes: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vértité dans les sciences ; plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode*. Leiden 1637.
[3] ————: *Oeuvres*. Editeurs Ch. Adam, P. Tannery. t. 13. Paris 1897-1913.
[4] L. E. Dickson: *History of the Theory of Numbers*, vol. II. New York 1934. Wyd. II fotograficzne, New York 1952.
[5] L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum,* t. II. Lausannae1748.
[6] ————: *Introductio in analysin infinitorum*, t. II: *Opera omnia*, ser. I, vol. 9, Genevae1945
[7] St. Kulczycki, St. Straszewicz: *Geometria analityczna dla II klasy liceum ogólnokształcącego, wydział matematyczno-fizyczny*. Lwów – Warszawa 1938.
[8] E. J. Moulton: *The real function defined by* $x^y = y^x$, Amer. Math. Monthly 23 (1916) 233-237.

[9] St. Ruziewicz: *O rozwiązaniach równania* $m^n = n^m$. Przegląd matematyczno-fizyczny 1 (1923) 3-6.
[10] W. Sierpiński: *Analiza*, t. I, Część 1, wyd. 2. Warszawa 1923, St. Straszewicz – patrz St. Kulczycki, St. Straszewicz.
[11] K. Tatarkiewicz: *Rachunek wariacyjny*, t. II, Warszawa 1970.

Krzysztof Tatarkiewicz
ul. Kopernika 8/18 m. 99
00-367 Warszawa
e-mail: krzysztof.tatarkiewicz@gmail.com