ANTIQUITATES MATHEMATICAE
Vol. 19, 2025, p. 265-275
doi: 10.14708/am.v19i1.7365

Władysław Wilczyński (Łódź)

Twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji i szeregi uniwersalne

Streszczenie. Praca dotyczy twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu dowolnej funkcji ciągłej wielomianami, klasycznego twierdzenia analizy matematycznej.

Przedstawione są szkice dowodów tego twierdzenia oparte na odmiennych pomysłach, a także warianty dotyczące przybliżenia funkcji spełniającej dodatkowe warunki (na przykład $f(0) = 0$) wielomianami także spełniającymi dodatkowe warunki (na przykład o początkowych współczynnikach równych zeru lub o współczynnikach całkowitych).

Omówiony jest szereg potęgowy uniwersalny (Sierpińskiego i Fekete), czyli taki szereg potęgowy, że dla każdej funkcji ciągłej znikającej w zerze istnieje podciąg ciągu sum częściowych zbieżny jednostajnie do tej funkcji. Jako inny szereg uniwersalny przedstawiony jest szereg funkcji mierzalnych, dla którego odpowiednio dobrane podciągi ciągu sum częściowych są zbieżne według miary do dowolnej funkcji mierzalnej (na przedziale $[0, 1]$).

Klasyfikacja tematyczna AMS (2020): 01A55, 01A60, 40A30.

Słowa kluczowe: twierdzenie Weierstrassa, uogólnienia, szeregi uniwersalne.

1. Wstęp. Twierdzenie Weierstrassa pojawiło się w roku 1885 (K. Weierstrass miał wówczas 70 lat) jako jedno z pierwszych twierdzeń teorii aproksymacji. W ciągu kolejnych trzydziestu lat wielu matematyków przedstawiło rozmaite dowody tego twierdzenia. Szczególną pozycję ma dowód Bernsteina z roku 1912 dający wzór na postać wielomianu przybliżającego daną funkcję. Pomysł, aby do przybliżeń wykorzystać wzór interpolacyjny Lagrange'a wydawał się obiecujący, ale okazało się, że nie prowadzi on do celu. Bernstein (też w roku 1912) pokazał, że zastosowanie tego wzoru do funkcji $f(x) = |x|$ na przedziale $[-1, 1]$ dla zagęszczających się węzłów równo oddalonych od siebie prowadzi

do zbieżności tylko w punktach $-1, 0$ i 1. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w książce E. W. Cheney'a [3]. Poniżej przedstawimy kilka faktów z historii badań nad aproksymacją funkcji ciągłych wielomianami.

2. Twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji. Twierdzenie Weierstrassa zazwyczaj formułowane jest następująco:

> Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje wielomian P taki, że $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in [a,b]$.

Oczywiście równoważna wersja brzmi: Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n\in N}$ zbieżny jednostajnie do f na przedziale $[a,b]$. Oryginalne rozumowanie Weiestrassa ([26]) wygląda następująco: Zakładając, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła dowodzi on, że

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x)$$

dla każdego x, a następnie zastępuje jądro $e^{-\left(\frac{x}{k}\right)^2}$ sumą częściową jego szeregu Taylora, aby w rezultacie otrzymać jednostajne przybliżenie wielomianami na przedziale ograniczonym. Podobny dowód przedstawił E. Landau ([13]) używając jądra postaci $K_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ gdzie stałe c_n są tak dobrane, aby $\int_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1$. Funkcje przybliżające daną funkcję ciągłą $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ określone są następująco: $P_n(x) = \int_0^1 K_n(x-t)f(t)dt$. Pomysłowe oszacowania pokazują, że $P_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[0,1]$. Funkcje P_n są wielomianami, ponieważ K_n są wielomianami.

Dowód H. Lebesgue'a ([14]) wykorzystuje zupełnie inny pomysł. Najpierw, korzystając z jednostajnej ciągłości funkcji f na przedziale $[a,b]$ wybiera skończony ciąg punktów $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ tak, aby $|f(x) - L(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, gdzie $L : [a,b] \to R$ jest funkcją, której wykres jest linią łamaną łączącą punkty $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Następnie przedstawia funkcję L jako kombinację liniową funkcji

$$\Psi_i(x) = (x - x_i) + |x - x_i|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Funkcja $\Psi(x) = x + |x|$ zapisana może być w postaci

$$\Psi(x) = x + \sqrt{1 + (x^2 - 1)}$$

i przedstawiona jako suma szeregu Taylora (lub też przy pomocy wzoru dwumianowego Newtona). Biorąc odpowiednie sumy częściowe tych rozwinięć dla wszystkich funkcji Ψ_i otrzymujemy wielomian $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ spełniający warunek $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Podobny pomysł znajdujemy także w pracach M. Lercha ([15]) i M. G. Mittag-Lefflera ([17]), przy czym ten ostatni odwołuje się do metody C. Rungego ([21]). Inaczej podszedł do zagadnienia E. Borel ([2]). Poszukał on takich wielomianów $P_{k,n}$, $n \in N$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, aby ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n\in N}$ określonych wzorem $P_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot P_{k,n}(x)$ był zbieżny jednostajnie do zadanej funkcji ciągłej $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Zauważył, że jeśli $\varphi_{n,k}$ dla $n \in N$ i $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ jest funkcją ciągłą określoną następująco: $\varphi_{n,k}\left(\frac{k}{n}\right) = 1$, $\varphi_{n,k}(x) = 0$ poza przedziałem $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \cap [0, 1]$ i jest liniowa na obydwu połówkach tego przedziału, to dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje $n_0 \in N$ takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \varphi_{k,n}(x)\right| < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in [0, 1]$. Aby otrzymać wielomian P_n dobrze przybliżający funkcje f wystarczy, stosując twierdzenie Weierstrassa, odpowiednio przybliżyć wielomianami funkcje $\varphi_{k,n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Żaden z powyżej naszkicowanych dowodów nie pozwala znaleźć szybko wzorów na wielomiany P_n.

Wreszcie S. Bernstein ([1]) udowodnił, że jeśli funkcja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to ciąg wielomianów $\{B_n\}_{n\in N}$, gdzie B_n opisany jest wzorem

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k \cdot (1 - x)^{n-k},$$

jest zbieżny jednostajnie do f na przedziale $[0, 1]$. Metoda Bernsteina jest wygodna do zastosowania, a ponadto ma tę zaletę, że jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu p, to ciągi wielomianów $\{B'_n\}_{n\in N}$, $\{B''_n\}_{n\in N}$, $\ldots$, $\{B_n^{(p)}\}_{n\in N}$ są jednostajnie zbieżne na przedziale $[0, 1]$ odpowiednio do $f', f'', \ldots, f^{(p)}$. Jest to wynik J.Chłodowskiego ([5]). Pełne dowody Landau'a, Lebesgue'a i Bernsteina można znaleźć w książce P. Durena [6].

3. Inne wersje twierdzenia. Twierdzenie Weierstrassa doczekało się wielu wersji, w których żąda się, aby ciąg $\{P_n\}_{n\in N}$ wielomianów przybliżających funkcję ciągłą f spełniał pewne dodatkowe warunki. Rozpoczniemy od prostego wniosku z klasycznego twierdzenia:

Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje rosnący ciąg wielomianów $\{P_n\}_{n\in N}$ zbieżny jednostajnie do f. Aby zbudować taki ciąg, wystarczy dla każdej liczby naturalnej n znaleźć wielomian P_n spełniający warunek: $\left|f(x) - \frac{1}{2^n} - P_n(x)\right| < \frac{1}{2^{n+2}}$. Łatwo sprawdzić, że $P_n \rightrightarrows f$ oraz $P_n < P_{n+1}$ dla każdego $n \in N$.

Innym dodatkowym warunkiem zajął się J. Pál ([19]) dowodząc następującego twierdzenia:

> Jeśli $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $f(0) = a_0$, to dla dowolnego ciągu skończonego $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i dowolnej liczby dodatniej ε istnieje wielomian P o początkowych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taki, że $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in [-1,1]$.

Dowód przebiega następująco: jeśli $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, to $f(0) = g(0)$ i istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $x \in [-\delta, \delta]$. Niech $\varphi(x) = x^{-(n+1)} \cdot (f(x) - g(x))$ dla $\delta \leqslant |x| \leqslant 1$, $\varphi(0) = 0$ oraz φ jest uzupełniona funkcjami liniowymi na przedziałach $(-\delta, 0)$ i $(0, \delta)$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą na całym przedziale $[-1,1]$. Teraz znajdujemy wielomian Q taki, że $|\varphi(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla każdego $x \in [-1,1]$. Zręczne oszacowanie pokazuje, że jeśli

$$P(x) = g(x) + x^{n+1} \cdot Q(x),$$

to $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \in [-1,1]$. Zauważmy, że jeśli $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $f(0) = 0$, to ta funkcja może być aproksymowana przy pomocy wielomianów postaci

$$P(x) = a_{n+1} \cdot x^{n+1} + \ldots + a_{n+k} \cdot x^{n+k},$$

gdzie n jest dowolnie wybraną liczbą naturalną. Pál wyciągnął ze swojego twierdzenia dwa wnioski. Pierwszy orzeka, że dla dowolnej funkcji ciągłej na przedziale $[-1,1]$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ taki, że z ciągu sum częściowych $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ można wybrać podciąg $\{s_{n_j}\}_{j\in N}$ zbieżny jednostajnie do f na przedziale $[-1,1]$. Zauważmy, że na ogół szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nie jest zbieżny w żadnym punkcie $x_0 \neq 0$, ponieważ zbieżność w takim punkcie powodowałaby, że suma szeregu jest różniczkowalna (nawet nieskończenie wiele razy) na przedziale $(-x_0, x_0)$, a tego przecież nie zakłada się o funkcji f. Drugi wniosek wprowadza inne ograniczenia na współczynniki wielomianów przybliżających

funkcję f: funkcja $f\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$ ciągła na przedziale $[-r,r]$, gdzie $0 < r < 1$ i spełniająca warunek $f(0) = 0$ może być przybliżana jednostajnie wielomianami o współczynnikach całkowitych. Aby uzasadnić ten wniosek dla liczby dodatniej ε znajdziemy liczbę naturalną n taką, że $r^{n+1} + r^{n+2} + \ldots = \frac{r^{n+1}}{1-r} < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz wielomian

$$Q(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+k} \cdot x^{n+k}$$

taki, że $|f(x) - Q(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $x \in [-r,r]$. Jeśli c_{n+j} jest liczbą całkowitą taką, że $|c_{n+j} - a_{n+j}| < 1$ dla $j = 1, 2, \ldots k$ oraz

$$P(x) = c_{n+1}x^{n+1} + \ldots + c_{n+k} \cdot x^{n+k},$$

to nietrudno oszacować, że $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \in [-r,r]$. Ograniczenie $0 < r < 1$ jest istotne – spójrzmy na funkcję $f(x) = \frac{1}{2}x$ dla $x \in [-1,1]$.

I. Chłodowski ([4]) przedstawił całkowicie odmienny, pomysłowy dowód analogicznego twierdzenia w przypadku, gdy funkcja ciągła f określona jest na przedziale $[a,b] \subset (0,1)$ (lub na dowolnym przedziale, który nie zawiera żadnej liczby całkowitej). Jeśli $\varphi_m(x) = \frac{1}{1-(x^m-1)}$, to $\varphi_m \rightrightarrows \frac{1}{2}$ na przedziale $[a,b]$. Ponieważ

$$\frac{1}{1-(x^m-1)} = 1 + (x^m - 1) + (x^m - 1)^2 + \ldots,$$

więc istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych dowolnie bliski $\frac{1}{2}$. Teraz korzystając z twierdzenia Weiestrassa znajdujemy wielomian Q_1 przybliżający funkcję f z pożądaną dokładnością, zastępujemy współczynniki tego wielomianu liczbami wymiernymi postaci $\pm\frac{p}{2^q}$ tak, aby otrzymany wielomian Q_2 różnił się mało od Q_1, a na koniec współczynniki wielomianu Q_2, traktując je jako $p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}$, zastępujemy iloczynami odpowiednich wielomianów o współczynnikach całkowitych. Jeśli zadbamy o dokładność wszystkich przybliżeń, to otrzymamy poszukiwany wielomian P o współczynnikach całkowitych. Informacja o wyniku Chłodowskiego znajduje się w monografii W. Sierpińskiego [23, str. 131].

Ch. Müntz ([18]) i C. Szász ([24]) zajęli się charakteryzacją tych rosnących ciągów liczb naturalnych $\{1, n_1, n_2, \ldots\}$, dla których liniowe kombinacje jednomianów $1, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots$ stanowią zbiór gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych. Twierdzenie, które udowodnili, ma postać: Niech $\{n_1, n_2, \ldots\}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Na to, aby każdą funkcję ciągłą na przedziale $[0,1]$ można było jednostajnie przybliżyć wielomianami postaci $P(x) = a_0 + a_1x^{n_1} + \ldots + a_kx^{n_k}$ potrzeba i wy-

starcza, aby szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ był rozbieżny. Dowód Szásza wykorzystuje wyznaczniki Grama, jest dość złożony. Dla niektórych ciągów $\{n_k\}_{k\in N}$ nie jest niezbędna znajomość twierdzenia Müntza-Szásza. Jeśli $n_k = k \cdot m$, wystarczy zamiast $f(x)$ rozważać funkcję $g(x) = f\big(x^{\frac{1}{m}}\big)$.

W. Sierpiński ([22]) zajął się problemem podobnym do tego, który rozważał Pál w pracy [19]. Najpierw pokazał, że jeśli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $f(0) = 0$ oraz m jest liczbą naturalną, to dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje funkcja ciągła $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ taka, że $|f(x) - x^m\varphi(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in [0,1]$. Stąd na podstawie twierdzenia Weierstrassa otrzymujemy natychmiast, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dowolnej liczby dodatniej ε i dowolnej liczby naturalnej m istnieje wielomian P taki, że $|f(x) - x^m P(x)| < \varepsilon$ dla każdego $x \in [0,1]$. Możemy przy tym zażądać, aby współczynniki wielomianu P były liczbami wymiernymi. Wniosek, który Sierpiński wyciągnął z powyższych faktów, brzmi następująco: Istnieje ciąg liczb wymiernych $\{a_n\}_{n\in N}$ taki, że dla dowolnej funkcji f ciągłej na przedziale $[0,1]$ znikającej w zerze istnieje ciąg rosnący $\{n_k\}_{k\in N}$ liczb naturalnych $(n_0 = 0)$ taki, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n x^n \Bigg),$$

przy czym zbieżność jest jednostajna. Zauważymy na początek, że jeśli $C_0([0,1])$ jest przestrzenią funkcji ciągłych znikających w zerze z metryką jednostajną

$$\varrho(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} = \|f - g\|,$$

to dla dowolnej liczby naturalnej m zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych zawierających tylko potęgi x^n, dla których $n \geqslant m$ jest gęsty w przestrzeni $C_0([0,1])$. Ustawmy wszystkie wielomiany o współczynnikach wymiernych i wyrazie wolnym równym zero w ciąg $\{f_n\}_{n\in N}$ (taki zbiór wielomianów jest przeliczalny). Połóżmy $P_1 = f_1$. Wtedy $\varrho(f_1, P_1) = 0 < 1$. Niech P_2 będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych takim, że $\varrho(f_2 - P_1, P_2) = \|f_2 - (P_1 + P_2)\| < \frac{1}{2}$ oraz stopień wielomianu P_1 jest niższy niż najmniejszy wykładnik potęgi w wielomianie P_2. Załóżmy, że mamy już określone wielomiany $P_1, P_2, \ldots, P_n$ spełniające następujące warunki: najmniejszy wykładnik w P_{k+1} jest większy od stopnia wielomianu P_k dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\Big\| f_k - \sum_{i=1}^{k} P_i \Big\| < \frac{1}{k}$, wszystkie współczynniki wielomianów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ są wymierne. Niech P_{n+1}

będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych, najmniejszym wykładnikiem większym od stopnia wielomianu P i spełniającym warunek $\left\| f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} P_i \right\| < \frac{1}{1+n}$. Jeśli $f \in C_0([0,1])$, to istnieje ciąg $\{f_{n_m}\}_{n\in N}$ taki, że $f_{n_m} \rightrightarrows f$. Z konstrukcji wynika, że $\sum_{m-1}^{\infty} a_m x^m$, gdzie $\{a_m\}_{m\in N}$ jest ciągiem utworzonym ze współczynników wszystkich wielomianów P_n (uzupełnionym o zero, jeśli to konieczne) spełnia wszystkie warunki. Taką konstrukcję znajdziemy u B. R. Gelbauma i J. M. H. Olmsteda ([7]). Autorzy przypisują wynik Sierpińskiemu, nie cytując pracy ([22]).

W pracy [22] znajdujemy informację, że S. Mazurkiewicz ([16]) otrzymał podobny wynik stosując metody analizy zespolonej. Szereg zbudowany przez Sierpińskiego można nazwać szeregiem uniwersalnym dla przestrzeni funkcji ciągłych. W tej samej pracy Sierpiński cytuje wcześniejszą o ponad dwadzieścia lat pracę Pála [20] w której znajduje się czytelny szkic konstrukcji szeregu uniwersalnego. Pál przypisuje tę konstrukcję węgierskiemu matematykowi Fekete.

Naturalną koleją rzeczy pojawiły się wersje twierdzenia Weiestrassa dla ciągłej funkcji wielu zmiennych. L. Tonelli ([25]) (dla uproszczenia zapisu ograniczymy się do funkcji dwóch zmiennych) reprezentuje funkcję f w postaci szeregu

$$P_0(x_1,x_2)+(P_1(x_1,x_2)-P_0(x_1,x_2))+\ldots+(P_n(x_1,x_2)-P_{n-1}(x_1,x_2))+\ldots,$$

gdzie $P_n(x_1,x_2) = \frac{k_n}{4} \iint\limits_Q f(t_1,t_2)\cdot(1-(t_1-x_1)^2-(t_2-x_2)^2)^n dt_1 dt_2$, Q jest kwadratem o przeciwległych wierzchołkach $(0,0)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, zaś k_n wyraża się wzorem $\frac{1}{k_n} = \iint\limits_Q (1-t_1^2-t_2^2)^n dt_1 dt_2$ dla $n = 0,1,2,\ldots$.

E. W. Hobson ([11]) przedstawia dowód indukcyjny. Zakłada, że twierdzenie zachodzi dla funkcji zmiennych określonych na kostce $[0,1]^n$ i buduje wielomian dla funkcji $f(n+1)$ zmiennych dzieląc odpowiednio gęsto odcinek $[0,1]$ na $(n+1)$-szej osi punktami

$$0 = x_{n+1}^0 < x_{n+1}^1 < \ldots < x_{n+1}^m = 1,$$

następnie przybliżając każdą z funkcji n zmiennych $f(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}^i)$, $i = 0,1,\ldots,m$ wielomianem i kończy konstrukcję używając zręcznie kombinacji liniowej otrzymanych wielomianów. Warto wspomnieć, że twierdzenie Weierstrassa dla funkcji wielu zmiennych jest prostym wnioskiem z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa.

Inne uogólnienie twierdzenia Weierstrassa przedstawił Hobson w [10] i [11]. Dotyczy ono rodziny funkcji całkowalnych zamiast funkcji ciągłych i brzmi: jeśli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to ciąg wielomianów

$$P_n(x) = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^1 f(t) \cdot (1-(t-x)^2)^n dt$$

jest zbieżny do $f(x)$ w każdym wewnętrznym punkcie przedziału $[0,1]$, w którym $\int_0^z (f(x+t)+f(x-t)-2f(x))dt = o(z)$ (czyli prawie wszędzie). Zbieżność jest jednostajna na każdym domkniętym przedziale ciągłości funkcji f.

4. Szeregi uniwersalne. Powróćmy na chwilę do pojęcia uniwersalności w matematyce. Obszerna praca K. G. Grosse-Erdmana ([9]) poświęcona jest przeglądowi uniwersalnych obiektów w różnych dziedzinach matematyki. Przedstawia ona uniwersalne szeregi potęgowe i szeregi Taylora, uniwersalne funkcje pierwotne, uniwersalne szeregi ortogonalne i uniwersalne szeregi zbieżne prawie wszędzie. Jeśli X jest liniową przestrzenią topologiczną, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ nazywa się uniwersalny w X, jeśli dla dowolnego elementu $f \in X$ istnieje podciąg ciągu sum częściowych tego szeregu zbieżny do f.

Istnienie szeregów uniwersalnych jest dość częstym zjawiskiem w matematyce. Pokażemy przykład dotyczący przestrzeni funkcji mierzalnych i zbieżności według miary. Nazwijmy ciąg $\{x_n\}_{n\in N}$ elementów przestrzeni liniowo topologicznej X ciągiem bazowym, jeśli zbiór liniowych kombinacji elementów tego ciągu jest gęsty w X. Przestrzeń $\mathcal{M}$, której elementami są klasy równoważności funkcji mierzalnych (chodzi tu o równość prawie wszędzie) określonych na przedziale $[0,1]$ z metryką zbieżności według miary jest metryzowalną przestrzenią liniowo topologiczną.

C. Goffman i D. Waterman ([8]) pokazali, że jeśli $\{\Phi_n\}_{n\in N}$ jest ciągiem bazowym w $\mathcal{M}$, to po usunięciu dowolnej skończonej liczby elementów pozostałe w dalszym ciągu tworzą ciąg bazowy. W dowodzie istotną rolę odgrywa fakt, że przestrzeń $\mathcal{M}'$ dualna do $\mathcal{M}$ zawiera tylko funkcjonał zerowy ([12]). Korzystając z powyższej własności ciągu bazowego w $\mathcal{M}$ pokazali, że jeśli $\{\Phi_n\}_{n\in N}$ jest ciągiem bazowym, to istnieje ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\in N}$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n$ jest szeregiem uniwersalnym w $\mathcal{M}$.

Bibliografia

[1] S. Bernstein. Démonstration du théoréme de weierstrass fondée sur le calcul des proabilités. Charkow Ges. (2) 13, 1-2, 1912. Cytowanie na str. 267.

[2] É. Borel. Sur les séries de polynomes et de fractions rationelles (On the series of polynomials and rational functions). *Acta Math.*, 24:309–382, 1901. Cytowanie na str. 267.

[3] E. W. Cheney. Introduction to approximation theory. International Series in Pure and Applied Mathematics. New York etc.: McGraw-Hill Book Company. XII, 259 p., 1966. Cytowanie na str. 266.

[4] I. Chlodovsky. Une remarque sur la representation des fonctions continnes par les polynòmes à coefficient entries. *Matematicheskiĭ Sbornik*, 32(3):472–475, 1925. Cytowanie na str. 269.

[5] I. Chlodovsky. O niekotorych swojstwach polinomof Bersteina. *Trudy Bsiesojuznowo Matimaticzeskogo Sjezda*, 1934. Cytowanie na str. 267.

[6] P. Duren. *Invitation to classical analysis*, wolumen 17 serii *Pure Appl. Undergrad. Texts*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2012. Cytowanie na str. 267.

[7] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted. *Counterexamples in analysis*. Mineola, NY: Dover Publications, wydanie corrected reprint of the second (1965) edition, 2003. Cytowanie na str. 271.

[8] C. Goffman, D. Waterman. Basic sequences in the space of measurable functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 11:211–213, 1960. Cytowanie na str. 272.

[9] K.-G. Grosse-Erdmann. Universal families and hypercyclic operators. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36(3):345–381, 1999. Cytowanie na str. 272.

[10] E. W. Hobson. On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 6:349–395, 1908. Cytowanie na str. 272.

[11] E. W. Hobson. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. I, II. Unabridged and unaltered republication of the last revision (1926/27). New York: Dover Publications, Inc. xv, 736; x, 778 p. 2 Vols. (1958)., 1958. Cytowanie na str. 271, 272.

[12] J. L. Kelley, I. Namioka, W. F. j. Donoghue, K. R. Lucas, B. J. Pettis, E. T. Poulsen, G. B. Price, W. Robertson, W. R. Scott, K. T.

Smith. Linear topological spaces. (The University Series in Higher Mathematics) Princeton, N.J. -Toronto- New York-London: D. van Nostrand Company, Inc. XV, 256 p. (1963)., 1963. Cytowanie na str. 272.

[13] E. Landau. Über die approximation einer stetigen funktion durch eine ganze rationale funktion. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 25(1):337–345, 1908. Cytowanie na str. 266.

[14] H. Lebesgue. On the approximation of functions. *Bull. Sci. Math., II. Sér.*, 22:278–287, 1898. Cytowanie na str. 266.

[15] M. Lerch. Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel. *Acta Math.*, XXVII:339–351, 1903. Cytowanie na str. 267.

[16] S. Mazurkiewicz. Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable réelle par les sommes partielles d'une série de puissances. *C. R. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III*, 30:25–30, 1937. Cytowanie na str. 271.

[17] G. Mittag-Leffler. Sur la représetation analytique des fonctions d'une variable réelle (on the analytic representation of functions of a real variable), (Extract from a letter to Mr. émile Picard.). *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 14:217–224, 1900. Cytowanie na str. 267.

[18] C. H. Müntz. Über den Approximationssatz von *Weierstraß*. Schwarz-Festschr, 1914. Cytowanie na str. 269.

[19] J. Pál. Über eine Anwendung des *Weierstraß*schen Satzes von der Annäherung stetiger Funktionen durch Polynome. *Tôhoku Math. J.*, 5:8–9, 1914. Cytowanie na str. 268, 270.

[20] J. Pál. Zwei kleine Bemerkungen. *Tôhoku Math. J.*, 6:42–43, 1915. Cytowanie na str. 271.

[21] C. Runge. Über die Zerlegung ganzer ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren. *J. Reine Angew. Math.*, 99:89–97, 1885. Cytowanie na str. 267.

[22] W. Sierpiński. Sur une série de puissances universelle pour les fonctions continues. *Stud. Math.*, 7:45–48, 1938. Oeuvres Choisies tom I, str. 292-295. Cytowanie na str. 270, 271.

[23] W. Sierpiński. *Zasady algebry wyższej*, wolumen 11 serii *Monogr. Mat.* PWN - Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1946. Zbl 3095545. Cytowanie na str. 269.

[24] O. Szász. Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen. *Math. Ann.*, 77:482–496, 1916. Cytowanie na str. 269.

[25] L. Tonelli. Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 29:1–36, 1910. Cytowanie na str. 271.

[26] K. Weierstrass. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher functionen einer reellen veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2(633-639):364, 1885. Cytowanie na str. 266.

Weierstrass theorem about approximation and universal series

Władysław Wilczyński

Abstract. This paper discusses Weierstrass's theorem, which states that each continuous function can be approximated by a polynomial. This is a classical theorem in mathematical analysis. The paper presents sketches of proofs of this theorem based on different ideas, as well as variants concerning the approximation of functions that satisfy additional conditions (e.g., $f(0) = 0$) by polynomials that also satisfy additional conditions (e.g., initial coefficients equal to zero or integer coefficients). It also discusses the universal power series (of Sierpiński and Fekete), which is a power series such that, for every continuous function that vanishes at zero, there is a subsequence of its partial sums that uniformly converges to that function. Another universal series is presented as a series of measurable functions for which, when appropriately selected, the sequence of partial sums converges to any measurable function on the interval $[0, 1]$.

Mathematics Subject Classification AMS 2020: 01A55, 01A60, 40A30.

Key words and phrases: Weierstrass theorem, generalizations, universal series.

Władysław Wilczyński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwerytet Łódzki
ul. Stefana Banacha 22, 90-238 Łódź
E-mail: wladyslaw.wilczynski@wmii.uni.lodz.pl
Communicated by: Małgorzata Terepeta

(Zgłoszona: 15 kwietnia 2025; Wersja końcowa: 20 czerwca 2025)