ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XIII (1970)
ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XIII (1970)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

L. DUBIKAJTIS (Toruń)

Système d'axiomes de la géométrie affine basé sur la notion de demi-droite

Cette note est consacrée à la présentation d'une axiomatique de la géométrie plane affine (sur le corps de nombres réels), dont les seules notions primitives sont: 1° l'ensemble des points et 2° l'ensemble des demi-droites.

Un tel système d'axiomes possède une certaine valeur pratique, n'étant basé que sur une seule notion primitive „l'ensemble des demi-droites" (et la notion de point). C'est une notion bien simple et employée plus fréquemment que les autres notions rencontrées dans les axiomatiques de cette géométrie comme par ex. la relation: „être situé entre". En plus, les définitions des notions de la géométrie affine formulées à l'aide de notion de la demi-droite sont très simples et faciles à employer. Enfin, le système d'axiomes présenté dans ce travail est assez simple, pas plus compliqué que celui de Hilbert.

Pour définir la géométrie affine nous accepterons une axiomatique obtenue par certaines modifications de l'axiomatique classique de Hilbert (cf. [1], [2], [3]).

Soient deux ensembles: l'ensemble Π des points (dont les éléments seront désignés toujours par les majuscules latines) et l'ensemble des droites. Nous admettons ici que chaque droite est un ensemble des points, ce que nous permet d'identifier la relation d'incidence (employée par Hilbert) avec celle d'appartenance au sens de la théorie des ensembles(1).

La deuxième relation figurant dans l'axiomatique $\mu(A, B, C)$ désigne que le point B est situé entre les points A et C.

Voici les axiomes:

I.1. *Chaque droite contient au moins deux points différents.*

I.2. *Par deux points différents passe au moins une droite.*

I.3. *Par deux points différents passe au plus une droite.*

I.4. *Il existe au moins trois points différents n'appartenant à une même droite.*

(1) Dans l'axiomatique classique de Hilbert les droites sont considérées comme des individus impartageables. Il existe cependant plusieurs systèmes d'axiomes où la droite est définie comme un ensemble des points (cf. l'axiomatique de Tarski [4])

Grâce aux axiomes I.2 et I.3, nous pouvons établir la notation suivante: $\overline{AB}$ désigne la droite unique passant par deux points différents A et B. (Dans le cas où $A = B$, le symbole $\overline{AB}$ devient dépourvu de sens.)

II.1. *Si* $\mu(A, B, C)$, $A \neq B \neq C \neq A$.

II.2. *Si* $\mu(A, B, C)$, $C \in \overline{AB}$.

II.3. *Si* $\mu(A, B, C)$, *alors* $\mu(B, A, C)$ *n'a pas lieu.*

II.4. *Si* $A \neq B$, *il existe un point* C *vérifiant la condition* $\mu(A, B, C)$.

II.5. *Si* $C \notin \overline{AB}$, $A \notin \overline{DF}$, $C \notin \overline{DF}$ *et* $\mu(A, D, B)$, *alors il existe un tel point* $X \in \overline{DF}$, *que soit* $\mu(A, X, C)$, *soit* $\mu(B, X, C)$.

Définition I. Deux droites: $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont dites *parallèles* (on écrit: $\overline{AB} \| \overline{CD}$) si, et seulement si, il n'existe aucun point commun à ces deux droites.

III.1. *Si* $C \notin \overline{AB}$, *il existe au moins une droite passant par* C *et parallèle à* $\overline{AB}$.

III.2. *Si* $C \notin \overline{AB}$, *il existe au plus une droite passant par* C *et parallèle à* $\overline{AB}$.

III.3. (Axiome de Desargues.) *Si* A, B, C *n'appartiennent pas à une même droite et si* $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \| \overline{B'C'}$, $\overline{CA} \| \overline{C'A'}$, $P \in \overline{AA'}$, $P \in \overline{BB'}$ *et* $\overline{AA'} \neq \overline{BB'}$, *alors* $P \in \overline{CC'}$.

IV.1. (Axiome de continuité.) *Soient* A *et* B *deux points et soient* $\mathscr{X}$ *et* $\mathscr{Y}$ *deux ensembles des points, tels que:*

1° $Z \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ *si, et seulement si,* $\mu(A, Z, B)$,

2° *si* $X \in \mathscr{X}$ *et* $Y \in \mathscr{Y}$, *alors* $\mu(X, Y, B)$.

Il existe toujours un point C *tel que pour chaque point* Z *appartenant à* $\mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ *et différent de* C *la condition* $Z \in \mathscr{Y}$ *est équivalente à la condition* $\mu(C, Z, B)$.

Le système composé des axiomes I.1 - IV.1 avec la Définition I incluse sera appelé tout court: axiomatique (*).

Dans le système de la géométrie affine défini par cette axiomatique on peut établir la définition suivante:

Définition II. Pour deux points différents A et B nous désignons par $\overrightarrow{AB}$ l'ensemble de tous les points X vérifiant la condition: $\mu(A, X, B)$ ou $\mu(A, B, X)$ ou enfin $X = B$. L'ensemble $\overrightarrow{AB}$ est appelé *demi-droite* $\overrightarrow{AB}$. On désigne par Δ la classe de toutes les demi-droites, et les éléments de cette classe sont désignés par les minuscules latines.

La notion $\overrightarrow{AB}$ peut être considérée comme une application faisant correspondre à chaque couple de deux points différents A et B un ensemble de points, à savoir la demi-droite $\overrightarrow{AB}$.

Voici[2]) certaines conséquences de la définition II:

A1. $A \notin \overrightarrow{AB}$.

A2. $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{CB}$.

A3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \leftrightarrow (A = A' \wedge B' \in \overrightarrow{AB})$.

A4. $[A \neq B \neq C \wedge (A = C \vee C \in \overrightarrow{AB})] \leftrightarrow (\overrightarrow{CB} \subset \overrightarrow{AB} \vee \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB})$.

A5. $A \neq B \to \bigvee_C \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$.

A6. $(\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{BC} \wedge B' \in \overrightarrow{AB} \wedge B' \notin \overline{BD}) \to \bigvee_{C'} (C' \in \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C'D} \subset \overrightarrow{B'C'})$.

D1. $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

A7. $\bigvee_{A,B,C} (A \neq B \wedge C \notin \overline{AB})$.

D2. $\overline{AB} \| \overline{CD} \leftrightarrow \overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$.

A8. $C \notin \overline{AB} \to \bigvee_D \overline{AB} \| \overline{CD}$.

A9. $(\overline{AB} \| \overline{CD} \wedge \overline{AB} \| \overline{CE}) \to E \in \overline{CD}$.

A10. $(C \notin \overline{AB} \wedge \overline{AB} \| \overline{A'B'} \wedge \overline{BC} \| \overline{B'C'} \wedge \overline{CA} \| \overline{C'A'} \wedge P \in \overline{AA'} \cap \overline{BB'} \wedge \overline{AA'} \neq \overline{BB'}) \to P \in \overline{CC'}$.

A11. $[\emptyset \neq \Gamma \subset \Delta \wedge \bigwedge_{a \in \Gamma} (a \subset b)] \to \bigvee_c (c = \bigcup_{a \in \Gamma} a)$.

D3. $\mu(A, B, C) \leftrightarrow \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$.

Il est bien évident que toutes les proprietés des demi-droites énumérées ci-dessus résultent de l'axiomatique (*) et de la définition II. Nous allons maintenant démontrer le contraire, c'est-à-dire que les axiomes (*) et les définitions I, II résultent des A1-A11 et D1-D3.

Soit Π un ensemble, dont les éléments sont appelés points et désignés par les majuscules latines, et soit φ une fonction faisant correspondre à chaque couple ordonné de points distincts A, B un sous-ensemble de Π désigné par $\overrightarrow{AB}$. L'ensemble des valeurs de la fonction φ sera désigné par Δ, ses élements seront appelés *demi-droites* et désignés par les minuscules latines.

---

[2]) On emploie ici les symboles usuels pour désigner les notions logiques ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$) et celles de la théorie des ensembles ($\in$, $\notin$, $\subset$, $=$, $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\emptyset$). En vertu de l'emploi des majuscules et minuscules accepté ci-desus on écrit simplement $\bigvee_A$ (resp. $\bigvee_a$) au lieu d'écrire $\bigvee_{A \in \Pi}$ (resp. $\bigvee_{a \in \Delta}$). Au début des énoncés on omet les quantificateurs $\bigwedge$. Si dans les suppositions d'un énoncé figurent les symboles $\overrightarrow{AB}$ ou $\overline{AB}$, on admet toujours que $A \neq B$.

Désignons par (**) l'axiomatique composée des axiomes A1-A11, concernant deux notions primitives (Π et φ) et deux notions secondaires: droite et parallélisme, introduites à l'aide des définitions D1 et D2. Nous allons démontrer le

THÉORÈME. *Le système d'axiomes* (**) *est une axiomatique complète de la géométrie plane affine* (*sur le corps de nombres réels*).

Pour démontrer ce théorème il suffit d'ajouter aux axiomes (**) la définition D3 déterminant la relation μ et d'en déduire tous les axiomes et définitions du système (*) avec la définition II incluse.

La démonstration doit être précédée par plusieurs théorèmes auxiliaires résultant de l'axiomatique (**). Le cinq premiers ne résultent que des axiomes A1-A4 et de la définition D1. En particulier, les axiomes A1 et A3 entraînent immédiatement

T1. *Si* $\overrightarrow{AB}$ *est une demi-droite,* $A \neq B$ *et* $B \in \overrightarrow{AB}$.

Le point B appartenant en vertu de T1 à $\overrightarrow{AB}$ et n'appartenant pas (selon A1) à $\overrightarrow{BC}$, on conclut que

T2. *Jamais* $\overrightarrow{AB}$ *n'est contenue dans* $\overrightarrow{BC}$.

T3. $(A \neq B \wedge \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AC}) \leftrightarrow \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$.

Démonstration. 1. Si $A \neq B$ et si $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AC}$, alors selon A4 et A3 on obtient successivement: $B \in \overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ et enfin $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$.

2. Si $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$, alors d'après T1 et A3 on obtient: $C \in \overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ et enfin $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AC}$. L'inégalité $A \neq B$ résulte de T1.

Le théorème suivant résulte immédiatement de la définition D1:

T4. $\overline{AB} = \overline{BA}$.

T5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BA} \subset \overline{AC}$.

Démonstration. Supposition (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ implique d'après T1 l'inégalité $A \neq B$. Admettons que (2) $X \in \overrightarrow{BA}$, donc $X \neq B$. La supposition (2) entraîne en vertu de A4 trois possibilités: soit $X = A$, soit $\overrightarrow{XA} \subset \overrightarrow{BA}$, soit enfin $\overrightarrow{AX} \subset \overrightarrow{BA}$.

1. Dans le cas où $X = A$, $X \in \overrightarrow{CA} \subset \overline{AC}$ résulte des T1 et D1.

2. Dans le cas où $X \neq A$ et $\overrightarrow{XA} \subset \overrightarrow{BA}$ on conclut (en se basant successivement sur T3, A2, T3 et A4), que $\overrightarrow{XA} \subset \overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{XB} \subset \overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{XB} \subset \overrightarrow{AB}$ et $X \in \overrightarrow{AB}$, donc en vertu de (1) on obtient $X \in \overrightarrow{AC} \subset \overline{AC}$.

3. Dans le cas où $\overrightarrow{AX} \subset \overrightarrow{BA}$ l'axiome A2 entraîne en vertu de (1) successivement: $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{AX} \subset \overrightarrow{CA}$, d'où résulte d'après T1 et D1: $X \in \overrightarrow{CA} \subset \overline{AC}$.

Si aux axiomes A1-A4 on ajoute l'axiome A11, on peut démontrer([3]) les théorèmes T6-T9.

T6. $(\overrightarrow{AB_1} \subset \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AB_2} \subset \overrightarrow{CD}) \rightarrow \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB_2}$.

Démonstration. Les suppositions du théorème entraînent en vertu de A11 l'existence d'un couple (A', B'), tel que (1) $\overrightarrow{AB_1} \cup \overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{A'B'}$. Selon T1 et A3: $B_i \in \overrightarrow{A'B'}$ et (2) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B_i}$ (pour $i = 1, 2$). Le point A n'appartenant pas (selon A1 et (1)) à $\overrightarrow{A'B'}$, on conclut en vertu de (2) que: (3) $A \notin \overrightarrow{A'B_i}$. Les conditions (1) et (2) impliquent $\overrightarrow{AB_i} \subset \overrightarrow{A'B_i}$, d'où, en vertu de (3) et A4, résulte (4) $A' = A$. Les égalités (2) et (4) entraînent $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB_2}$.

T7. $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AB} \subset \overline{BC}$.

Démonstration. Supposition (1) $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$ entraîne d'aprés T1, T2 et A2 les inégalités $A \neq B \neq C \neq A$ et (2) $\overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{CB}$. Supposons qu'en plus (3) $X \in \overrightarrow{AB}$, d'où résulte selon A1 l'inégalité (4) $X \neq A$. D'après A4 on conclut des (3) et (4) que soit (5) $X = B$, soit (6) $\overrightarrow{BX} \subset \overrightarrow{AB}$, soit enfin (7) $\overrightarrow{XB} \subset \overrightarrow{AB}$. Considérons ces 3 possibilités séparément:

1. La condition (5) implique selon T1: $X \in \overrightarrow{CB} \subset \overline{BC}$.

2. La condition (6) implique en vertu de (1) et T6 l'égalité $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BC}$, d'où selon T1 résulte $X \in \overrightarrow{BC} \subset \overline{BC}$.

3. Enfin (7) entraîne selon T1 l'inégalité (8) $X \neq B$, et en vertu de (4) et T3: $\overrightarrow{XB} \subset \overrightarrow{AX}$. On en conclut successivement (en vertu des A2, T3, A4 et (8)): $\overrightarrow{XA} \subset \overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{XA} \subset \overrightarrow{BA}$ et $X \in \overrightarrow{BA}$, d'où résulte d'après (2): $X \in \overrightarrow{CB} \subset \overline{BC}$.

On a donc démontré que dans les trois cas considérés la condition (3) implique $X \in \overline{BC}$.

T8. $(A \neq C \wedge C \in \overline{AB}) \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}$.

([3]) Au lieu d'employer ici l'axiome non-élémentaire A11, il suffit d'accepter un cas particulier de cet axiome, qui peut être énoncé sous la forme élémentaire:

A11′. $(a_1, a_2, b \in \Delta \wedge a_1 \subset b \wedge a_2 \subset b) \rightarrow a_1 \cup a_2 \in \Delta$.

Démonstration. D'après D1 les suppositions du théorème prennent la forme: (1) $A \neq C$ et (2) $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

1. Si on suppose que $C \in \overrightarrow{AB}$, on peut conclure d'après A3 et T5 que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \subset \overline{AC}$ et $\overrightarrow{CA} \subset \overline{AB}$. Ces trois conditions impliquent l'égalité $\overline{AC} = \overline{AB}$.

2. Supposons que (3) $C \notin \overrightarrow{AB}$, donc en vertu de (2) on a (4) $C \in \overrightarrow{BA}$.

Les conditions (4) et (1) impliquent selon A1, T1 et A4: (5) $A \neq B \neq C$ et (6) $(\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{BA} \vee \overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{BA})$. Nous allons démontrer que la première partie de l'alternative (6) n'ait jamais lieu. En effet, la supposition $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{BA}$ et la condition (5) impliquent successivement, d'après T3, A2, T3 et A4, les inclusions: $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB} \subset \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB} \subset \overrightarrow{AB}$ et $C \in \overrightarrow{AB}$ contrairement à la supposition (3). On en conclut que (7) $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{BA}$ et d'après A2: (8) $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CA}$. Les inclusions (7) et (8) entraînent selon T7 les inclusions $\overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{AB}$, ce qui implique en vertu des (7) et (8) l'égalité $\overline{AC} = \overline{AB}$.

Appliquant deux fois T8 on obtient

T9. $(C \neq D \wedge C, D \in \overline{AB}) \to \overline{CD} = \overline{AB}$.

Maintenant on peut démontrer sans difficultés les axiomes I.1-I.4. En effet: I.1 et I.2 résultent immédiatement des D1 et T1, I.3 résulte de T9, et I.4 résulte de A7 et T9.

Nous allons démontrer encore trois théorèmes auxiliaires résultant de l'axiomatique (**).

T10. *Si* (1) $\overrightarrow{DB} \subset \overrightarrow{AD}$, (2) $C \notin \overline{AB}$, (3) $A \neq E \neq C$ *et* (4) $E \in \overline{AC}$, *alors il existe un tel point* X *que* (5) $X \in \overline{DE}$ *et soit* (6′) $\overrightarrow{XC} \subset \overrightarrow{AX}$, *soit* (6″) $\overrightarrow{XB} \subset \overrightarrow{CX}$.

Démonstration. La condition (4) implique deux possibilités: $E \in \overrightarrow{CA}$ ou $E \in \overrightarrow{AC}$, que nous allons considérer séparément.

1. La supposition $E \in \overrightarrow{CA}$ entraîne en vertu des (2), (3) et A4 l'alternative: $\overrightarrow{EA} \subset \overrightarrow{CA}$ ou $\overrightarrow{AE} \subset \overrightarrow{CA}$. La première partie de cette alternative implique (selon (3), T3 et A2) après la substitution: $X = E$, les conditions (5) et (6′). La seconde partie: $\overrightarrow{AE} \subset \overrightarrow{CA}$ et la supposition (3) entraînent d'après A2, T3, A4, A3 et T1 les relations: $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{EC}$, $A \in \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA}$ et enfin $C \in \overrightarrow{EA}$, d'où en vertu des (1), (2) et A6 résulte l'existence d'un point X vérifiant les conditions (5) et (6″).

2. Analogiquement, la supposition $E \in \overrightarrow{AC}$ entraîne en vertu des (2), (3) et A4 l'alternative: $\overrightarrow{EC} \subset \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{CE} \subset \overrightarrow{AC}$. La première partie de cette alternative implique (selon (3) et T3) après la substitution: $X = E$, les conditions (5) et (6'). La seconde possibilité: $\overrightarrow{CE} \subset \overrightarrow{AC}$ entraîne d'après (3), A2, T3 et A4 les inclusions: $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{EA}$ et $C \in \overrightarrow{EA}$, d'où en vertu des (1), (2) et A6 résulte l'existence d'un point X vérifiant les conditions (5) et (6'').

T11. *Si* (1) $A \neq C$ *et* (2) $C \in \overline{AB}$, *alors soit* (3) $C \in \overrightarrow{AB}$, *soit* (4) $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{BA}$.

Démonstration. La condition (2) implique selon D1 soit (3), soit (5) $C \in \overrightarrow{BA}$. La condition (5) entraîne en vertu des A1, (1) et A4 l'inégalité (6) $C \neq B$ et soit (4) soit (7) $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{BA}$. Enfin, les conditions (7), (4) et (1) impliquent successivement (d'après T3, A2, T3 et A4): $\overrightarrow{CA} \subset \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB} \subset \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB} \subset \overrightarrow{AB}$ et (3).

T12. *Si* (1) $\overrightarrow{DB} \subset \overrightarrow{AD}$, (2) $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$, *alors il existe un tel point* X *que* $X \in \overline{DF}$ *et* $\overrightarrow{XC} \subset \overrightarrow{BX}$.

Démonstration. Les conditions (1) et (2) impliquent (3) $C \neq A \neq D \neq B$. Donc d'après T3, A4 et D1: (4) $D \in \overline{AB}$. On en conclut selon T8 que (5) $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BD}$.

La supposition $C \in \overline{AB}$ entraîne en vertu de (3) et T8 l'égalité $\overline{AC} = \overline{AB}$ contradictoire aux conditions (4) et (2), donc (6) $C \notin \overline{AB}$. On démontre d'une manière analogue que (7) $B \notin \overline{AC}$ et (8) $B \notin \overline{DF}$.

La supposition $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ implique en vertu de (2) et A9: $B \in \overline{AC}$ contrairement à (7). On en conclut qu'il existe un point X vérifiant les conditions: (9) $X \in \overline{DF}$ et (10) $X \in \overline{BC}$.

Les conditions (9), (8) et (2) impliquent (11) $X \neq B$ et (12) $X \neq C$; les conditions (10) et (11) impliquent (selon T8): $\overline{XB} = \overline{BC}$, d'où résulte (13) $C \in \overline{XB}$. Enfin (12) et (13) impliquent d'après T11 que soit $\overrightarrow{XC} \subset \overrightarrow{BX}$, soit (14) $C \in \overrightarrow{XB}$. La première possibilité forme avec (9) la thèse du théorème, il suffit donc démontrer que la deuxième ne peut pas avoir lieu.

En effet, (1) entraîne $\overrightarrow{DA} \subset \overrightarrow{BD}$, d'où en vertu des (14), (6) et A6 résulte l'existence d'un point Y vérifiant (15) $Y \in \overrightarrow{XD}$ et (16) $\overrightarrow{YA} \subset \overrightarrow{CY}$. Or (15), T1, (9) et T8 impliquent $X \neq D$, $\overline{XD} = \overline{DF}$ et (17) $Y \in \overline{DF}$, et (16) entraîne successivement (d'après T3, A4 et D1): $\overrightarrow{YA} \subset \overrightarrow{CA}$ et $Y \neq C$, puis $Y \in \overrightarrow{CA}$ et enfin $Y \in \overline{AC}$, contrairement aux (17) et (2).

Introduisant dans le système (**) la notion $\mu(A, B, C)$ à l'aide de la définition D3, on peut démontrer les axiomes classiques: II.1-II.5.

En effet, II.1 résulte immédiatement des D3, A1 et T1; l'axiome II.2 résulte des D3, T1 et D1; II.4 résulte des D3 et A5. Voici les démonstrations des autres axiomes classiques:

II.3. $\mu(A, B, C) \to \neg\, \mu(B, A, C)$.

Démonstration. Les suppositions: $\mu(A, B, C)$ et $\mu(B, A, C)$ entraînent selon D3 les inclusions: (1) $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$ et (2) $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{BA}$. La condition (1) implique d'après A2 l'inclusion $\overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{CB}$, d'où résulte en vertu de (2) l'inclusion $\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{CB}$, contrairement à T2.

II.5. *Si* (1) $C \notin \overline{AB}$, (2) $A \notin \overline{DF}$, (3) $C \notin \overline{DF}$ *et* (4) $\mu(A, D, B)$, *alors il existe un point* $X \in \overline{DF}$ *tel que soit* $\mu(A, X, C)$, *soit* $\mu(B, X, C)$.

Démonstration. La condition (4) implique (5) $\overrightarrow{DB} \subset \overrightarrow{AD}$. Si l'on suppose que $\overline{AC} \| \overline{DF}$, le théorème T12 entraîne l'existence d'un point $X \in \overline{DF}$ et vérifiant la condition $\overrightarrow{XC} \subset \overrightarrow{BX}$, d'où résulte en vertu de D3 la relation $\mu(B, X, C)$.

Supposons maintenant que les droites $\overline{AC}$ et $\overline{DF}$ ne soient pas parallèles, donc un tel point E existe, que (6) $E \in \overline{AC}$ et (7) $E \in \overline{DF}$. Les conditions (7), (2), (3) entraînent les inégalités (8) $C \neq E \neq A$. Le théorème T10 implique en vertu des (5), (1), (8) et (6) l'existence d'un point X vérifiant d'après A2, D3 et T8 la thèse de II.5.

La définition I est identique à D2 et les axiomes III.1-III.3 résultent respectivement des axiomes A8, A9 et A10.

Voici la démonstration de l'axiome de continuité:

IV.1. *Si* (1) $Z \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y} \leftrightarrow \mu(A, Z, B)$ *et si* (2) $[X \in \mathscr{X} \wedge Y \in \mathscr{Y} \to \mu(X, Y, B)]$, *alors il existe un tel point* C *que* $\bigwedge\limits_{Z \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}} \{Z \neq C \to [Z \in \mathscr{Y} \leftrightarrow \mu(C, Z, B)]\}$.

Démonstration. Dans le cas où $\mathscr{Y} = \emptyset$ il suffit de mettre $C = B$. Supposons donc que (3) $\mathscr{Y} \neq \emptyset$. La condition (1) implique selon II.1 que pour chaque $Y \in \mathscr{Y}$ on a l'inégalité $Y \neq B$, donc il existe la demi-droite $\overrightarrow{YB}$. Désignons par Γ l'ensemble de toutes ces demi-droites: (4) $\overrightarrow{YB} \in \Gamma \leftrightarrow Y \in \mathscr{Y}$. La supposition (3) entraîne (5) $\Gamma \neq \emptyset$ et la supposition (1) entraîne selon D3 et T3 l'implication: $\overrightarrow{YB} \in \Gamma \to \overrightarrow{YB} \subset \overrightarrow{AB}$. On en conclut d'après A11 qu'il existe une demi-droite $c = \overrightarrow{CE}$ vérifiant la condition (6) $\overrightarrow{CE} = \bigcup\limits_{a \in \Gamma} a$. Les conditions (4), (5) et (6) impliquent selon T1 et A3 que

(7) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$,

Supposons maintenant que (8) $Z \neq C$ et (9) $Z \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$. Nous allons démontrer l'équivalence: $Z \in \mathscr{Y} \leftrightarrow \mu(C, Z, B)$.

1. Si $Z \in \mathscr{Y}$, les conditions (4), (6) et (7) impliquent $\overrightarrow{ZB} \subset \overrightarrow{CB}$, d'où résulte d'après (8), T3 et D3 la relation $\mu(C, Z, B)$.

2. Supposons maintenant que $\mu(C, Z, B)$, donc d'après D3, T3 et A4 le point Z appartient à $\overrightarrow{CB}$. On en conclut que les conditions: (6) et (7) entraînent l'existence d'une demi-droite a appartenant à Γ et contenant le point Z, ce qui entraîne en vertu de (4) l'existence d'un point Y vérifiant les conditions: (10) $Y \in \mathscr{Y}$ et (11) $Z \in \overrightarrow{YB}$. Pour compléter la démonstration il suffit (en vertu de (9)) de démontrer que $Z \notin \mathscr{X}$. En effet, la supposition $Z \in \mathscr{X}$ implique selon (2) et (10) l'inclusion $\overrightarrow{YB} \subset \overrightarrow{ZY}$, contrairement à (11) et A1.

Il faut encore remarquer que A3, A4, T1, T3 et D3 impliquent presque immédiatement

DÉFINITION II. $A \neq B \to \{X \in \overrightarrow{AB} \leftrightarrow [\mu(A, X, B) \vee \mu(A, B, X) \vee X = B]\}$.

On connaît plusieurs axiomatiques de la géométrie euclidienne. Dans chacune d'elles on peut définir la notion de coïncidence des angles orientés. Mais la définition de cette notion est presque toujours très compliquée (par ex. dans les systèmes de Hilbert [3] ou de Tarski [4]. Cette notion est pourtant très importante et possède maintes applications même au niveau de l'enseignement secondaire (par ex. dans la trigonométrie). En conséquence, la création d'une axiomatique basée sur cette notion devient un problème important.

Vu que l'angle orienté peut être considéré comme un couple ordonné des demi-droites, l'axiomatique (**) peut servir comme la base pour une solution de ce problème. La solution complète sera présentée dans un travail de A. Lewandowski qui a obtenu une axiomatique de la géométrie euclidienne, en ajoutant aux axiomes (**) certains axiomes concernant coïncidence de deux couples ordonnés des demi-droites.

Nous espérons aussi appliquer les résultats de ces deux travaux pour obtenir une axiomatique de la géométrie plane sur le corps des nombres complexes.

Travaux cités

[1] K. Borsuk i W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, Warszawa 1955.

[2] L. Dubikajtis, *Uwagi o hilbertowskiej aksjomatyce uporządkowania i jej modyfikacjach I*, Prace Mat. 8 (1963), pp. 71-79.

[3] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1930.

[4] A. Tarski, *What is elementary geometry. The axiomatic method*, Amsterdam 1959, pp. 16-29.