ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XIII (1970)
ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XIII (1970)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

M. Borowiecki (Zielona Góra) et L. Szamkołowicz (Wrocław)

Remarques sur la construction des graphes symétriques

1. Introduction. Dans le travail [2] on trouve une discussion des problèmes liés à la construction des multigraphes et des graphes symétriques à l'ordre déterminé de ramification de leurs sommets. Dans le présent travail nous avons recours aux théorèmes de la théorie du réseau de transport afin de résoudre le problème dans le cas des graphes symétriques, ce qui permet d'utiliser l'algorithme de Ford-Fulkerson pour la construction des graphes réalisants. Nous avons obtenu un critère de réalisation plus simple que celui de Hakimi, en surplus nous avons construit un algorithme de symétrisation des graphes orientés.

Comme *graphe orienté* sans boucles, nous considérons ici un couple ordonné $\langle X, \vec{R}\rangle$, où X est un ensemble quelconque fini de points, appelés *sommets*, et $\vec{R}$ — une relation quelconque á deux arguments définie sur l'ensemble X et satisfaisant à la condition: $\sim x\vec{R}x$. Dans le cas d'un graphe symétrique nous définissons par R la relation à deux arguments. Cette relation satisfait alors aux conditions: $\sim xRx$ et $xRy \to yRx$.

Soit $G = \langle X, \vec{R}\rangle$ un graphe donné orienté. Nous appelons *arc* un couple ordonné (x, y) de sommets du graphe G, pour lesquels nous avons $x\vec{R}y$. Par Γ_x nous désignons les y pour lesquels il existe un arc (x, y); par Γ_x^{-1} les y pour lesquels il existe un arc (y, x).

Si l'ensemble X du graphe G contient exactement un point x_0 tel que $|\Gamma_{x_0}^{-1}| = 0$ et exactement un point z tel que $|\Gamma_z| = 0$ et si sur l'ensemble U de tous les arcs du graphe donné est définie une fonction c admettant des valeurs absolues non négatives, nous dirons que $T = \langle X, x_0, z, \vec{R}, c\rangle$ est un *réseau de transport*. Nous appelons *flot* φ du réseau T une fonction définie sur l'ensemble U des arcs du graphe G et admettant des valeurs absolues telles que $0 \leqslant \varphi(l) \leqslant c(l)$ et $\sum_{y\in\Gamma_x} \varphi(y, x) - \sum_{y\in\Gamma_x^{-1}} \varphi(x, y) = 0$ pour chaque $x \in X$.

2. Soit une séquence de nombres naturels $r = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$; $r \leqslant r_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Nous disons que le graphe $\langle X, \vec{R}\rangle$ *réalise*

la séquence r si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$,

$$(*) \qquad |\Gamma_{x_i}| = |\Gamma_{x_i}^{-1}| = r_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Construisons pour la séquence donnée r un réseau de transport $T_r = \langle X, x_0, z, \vec{R}, c\rangle$ tel que: $X = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$, $\Gamma_{x_0} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\Gamma_{x_i} = \{y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}$, $\Gamma_z^{-1} = \{y_1, \ldots, y_n\}$, et $c(x_0, x_i) = r_i$, $c(x_i, y_j) = 1$ pour $i \neq j$, $c(y_j, z) = r_j$.

Soit φ le flot du réseau T_r *saturant* les arcs périphériques, c'est-à-dire $\varphi(x_0, x_i) = c(x_0, x_i)$ et $\varphi(y_j, z) = c(y_j, z)$.

Si un tel flot existe, alors pour le graphe $\langle \{x_i\}_{i=1}^n, \vec{R}\rangle$, où $x_i \vec{R} x_j$ si et seulement si $\varphi(x_i, y_j) = 1$, la condition $(*)$ est satisfaite. D'où nous obtenons facilement

THÉORÈME 1. *Afin qu'il existe, pour une séquence donnée $r = [r_1, \ldots, r_n]$, un graphe $\langle X, \vec{R}\rangle$ réalisant cette séquence, il faut et il suffit pour le réseau de transport T qu'il existe un flot φ saturant les arcs périphériques.*

Evidemment, si un tel flot existe, c'est un flot maximum. On peut aisément l'obtenir en appliquant l'algorithme de Ford-Fulkerson [1]. Il est donc facile d'observer que pour une séquence donnée r il peut exister plusieurs graphes réalisants non-isomorphiques.

Dans le cas des graphes symétriques nous avons:

THÉORÈME 2. *Afin qu'il existe, pour une séquence donnée $r = [r_1, \ldots, r_n]$, un graphe symétrique $\langle X, R\rangle$, où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, tel que la condition $|\Gamma_{x_i}| = r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, soit satisfaite, il faut et il suffit pour le réseau de transport T_r qu'il existe un flot φ saturant les arcs périphériques et tel que $\varphi(x_i, y_j) = \varphi(x_j, y_i)$ pour chaque $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

D'où résulte évidemment la

CONCLUSION. *La condition nécessaire pour qu'il existe, pour une séquence donnée $r = [r_1, \ldots, r_n]$, un graphe symétrique réalisant, est que $\sum_{i=1}^{n} r_i$ soit un nombre pair.*

Nous voyons que cette condition est également suffisante, c'est-à-dire si nous avons une séquence de nombres naturels $r = [r_1, \ldots, r_n]$, où $\sum_{i=1}^{n} r_i$ est un nombre pair, et si séquence r admet un graphe réalisant, il existe alors tout au moins un seul graphe réalisant symétrique. Il nous semble important d'exposer un algorithme pour obtenir ce graphe réalisant symétrique, en partant d'une réalisation quelconque obtenue par l'application de l'algorithme de Ford-Fulkerson. L'algorithme recherché va symétriser le flot φ dans le réseau T_r. Au

paragraphe suivant nous allons présenter la démonstration de ce théorème, justement au moyen de la construction d'un algorithme approprié.

3. On appelle *chemin* une séquence d'arcs telle que l'extrémité terminale de chaque arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant. On appelle *circuit* un chemin dans lequel l'arc terminal coïncide avec l'arc initial. Nous allons désigner un circuit par $[l_1, \ldots, l_k]$ ou bien par $[x_0, \ldots, x_k]$, où $x_0 = x_k$, $l_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Un circuit sera *élémentaire* si pour chaque $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$, $x_{i-1} = x_{j-1}$ entraîne $x_i \neq x_j$, et $x_{i-1} = x_j$ entraîne $x_i \neq x_{j-1}$.

Un graphe $\langle X, \vec{R}\rangle$, dont tous les arcs constituent un circuit élémentaire, est appelé graphe *eulérien*.

LEMME 1. *Soit $G = \langle X, \vec{R}\rangle$ un graphe réalisant la séquence r et supposons que pour chaque $x, y \in X$ on a: $x\vec{R}y$ entraîne $\sim y\vec{R}x$. Alors chaque composante de connexion du graphe G est un graphe eulérien.*

Ceci résulte immédiatement de la condition (*) dans la définition d'un graphe réalisant.

Soit $G = \langle X, \vec{R}\rangle$ un graphe eulérien à nombre pair d'arcs $n = 2k$. Nous désignerons par $[x_0, \ldots, x_n]$ un circuit élémentaire de ce graphe. Nous le faisons correspondre au graphe symétrique $S(G) = \langle X, R\rangle$, où $x_i R x_j$ si, et seulement si $i = 2m-1$, $j = 2m$ pour $m = 1, 2, \ldots, k$. Nous appellerons opération de *symétrisation* l'opération S.

On déduit facilement le

LEMME 2. *Si le graphe G réalise la séquence r, le graphe $S(G)$ réalise aussi la séquence r.*

Soient $G_1 = \langle X, \vec{R}_1\rangle$ et $G_2 = \langle Y, \vec{R}_2\rangle$ deux composantes du graphe G, qui sont des graphes eulériens. Soient $[x_0, \ldots, x_m]$ et $[y_0, \ldots, y_n]$ des circuits élémentaires convenables des graphes G_1 et G_2. Nous ferons correspondre au graphe G un graphe connexe $L(G) = \langle X+Y, \vec{R}_3\rangle$ qui est également un graphe eulérien, de telle sorte que $x_i\vec{R}_1x_j \equiv x_i\vec{R}_3x_j$ et $y_i\vec{R}_2y_j \equiv y_i\vec{R}_3y_j$ pour tous les couples i, j différents de $i = 0$, $j = 1$; considérons aussi $\sim x_0\vec{R}_3x_1$, $\sim y_0\vec{R}_3y_1$, $x_0\vec{R}_3y_1$, $y_0\vec{R}_3x_1$. Nous appellerons *couplage des composantes* l'opération K.

Nous obtenons maintenant le

LEMME 3. *Si le graphe G réalise la séquence r, le graphe $L(G)$ réalise également r.*

Soit $G = \langle X+Y, \vec{R}\rangle$ un graphe composé de deux sous-graphes séparés $G_1 = \langle X, \vec{R}_X\rangle$ et $G_2 = \langle Y, \vec{R}_Y\rangle$ qui sont des graphes eulériens, où $[x_0, \ldots, x_m]$, $[y_0, \ldots, y_n]$ sont des circuits élémentaires convenables.

Soit en plus $x_0 \vec{R} y_0$, $y_0 \vec{R} x_0$ et $m = 2k+1$, $n = 2p+1$. Faisons correspondre au graphe G un graphe symétrique $S'(G) = \langle X+Y, R\rangle$, où $x_i R x_j$ et $y_i R y_j$ si et seulement si, lorsque $i = 2m$, $j = 2m+1$ pour $m = 0, 1, \ldots, k$, conformément $m = 0, 1, \ldots, p$ et $\sim x_i R y_j$ pour $i = 0, 1, \ldots, m$; $j = 0, 1, \ldots, n$. Nous appellerons *symétrisation avec détachement du point* $[x_0, y_0]$ l'opération S'. On obtient

LEMME 4. *Si le graphe G réalise la séquence r, le graphe $S'(G)$ réalise également la séquence r.*

Il résulte des lemmes 1-4 qu'en effectuant les opérations S, K et S' sur des composantes convenables du graphe G réalisant la séquence r, nous ne changeons pas l'ordre des ramifications de ses sommets, c'est-à-dire les nombres $|\Gamma_x| = |\Gamma_x^{-1}|$.

Nous allons démontrer maintenant le

THÉORÈME 3. *Si pour une séquence donnée $r = [r_1, \ldots, r_n]$ il existe un graphe réalisant $\langle X, \vec{R}\rangle$, alors la condition nécessaire et suffisante que pour la séquence donnée qu'il existe au moins un graphe réalisant $\langle X, R\rangle$ symétrique, est que*

(i) $\sum_{i=1}^{n} r_i$ *soit un nombre pair.*

La démonstration consiste à construire un algorithme transformant le graphe $\langle X, \vec{R}\rangle$ en graphe $\langle X, R\rangle$,

Soit $G = \langle X, \vec{R}\rangle$ un graphe réalisant la séquence r et qui n'est pas symétrique. Rejetons du graphe G, pour l'instant, tous les arcs (x, y) pour lesquels nous avons $x \vec{R} y$ et $y \vec{R} x$. Il est facile d'observer que chaque composante, qui n'est pas un sommet isolé du graphe partiel $\bar{G}$ obtenu de telle manière, est un graphe eulérien (Lemme 1). Il résulte de la condition (i) que le nombre des composantes de longueurs impaires des circuits appropriés est pair. Sur les composantes de longueurs paires des circuits nous effectuons l'opération de symétrisation. Soient K_1 et K_2 deux composantes quelconques du graphe $\bar{G}$ de longueurs impaires des circuits. Si elles n'ont pas été associées aux arcs rejetés précédemment, nous procédons à l'opération de couplage. Il est facile de remarquer (Lemme 3) que le graphe connexe obtenu de telle sorte est un graphe eulérien à longueur paire du circuit. Nous le soumettons à l'opération de symétrisation et répétons cette procédure successivement pour chaque couple de composantes appropriées du graphe $\bar{G}$ de longueurs impaires des circuits. Nous n'avons symétrisé encore que les composantes du graphe $\bar{G}$ à longueur impaire des circuits qui formaient des couples associés tout au moins à un seul couple d'arcs (x, y) et (y, x), précédemment rejetés. Soit K_1, K_2 un couple de ces composantes et soit (x, y) et (y, x) un couple d'arcs qui est un couple quelconque des arcs précédemment

rejetés joignant les composantes K_1 et K_2. Considérant ce couple d'arcs comme un point $[x_0, y_0]$ (voir la définition de l'opération S') nous effectuons sur K_1 et K_2 l'opération de symétrisation avec détachement du point. Après avoir successivement effectué cette opération sur les autres couples de composantes qui ne sont pas des sommets isolés, nous restituons tous les arcs, précédemment rejetés, qui n'étaient pas des ponts lors de l'opération S'; de telle sorte nous obtenons un graphe $G = \langle X, R \rangle$ symétrique, réalisant la séquence r (Lemmes 2-4).

Travaux cités

[1] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Maximal flow trough a network*, Canadian J. Math. 8 (1956), pp. 399-404.

[2] S. L. Hakimi, *On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph I*, J. Soc. Industr. Appl. Math. 10 (1962), pp. 496-506.