ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XVI (1972)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XVI (1972)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

З. Доманьский, А. Пискорек и З. Роек (Варшава)

О применении метода Фишера–Рисса–Купрадзе для решения первой задачи Фурье

1. Введение. Пусть E^3 — евклидово пространство, координатами точек которого служат переменные $x = (x_1, x_2, x_3)$, Ω — ограниченная область в этом пространстве, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Решим методом Фишера–Рисса–Купрадзе (1) (метод Ф–Р–К) граничную задачу для уравнения теплопроводности в области Ω, при этом мы берем однородное начальное условие и неоднородное краевое условие типа Дирихле. Аналогичным образом решается граничная задача с однородным начальным условием и неоднородным краевым условием типа Неймана.

2. Основные определения, формулы, леммы. Во всем дельнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями и терминами: $|x-y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (x_k - y_k)^2}$ обозначает расстояние между точками x и y пространства E^3, $D_T = \Omega \times [0, T]$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times [0, T]$, S — ориентируемая (2) поверхность в пространстве E^3 с кусочно-гладким краем ∂S, n_η — внешняя нормаль к S в точке $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $a_j(\eta) = \cos(n_\eta, x_j)$, $j = 1, 2, 3$ — направляющие косинусы этой нормали.

Пусть μ обозначает функцию точки η поверхности S. Предполагаем что функция μ дифференцируема ([2], стр. 15–19) на S. Таким образом определено дифференцирование ([2], стр. 19):

$$D_{x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - a_j \frac{\partial}{\partial n}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Если кроме того производная функции μ удовлетворяет условию Гельдера с показателем h, то класс этих функций будем обозначать через $C^{1,h}(S)$.

(1) Метод Фишера–Рисса–Купрадзе был представлен В. Д. Купрадзе на Конференции в 1966 г. в Яблонне.

(2) И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, выпуск 1, стр. 268-269.

Пусть след ([3]) на S функции χ дифференцируемой в некоторой окрестности поверхности S совпадает с функцией μ, т.е. $\chi|_S = \mu$. Тогда ([2], стр. 19).

$$D_{x_j}\mu = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_j}\right) - a_j \frac{\partial \chi}{\partial n}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Для операторов D_{x_j} $(j = 1, 2, 3)$ верны формулы дифференцирования произведения функций и верна теорема Стокса ([2], стр. 21-24).

В дальнейшем важную роль будет играть следующая

Лемма 1. *Если f дважды непрерывно дифференцируема функция в окрестности поверхности S, то*

$$a_i D_{x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j} - a_j D_{x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - a_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением. Условимся обозначать предельные значения функций $W(x, t)$ при стремлении точки x изнутри S к точке ξ поверхности S через $(W(\xi, t))_i$, а извне — через $(W(\xi, t))_e$. Чтобы подчеркнуть направление перехода к пределу, будем писать соответственно $x \to \xi^-$ или $x \to \xi^+$. Для теплового потенциала двойного слоя

$$u(x, t) = \int_0^t \int_S \frac{\partial v(x-\eta, t-\tau)}{\partial n_\eta} \cdot \mu(\eta, \tau)\, dS_\eta\, d\tau \tag{2}$$

где

$$v(x-\eta, t-\tau) = \frac{1}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{|x-\eta|^2}{4(t-\tau)}\right], \tag{2'}$$

фундаментальное решение уравнения теплопроводности, а $\mu(\eta, \tau)$ — плотность этого потенциала, верна

Теорема 1. *Если плотность μ потенциала (2) удовлетворяет условию Гельбера по параметру $\tau \in [0, T]$ с показателем $h \in (\frac{1}{2}, 1)$ и является дифференцируемой функцией точки η поверхности S, а её производные удовлетворяют условию Гельбера, то*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right)_i = \int_0^t \int_S \mu(\eta, \tau) \frac{\partial v(\xi-\eta, t-\tau)}{\partial \tau} \cdot \sum_{k=1}^{3} a_k(\eta) a_k(\xi)\, ds_\eta\, d\tau + \tag{3}$$

$$+ \int_0^t \left[\int_{\partial S} \mu(\eta, \tau) v_{23}\, d\eta_1 + \mu(\eta, \tau) v_{31}\, d\eta_2 + \mu(\eta, \tau) v_{12}\, d\eta_3 \right] d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_S \begin{vmatrix} a_1(\xi) & a_2(\xi) & a_3(\xi) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v(\xi-\eta, t-\tau)\mu_{23} & v(\xi-\eta, t-\tau)\mu_{31} & v(\xi-\eta, t-\tau)\mu_{12} \end{vmatrix} dS_\eta\, d\tau,$$

([3]) Следом функции χ на S называем сужение функции χ на поверхности S ([10], стр. 20).

$$(4)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right)_e = \int_0^t \int_S \mu(\eta,\tau)\frac{\partial v(\xi-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\cdot\sum_{k=1}^{3}\alpha_k(\eta)\alpha_k(\xi)\,dS_\eta\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\Big[\int_{\partial S}\mu(\eta,\tau)v_{23}\,d\eta_1+\mu(\eta,\tau)v_{31}\,d\eta_2+\mu(\eta,\tau)v_{12}\,d\eta_3\Big]d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_S\begin{vmatrix}\alpha_1(\xi) & \alpha_2(\xi) & \alpha_3(\xi)\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ v(\xi-\eta,t-\tau)\mu_{23} & v(\xi-\eta,t-\tau)\mu_{31} & v(\xi-\eta,t-\tau)\mu_{12}\end{vmatrix}dS_\eta\,d\tau$$

где

$$\mu_{ij}=\alpha_i(\eta)D_{\eta_j}\mu-\alpha_j(\eta)D_{\eta_i}\mu,\qquad i,j=1,2,3.$$
$$v_{ij}=\alpha_i(\xi)\frac{\partial v}{\partial\eta_j}-\alpha_j(\xi)\frac{\partial v}{\partial\eta_i},$$

Доказательство. Когда точка x не принадлежит поверхности S, то

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}=\int_0^t\int_S\mu(\eta,\tau)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 v(x-\eta,t-\tau)}{\partial x_1\partial\eta_k}\alpha_k(\eta)\,dS_\eta\,d\tau$$

$$=-\int_0^t\int_S\mu(\eta,\tau)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\eta_1\partial\eta_k}\alpha_k(\eta)\,dS_\eta\,d\tau.$$

Учитывая формулы (1) и то, что функция $v(x-\eta,t-\tau)$ удовлетворяет уравнению $\Delta v+\dfrac{\partial v}{\partial\tau}=0$ получим

$$(5)\qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}=\int_0^t\int_S\alpha_1(\eta)\mu(\eta,\tau)\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\,dS_\eta\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_S\begin{vmatrix}\alpha_1(\eta) & \alpha_2(\eta) & \alpha_3(\eta)\\ D_{\eta_1} & D_{\eta_2} & D_{\eta_3}\\ 0 & \mu(\eta,\tau)\dfrac{\partial v}{\partial\eta_3} & \mu(\eta,\tau)\dfrac{\partial v}{\partial\eta_2}\end{vmatrix}dS_\eta\,d\tau +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^t\int_S v(x-\eta,t-\tau)\mu_{12}\,dS_\eta\,d\tau+\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^t\int_S v(x-\eta,t-\tau)\mu_{13}\,dS_\eta\,d\tau.$$

Обозначим интегралы выступающие с правой стороны формулы (5) через $J_1(x,t)$, $I_1(x,t)$, $W_{12}(x,t)$, $W_{13}(x,t)$. Докажем непрерывность интеграла $J_1(x,t)$ в пространстве E^3 кроме края поверхности S. Пред-

ставим его в виде суммы двух слагаемых $J_1(x,t) = i_1(x,t)+i_2(x,t)$ где

$$i_1(x,t) = \int_0^t \int_S \alpha_1(\eta)\mu(\eta,t)\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\,dS_\eta d\tau,$$

$$i_2(x,t) = \int_0^t \int_S \alpha_1(\eta)[\mu(\eta,\tau)-\mu(\eta,t)]\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\,dS_\eta d\tau.$$

Из представления $i_1(x,t) = -\int_S \alpha_1(\eta)\mu(\eta,t)v(x-\eta,t)dS_\eta$ следует непрерывность функций $i_1(x,t)$ при стремлении точки x к точке ξ поверхности S. Изучим интеграл $i_2(x,t)$. Введем местную систему координат $Os_1s_2s_3$, начало которой совпадает с точкой ξ, ось s_3 совпадает с направлением внешней нормали поверхности S в точке ξ, а плоскость Os_1s_2 совпадает с касательной плоскостью к поверхности S в точке ξ. Разобьем поверхность S на две части: на часть σ вырезаемую из S сферой Ляпунова и на оставшуюся часть $S-\sigma$. Представим интеграл $i_2(x,t)$ в виде

$$(6)\quad i_2(x,t) = \int_0^t \int_{S-\sigma} \alpha_1(\eta)[\mu(\eta,\tau)-\mu(\eta,t)]\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\,dS_\eta d\tau + \int_0^t \int_\sigma \alpha_1(\eta)[\mu(\eta,\tau)-\mu(\eta,t)]\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\,dS_\eta d\tau.$$

Первый интеграл представляет собой непрерывную функцию в точке ξ. Так как функция $\mu(\eta,\tau)$ удовлетворяет условию Гельдера то имеем оценку

$$\left|\alpha_1(\eta)[\mu(\eta,\tau)-\mu(\eta,t)]\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\tau}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}\exp\left[-\dfrac{|\xi-\tilde{\eta}|^2}{8(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^\nu|\xi-\tilde{\eta}|^{5-2h-2\nu}}$$

где $\tilde{\eta} = (\eta_1,\eta_2,0)$, значит для $h\in(\frac{1}{2},1)$ и $\nu<1$ таких что $h+\nu>\frac{3}{2}$ второй интеграл в правой части формулы (6) сходится равномерно и представляет собой непрерывную функцию в точке ξ.

Применяя формулу Стокса к интегралу $I_1(x,t)$ имеем

$$I_1(x,t) = \int_0^t\left[\int_{\partial S} -\mu(\eta,\tau)\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\eta_3}\,d\eta_2+\mu(\eta,\tau)\frac{\partial v(x-\eta,t-\tau)}{\partial\eta_2}\,d\eta_3\right]d\tau.$$

Отсюда вытекает, что этот интеграл является непрерывной функцией в точке ξ.

Последние два слагаемые в (5) суть производные потенциалов простого слоя с плотностями μ_{12} и μ_{13}. Представим производные этих потенциалов в местной системе координат $Os_1s_2s_3$ формулами

$$\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial W_{12}}{\partial s_1}\cos(x_2, s_1) + \frac{\partial W_{12}}{\partial s_2}\cos(x_2, s_2) + \frac{\partial W_{12}}{\partial n_\xi}\alpha_2(\xi),$$

$$\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial W_{13}}{\partial s_1}\cos(x_3, s_1) + \frac{\partial W_{13}}{\partial s_2}\cos(x_3, s_2) + \frac{\partial W_{13}}{\partial n_\xi}\alpha_3(\xi).$$

Пользуясь своиствами тепловых потенциалов ([8], стр. 81-104) получаем

$$\left(\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2}\right)_i = \left.\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2}\right|_{x=\xi} - \tfrac{1}{2}\alpha_2(\xi)\mu_{12}(\xi, t),$$

$$\left(\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2}\right)_e = \left.\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2}\right|_{x=\xi} + \tfrac{1}{2}\alpha_2(\xi)\mu_{12}(\xi, t),$$

$$\left(\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3}\right)_i = \left.\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3}\right|_{x=\xi} - \tfrac{1}{2}\alpha_3(\xi)\mu_{13}(\xi, t),$$

$$\left(\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3}\right)_e = \left.\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3}\right|_{x=\xi} + \tfrac{1}{2}\alpha_3(\xi)\mu_{13}(\xi, t).$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_i = J_1(\xi, t) + I_1(\xi, t) + \left.\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2}\right|_{x=\xi} + \left.\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3}\right|_{x=\xi} - \tfrac{1}{2}[\alpha_2(\xi)\mu_{12}(\xi, t) + \alpha_3(\xi)\mu_{13}(\xi, t)], \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_e = J_1(\xi, t) + I_1(\xi, t) + \left.\frac{\partial W_{12}}{\partial x_2}\right|_{x=\xi} + \left.\frac{\partial W_{13}}{\partial x_3}\right|_{x=\xi} + \tfrac{1}{2}[\alpha_2(\xi)\mu_{12}(\xi, t) + \alpha_3(\xi)\mu_{13}(\xi, t)].$$

Производная $\partial u/\partial x_2$ представляется формулой аналогичной формуле (5). Интегралы выступающие в правой части этой формулы обозначим $J_2(x, t)$, $I_2(x, t)$, $W_{23}(x, t)$, $W_{21}(x, t)$. Символями $J_3(x, t)$, $I_3(x, t)$, $W_{31}(x, t)$, $W_{32}(x, t)$ обозначим интегралы выступающие в формуле для производной $\partial u/\partial x_3$. Поступая аналогично как при выведении формул (7), получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_i = J_2(\xi, t) + I_2(\xi, t) + \left.\frac{\partial W_{23}}{\partial x_3}\right|_{x=\xi} + \left.\frac{\partial W_{21}}{\partial x_1}\right|_{x=\xi} - \tfrac{1}{2}[\alpha_3(\xi)\mu_{23}(\xi, t) + \alpha_1(\xi)\mu_{21}(\xi, t)], \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_e = J_2(\xi, t) + I_2(\xi, t) + \left.\frac{\partial W_{23}}{\partial x_3}\right|_{x=\xi} + \left.\frac{\partial W_{21}}{\partial x_1}\right|_{x=\xi} + \tfrac{1}{2}[\alpha_3(\xi)\mu_{23}(\xi, t) + \alpha_1(\xi)\mu_{21}(\xi, t)],$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_i = J_3(\xi, t) + I_3(\xi, t) + \frac{\partial W_{31}}{\partial x_1}\bigg|_{x=\xi} + \frac{\partial W_{32}}{\partial x_2}\bigg|_{x=\xi} - \tfrac{1}{2}[\alpha_1(\xi)\mu_{31}(\xi, t) + \alpha_2(\xi)\mu_{32}(\xi, t)],$$

(9)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_e = J_3(\xi, t) + I_3(\xi, t) + \frac{\partial W_{31}}{\partial x_1}\bigg|_{x=\xi} + \frac{\partial W_{32}}{\partial x_2}\bigg|_{x=\xi} + \tfrac{1}{2}[\alpha_1(\xi)\mu_{31}(\xi, t) + \alpha_2(\xi)\mu_{32}(\xi, t)].$$

Умножим равенства (7), (8), (9) соответственно через $\alpha_1(\xi)$, $\alpha_2(\xi)$, $\alpha_3(\xi)$ и сложим, тогда получим формулы (3) и (4), что и требовалось.

Замечание. В случае, когда S замкнутая поверхность, вторые слагаемые в формулах (3) и (4) исчезают.

Следствие. Если плотность потенциала (2) удовлетворяет условиям теоремы 1 то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right)_e = \left(\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right)_i. \tag{10}$$

3. Постановка задачи. В D_T будем искать функцию $u = u(x, t)$ удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U(x, t) - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

и условиям

$$\lim_{t\to 0} U(x, t) = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\xi^-} U(x, t) = \psi(\xi, t). \tag{13}$$

Предполагаем, что функция $\psi(\xi, t) \in C^{1,h}(\partial\Omega)$ и имеет непрерывную производную относительно переменной t.

4. Решение задачи. Как известно ([3], стр. 477) фундаментальная формула для уравнения (11) имеет вид

$$\int_\Omega U(y, 0)v(x-y, t-\tau)dy + \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau)\frac{\partial U(\eta, \tau)}{\partial n_\eta}d\eta d\tau - \int_0^t \int_{\partial\Omega} U(\eta, \tau)\frac{\partial v(x-\eta, t-\tau)}{\partial n_\eta}d\eta d\tau = \begin{cases} 0 & \text{для } x \notin \overline{\Omega}, \\ \frac{1}{2}U(x, t) & \text{для } x \in \partial\Omega, \\ U(x, t) & \text{для } x \in \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

где v фундаментальное решение уравнения (11) данное формулой (2′).

Исходя из формулы (14), решение задачи (11), (12), (13) представим формулой

$$U(x,t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau) f(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \psi(\eta,\tau) \frac{\partial v(x-\eta, t-\tau)}{\partial n_\eta}\, d\eta\, d\tau \tag{15}$$

где неизвестная функция $f(\eta, \tau)$ есть решением функционального уравнения

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau) f(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau = F(x,t) \qquad (x \notin \bar{\Omega}). \tag{16}$$

В уравнении (16) обозначено

$$F(x,t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \psi(\eta,\tau) \frac{\partial v(x-\eta, t-\tau)}{\partial n_\eta}\, d\eta\, d\tau. \tag{17}$$

Теорема 2. *Функциональное уравнение* (16) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что уравнение (16) имеет решение. Учитывая предположения о функции $\psi(\eta, \tau)$ и учитывая свойства нормальной производной теплового потенциала простого слоя ([8], стр. 81-104) получаем

$$\tfrac{1}{2} f(\xi,t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} f(\eta,\tau) \frac{\partial v(x-\eta, t-\tau)}{\partial n_\xi}\, d\eta\, d\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial n_\xi}\right)_e. \tag{18}$$

Интегральное уравнение (18) есть уравнение типа Вольтерра с ядром со слабой особенностью ([9], стр. 131). Правая часть этого уравнения (стр. 1 теорема 1) непрерывная функция. Таким образом, интегральное уравнение (18) имеет единственное решение в Σ_T.

Докажем, что решение интегрального уравнения (18) есть решение уравнения (16). Предположим, что функция $f(\xi, t)$ не является решением уравнения (16). Обозначим

$$\Psi(x,t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau) f(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau - F(x,t) \tag{19}$$

где функция $f(\eta, \tau)$ есть решение интегрального уравнения (18).

Имеем $\Psi(x, t) \not\equiv 0$ для $x \notin \bar{\Omega}$. Как легко проверить

$$\Delta\Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n_\xi}\right)_e = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \Psi(x,t) = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \Psi(x,t) = 0. \tag{22}$$

Предвидя решение задачи (20), (21), (22) в виде теплого потенциала простого слоя с непрерывной и ограниченной плотностью $\mu(\eta, \tau)$

$$\Psi(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \mu(\eta, \tau) v(x-\eta, t-\tau)\, d\eta\, d\tau \tag{23}$$

и используя условие (21) и свойства нормальной производной теплового потенциала простого слоя получим интегральное уравнение вида

$$\tfrac{1}{2}\mu(\xi, t) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \mu(\eta, \tau) \frac{\partial v(\xi-\eta, t-\tau)}{\partial n_\xi}\, d\eta\, d\tau = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) имеет единственное решение $\mu(\eta, \tau) \equiv 0$. Отсюда $\Psi(x, t) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Перейдем к построению решения функционального уравнения (16) методом Ф–Р–К [4], [5], [6].

Пусть S^1 есть произвольная замкнутая поверхность Ляпунова граница конечной области Ω^1, содержащей целиком внутри $\overline{\Omega}$. Введем следующие обозначения: $D_T^1 = \Omega^1 \times [0, T]$, $\Sigma_T^1 = S^1 \times [0, T]$.

Пусть $\{(\xi^k, t_i)\}$, $k, i = 1, 2, \ldots$, есть счетное множество точек поверхности Σ_T^1 расположенных всюду плотно на Σ_T^1 и

$$\Gamma(\xi^k-\eta, t_i-\tau) = \begin{cases} v(\xi^k-\eta, t_i-\tau), & \tau < t_i, \\ 0, & t_i \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases} \tag{25}$$

Упорядочив некоторым образом систему функции (25), введем обозначение

$$\Gamma(\xi^{k_j}-\eta, t_{ij}-\tau) = \Gamma_j(\eta, \tau), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

и рассмотрим пространство функции $L_2(\Sigma_T)$ с нормой для элемента φ

$$\|\varphi\| = \Big(\int_0^T \int_{\partial\Omega} |\varphi(\eta, \tau)|^2 d\eta\, d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 2. *Совокупность функции* $\{\Gamma_j(\eta, \tau)\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *линейно независима и полна в пространстве* $L_2(\Sigma_T)$.

Доказательство этой леммы мы не приводим. Оно проведено в работах [5], [6].

В дальнейшем следуя работам [5], [6] обозначим через $\{\omega_j(\eta, \tau)\}$, $j = 1, 2, \ldots$ ортонормированную систему функции $\{\Gamma_j(\eta, \tau)\}$. Элементы системы $\{\omega_j(\eta, \tau)\}$ являются линейными комбинациями элементов системы $\{\Gamma_j(\eta, \tau)\}$ и наоборот (см. [7], стр. 102):

$$\omega_j(\eta, \tau) = \sum_{k=1}^{j} A_{kj}\Gamma_k(\eta, \tau), \qquad \Gamma_j(\eta, \tau) = \sum_{k=1}^{j} B_{kj}\omega_k(\eta, \tau).$$

Обозначим через Φ_j коэффициенты Фурье разложения функций $f(\eta, \tau)$ в ряд по функциям $\{\omega_j(\eta, \tau)\}$

$$\Phi_j = \int_0^t \int_{\partial\Omega} f(\eta, \tau)\, \omega_j(\eta, \tau) d\eta\, d\tau, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Положим в уравнении (16) $x = \xi^{k_j}$, $t = t_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, умножим первые j полученных уравнении на A_{k_j} $(k = 1, 2, \ldots, j)$ и сложим, тогда получим

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} f(\eta, \tau) \sum_{k=1}^{j} A_{k_j} \Gamma_k(\eta, \tau) d\eta\, d\tau = \sum_{k=1}^{j} A_{k_j} F(\xi^{k_j}, t_{i_j}).$$

Отсюда

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{j} A_{k_j} F(\xi^{k_j}, t_{i_j}).$$

Так как $F(x, t)$ — заданная функция, а числа A_{k_j} находятся в процессе ортонормализации, то все Φ_j определены. Из этого, что $f \in L_2(\Sigma_T)$ следует

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \omega_k\| = 0. \tag{27}$$

Введем обозначения

$$f^N(\eta, \tau) = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \omega_k(\eta, \tau), \tag{28}$$

$$U^N(x, t) = \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau) f^N(\eta, \tau) d\eta\, d\tau - F(x, t). \tag{29}$$

Теорема 3. *Для любой внутренней точки $x \in \Omega$ и для всех t из сегмента $[0, T]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0, что для $N > N_0$ будет справедливо неревенство*

$$|U(x, t) - U^N(x, t)| < \varepsilon. \tag{30}$$

Доказательство.

$$|U(x, t) - U^N(x, t)| = \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau)[f(\eta, \tau) - f^N(\eta, \tau)] d\eta\, d\tau \right| \leqslant \tag{31}$$

$$\leqslant \int_0^t \int_{\partial\Omega} |v(x-\eta, t-\tau)|\, |f(\eta, \tau) - f^N(\eta, \tau)|\, d\eta\, d\tau.$$

Исходя из неравенства $[v(x-\eta, t-\tau)]^2 \leqslant M[(t-\tau)^\nu \sigma^{6-2\nu}]^{-1}$ где $0 < \nu < 1$, $\sigma = \inf_{\eta \in \partial\Omega} |x-\eta|$, а M положительная постоянная, получим

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega} [v(x-\eta, t-\tau)]^2 d\eta\, d\tau \leqslant \frac{\mathrm{mes}(\partial\Omega) \cdot M T^{1-\nu}}{\sigma^{6-2\nu}(1-\nu)} = M_1^2. \tag{32}$$

В силу соотношения (27) можно выбрать такое N, что

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega} |f(\eta,\tau)-f^N(\eta,\tau)|^2 d\eta d\tau \leqslant \|f-f^N\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{M_1^2}. \tag{33}$$

Применяя неравенство Шварца–Буняковского к (31) и принимая во внимание (32), (33) получим (30).

На основании теоремы 3 решение задачи (11), (12), (13) дано формулой

$$U(x,t) = \lim_{N\to\infty} \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(x-\eta, t-\tau) \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \omega_k(\eta,\tau) d\eta d\tau - F(x,t). \tag{34}$$

Замечания. В этой работе мы решили методом Ф–Р–К краевую задачу типа Дирихле для уравнения теплопроводности с однородным начальным условием. Применяя тот же метод можно решать краевую задачу типа Неймана с однородным начальным условием. Следует здесь подчеркнуть, что для уравнении с частными производными параболического типа, метод Ф–Р–К применяется для краевых задач только с однородными начальными условиями.

В случае неоднородного начального условия в интегральном уравнении (18) появляется дополнительное слагаемое — нормальная производная, так называемого интеграла Вейерштрасса–Фурье [3], т.е. слагаемое вида:

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\Big[\int_\Omega v(\xi-y,t)\varphi(y)dy\Big]$$

где $\varphi(y)$ является заданной и нетождественно равной нулю функцией в начальном условии (12). Это слагаемое не является суммируемой с квадратом функцией [9] на Σ_T, что делает невозможным применение метода Ф–Р–К.

В заключение заметим, что в наших рассуждениях существенную роль играли свойства нормальной производной потенциала двойного слоя, выраженные теоремой 1. Благодаря этим свойствам можно было с успехом применить метод Ф–Р–К, который полностью представлен в работе [6], в общем аспекте применений к уравнениям математической физики.

Литература

[1] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Выпуск 1, Москва 1959.

[2] N. M. Giunter, *Teoria potencjału*, Warszawa 1957.

[3] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, część I, Warszawa 1957.

[4] В. Д. Купрадзе, *Методы потенциала в теории упругости*, Москва 1963.

[5] В. Д. Купрадзе, *Об одном методе приближенного решения предельных задач математической физики*, ЖВМ и МФ 4: 6 (1964).

[6] В. Д. Купрадзе, *О приближенном решении задач математической физики*, УМН, том XXII, выпуск 2 (134) (1967), стр. 59-107.

[7] L. A. Lusternik i W. I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, Warszawa 1959.

[8] A. Piskorek, *O pewnych własnościach pochodnych potencjałów cieplnych w teorii równania przewodnictwa*, Biuletyn WAT, nr XXIX (1957).

[9] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. II, Warszawa 1958.

[10] R. Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy, funkcje wielu zmiennych*, Warszawa 1967.