ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XVI (1972)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XVI (1972)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. BOCHNAK (Kraków)

Wiązki liniowe (II)

I think it is true to say that this theorem of Bott must rank as one of the real achievements of topology and it is certainly something of which everybody should be aware.

M. F. Atiyah

Wstęp. Praca niniejsza jest kontynuacją artykułu *Wiązki liniowe* (I), opublikowanego w numerze XII. 1 Prac Matematycznych (cytowanego w dalszym ciągu jako [WI]). Rozwijamy w niej teorię wiązek liniowych, używając jej następnie do konstrukcji funktora K.

Ważność tego funktora, skonstruowanego zaledwie kilka lat temu [7], potwierdzona została rozwiązaniem za jego pomocą szeregu zarówno klasycznych, jak i nowych zagadnień matematyki, bezskutecznie atakowanych innymi metodami. Wystarczy wspomnieć o pracach nad wyznaczeniem maksymalnej liczby pól wektorowych, liniowo niezależnych na sferach, uwieńczonych pozytywnym rezultatem [2], dzięki zastosowaniu K-teorii. Innym klasycznym problemem było zagadnienie istnienia tzw. rzeczywistych algebr z dzieleniem, tj. możliwości wyposażenia zwykłej struktury przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^n$ w dodatkowe działanie — mnożenie, wraz z którym przestrzeń ta byłaby algebrą (z dodatkowym żądaniem, by iloczyn dwu elementów niezerowych był elementen niezerowym). Od dawna znano cztery takie algebry: ciała liczb rzeczywistych, zespolonych, kwaternionów i liczb Cayleya, odpowiadające wartościom $n = 1, 2, 4$ i 8. Twierdzenie, iż są to jedyne przykłady rzeczywistych algebr z dzieleniem, zostało wprawdzie pierwotnie udowodnione (zresztą zupełnie niedawno) metodami teorii homologii [1], ale dowód tego faktu był niezmiernie zawikłany i bardzo długi. K-teoria i jej centralny wynik — twierdzenie Botta — stworzyła możliwość udowodnienia tego twierdzenia w sposób nieporównanie prostszy [18]. Innym zagadnieniem, któremu K-teoria dostarczyła nowych metod [4], jest problem następujący: dla danej n-wymiarowej rozmaitości różniczkowalnej znaleźć najmniejszą liczbę k, dla której istnieje zanurzenie różniczkowalne w przestrzeń $\boldsymbol{R}^k$. Wiadomo że $k \leqslant 2n$ (twierdzenie Whitneya [10]), ale oszacowanie to jest dla danej rozmaitości — na ogół — zbyt grube.

Ale to tylko kilka problemów rozwiązanych za pomocą K-teorii — takich jedynie, o których można mówić bez wprowadzania pojęć złożonych.

Osobna uwaga należy się związkom K-teorii z tzw. twierdzeniem Botta o periodyczności.

Nie będzie przesadą twierdzenie, że przeważająca część prac z topologii algebraicznej i różniczkowej ostatnich kilkunastu lat skoncentrowana była na badaniach topologii grup liniowych $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$ i $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$ i bezpośrednich konsekwencjach tych badań. Zasadnicze twierdzenie udowodnione przez Botta [12] mówi, że grupy homotopii $\pi_k(\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C}))$ (dla $n \gg k$) są albo trywialne (dla k parzystych), albo izomorficzne z grupą $\boldsymbol{Z}$ (dla k nieparzystych); powtarzają się zatem okresowo i okres jest równy 2. Podobne twierdzenie dla grup $\pi_k(\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}))$ dowodzi, że $\pi_k(\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})) \cong \pi_{k+8}(\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}))$ $(n \gg k)$, tzn. typ izomorficzny tych grup powtarza się okresowo i okres równy jest 8. Bott wyznaczył również szczegółowo wartości tych grup. Aparat użyty w pierwotnym dowodzie tych twierdzeń jest skomplikowany i wymaga stosowania teorii punktów krytycznych M. Morse'a (w szczególności twierdzenie Morse'a o indeksie), teorii grup Liego, teorii homotopii (ciągi dokładne dla przestrzeni włóknistych) itp. Piękny, choć może nieco zwięzły wykład teorii Botta podany jest w książce Milnora [21]. Później twierdzenie Botta zostało zinterpretowane w terminach K-teorii i udowodnione na jej gruncie w sposób elementarny [6]. Jednym z celów tej pracy jest przytoczenie tego dowodu ze szczegółami (dla przypadku zespolonego).

Wynik Botta posłużył nie tylko do rozwiązania szeregu ważnych problemów topologicznych, ale — i to chcielibyśmy tutaj przede wszystkim podkreślić — miał ogromny wpływ na szereg zagadnień analizy matematycznej, zgrupowanych wokół tzw. problemu indeksu. Chodzi tu mianowicie o pewną klasę ciągłych operatorów liniowych (tzw. pseudoróżniczkowych, obejmującą między innymi klasę operatorów różniczkowych i całkowych szerokiego typu), działającą na przestrzeni funkcji różniczkowalnych $\boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{C}^n$, o zwartych suportach. Operator pseudoróżniczkowy P jest lokalnie przedstawialny w formie całki

$$P\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} p(x, \xi) \hat{\Phi}(\xi) d\xi,$$

gdzie $\hat{\Phi}$ jest transformatą Fouriera funkcji Φ, a $p(x, \xi)$ pewnym odwzorowaniem różniczkowalnym określonym na $\boldsymbol{R}^{2k}$, o wartościach w przestrzeni $M(n, \boldsymbol{C})$ macierzy zespolonych n-tego rzędu (niekoniecznie nieosobliwych), mającym odpowiednie własności. (Trudno w tym miejscu bliżej zajmować się nawet definicją operatora pseudoróżniczkowego; teoria tych operatorów wyłożona jest w artykułach [13], [16] i [19].)

Bada się również operatory pseudoróżniczkowe na rozmaitościach [24]. Tzw. część główna odwzorowania $p(x, \xi)$ indukuje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{R}^{2k}$

w $M(n, C)$. Jeśli wartości tego odwzorowania (dla $\xi \neq 0$) są macierzami nieosobliwymi, mówimy wtedy, że operator P jest *pseudoeliptyczny* (dla operatorów różniczkowych pokrywa się to ze zwykłą definicją operatora eliptycznego). Przy pewnych dodatkowych założeniach część główna $p(x, \xi)$ operatora pseudoeliptycznego indukuje odwzorowanie ciągłe $S^{2k-1} \to \mathrm{GL}(n, C)$. Zgodnie z twierdzeniem Botta odwzorowaniu takiemu (a raczej jego klasie homotopii) odpowiada jednoznacznie wyznaczona (z dokładnością do znaku) liczba całkowita. Rozważania analityczne implikują, że wymiar przestrzeni rozwiązań równania pseudoeliptycznego $P\Phi = 0$ jest skończony. Podobnie wymiar jądra operatora sprzężonego P^* (jako pseudoeliptycznego) jest skończony. Liczba całkowita $\dim\ker P - \dim\ker P^*$ zwana *indeksem operatora*, jest zatem poprawnie określona.

Twierdzenie o indeksie operatora pseudoeliptycznego mówi, że te tak różnymi drogami skojarzone z operatorem liczby są (przy odpowiedniej konwencji znaków) identyczne. Uogólnienia tego twierdzenia na przypadek rozmaitości różniczkowalnych wymagają już, nawet w sformułowaniu, użycia terminów K-teorii ([8], [9], [23]).

To co wyżej napisaliśmy nie może być niczym więcej niż tylko próbą zasygnalizowania ważności omawianej problematyki topologicznej dla analizy. Nie będzie chyba przesadą twierdzenie, że K-teoria jest tą właśnie gałęzią topologii algebraicznej, która będzie istotnym narzędziem teorii równań różniczkowych cząstkowych (w szerszym znaczeniu). Dlatego artykuł niniejszy zaadresowany jest głównie do niespecjalistów w topologii algebraicznej, w szczególności do matematyków zajmujących się analizą matematyczną czy geometrią różniczkową, w nadziei iż umożliwi im on zapoznanie się z elementami K-teorii wyłożonymi od początku. Niezależnie od tego, topologowie znajdą w nim, być może, pewne uproszczenia i nowe sformułowania. Oczywiście artykuł ten jest tylko wprowadzeniem w bardzo obszerną dziedzinę, jaką jest K-teoria ([3], [18]).

Warto też zwrócić uwagę, że podany niżej dowód twierdzenia Botta sam korzysta z takich twierdzeń analizy, jak twierdzenie Féjèra i twierdzenie całkowe Cauchy'ego. Jest to jeszcze jeden dowód na poparcie tezy o bliższym, w niedalekiej przyszłości, związku między analizą a topologią algebraiczną (tym razem analiza użyta w dowodzie twierdzenia topologicznego).

W pierwszych ośmiu paragrafach podajemy konstrukcje nowych wiązek liniowych z uprzednio danych, własności tych konstrukcji, definicje i własności trzech funktorów Vect, $\tilde{K}$ i K. W paragrafach VI i VII badamy związki grup homotopii $\pi_k(\mathrm{GL}(C))$ z K-teorią. W paragrafie IX formułujemy twierdzenie Botta o periodyczności i stosujemy je do obliczenia grup homotopii $\pi_k(\mathrm{GL}(C))$. Następny paragraf poświęcony jest przed-

stawieniu idei dowodu twierdzenia Botta o periodyczności na gruncie K-teorii; ostatnie trzy paragrafy zawierają szczegóły tego dowodu.

Począwszy od paragrafu III rozważamy wiązki jedynie o bazach zwartych, a od paragrafu V tylko wiązki zespolone. Wiązkę trywialną $(X \times \boldsymbol{C}^n, X, \pi)$ oznaczamy zawsze przez τ_X^n, opuszczając ewentualnie jeden lub oba wskaźniki. Symbol e_X zastrzeżony jest dla odwzorowania identycznościowego przestrzeni X na siebie. Sferę n-wymiarową oznaczamy przez S_n, pomijając niekiedy wskaźnik dla jednowymiarowej sfery S.

I. Subwiązki, metryka riemannowska, wiązki dopełniające. Niech ξ i η będą wiązkami liniowymi nad bazą B, oraz $E(\xi) \subset E(\eta)$. Wiązka ξ jest *subwiązką* wiązki η, jeśli każde włókno ξ_b jest podprzestrzenią wektorową włókna η_b $(b \in B)$. Notujemy wówczas $\xi \subset \eta$.

Zauważmy, że jeśli η_1 i η_2 są subwiązkami ξ i każde włókno ξ jest sumą prostą odpowiednich włókien wiązek η_1 i η_2, to odwzorowanie $\eta_1 \oplus \eta_2 \ni (x_1, x_2) \to x_1 + x_2 \in \xi$ jest izomorfizmem wiązek. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

TWIERDZENIE 1. *Dla każdej subwiązki $\xi^n \subset \eta^m$ istnieje wiązka dopełniająca $\xi^\perp \subset \eta$, dla której $\xi \oplus \xi^\perp \cong \eta$.*

Dowodząc twierdzenia 1 posłużymy się następującym lematem o istnieniu metryki riemannowskiej:

LEMAT 1. *Dla każdej wiązki liniowej ξ istnieje ciągle odwzorowanie*

$$\langle\ \rangle\colon \xi \oplus \xi \to \boldsymbol{R}$$

będące iloczynem skalarnym na każdym włóknie $\xi_b \times \xi_b$.

Dowód. Niech $(U_a)_{a \in A}$ będzie pokryciem otwartym bazy B wiązki ξ, dla którego wiązki $\xi | U_a$ są trywialne, a $(\varphi_a)_{a \in A}$ rozkładem jedności wpisanym w pokrycie $(U_a)_{a \in A}$. Niech $h_a\colon U_a \times \boldsymbol{R}^n \to \pi^{-1}(U_a)$ $(a \in A)$ będzie odwzorowaniem realizującym warunek lokalnej trywialności i $k_a = p \circ h_a^{-1}$ ($p\colon B \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ naturalne rzutowanie). Wtedy

$$\langle\ \rangle_a\colon (\xi \oplus \xi) | U_a \ni (x, y) \to \sum_{i=1}^{n} k_a^i(x) \cdot k_a^i(y) \in \boldsymbol{R}$$

jest metryką riemannowską na $\xi | U_a$. Oczywiście odwzorowanie

$$\langle\ \rangle = \sum_{a \in A} \varphi_a \langle\ \rangle_a$$

jest metryką riemannowską na ξ.

Zupełnie analogicznie dowodzi się odpowiedniego lematu dla wiązek zespolonych.

Badając wiązki liniowe z ustaloną metryką riemannowską możemy posługiwać się układami sekcji ortonormalnych.

Dowód twierdzenia 1. Przyjmijmy $E(\xi^{\perp}) = \{x \in \eta\colon \langle x, y\rangle = 0$ dla wszystkich $y \in \xi_{\pi(x)}\}$ oraz $\pi_{\perp} = \pi | E(\xi^{\perp})$. Wystarczy stwierdzić spełnienie warunku lokalnej trywialności w otoczeniu dowolnie ustalonego punktu $b_0 \in B$. Zauważmy, że istnieje otoczenie U punktu b_0 i m ortogonalnych sekcji $\sigma_i\colon U \to \eta | U$, z których pierwszych n jest równocześnie sekcjami wiązki $\xi | U$ (konstrukcja takich sekcji przebiega w oparciu o znaną metodę ortogonalizacji Grama–Schmidta).

Wówczas odwzorowanie

$$h\colon U \times \boldsymbol{R}^{m-n} \ni (b, x) \to \sum_{i=1}^{m-n} x_i \sigma_{m+i}(b) \in \pi_{\perp}^{-1}(U)$$

realizuje warunek lokalnej trywialności w otoczeniu U punktu b_0. Rzeczywiście, odwzorowanie odwrotne dane formułą

$$h^{-1}(e) = \big(\pi(e), \big(\langle e, \sigma_{m+1}(\pi(e))\rangle, \ldots, \langle e, \sigma_n(\pi(e))\rangle\big)\big)$$

jest ciągłe, a więc h jest homeomorfizmem, liniowym na włóknach.

Uwaga. Twierdzenie o istnieniu wiązki dopełniającej jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego sformułowania, mówiącego że jądro epimorfizmu wiązek liniowych jest subwiązką.

Wniosek 1. *Dla każdej wiązki skończonego typu ξ istnieje wiązka η, dla której suma Whitneya $\xi \oplus \eta$ jest wiązką trywialną.*

Dowód. Niech $f\colon B \to G_{n,p}$ będzie odwzorowaniem ciągłym bazy B wiązki ξ w przestrzeń Grassmanna $G_{n,p}$, dla którego $f^*(\gamma_p^n) \cong \xi$ (twierdzenie 6 [WI]). Wiązka uniwersalna γ_p^n jako subwiązka $(n+p)$-wymiarowej wiązki trywialnej $\tau_{G_{n,p}}$ ma wiązkę dopełniającą $\gamma^{\perp}$. Suma Whitneya wiązek $\eta = f^*(\gamma^{\perp})$ i ξ jest trywialna, ponieważ

$$\eta \oplus \xi \cong f^*(\gamma_p^n) \oplus f^*(\gamma^{\perp}) \cong f^*(\gamma_p^n \oplus \gamma^{\perp}) \cong f^*(\tau_{G_{n,p}}) \cong \tau_B.$$

Lemat 2. *Niech $\varphi\colon \xi \to \eta$ będzie homomorfizmem wiązek liniowych, którego rząd jest ten sam na każdym włóknie* (tzn. $\varphi_x\colon \xi_x \to \eta_x$ ma ten sam rząd dla każdego x z bazy X). *Wtedy $\varphi(\xi) = \big(\varphi\big(E(\xi)\big), X, \pi | \varphi\big(E(\xi)\big)\big)$ jest subwiązką η.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić jedynie warunek lokalnej trywialności w odniesieniu do układu $\big(\varphi\big(E(\xi)\big), X, \pi | \varphi\big(E(\xi)\big)\big)$. Oczywiście można założyć, że wiązka ξ jest trywialna, tj. $E(\xi) = X \times V$, gdzie V jest ustaloną przestrzenią wektorową. Niech $W_x \subset V$ będzie przestrzenią dopełniającą do przestrzeni $\ker \varphi_x$ (dla ustalonego $x \in X$), a $\tau = X \times W_x \subset X \times V$ subwiązką wiązki $X \times V$. Naturalny homomorfizm $\psi\colon \tau \to \eta$ (złożenie inkluzji $\tau \to \xi$ z homomorfizmem φ) jest monomorfizmem na włóknie $\tau_x = \{x\} \times W_x$, a więc i na włóknach z pewnego otoczenia U punktu x. $\psi(U \times W_x)$ jest zatem subwiązką $\eta | U$. Dowód zakończymy pokazaniem, że $\psi(U \times W_x) = \varphi(\xi | U)$. Inkluzja $\psi(U \times W_x) \subset \varphi(\xi | U)$ wynika z defi-

nicji ψ. Ponieważ $\dim\psi_y(\tau_y) = \dim\psi_x(\tau_x) = \dim\varphi_x(\xi_x) = \dim\varphi_y(\xi_y)$ dla $y \in U$, więc inkluzja $\varphi(\xi \mid U) \subset \psi(U \times W_x)$ jest również prawdziwa.

Przykład. Endomorfizm $\psi\colon \xi \to \xi$ wiązki liniowej ξ w siebie, dla którego $\psi^2 = \psi$, nazywamy *rzutowaniem*. Rzutowanie jest przykładem homomorfizmu, którego rząd jest ten sam na każdym włóknie (o ile baza wiązki ξ jest spójna). Wynika to z obserwacji, że odwzorowanie $(e_\xi - \psi)$ jest również rzutowaniem i $\operatorname{im}\psi_x + \operatorname{im}(e_x - \psi_x) = \xi_x$ jest sumą prostą przestrzeni wektorowych, dla dowolnego x z bazy ξ. Rzutowanie $\psi\colon \xi \to \xi$ rozkłada wiązkę ξ na sumę Whitneya subwiązek $\xi \cong \psi(\xi) \oplus (e_\xi - \psi)(\xi)$.

II. Iloczyny tensorowe wiązek liniowych, wiązki homorfizmów, wiązki dualne, funktor Vect. Mając jedną lub kilka przestrzeni wektorowych (które mogą być traktowane jako wiązki liniowe nad bazą punktową) możemy zdefiniować szereg nowych przestrzeni wektorowych. Na przykład dla pary (rzeczywistych lub zespolonych) przestrzeni wektorowych V i W mamy określoną:

1° sumę prostą $V \oplus W$,

2° iloczyn tensorowy $V \otimes W$,

3° przestrzeń wektorową $\operatorname{Hom}(V, W)$ transformacji liniowych V w W.

Pojedynczej przestrzeni wektorowej V może być przyporządkowana

4° przestrzeń dualna $V^* = \operatorname{Hom}(V, \boldsymbol{R})$ (lub $\operatorname{Hom}(V, \boldsymbol{C})$)

5° k-ta potęga zewnętrzna $\Lambda^k V$.

Rozszerzymy teraz wyżej przypomniane operacje na dowolne wiązki liniowe. W celu podania jednolitej konstrukcji, wygodnie jest posłużyć się pojęciem funktora. Niech $\mathscr{L}$ oznacza kategorię, której obiektami są skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe, a morfizmami izomorfizmy liniowe.

Funktorem n-zmiennych $T\colon \underbrace{\mathscr{L} \times \ldots \times \mathscr{L}}_{n} \to \mathscr{L}$ będzie operacja przyporządkowująca:

(a) Każdemu układowi n przestrzeni wektorowych $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{L}$ przestrzeń wektorową $T(V_1, \ldots, V_n) \in \mathscr{L}$.

(b) Każdemu układowi n izomorfizmów $f_i\colon V_i \to W_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ izomorfizm $T(f_1, \ldots, f_n)\colon T(V_1, \ldots, V_n) \to T(W_1, \ldots, W_n)$, przy czym $T(e_{V_1}, \ldots, e_{V_n}) = e_{T(V_1, \ldots, V_n)}$ oraz $T(f_1 \circ g_1, \ldots, f_n \circ g_n) = T(f_1, \ldots, f_n) \circ T(g_1, \ldots, g_n)$.

Mówimy dalej, że funktor F jest *ciągły*, jeśli $T(f_1, \ldots, f_n)$ zależy w sposób ciągły of f_i. (W zbiorze izomorfizmów dwóch przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych mamy określoną naturalną topologię.) Zauważmy, że wyżej wymienione operacje 1°-5° dostarczają przykładów funktorów ciągłych.

Niech $\xi_1, \ldots, \xi_n$ będą wiązkami liniowymi nad bazą B, a $T\colon \mathscr{L} \times \ldots \times \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ ciągłym funktorem n zmiennych. Podamy konstrukcję wiązki $\eta = T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ nad bazą B, której włóknem w punkcie $b \in B$ będzie

$$\eta_b = T\big((\xi_1)_b, \ldots, (\xi_n)_b\big).$$

Niech $E(\eta) = \bigcup_{b \in B} \eta_b$, $\pi\colon E(\eta) \to B$ $(\pi(\eta_b) = \{b\})$ i $\eta = \big(E(\xi), B, \pi\big)$.

TWIERDZENIE 1. *Istnieje naturalna topologia na $E(\eta)$, dla której η jest wiązką liniową.*

Dowód. Niech $(U_a)_{a \in A}$ będzie pokryciem otwartym B, dla którego wiązki $\xi_i | U_a$ są trywialne i niech

$$h_a^i\colon U_a \times \boldsymbol{R}^{k_i} \to \pi_i^{-1}(U_a)$$

realizuje warunek lokalnej trywialności dla wiązki ξ_i w zbiorze U_a.

Dla każdego $b \in U_a$ zdefiniujmy

$$h_{a,b}^i\colon \boldsymbol{R}^{k_i} \ni x \to h_a^i(b, x) \in (\xi_i)_b$$

i przyjmijmy

$$k_a\colon U_a \times T(\boldsymbol{R}^{k_1}, \ldots, \boldsymbol{R}^{k_n}) \ni (b, x) \to T(h_{a,b}^1, \ldots, h_{a,b}^n)(x) \in \pi^{-1}(U_a).$$

Twierdzimy, że istnieje dokładnie jedna topologia, dla której każde k_a jest homeomorfizmem. Rzeczywiście, jest to prawdą na mocy lematu 1. II [WI] i wobec faktu, że ciągłość funktora T zapewnia ciągłość odwzorowania

$$k_\beta^{-1} \circ k_a\colon (U_a \cap U_\beta) \times T(\boldsymbol{R}^{k_1}, \ldots, \boldsymbol{R}^{k_n}) \to (U_a \cap U_\beta) \times T(\boldsymbol{R}^{k_1}, \ldots, \boldsymbol{R}^{k_n}).$$

Zauważmy dalej, że rzutowanie π jest ciągłe, a wprowadzona topologia nie zależy od wyboru pokrycia $(U_a)_{a \in A}$. Odwzorowania k_a realizują warunek lokalnej trywialności w skonstruowanej wiązce $\eta = T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Stosując twierdzenie 1 do funktorów $\oplus$, $\otimes$, Hom, *, Λ^k, otrzymujemy sumę $\xi \oplus \eta$ wiązek liniowych (pokrywającą się ze zdefiniowaną w [WI] sumą Whitneya), iloczyn tensorowy $\xi \otimes \eta$, wiązkę $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ (której włóknami są przestrzenie $\mathrm{Hom}(\xi_x, \eta_x)$), wiązkę dualną ξ^* i k-tą potęgę zewnętrzną $\Lambda^k \xi$. (Warto w tym miejscu zaznaczyć, że wiązki $\Lambda^k \xi$ mają podstawowe znaczenie przy konstrukcji tzw. operacji Adamsa Λ^k, za pomocą których rozstrzygnięte zostały uprzednio wspomniane takie klasyczne problemy, jak klasyfikacja pól wektorowych liniowo niezależnych na sferach, problem istnienia algebr $\boldsymbol{R}^n$ z dzieleniem i wiele innych.)

Z własności iloczynu tensorowego i sumy prostej przestrzeni wektorowych wynikają natychmiast następujące wzory:

$$\xi \oplus \eta \cong \eta \oplus \xi, \quad (\xi \oplus \eta) \oplus \zeta \cong \xi \oplus (\eta \oplus \zeta),$$
$$\xi \otimes \eta \cong \eta \otimes \xi, \quad (\xi \otimes \eta) \otimes \zeta \cong \xi \otimes (\eta \otimes \zeta),$$
$$(\xi \oplus \eta) \otimes \zeta \cong (\xi \otimes \zeta) \oplus (\eta \otimes \zeta).$$

Oznaczmy przez $\mathrm{Vect}_n X$ zbiór wszystkich n-wymiarowych wiązek nad bazą X (rozważanych z dokładnością do izomorfizmu), a przez $\mathrm{Vect}\, X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Vect}_n X$ zbiór wszystkich wiązek liniowych nad X. Bezpośrednią konsekwencją ostatnich formuł jest

WNIOSEK 1. $(\mathrm{Vect}\, X, \oplus, \otimes)$ *jest półpierścieniem abelowym.*

LEMAT 1. *Jeżeli* $f\colon B_1 \to B_2$ *jest odwzorowaniem ciągłym, a* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *wiązkami liniowymi nad bazą* B_2, *to dla dowolnego funktora ciągłego* n *zmiennych* T

$$f^* T(\xi_1, \ldots, \xi_*) \cong T(f^* \xi_1, \ldots, f^* \xi_n).$$

Dowód. Wystarczy sprawdzić prawdziwość ostatniej formuły tylko dla wiązek trywialnych, dla których jest ona jednak oczywista.

W szczególności otrzymujemy jako

WNIOSEK 2.

$$f^*(\xi \oplus \eta) \cong f^*(\xi) \oplus f^*(\eta),$$
$$f^*(\xi \otimes \eta) \cong f^*(\xi) \otimes f^*(\xi),$$
$$f^*(\mathrm{Hom}(\xi, \eta)) \cong \mathrm{Hom}(f^*(\xi), f^*(\eta)).$$

Z dwóch pierwszych formuł wniosku 2 wynika zatem, że odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to Y$ indukuje homomorfizm półpierścieni $f^*\colon \mathrm{Vect}\, Y \ni \xi \to f^* \xi \in \mathrm{Vect}\, X$.

TWIERDZENIE 2. *Przyporządkowanie* $X \rightsquigarrow \mathrm{Vect}\, X$, $f \rightsquigarrow f^*$ *jest funktorem (kontrawariantnym) z kategorii przestrzeni topologicznych w kategorię półpierścieni abelowych.*

Dowód. Z twierdzenia 1 [WI] (jednoznaczność), wynikają natychmiast potrzebne związki $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ oraz $e_X^* = e_{\mathrm{Vect}\, X}$.

III. Przestrzenie sekcji ciągłych, wiązki nad iloczynami kartezjańskimi przestrzeni topologicznych. Oznaczmy przez $\Gamma(\xi)$ przestrzeń wektorową (ciągłych) sekcji wiązki ξ nad bazą B, tj. przestrzeń odwzorowań $\sigma\colon B \to \xi$, dla których $\pi \circ \sigma = e_B$. (Działania dodawania i mnożenia przez skalar są zdefiniowane w $\Gamma(\xi)$ w naturalny sposób.) Dla dalszych rozważań użyteczne będzie wprowadzenie w $\Gamma(\xi)$ topologii podyktowanej przez pewną normę. Wybierzmy metrykę riemannowską $\langle\ \rangle$ na ξ i zdefiniujmy dla sekcji $\sigma\colon B \to \xi$ liczbę

$$\|\sigma\| = \sup\{\sqrt{\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle}\colon x \in B\}.$$

Z własności metryki riemannowskiej wynika natychmiast, że $\|\ \|\colon \Gamma(\xi) \to \boldsymbol{R}$ jest normą w $\Gamma(\xi)$. Przestrzeń ta ma więc strukturę przestrzeni unormowanej (nawet Banacha). Rozważać będziemy również ciągłe A-parametrowe rodziny sekcji (A-przestrzeń topologiczna), tj. odwzorowania ciągłe $\sigma\colon B \times A \to \xi$, które — dla każdego ustalonego elementu

$a \in A$ — są sekcjami wiązki ξ. Przestrzeń $\Gamma(\xi, A)$ A-parametrowych sekcji można również łatwo wyposażyć w strukturę przestrzeni unormowanej, przyjmując

$$\|\sigma\| = \sup\{\sqrt{\langle \sigma(x, a), \sigma(x, a)\rangle} : (x, a) \in B \times A\}.$$

Istnieje ścisły i niezmiernie ważny związek między $\Gamma(\mathrm{Hom}(\xi, \eta))$-przestrzenią ciągłych sekcji wiązki $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ i przestrzenią wektorową $\mathrm{HOM}(\xi, \eta)$-homomorfizmów wiązki ξ w η. (Dla $\xi = \eta$ obie te przestrzenie są algebrami unormowanymi.) Przestrzenie te będziemy identyfikować ze sobą, a kanoniczny izomorfizm liniowy

$$\mathrm{HOM}(\xi, \eta) \ni \varphi \to \{B \ni x \to \varphi \mid \xi_x \in \mathrm{Hom}(\xi, \eta)\} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\xi, \eta))$$

będzie odwzorowaniem identyfikującym.

Zwróćmy uwagę, że $\varphi \in \mathrm{HOM}(\xi, \eta)$ jest izomorfizmem wiązek liniowych ($\varphi \in \mathrm{ISO}(\xi, \eta)$) wtedy i tylko wtedy, jeśli odpowiadająca mu sekcja jest sekcją izomorfizmów, tj. dla dowolnego x z bazy odpowiadająca mu wartość sekcji jest izomorfizmem liniowym $\xi_x \to \eta_x$. Zbiór sekcji izomorfizmów $\Gamma_I(\mathrm{Hom}(\xi, \eta))$ jest podzbiorem otwartym w $\Gamma(\mathrm{Hom}(\xi, \eta))$.

Podobnie rozważać można A-parametrowe rodziny sekcji izomorfizmów i ich zbiór $\Gamma_I(\mathrm{Hom}(\xi, \eta), A)$, otwarty w $\Gamma(\mathrm{Hom}(\xi, \eta), A)$.

Niech ξ będzie wiązką liniową nad bazą B. Dla przestrzeni topologicznej X oznaczmy przez $\xi \times X$ wiązkę liniową nad $B \times X$:

$$\xi \times X = \{E(\xi) \times X, B \times X, \pi \times e_X\}.$$

Zauważmy dalej, że w naturalny sposób można identyfikować przestrzenie wektorowe $\mathrm{HOM}(\xi \times X, \eta \times X)$ i $\Gamma(\mathrm{Hom}(\xi, \eta), X)$ oraz ich podzbiory $\mathrm{ISO}(\xi \times X, \eta \times X)$ i $\Gamma_I(\mathrm{Hom}(\xi, \eta), X)$.

Zdefiniujemy jeszcze dwa ważne pojęcia. Mówimy, że dwa izomorfizmy φ_0 i $\varphi_1 \in \mathrm{ISO}(\xi, \eta)$ są *izohomotopijne*, jeżeli istnieje $[0, 1]$-parametrowa ciągła rodzina izomorfizmów Φ_t: $\xi \times [0, 1] \to \eta$, dla której $\Phi_i = \varphi_i$ ($i = 0, 1$). Relacja izohomotopii jest oczywiście relacją równoważnościową w zbiorze izomorfizmów $\mathrm{ISO}(\xi, \eta)$. (Składowa łukowej spójności izomorfizmu φ w przestrzeni $\mathrm{ISO}(\xi, \eta)$ jest dokładnie zbiorem izomorfizmów izohomotopijnych z φ.) Łatwo sformułować odpowiedni warunek izohomotopijności sekcji izomorfizmów.

Przez sumę prostą $\sigma_1 \oplus \sigma_2$ sekcji (rodziny sekcji) $\sigma_i \in \Gamma(\xi_i)$ ($i = 1, 2$) rozumieć będziemy sekcję (rodzinę sekcji) zdefiniowaną wzorem $(\sigma_1 \oplus \sigma_2)(x) = \sigma_1(x) \oplus \sigma_2(x) \in \xi_1 \oplus \xi_2$. Analogicznie określa się iloczyn tensorowy $\sigma_1 \otimes \sigma_2$.

Zaobserwujmy, że przestrzeń izomorfizmów $\mathrm{ISO}(X \times V)$ wiązki trywialnej $X \times V$ (V — przestrzeń wektorowa) można identyfikować z przestrzenią odwzorowań ciągłych X w $\mathrm{GL}(V) = \{$zbiór izomorfizmów

przestrzeni wektorowej V} (z naturalną topologią), poprzez transformację:

$$\mathrm{ISO}(X\times V)\ni\varphi\to\{X\ni x\to F_x\in \mathrm{GL}(V)\}\in C\big(X,\mathrm{GL}(V)\big),$$

gdzie $F_x = F|\{x\}\times V\to\{x\}\times V$. Transformacja ta indukuje bijekcję między zbiorem izomorfizmów izohomotopijnych $\mathrm{ISO}_h(X\times V)$ a zbiorem klas homotopii odwzorowań $X\to\mathrm{GL}(V)$. (Przestrzeń $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}^n)$ będziemy zapisywać jako $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C},n)$ i identyfikować z grupą topologiczną nieosobliwych macierzy zespolonych n-tego stopnia.)

Twierdzenie 1. *Niech ξ będzie zespoloną wiązką trywialną nad przestrzenią ściągalną. Wtedy dwa dowolne izomorfizmy φ_i: $\xi\to X\times\boldsymbol{C}^n$ $(i=0,1)$ są izohomotopijne.*

Dowód. Wystarczy stwierdzić, że izomorfizm $\Phi=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$: $X\times\boldsymbol{C}^n\to X\times\boldsymbol{C}^n$ jest izohomotopijny z izomorfizmem identycznościowym lub — zgodnie z ostatnimi uwagami — że odwzorowanie

$$(*)\qquad X\ni x\to\Phi_x\in\mathrm{GL}(\boldsymbol{C},n)$$

oraz odwzorowanie $X\to\mathrm{GL}(\boldsymbol{C},n)$ stale równe identyczności w $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C},n)$, są homotopijne. Oczywiście, wobec ściągalności przestrzeni X odwzorowanie (*) jest homotopijne z pewnym odwzorowaniem stałym. Każde dwa odwzorowania stałe w przestrzeni $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C},n)$ są — wobec łukowej spójności tej przestrzeni — homotopijne. Z faktu przechodniości relacji homotopii odwzorowań wynika więc prawdziwość twierdzenia.

Każdy izomorfizm wiązki trywialnej ξ nad bazą X, na standardową wiązkę trywialną $X\times\boldsymbol{C}^n$ nazywamy *trywializacją* tej wiązki. Ostatnie twierdzenie mówi zatem, że dwie dowolne trywializacje wiązki trywialnej nad bazą ściągalną są izohomotopijne.

Podkreślić należy, że wszystkie proste uwagi tego paragrafu mają podstawowe znaczenie dla dalszych rozważań. W przyszłości często będziemy używali opisanych wyżej identyfikacji, bez specjalnego zwracania uwagi na ten fakt.

IV. Sklejanie wiązek liniowych.

Lemat 1 (o rozszerzaniu sekcji). *Niech ξ będzie wiązką liniową nad bazą B, A podzbiorem domkniętym B i σ: $A\to\xi|A$ sekcją wiązki $\xi|A$. Istnieje sekcja $\tilde{\sigma}$: $B\to\xi$, która jest rozszerzeniem sekcji σ, tj. $\tilde{\sigma}|A=\sigma$.*

Dowód. Dla wiązki trywialnej lemat wynika natychmiast z twierdzenia Urysohna o rozszerzaniu funkcji.

Niech $(U_\iota)_{\iota\in I}$ będzie pokryciem otwartym B, dla którego wiązki $\xi|U_\iota$ są trywialne. Niech $\{\varphi_\iota\}_{\iota\in I}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w pokrycie $(U_\iota)_{\iota\in I}$, a $\tilde{\sigma}_\iota$ rozszerzeniem $\sigma|U_\iota\cap A$ na U_ι. Wtedy $\tilde{\sigma}=\sum_{\iota\in I}\varphi_\iota\sigma_\iota$ jest rozszerzeniem sekcji σ na przestrzeń B.

WNIOSEK 1. *Niech ξ i η będą wiązkami liniowymi nad bazą B, A domkniętym podzbiorem B, a $\varphi\colon \xi|A \to \eta|A$ izomorfizmem restrykcji wiązek. Wtedy istnieje otoczenie U zbioru A i rozszerzenie φ do izomorfizmu $\xi|U \to \eta|U$.*

Dowód. Zgodnie z identyfikacją opisaną w paragrafie III traktujemy φ jako sekcję wiązki $\operatorname{Hom}(\xi|A, \eta|A) \cong \operatorname{Hom}(\xi, \eta)|A$. Sekcję tę możemy rozszerzyć na całą przestrzeń B, otrzymując homomorfizm $\tilde{\varphi}\colon \xi \to \eta$ rozszerzający izomorfizm φ. Ponieważ zbiór

$$U = \{x \in B\colon \tilde{\varphi}|\xi_x \text{ jest izomorfizmem}\},$$

jest otwarty i zawiera A, więc teza jest udowodniona.

Operacja sklejania wiązek. Załóżmy, że przestrzeń B jest sumą podzbiorów domkniętych B_1 i B_2, $A = B_1 \cap B_2$ oraz $\xi_i = (E(\xi_i), \pi_i, B_i)$ są wiązkami liniowymi nad B_i $(i = 1, 2)$. Niech $\varphi\colon \xi_1|A \to \xi_2|A$ będzie izomorfizmem wiązek. W zbiorze $E(\xi_1) \cup E(\xi_2)$ zdefiniujmy następującą relację równoważności $\equiv$: elementy e i $e' \in E(\xi_1) \cup E(\xi_2)$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, jeśli są identyczne, bądź $e = \varphi(e')$, bądź $e' = \varphi(e)$. Niech

$$E(\xi_1) \underset{\varphi}{\cup} E(\xi_2) = {}^{E(\xi_1)\cup E(\xi_2)}/_{\equiv}$$

będzie przestrzenią ilorazową wyposażoną w topologię ilorazową. Twierdzimy, że $\xi_1 \underset{\varphi}{\cup} \xi_2 = \left(E(\xi_1) \underset{\varphi}{\cup} E(\xi_2), \pi_1 \underset{\varphi}{\cup} \pi_2, B\right)$ jest wiązką liniową nad B. Zaobserwujmy, że włókna $(\pi_1 \underset{\varphi}{\cup} \pi_2)^{-1}(x)$ mają naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. Wystarczy sprawdzić tylko warunek lokalnej trywialności i to jedynie w punktach zbioru A, ponieważ $E(\xi_1) \underset{\varphi}{\cup} E(\xi_2)|B \setminus A$ jest sumą rozłączną przestrzeni $\left(E(\xi_1)|B_1 \setminus A\right) \cup E(\xi_2)|B_2 \setminus A$, w których warunek ten jest oczywiście spełniony.

Niech $a \in A$, $\xi_1|U_1$ będzie wiązką trywialną nad otoczeniem domkniętym U_1 punktu a w X_1, a

$$\psi_1\colon \xi_1|U_1 \to U_1 \times \boldsymbol{C}^n$$

izomorfizmem wiązek. Niech $\tilde{\psi}_1\colon \xi_1|U_1 \cap A \to (U_1 \cap A) \times \boldsymbol{C}^n$ będzie restrykcją ψ_1 do $E(\xi_1|U_1 \cap A)$. Zdefiniujmy izomorfizm

$$\tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}_1 \circ \varphi|E(\xi_2|A \cap U_1)\colon \xi_2|U_1 \cap A \to (U_1 \cap A) \times \boldsymbol{C}^n$$

i przedłużmy go do izomorfizmu $\psi_2\colon \xi_2|U_2 \to U_2 \times \boldsymbol{C}^n$, gdzie U_2 jest otoczeniem zbioru $A \cap U_1$ w X_2 (wniosek 1). Zauważmy, że izomorfizmy ψ_1 i ψ_2 przyjmują równe wartości na identyfikowanych punktach z $(\xi_1|U_1 \cap A) \cup (\xi_2|U_2 \cap A)$, indukują więc izomorfizm $\psi_1 \underset{\varphi}{\cup} \psi_2\colon \xi_1 \underset{\varphi}{\cup} \xi_2|U_1 \cup U_2 \to (U_1 \cup U_2) \times \boldsymbol{C}^n$ realizujący warunek lokalnej trywialności dla $\xi_1 \underset{\varphi}{\cup} \xi_2$ w otoczeniu $U_1 \cup U_2$.

Zanotujmy pewne proste fakty wynikające natychmiast z twierdzenia o wiązkach indukowanych przez odwzorowania homotopijne (twierdzenie 5 [WI]):

WNIOSEK 2. (a) *Niech η będzie wiązką nad $B\times[0,1]$. Wiązki $\eta|B\times\{0\}$ i $\eta|B\times\{1\}$ (traktowane jako wiązki nad B) są izomorficzne.*

(b) *Jeżeli B jest przestrzenią ściągalną, to każda wiązka η nad bazą $A\times B$ jest wiązką postaci $\xi\times B$, gdzie ξ jest odpowiednio dobraną wiązką nad A.*

Pierwszy z tych faktów posłuży do dowodu ważnego lematu.

LEMAT 2. *Jeżeli izomorfizmy φ_i: $\xi|B_1\cap B_2\to\eta|B_1\cap B_2$ $(i=0,1)$ są izohomotopijne, to wiązki $\xi\underset{\varphi_1}{\cup}\eta$ i $\xi\underset{\varphi_2}{\cup}\eta$ są izomorficzne.*

Dowód. Homotopia Φ_t łącząca φ_0 i φ_1 indukuje izomorfizm wiązek $(\xi|A)\times I$ i $(\eta|A)\times I$ $(A=B_1\cap B_2, I=[0,1])$:

$$\Phi\colon E(\xi|A)\times I\ni(x,t)\to(\Phi_t(x),t)\in E(\eta|A)\times I.$$

Utwórzmy wiązkę $(\xi\times I)\underset{\Phi}{\cup}(\eta\times I)$ nad bazą $B\times I$. Z wniosku 2 (a) wynika, że wiązki $(\xi\times I)\underset{\Phi}{\cup}(\eta\times I)|B\times\{0\}$ oraz $(\xi\times I)\underset{\Phi}{\cup}(\eta\times I)|B\times\{1\}$ są izomorficzne. Wobec oczywistego izomorfizmu

$$(\xi\times I)\underset{\Phi}{\cup}(\eta\times I)|B\times\{i\}\cong\xi\underset{\varphi_i}{\cup}\eta\qquad(i=0,1)$$

otrzymujemy prawdziwość tezy.

Kilka dalszych użytecznych własności operacji sklejania wiązek ujętych jest w lemacie 3, którego dowód trywialny pomijamy.

LEMAT 3. *Niech B będzie sumą zbiorów domkniętych B_1 i B_2, $A=B_1\cap B_2$. Jeżeli ξ_i i η_i są wiązkami nad B_i $(i=1,2)$, a $\varphi_1\colon\xi_1|A\to\xi_2|A$, $\varphi_2\colon\eta_1|A\to\eta_2|A$ izomorfizmami restrykcji wiązek, to*

(a) $(\xi_1\underset{\varphi_1}{\cup}\xi_2)\oplus(\eta_1\underset{\varphi_2}{\cup}\eta_2)\cong(\xi_1\oplus\eta_1)\underset{\varphi_1\oplus\varphi_2}{\cup}(\xi_2\oplus\eta_2)$,

(b) $(\xi_1\underset{\varphi_1}{\cup}\xi_2)\otimes(\eta_1\underset{\varphi_1}{\cup}\eta_2)\cong(\xi_1\otimes\eta_1)\underset{\varphi_1\otimes\varphi_2}{\cup}(\xi_2\otimes\eta_2)$,

(c) *istnienie izomorfizmów $\beta_i\colon\xi_i\to\eta_i$ przemiennych z izomorfizmami $\varphi_i(\varphi_2\circ\beta_1=\beta_2\circ\varphi_1)$ implikuje, że wiązki $\xi_1\underset{\varphi_1}{\cup}\xi_2$ i $\eta_1\underset{\varphi_2}{\cup}\eta_2$ są izomorficzne,*

(d) *dla $\xi_i=\xi|B_i$ wiązki $\xi_1\underset{e_{E(\xi|A)}}{\cup}\xi_2$ i ξ są izomorficzne.*

W dalszych paragrafach rozważać będziemy wyłącznie wiązki liniowe zespolone (nad bazami zwartymi).

V. Homotopijna interpretacja $\mathrm{Vect}_n(\Sigma B)$. W zbiorze odwzorowań ciągłych przestrzeni X w Y relacja homotopijności dwóch odwzorowań jest — jak łatwo sprawdzić — relacją równoważnościową (zgodną z operacją składania odwzorowań). Zbiór klas homotopii oznaczmy przez

$[X, Y]$, a klasę homotopii odwzorowania f przez $[f]$. W naszych rozważaniach szczególnie ważny będzie zbiór $[X, G]$, gdzie G jest łukowo spójną grupą topologiczną. Zbiór ten można w naturalny sposób wyposażyć w strukturę grupy, definiując mnożenie wzorem $[f]\cdot[g] = [f\cdot g]$. Dla $X = S_n$ (sfera n-wymiarowa) grupę $[S_n, G]$ oznacza się przez $\pi_n(G)$; jest to tzw. n-ta grupa homotopii przestrzeni G. (Jak wiadomo, grupy homotopii — nieco inną metodą — definiuje się dla dowolnych przestrzeni topologicznych. Efekt tej konstrukcji pokrywa się jednak w wypadku łukowo spójnych grup topologicznych z wyżej podanym.)

W dalszych rozważaniach użyteczna będzie następująca konstrukcja. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $I = [0, 1]$. *Stożkiem CX nad przestrzenią X* nazywamy przestrzeń ilorazową przestrzeni $X\times I$ przez relację równoważności identyfikującą wszystkie elementy zbioru $X\times\{1\}$. W zbiorze ilorazowym $CX = X\times I/X\times\{1\}$ wprowadzimy topologię ilorazową. Zbiór $X\times\{0\}$ nazywamy podstawą stożka, a klasę elementów z $X\times\{1\}$ jego wierzchołkiem.

Lemat 1. *Stożek CX nad dowolną przestrzenią topologiczną X jest przestrzenią ściągalną.*

Dowód. Odwzorowanie ciągłe

$$CX\times I \ni \big(\overline{(x,t)}, u\big) \to \overline{\big(x, 1-(1-u)(1-t)\big)} \in CX$$

(gdzie $\overline{(x,t)}$ jest klasą elementu $(x,t)\in X\times I$) realizuje homotopię między identycznością na CX a odwzorowaniem stałym na wierzchołek stożka.

Identyfikując podstawy stożków $C^+X = X\times I/X\times\{1\}$ oraz $C^-X = X\times[-1,0]/X\times\{-1\}$ otrzymujemy nową przestrzeń topologiczną ΣX, zwaną *podniesieniem przestrzeni X*. Dla przestrzeni topologicznej X z wyróżnionym punktem x_0 definiuje się również przestrzeń $SX = X\times[-1,1]/X\times\{-1,1\}\cup\{x_0\}\times[-1,1]$ (tzw. zredukowane podniesienie przestrzeni X).

Podniesienie ΣS_n (jak również zredukowane podniesienie SS_n), sfery n-wymiarowej, jest przestrzenią homeomorficzną ze sferą $n+1$ wymiarową S_{n+1}.

Przypominamy, że przez $\mathrm{Vect}_n\Sigma X$ oznaczamy zbiór n-wymiarowych wiązek zespolonych nad podniesieniem ΣX przestrzeni X. Interesującej interpretacji homotopijnej tego zbioru dostarcza następujące

Twierdzenie 1. *Istnieje naturalna bijekcja zbioru $\mathrm{Vect}_n\Sigma X$ na zbiór $[X, \mathrm{GL}(C, n)]$.*

Dowód. Zgodnie z końcowymi uwagami paragrafu III wystarczy stwierdzić istnienie naturalnej bijekcji zbioru $\mathrm{Vect}_n\Sigma X$ na zbiór $\mathrm{ISO}_h(X\times C^n)$, klas izomorfizmów izohomotopijnych. Niech $\xi\in\mathrm{Vect}_n\Sigma X$. Ściągalność przestrzeni C^+X i C^-X implikuje trywialność wiązek $\xi_+ = \xi|C^+X$ i $\xi_- = \xi|C^-X$. Ponieważ każde dwie trywializacje wiązek

ξ_+ i ξ_- są izohomotopijne (twierdzenie 1. III), więc przyporządkowanie

$$(*) \qquad \mathrm{Vect}_n \Sigma X \ni \xi \to [(a^- | X \times \boldsymbol{C}^n) \circ (a^+ | X \times \boldsymbol{C}^n)^{-1}] \in \mathrm{ISO}_h(X \times \boldsymbol{C}^n),$$

gdzie a^+ i a^- są dowolnie wybranymi trywializacjami — odpowiednio ξ_+ i ξ_-, jest dobrze określone.

Przyporządkowanie odwrotne uzyskujemy za pomocą operacji sklejania. Niech $\tau = \Sigma X \times \boldsymbol{C}^n$ będzie wiązką trywialną nad ΣX, $\tau_+ = \tau | C^+ X$, $\tau_- = \tau | C^- X$ i niech $[\Phi]$ będzie klasą izohomotopii elementu $\Phi \in \mathrm{ISO}(X \times \boldsymbol{C}^n)$. Wtedy odwzorowanie

$$\mathrm{ISO}_h(X \times \boldsymbol{C}^n) \ni [\Phi] \to \tau_+ \underset{\Phi}{\cup} \tau_- \in \mathrm{Vect}_n \Sigma X$$

jest dobrze określone (lemat 2. IV) i odwrotne względem odwzorowania (*).

Łatwo teraz ustalić bijekcję między zbiorem $[X, \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)]$ a $\mathrm{Vect}_n \Sigma X$:

$$\psi_n\colon\ [X, \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)] \ni [\varphi] \to \tau_+ \underset{\varphi}{\cup} \tau_- \in \mathrm{Vect}_n \Sigma X.$$

Wniosek 1. *Istnieje naturalna bijekcja k-wymiarowej grupy homotopii $\pi_k(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n))$ na zbiór* $\mathrm{Vect}_n(S_{k+1})$.

VI. Systemy proste. Funktor K. Grupy homotopii pełnej grupy liniowej. Niech $\{X_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ będzie rodziną podzbiorów (niepustych), a $\{f_{n,k}\colon X_n \to X_k\}$ rodziną odwzorowań (określonych dla $k \geqslant n$). Mówimy, że układ $\{X_n, f_{n,k}\}$ jest *systemem prostym* zbiorów, jeśli dla dowolnych n, k, m naturalnych ($n \leqslant k \leqslant m$) spełniony jest warunek $f_{k,m} \circ f_{n,k} = f_{n,m}$. Interesujący jest przypadek systemu prostego, w którym zbiory X_n i odwzorowania $f_{n,k}$ są odpowiednio obiektami i morfizmami ustalonej kategorii. W szczególności rozważać będziemy kategorie półgrup, grup, przestrzeni topologicznych i grup topologicznych. Ze szczególnie nieskomplikowanym przypadkiem systemu prostego mamy do czynienia wówczas, jeśli $\{X_n\}$ jest rosnącą rodziną podzbiorów ustalonego zbioru, a każde $f_{n,k}$ odwzorowaniem inkluzji. System taki oznaczamy przez $\{X_1 \subset X_2 \subset \ldots\}$. W zbiorze $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} X_n$ zdefiniujmy relację równoważności: elementy $x \in X_n$ i $y \in X_k$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, jeśli $f_{n,m}(x) = f_{k,m}(y)$ dla pewnego $m \in \boldsymbol{N}$. Przestrzeń ilorazowa nosi nazwę *granicy prostej systemu* i oznaczana jest przez $\lim_{n \to \infty} X_n$.

Granica systemu prostego półgrup (grup, półpierścieni) ma naturalną strukturę półgrupy (grupy, półpierścienia). Dla $\alpha, \beta \in \lim_{n \to \infty} X_n$ określamy iloczyn $\alpha \cdot \beta$ jako równy klasie równoważności iloczynu reprezentantów α i β, należących do tego samego zbioru X_n (istnienie takiego zbioru wynika z definicji systemu prostego). Stwierdza się natychmiast poprawność takiej definicji.

Podobnie granica systemu prostego przestrzeni topologicznych ma naturalną strukturę topologiczną. Rozważymy jedynie istotny dla nas przypadek systemu $\{X_1 \subset X_2 \subset \ldots\}$. Podzbiorem otwartym w zbiorze $X = \lim_{n\to\infty} X_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n$ będzie z definicji zbiór, którego przecięcie z każdą przestrzenią topologiczną X_n jest otwarte w X_n.

PRZYKŁAD 1. Pełna grupa liniowa $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})$.

Dla $n, k \in \mathbf{N}$ $(n \leqslant k)$ zdefiniujmy ciągły monomorfizm grup liniowych

$$f_{n,k}\colon \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n) \ni A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, k)$$

(I_{k-n} jest macierzą jednostkową rzędu $k-n$). Poprzez ten monomorfizm identyfikujemy $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)$ z jej obrazem w $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, k)$. Oczywiście $\{\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n), f_{n,k}\}$ jest systemem prostym grup topologicznych; jego granicę $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)$ nazywamy *pełną grupą liniową*. Z wyżej przytoczonych uwag wynika, że $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})$ jest grupą topologiczną (sprawdzić należy jedynie ciągłość operacji mnożenia).

PRZYKŁAD 2. Grupa $\tilde{K}(X)$.

Rozważmy półgrupę $(\mathrm{Vect}X, \oplus)$ zespolonych wiązek liniowych nad przestrzenią zwartą X. Dla $n, k \in \mathbf{N}$ $(n \leqslant k)$ określamy odwzorowanie

$$g_{n,k}\colon \mathrm{Vect}_n X \ni \xi \to \xi \oplus \tau^{k-n} \in \mathrm{Vect}_k X$$

(zwróćmy uwagę, że $g_{n,k}$ na ogół nie są ani surjektywne ani injektywne). Widać natychmiast, że $\{\mathrm{Vect}_n X, g_{n,k}\}$ jest systemem prostym zbiorów.

Niech

$$\tilde{K}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Vect}_n X.$$

Klasę równoważności wiązki ξ w $\tilde{K}(X)$ oznaczać będziemy przez $\bar{\xi}$. Zauważmy, że wiązki $\xi \in \mathrm{Vect}_n X$ i $\eta \in \mathrm{Vect}_m X$ wyznaczają tę samą klasę równoważności w $\tilde{K}(X)$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\xi \oplus \tau^k \cong \eta \oplus \tau^p$ dla odpowiednich k i p naturalnych. Wiązki spełniające ostatni warunek nazywamy s-równoważnymi. Innymi słowy $\tilde{K}(X)$ jest przestrzenią ilorazową przestrzeni $\mathrm{Vect}X$, przez relację s-równoważności. Działanie $\oplus$ w półgrupie $\mathrm{Vect}X$ jest zgodne z tą relacją i indukuje w przestrzeni ilorazowej $\tilde{K}(X)$ strukturę półgrupy (działanie $\otimes$ nie jest na ogół zgodne z tą relacją). Zerem w przestrzeni $\tilde{K}(X)$ jest klasa równoważności dowolnej wiązki trywialnej nad X. Co więcej, $\tilde{K}(X)$ jest grupą względem indukowanego działania oznaczonego w dalszym ciągu symbolem $+$. Rzeczywiście, niech $\bar{\eta}$ będzie dowolnym elementem z $\tilde{K}(X)$ i niech ξ będzie wiązką liniową nad X, dla której suma Whitneya $\xi \oplus \eta$ jest trywialna (wniosek 1. I). Oczywiście $\bar{\xi} + \bar{\eta}$ jest elementem zerowym w $\tilde{K}(X)$.

Niech f^*: $\mathrm{Vect}\, Y \to \mathrm{Vect}\, X$ będzie homomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie ciągłe f: $X \to Y$. Homomorfizm ten indukuje z kolei homomorfizm grup

$$f^*\colon \tilde{K}(Y) \ni \bar{\eta} \to \overline{f^*\eta} \in \tilde{K}(X).$$

Podobnie jak w przypadku funktora Vect, jeśli odwzorowania f i g są homotopijne, to $f^* = g^*$; jeśli f jest równoważnością homotopijną, to homomorfizm indukowany jest izomorfizmem. Funktor $\tilde{K}$ działa więc z dokładnością do typu homotopii (grupy $\tilde{K}$ przestrzeni o tym samym typie homotopii są izomorficzne).

Przykład 3. Granica prosta grup $[X, \mathrm{GL}(C, n)]$.

Odwzorowania

$$\tilde{f}_{n,k}\colon [X, \mathrm{GL}(C, n)] \ni [\varphi] \to [f_{n,k} \circ \varphi] \in [X, \mathrm{GL}(C, k)]$$

definiują system prosty grup $\{[X, \mathrm{GL}(C, n)], \tilde{f}_{n,k}\}$. Łatwo pokazać, że dla przestrzeni zwartej X granica $\lim\limits_{n\to\infty} [X, \mathrm{GL}(C, n)]$ tego systemu jest grupą izomorficzną z $[X, \lim \mathrm{GL}(C, n)] = [X, \mathrm{GL}(C)]$. W szczególności $\pi_k(\mathrm{GL}(C)) = \lim\limits_{n\to\infty} [S_k, \mathrm{GL}(C, n)]$. Istnieje ścisły związek między grupami $[X, \mathrm{GL}(C)]$ i $\tilde{K}(\Sigma X)$. Zdefiniujmy następujący nieskończony diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
[X, \mathrm{GL}(C,0)] & \xrightarrow{\tilde{f}_{0,1}} & [X, \mathrm{GL}(C,1)] & \xrightarrow{\tilde{f}_{1,2}} & [X, \mathrm{GL}(C,2)] & \xrightarrow{\tilde{f}_{2,3}} & \cdots \to [X, \mathrm{GL}(C,n)] & \xrightarrow{\tilde{f}_{n,m+1}} & \cdots \\
\downarrow \psi_0 & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & & & \downarrow \psi_n & & \\
\mathrm{Vect}_0 \Sigma X & \xrightarrow{g_{0,1}} & \mathrm{Vect}_1 \Sigma X & \xrightarrow{g_{1,2}} & \mathrm{Vect}_2 \Sigma X & \xrightarrow{g_{2,3}} & \cdots \to \mathrm{Vect}_n \Sigma X & \xrightarrow{g_{n,n+1}} & \cdots & &
\end{array}$$

gdzie $\tilde{f}_{n,m+1}$ i $g_{n,n+1}$ są zdefiniowane w przykładach 3 i 2, a ψ_n są bijekcjami określonymi w paragrafie III (twierdzenie 1) (Diagram ten ustala — w naturalnym znaczeniu tego zwrotu — izomorfizm dwu systemów prostych $\{[X, \mathrm{GL}(C, n)], \tilde{f}_{n,k}\}$ i $\{\mathrm{Vect}_n \Sigma X, g_{n,k}\}$ rozważanych jako systemy zbiorów).

Określamy odwzorowanie

$$\psi\colon [X, \mathrm{GL}(C)] \to \tilde{K}(\Sigma X)$$

wzorem $\psi(\{\alpha\}) = \overline{\psi_n(\alpha)}$, gdzie $\{\alpha\} \in [X, \mathrm{GL}(C)]$ jest klasą elementu $\alpha \in [X, \mathrm{GL}(C, n)]$. Przemienność diagramu zapewnia poprawność tego określenia, a bijektywność odwzorowań ψ_n implikuje bijektywność ψ. Stwierdzimy, że odwzorowanie ψ jest izomorfizmem grup.

Niech $\{\alpha\}$ i $\{\beta\}$ będą klasami równoważności w $[X, \mathrm{GL}(C)]$ elementów α i $\beta \in [X, \mathrm{GL}(C, n)]$ i niech $\alpha = [f]$ oraz $\beta = [g]$. Elementy f i g są zatem odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni X w grupę topologiczną $\mathrm{GL}(C, n)$

macierzy nieosobliwych n-tego rzędu. Iloczyn ich $f \cdot g$ jest odwzorowaniem tego samego typu. Pokażemy, że $\psi(\{\alpha\}\cdot\{\beta\}) = \psi(\{\alpha\})+\psi(\{\beta\})$. Obliczmy

$$\psi(\{\alpha\}\cdot\{\beta\}) = \psi(\{\alpha\cdot\beta\}) = \psi(\{[f\cdot g]\}) = \overline{\psi_n([fg])} = \overline{\tau^n_+ \underset{f\cdot g}{\cup} \tau^n_-}$$

oraz

$$\psi(\{\alpha\})+\psi(\{\beta\}) = \psi(\{[f]\})+\psi(\{[g]\}) = \overline{\psi_n([f])}+\overline{\psi_n([g])} =$$
$$= \overline{(\tau^n_+ \underset{f}{\cup} \tau^n_-)}+\overline{(\tau^n_+ \underset{g}{\cup} \tau^n_-)} = \overline{\tau^{2n}_+ \underset{f\oplus g}{\cup} \tau^{2n}_-}.$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy stwierdzić, że wiązki $\tau^n_+ \underset{f\cdot g}{\cup} \tau^n_-$ oraz $\tau^{2n}_+ \underset{f\oplus g}{\cup} \tau^{2n}_-$ są s-równoważne.

Niech $1\colon X \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)$ będzie odwzorowaniem przyporządkowującym punktom z przestrzeni X macierz jednostkową I. Sumy proste odwzorowań

$$f\cdot g\oplus 1\colon X \ni x \to \left(\begin{array}{c|c} f(x)g(x) & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, 2n),$$

$$f\oplus g\colon X \ni x \to \left(\begin{array}{c|c} f(x) & 0 \\ \hline 0 & g(x) \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, 2n)$$

są homotopijne. Homotopia dana jest formułą:

$$X\times[0,1] \ni (x,t) \to$$

$$\left(\begin{array}{c|c} f(x)\cos^2\frac{1}{2}\pi t+f(x)g(x)\sin^2\frac{1}{2}\pi t & \big(f(x)g(x)-f(x)\big)\sin\frac{1}{2}\pi t\cos\frac{1}{2}\pi t \\ \hline \big(g(x)-I\big)\sin\frac{1}{2}\pi t\cos\frac{1}{2}\pi t & I\sin^2\frac{1}{2}\pi t+g(x)\cos^2\frac{1}{2}\pi t \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, 2n).$$

Implikuje to fakt (lemat 2. IV), że wiązki $\tau^{2n}_+ \underset{f\oplus g}{\cup} \tau^{2n}_-$ i $\tau^{2n}_+ \underset{fg\oplus 1}{\cup} \tau^{2n}_- \cong$ $\cong(\tau^n_+ \underset{fg}{\cup} \tau^n_-)\oplus\tau^n$ są izomorficzne, a więc $\tau^{2n}_+ \underset{f\oplus g}{\cup} \tau^{2n}_-$ i $\tau^n_+ \underset{fg}{\cup} \tau^n_-$ są s-równoważne.

Udowodniliśmy więc następujące

TWIERDZENIE 1. *Grupy* $[X, \mathrm{GL}(\boldsymbol{C})]$ *i* $\tilde{K}(\Sigma X)$ *są izomorficzne.*

W szczególności dla grup homotopii grupy liniowej, wobec faktu, że $\Sigma S_n = S_{n+1}$, mamy następujący ważny:

WNIOSEK 1. *Grupa* $\tilde{K}(S_{n+1})$ *jest izomorficzna z* n*-tą grupą homotopii* $\pi_n\big(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})\big)$ *pełnej grupy liniowej* $(n = 0, 1, \ldots)$.

Później wyliczymy grupy $\tilde{K}(S_{n+1})$, a więc tym samym i $\pi_n\big(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})\big)$. Potrzebne nam będzie jednak następujące twierdzenie o strukturze grupy $\pi_1\big(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})\big)$, którego elementarny dowód znajduje się w monografii Chevalleya [15]:

TWIERDZENIE 2. *Grupa* $\pi_1\big(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})\big)$ *jest izomorficzna z addytywną grupą liczb całkowitych.*

Ściślej, Chevalley podaje dowód faktu, że dla dowolnego n naturalnego $\pi_1\big(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)\big) = \boldsymbol{Z}$. Wobec wyżej przytoczonych uwag o systemach prostych implikuje to jednak, że $\pi_1\big(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})\big) = \boldsymbol{Z}$.

Wniosek 2. *Grupa* $\tilde{K}(S_2)$ *jest izomorficzna z addytywną grupą liczb całkowitych* $\boldsymbol{Z}$.

Jak już wspominaliśmy, grupa topologiczna $\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)$ jest łukowo spójna. Implikuje to fakt, że zerowa grupa homotopii $\pi_0(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)) = [S_0, \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)]$ jest grupą trywialną. Wobec bijektywności zbiorów $[S_0, \mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, n)]$ i $\mathrm{Vect}_n(\Sigma S_0) = \mathrm{Vect}_n S_1$ jedynymi wiązkami zespolonymi nad okręgiem S_1 są wiązki trywialne. Oznacza to jednak, że

Wniosek 3. *Grupa* $\tilde{K}(S_1)$ *jest trywialna.*

Oczywiście grupa $\tilde{K}(X)$ dowolnej przestrzeni ściągalnej jest trywialna.

Na zakończenie tego paragrafu warto przytoczyć następującą wiadomość: stosunkowo prosto dowodzi się (np. [21]), że $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, k)) = \pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}))$ dla wszystkich $k \geqslant (n+1)/2$. Wyjaśniając strukturę grup $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}))$ otrzymuje się zatem natychmiast informacje o grupach $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, k))$ $(k \geqslant (n+1)/2)$. Należy podkreślić, że struktura grup $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, k))$ dla wartości $k < (n+1)/2$ jest na ogół nie znana. Z drugiej strony jednak dla wielu rozważań teoretycznych (w szczególności w twierdzeniu o indeksie operatorów pseudoeliptycznych) znajomość grup $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}))$ (a więc i $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}, k))$, $k \geqslant (n+1)/2$) jest zupełnie wystarczająca.

VII. Grupa i pierścień Grothendiecka. Funktor K. Rozważmy kategorię, której obiektami są półgrupy abelowe mające element neutralny (zero), a morfizmami homomorfizmy półgrup.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej półgrupy abelowej* A, *mającej element zerowy, istnieje grupa abelowa* $K(A)$ *i homomorfizm* $[\ ]\colon A \to K(A)$ *mające następującą własność uniwersalności: Dla każdego homomorfizmu* $\alpha\colon A \to B$, *półgrupy* A *w grupę abelową* B *istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup* $\bar{\alpha}\colon K(A) \to B$, *dla którego* $\bar{\alpha} \circ [\ ] = \alpha$.

Własność uniwersalności wyznacza $K(A)$ *jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu grup.*

Dowód. Kwestia jednoznaczności grupy $K(A)$ jest trywialna.

Istnienie. Mówimy, że dwa elementy (a, b) i (a', b') zbioru $A \times A$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieją elementy x i $y \in A$, dla których $(a+x, b+x) = (a'+y, b'+y)$. Relacja ta jest, jak łatwo widać, zgodna z działaniem dodawania w półgrupie $A \times A$. Definiujemy $K(A)$ jako półgrupę ilorazową półgrupy $A \times A$ przez tę relację. Oznaczmy przez $\varkappa\colon A \times A \to K(A)$ epimorfizm kanoniczny. Elementem odwrotnym względem elementu $\varkappa((a, b))$ jest element $\varkappa((b, a))$. Niech $j\colon A \ni a \to (a, 0) \in A \times A$ będzie naturalnym homomorfizmem zanurzającym, a $[\ ] = \varkappa \circ j$. Sprawdzimy własność uniwersalności dla pary $(K(A), [\ ])$. Zauważmy najpierw, że każdy element q grupy $K(A)$ jest postaci $[a]-[b]$ dla odpowiednich a i b z A. Rzeczywiście,

$$q = \varkappa((a, b)) = \varkappa((a, 0)+(0, b)) = \varkappa((a, 0))-\varkappa((b, 0)) = [a]-[b].$$

Elementy $[a]$ $(a \in A)$ generują zatem grupę $K(A)$.

Niech $\alpha\colon A \to B$ będzie homomorfizmem A w grupę B. Jeśli istnieje homomorfizm $\bar{\alpha}$ spełniający warunek $\bar{\alpha} \circ [\ ] = \alpha$, to $\bar{\alpha}([a]) = \alpha(a)$. Łatwo sprawdzić, że kładąc $\bar{\alpha}([a]-[b]) = \alpha(a)-\alpha(b)$ otrzymujemy poprawnie określony homomorfizm, spełniający żądaną własność.

Twierdzenie powyższe pozostaje prawdziwe przy formalnej zamianie terminów półgrupa i grupa terminami półpierścień i pierścień. Dowód przebiega bez zmian (mnożenie w półpierścieniu A indukuje działanie mnożenia w $K(A)$).

Dowolny homomorfizm półgrup (półpierścieni) $f\colon A_1 \to A_2$ indukuje jedyny homomorfizm grup (pierścieni) $\bar{f}\colon K(A_1) \to K(A_2)$, dla którego diagram

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \\ [\,]\downarrow & & \downarrow[\,] \\ K(A_1) & \xrightarrow{\bar{f}} & K(A_2) \end{array}$$

jest przemienny.

Zauważmy, że przyporządkowanie $A \rightsquigarrow K(A)$, $f \rightsquigarrow \bar{f}$ definiuje funktor $\mathscr{F}$ z kategorii półgrup (półpierścieni) abelowych w kategorię grup (pierścieni) abelowych.

Opisana wyżej grupa (pierścień) $K(A)$ nosi nazwę *grupy* (*pierścienia*) *Grothendiecka.*

Oznaczmy przez $K(X) = K(\mathrm{Vect}\, X)$ pierścień Grothendiecka półpierścienia $\mathrm{Vect}\, X$, zespolonych wiązek liniowych nad zwartą bazą X. Elementy pierścienia $K(X)$ nazywamy często *wiązkami wirtualnymi.* Zauważmy, że odwzorowanie ciągłe przestrzeni topologicznej $f\colon X \to Y$ indukujące homomorfizm półpierścieni $f^*\colon \mathrm{Vect}\, Y \to \mathrm{Vect}\, X$ indukuje jednocześnie homomorfizm pierścieni (oznaczamy dalej tym samym symbolem) $f^*\colon K(Y) \to K(X)$ $(f^*([\eta]) = [f^*\eta])$. Z poprzednio podanych własności funktora Vect wynika natychmiast

Wniosek 1. (a) *Jeżeli odwzorowania* $f, g\colon X \to Y$ *są homotopijne, to homomorfizmy* $f^*, g^*\colon K(Y) \to K(X)$ *są równe.*

(b) *Jeżeli* $f\colon X \to Y$ *jest równoważnością homotopijną, to* $f^*\colon K(Y) \to K(X)$ *jest izomorfizmem.*

Oczywiście przyporządkowanie $X \rightsquigarrow K(X)$ i $f \rightsquigarrow f^*$, z kategorii zwartych przestrzeni topologicznych w kategorię pierścieni abelowych jest funktorem kontrawariantnym (jako złożenie funktora Vect z ostatnio zdefiniowanym funktorem $\mathscr{F}$) tzw. *K-funktorem* (zwanym niekiedy funktorem Atiyah–Hirzebruch–Grothendiecka lub funktorem Grothendiecka).

Badanie własności funktora K jest przedmiotem K-teorii. (Obok zdefiniowanego wyżej funktora K rozważa się inny, nie mniej ważny, KO-funktor, który jest efektem zastosowania konstrukcji Grothendiecka do półpierścienia rzeczywistych wiązek liniowych $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} X$. Teoria KO-funktora jest znacznie trudniejsza.)

Oznaczmy przez $[\eta]$ obraz wiązki $\eta \in \mathrm{Vect}X$ przez homomorfizm $[\ ]$: $\mathrm{Vect}X \to K(X)$.

LEMAT 1. (a) *Każdy element pierścienia* $K(X)$ *jest postaci* $[\xi]-[\eta]$.

(b) $[\xi] = [\eta]$ *wtedy i tylko wtedy, jeżeli* $\xi \oplus \tau \cong \eta \oplus \tau$ *dla pewnej wiązki trywialnej nad* X. (Wynika stąd, że wiązki ξ i η mają wtedy ten sam wymiar.)

Dowód. Teza (a) wynika z dowodu twierdzenia 1. VII. (b) Przyjmijmy oznaczenia stosowane w dowodzie twierdzenia 1. VII ($A = \mathrm{Vect}X$).

Równość $[\xi] = [\eta]$ implikuje równość $\varkappa((\xi, 0)) = \varkappa((\eta, 0))$, czyli równoważność elementów $(\xi, 0)$ i $(\eta, 0)$ w $A \times A$. Zgodnie z definicją tej równoważności, istnieje wiązka γ, dla której $\xi \oplus \gamma = \eta \oplus \gamma$. Tezę otrzymujemy dodając stronami do ostatniej równości wiązkę $\tilde{\gamma}$, dla której suma $\gamma \oplus \tilde{\gamma}$ jest trywialna (wniosek 1. I).

Oznaczmy przez $\dim\eta$ wymiar wiązki η. Odwzorowanie

$$\dim\colon \mathrm{Vect}X \ni \eta \to \dim\eta \in \boldsymbol{Z}$$

jako homomorfizm półpierścienia $\mathrm{Vect}X$ w pierścień $\boldsymbol{Z}$, indukuje homomorfizm pierścieni

$$\dim\colon K(X) \to \boldsymbol{Z}$$

(liczbę $\dim([\xi]-[\eta])$ nazywamy wirtualnym wymiarem elementu $[\xi]-[\eta]$).

Odwzorowanie dim pozwala na odsłonięcie ważnego związku między grupą $\tilde{K}(X)$, zdefiniowaną w poprzednim paragrafie (przykład 2), a grupową strukturą pierścienia $K(X)$.

TWIERDZENIE 2. *Odwzorowanie*

$$\tilde{K}(X) \ni \bar{\eta} \to [\eta]-[\tau^{\dim\eta}] \in \ker\{\dim\colon K(X) \to \boldsymbol{Z}\}$$

jest izomorfizmem grup.

Dowód. Pokażemy najpierw, że odwzorowanie to jest poprawnie zdefiniowane, tj. nie zależy od wyboru reprezentanta η. Rzeczywiście, niech $\bar{\eta} = \bar{\xi}$, czyli $\eta \oplus \tau^{\dim\xi+k} = \xi \oplus \tau^{\dim\eta+k}$ dla odpowiedniego $k \in \boldsymbol{N}$. Ostatnia równość implikuje $[\eta]+[\tau^{\dim\xi+k}] = [\xi]+[\tau^{\dim\eta+k}]$, czyli $[\eta]-[\tau^{\dim\eta}] = [\xi]-[\tau^{\dim\xi}]$. Stwierdzenie, że odwzorowanie to jest homomorfizmem grup, jest trywialne. Surjektywność wynika z faktu generowania grupy $\ker\{\dim\colon K(X) \to \boldsymbol{Z}\}$ przez elementy postaci $[\eta]-[\tau^{\dim\eta}]$, a injektywność implikowana jest lematem 1 (b) VII i obserwacją, że zerem grupy $\tilde{K}(X)$ jest klasa wiązek s-trywialnych (tzn. s-równoważnych wiązkom trywialnym).

W dalszych rozważaniach będziemy oznaczali — nadużywając nieco terminologii — podpierścień $\ker\{\dim\colon K(X) \to \boldsymbol{Z}\}$ również symbolem $\tilde{K}(X)$.

Zaobserwujmy, że jeśli $f^*\colon K(Y) \to K(X)$ jest homomorfizmem pierścieni indukowanym przez odwzorowanie ciągłe $f\colon X \to Y$, to $f^*(\tilde{K}(Y)) \subset \tilde{K}(X)$, a zatem odwzorowanie ciągłe indukuje również homomorfizm $f^*\colon \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X)$ pierścieni $\tilde{K}$. (Używanie tego samego symbolu na oznaczenie odwzorowań indukowanych nie prowadzi do nieporozumień.)

Przyporządkowanie $X \rightsquigarrow \tilde{K}(X)$ i $f \rightsquigarrow f^*$ ma również charakter funktorialny. Można prosto opisać zależność między pierścieniem $K(X)$ a jego podpierścieniem $\tilde{K}(X)$. Niech $i\colon \tilde{K}(X) \to K(X)$ będzie inkluzją, a $j\colon \boldsymbol{Z} \ni p \to \operatorname{sign} p\,[\tau^{|p|}] \in K(X)$ homomorfizmem prawostronnie odwrotnym względem homomorfizmu dim (tj. $\dim \circ j = e_{\boldsymbol{Z}}$). Z dokładności ciągu homomorfizmów pierścieni

$$0 \to \tilde{K}(X) \xrightarrow{i} K(X) \xrightarrow{\dim} \boldsymbol{Z} \to 0$$

i faktu, że $\dim \circ j = e_{\boldsymbol{Z}}$ wynika

Wniosek 2. *Odwzorowanie*

$$i \oplus j\colon \tilde{K}(X) \oplus \boldsymbol{Z} \to K(X)$$

jest izomorfizmem pierścieni.

VIII. Wiązka Hopfa i jej własności.

Lemat 1. *Iloczyn tensorowy wiązek określa w zbiorze* $\operatorname{Vect}_1 X$, *jednowymiarowych wiązek nad bazą* X *strukturę grupy. Elementem odwrotnym względem wiązki* η *jest jej wiązka dualna* η^*.

Dowód. Wystarczy stwierdzić istnienie elementu odwrotnego dla dowolnego $\eta \in \operatorname{Vect}_1 X$. Twierdzimy, że wiązka dualna η^* jest elementem odwrotnym dla elementu η, czyli że $\eta \oplus \eta^*$ jest jednowymiarową wiązką trywialną. Zauważmy, że jednowymiarowa wiązka trywialna charakteryzuje się posiadaniem ciągłej sekcji niezerowej. Dla wiązki $\eta \otimes \eta^*$ łatwo taką sekcję skonstruować. Niech V będzie jednowymiarową przestrzenią wektorową, v jej dowolnym wektorem niezerowym, a v^* jedynym elementem z przestrzeni dualnej V^*, dla którego $v^*(v) = 1$. Twierdzimy, że wektor $v \otimes v^* \in V \otimes V^*$ jest niezerowy i dla dowolnego innego wektora niezerowego $u \in V$, $u \otimes u^* = v \otimes v^*$. Pierwsza uwaga jest trywialna. Dowodząc drugiej przyjmijmy $u = \lambda v$. Wtedy

$$u^* = \frac{1}{\lambda} v^* \quad \text{oraz} \quad u \otimes u^* = \lambda v \otimes \frac{1}{\lambda} v^* = v \otimes v^*.$$

Niech teraz u_x oznacza dowolny niezerowy wektor z włókna η_x. Wobec powyższych uwag odwzorowanie

$$X \ni x \to u_x \otimes u_x^* \in \eta \otimes \eta^*$$

jest dobrze określoną niezerową sekcją ciągłą wiązki $\eta \otimes \eta^*$.

Konstrukcja wiązki Hopfa. Sferę dwuwymiarową S_2 rozważać można jako jednopunktową kompaktyfikację płaszczyzny zespolonej, $S_2 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$. Zdefiniujmy

$$D_+ = \{z \in \boldsymbol{C}\colon |z| \leqslant 1\} \quad \text{oraz} \quad D_- = \{z \in \boldsymbol{C}\colon |z| \geqslant 1\} \cup \{\infty\}.$$

Oczywiście $D_+ \cap D_- = S$ jest okręgiem jednostkowym w płaszczyźnie $\boldsymbol{C}$. Zastosujmy operację sklejania do wiązek trywialnych $D_+ \times \boldsymbol{C}$ i $D_- \times \boldsymbol{C}$, posługując się izomorfizmem

$$z^{-1}\colon S \times \boldsymbol{C} \ni (z, x) \to (z, z^{-1}x) \in S \times \boldsymbol{C}$$

jako izomorfizmem sklejającym. Otrzymana jednowymiarowa wiązka $D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^{-1}}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}$ nad sferą S_2 nosi nazwę *wiązki Hopfa.* W dalszych rozważaniach oznaczać ją będziemy stale przez χ, a jej wiązkę dualną przez χ^*. (Nietrudno zauważyć związek χ z fibracją Hopfa $S_3 \to S_2$ [17].)

Posługując się izomorfizmami

$$z^n\colon S \times \boldsymbol{C} \ni (z, x) \to (z, z^n x) \in S \times \boldsymbol{C} \qquad (n \in \boldsymbol{Z})$$

otrzymujemy wiązki $D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^n}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}$. ($z^0$ oznacza izomorfizm identycznościowy.) Zdefiniujmy

$$\chi^n = \begin{cases} \underbrace{\chi \otimes \ldots \otimes \chi}_{n} & \text{dla } n > 0, \\ \underbrace{\chi^* \otimes \ldots \otimes \chi^*}_{-n} & \text{dla } n < 0. \end{cases}$$

LEMAT 2. *Wiązki* χ^n *i* $D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^{-n}}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}$ *są izomorficzne* ($n \in \boldsymbol{Z}$).

Dowód. Zauważmy najpierw, że iloczyn tensorowy izomorfizmów $z^n \otimes z^m$ jest równy z^{n+m}. Rozumując indukcyjnie dowiedziemy prawdziwości tezy dla wartości $n > 0$. Załóżmy zatem jej prawdziwość dla dodatniej liczby całkowitej n. Stosując kolejno założenie indukcyjne, przemienność operacji $\otimes$ i $\cup$ (lemat 3 (b). IV) oraz własność $z^{-n} \otimes z^{-1} = z^{-(n+1)}$, otrzymujemy żądaną formułę dla $n+1$:

$$\chi^n \otimes \chi \cong (D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^{-n}}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}) \otimes (D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^{-1}}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}) \cong$$

$$\cong D_+ \times (\boldsymbol{C} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{C}) \underset{z^{-(n+1)}}{\cup} D_- \times (\boldsymbol{C} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{C}) \cong D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^{-(n+1)}}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}.$$

Analogicznie, przez indukcję malejącą można dowieść prawdziwości jezy dla $n < 0$, w oparciu o jej słuszność dla $n = -1$. Rozważmy zatem teszcze tylko ten przypadek. Wiązka $\chi \otimes (D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C})$ jest trywialna:

$$\chi \otimes (D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C}) \cong D_+ \times (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{C}) \underset{z^{-1} \otimes z}{\cup} D_- \times (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{C})$$

$$\cong D_+ \times \boldsymbol{C} \underset{z^0}{\cup} D_- \times \boldsymbol{C} \cong S_2 \times \boldsymbol{C},$$

czyli $D_+ \times C \underset{z}{\cup} D_- \times C$ jest elementem odwrotnym względem χ w grupie $(\mathrm{Vect}_1 S_2, \otimes)$. Lemat 1. VIII implikuje zatem, że

$$\chi^{-1} = \chi^* = D_+ \times C \underset{z}{\cup} D_- \times C,$$

czyli prawdziwość tezy dla $n = -1$.

Niech ξ będzie wiązką nad X, a $p\colon \xi \times S \to \xi$, S-parametrową rodziną izomorfizmów wiązki ξ. Oznaczmy przez $z^n p$ izomorfizm

$$z^n p\colon\ \xi \times S \ni (e, z) \to \big(z^n p(e), z\big) \in \xi \times S.$$

LEMAT 3. $\xi \times D_+ \underset{z^n p}{\cup} \xi \times D_- \cong (\xi \times D_+ \underset{p}{\cup} \xi \times D_-) \otimes (\chi^{-n} \times X)$.

Dowód. Korzystając z lematu 3 (b). IV, otrzymujemy następujący ciąg izomorficznych wiązek ($1_{X \times D_+}$ oznacza trywialną wiązkę jednowymiarową nad $X \times D_+$)

$$\xi \times D_+ \underset{z^n p}{\cup} \xi \times D_- \cong (\xi \times D_+ \underset{z^n p}{\cup} \xi \times D_-) \otimes (1_{X \times D_+} \underset{z^0}{\cup} 1_{X \times D_-}) \cong$$
$$\cong (\xi \times D_+ \underset{p}{\cup} \xi \times D_-) \otimes (1_{X \times D_+} \underset{z^n}{\cup} 1_{X \times D_-}) \cong (\xi \times D_+ \underset{p}{\cup} \xi \times D_-) \otimes \big((D_+ \times$$
$$\times C \underset{z^n}{\cup} D_- \times C) \times X\big) = (\xi \times D_+ \underset{p}{\cup} \xi \times D_-) \otimes (\chi^{-n} \times X).$$

Dowód następnego lematu podany będzie w paragrafie XII.

Niech $h = [\chi]$ będzie klasą wiązki Hopfa w pierścieniu $K(S_2)$, a 1 klasą jednowymiarową wiązki trywialnej.

LEMAT 4. *W pierścieniu $K(S_2)$ równość*

$$h^n - h^{n+1} = h^{n-1} - h^n$$

jest prawdziwa dla dowolnych $n \in \mathbf{Z}$.

WNIOSEK 1. *Element h^n pierścienia $K(S_2)$ jest równy sumie $a_n \cdot 1 + b_n h$, gdzie a_n i b_n są odpowiednio dobranymi liczbami całkowitymi.*

Dowód. Wynikające z lematu 4 formuły

$$h^2 = 2h - 1 \quad \text{oraz} \quad h^{-2} = 2 - h$$

wraz z prostym rozumowaniem indukcyjnym implikują prawdziwość tezy.

IX. Twierdzenie Botta o periodyczności. Obliczenie grup homotopii $\pi_n(\mathrm{GL}(C))$. Treścią twierdzenia Botta lub raczej odpowiednika tego twierdzenia w K-teorii jest związek między pierścieniami $K(X \times S_2)$, $K(X)$ a $K(S_2)$. Oznaczmy przez $\pi_1\colon X \times S_2 \to X$ i $\pi_2\colon X \times S_2 \to S_2$ naturalne rzutowania.

Odwzorowanie dwuliniowe

$$\bar{\mu}\colon\ K(X) \times K(S_2) \ni (a, b) \to \pi_1^*(a) \otimes \pi_2^*(b) \in K(X \times S_2)$$

indukuje — wobec znanej własności uniwersalności iloczynu tensorowego — dokładnie jeden homomorfizm pierścieni

$$\mu\colon K(X)\otimes K(S_2)\to K(X\times S_2),$$

dla którego diagram

$$\begin{array}{ccc} K(X)\times K(S_2) & \xrightarrow{\bar{\mu}} & K(X\times S_2) \\ & {\scriptstyle\otimes}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\mu} & \\ & K(X)\otimes K(S_2) & \end{array}$$

jest przemienny ($\mu(a\otimes b)=\pi_1^*(a)\otimes\pi_2^*(b)$).

Twierdzenie Botta o periodyczności. *Homomorfizm* $\mu\colon K(X)\otimes K(S_2)\to K(X\times S_2)$ *jest izomorfizmem pierścieni.*

Dowód polegać będzie na konstrukcji odwzorowania odwrotnego $\nu\colon K(X\times S_2)\to K(X)\otimes K(S_2)$ i zostanie przytoczony ze szczegółami w następnych paragrafach.

Obecnie podamy pewne zastosowania twierdzenia Botta, w szczególności obliczymy grupy homotopii $\pi_n(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C}))$.

Identyfikując wszystkie punkty domkniętego podzbioru A, zwartej przestrzeni topologicznej X, otrzymujemy zbiór ilorazowy X/A, który wyposażony w topologię ilorazową jest przestrzenią zwartą.

Wiązka liniowa ξ nad bazą X oraz izomorfizm $\alpha\colon \xi|A\to A\times \boldsymbol{C}^n$, restrykcji wiązki $\xi|A$ na standardową wiązkę trywialną $A\times\boldsymbol{C}^n$ pozwala na zdefiniowanie pewnej nowej wiązki liniowej ξ/α nad bazą X/A.

Określmy relację równoważności w $E(\xi)$ przyjmując elementy e i e' za równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są identyczne bądź $e, e'\in \alpha^{-1}(\{z\}\times A)$, dla pewnego $z\in\boldsymbol{C}^n$. Oznaczmy zbiór ilorazowy przez $E(\xi/\alpha)$ i wprowadźmy w nim topologię ilorazową. Rzutowanie $\pi\colon E(\xi)\to X$ indukuje rzutowanie $\pi_\alpha\colon E(\xi/\alpha)\to X/A$. Przeciwobrazy poprzez rzutowanie π_α punktów z X/A, mają oczywiście naturalną strukturę przestrzeni wektorowej.

Lemat 1. $\xi/\alpha=(E(\xi/\alpha), X/A, \pi_\alpha)$ *jest wiązką liniową.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić jedynie warunek lokalnej trywialności w otoczeniu punktu A/A (klasy równoważności zbioru A w X/A). Wniosek 1. IV implikuje możliwość rozszerzenia izomorfizmu $\alpha\colon \xi|A\to A\times\boldsymbol{C}^n$ do izomorfizmu $\bar{\alpha}\colon \xi|U\to U\times\boldsymbol{C}^n$ określonego na $\xi|U$, restrykcji wiązki ξ do pewnego otoczenia otwartego U zbioru A. Izomorfizm $\bar{\alpha}$ indukuje odwzorowanie

$$\xi|U/\tilde{\alpha}\to U/A\times\boldsymbol{C}^n$$

realizujące warunek lokalnej trywialności dla ξ/α w otoczeniu punktu A/A.

Z przytoczonej konstrukcji wynika, że jeśli $j\colon X\to X/A$ jest naturalną surjekcją ciągłą na przestrzeń ilorazową, ξ wiązką nad X, a ξ/α wyżej zdefiniowaną wiązką nad X/A, to $j^*(\xi/\alpha)\cong\xi$.

LEMAT 2. *Odwzorowania* $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A$ $(i(a) = a)$ *indukują ciąg dokładny homomorfizmów* $\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$.

Dowód. Złożenie $j \circ i$ jest odwzorowaniem stałym, a więc $(j \circ i)^* = i^* \circ j^*$ jest homomorfizmem zerowym, czyli $\mathrm{im} j^* \subset \ker i^*$. Pozostaje stwierdzić, że $\ker i^* \subset \mathrm{im} j^*$. Przedstawmy element należący do $\ker i^*$ w postaci $[\xi] - [\tau_X^{\dim \xi}]$ (twierdzenie 2. VII). Ponieważ $i^*([\xi] - [\tau_X^{\dim \xi}]) = 0$, więc $[\xi | A] = [\tau_A^{\dim \xi}]$, czyli $\xi | A \oplus \tau_A^k \cong \tau_A^{k+\dim \xi}$, dla pewnego k naturalnego (lemat 1 (b). VII). Restrykcja wiązki $\xi \oplus \tau_X^k | A$ jest więc wiązką trywialną; niech α będzie odwzorowaniem realizującym izomorfizm $\xi \oplus \tau_X^k | A$ ze standardową wiązką trywialną $A \times C^{k+\dim \xi}$. Oczywiście

$$j^*\left([(\xi \oplus \tau_X^k)/\alpha] - [\tau_{X/A}^{k+\dim \xi}]\right) = [\xi \oplus \tau_X^k] - [\tau_X^{k+\dim \xi}] = [\xi] - [\tau_X^{\dim \xi}],$$

czyli $[\xi] - [\tau_X^{\dim \xi}] \in \mathrm{im} j^*$.

Opuszczamy trywialny dowód następującego lematu:

LEMAT 3. *Jeżeli* $0 \to K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M$ *jest ciągiem dokładnym homomorfizmów pierścieni, a* $\gamma\colon M \to L$ *homomorfizmem prawostronnie odwrotnym względem* β *(tj.* $\beta \circ \gamma = e_M$*), to odwzorowanie*

$$\alpha \oplus \gamma\colon K \oplus M \to L$$

jest izomorfizmem pierścieni.

Niech (x, X_0) i (Y, y_0) będą przestrzeniami topologicznymi z wyróżnionymi punktami. Połóżmy $X \vee Y = \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}$ i $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$. Łatwo sprawdzić, że przestrzenie $(X \wedge Y) \wedge Z$ i $X \wedge (Y \wedge Z)$ są homeomorficzne. Poprzednio zdefiniowane zredukowane podniesienie SX przestrzeni X (paragraf V) jest homeomorficzne z $S \wedge X$; implikuje to z kolei homeomorficzność przestrzeni $S_2 \wedge S_n$ i S_{n+2}.

TWIERDZENIE 1. *Odwzorowania* $X \vee Y \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{j} X \wedge Y$ *indukują ciąg dokładny homomorfizmów*

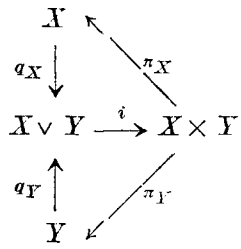
$$0 \to \tilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X \vee Y) \to 0.$$

Dla homomorfizmu i^* *istnieje homomorfizm prawostronnie odwrotny.*

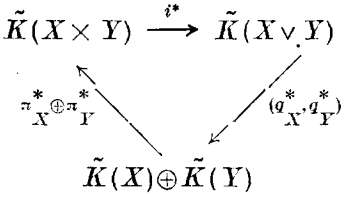
Dowód. Dokładność ciągu $\tilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X \vee Y)$ wynika z lematu 2.

Prosty, ale dość długi i techniczny dowód monomorficzności odwzorowania j^* zostanie pominięty. Znaleźć go można w skrypcie [3]. Przytaczanie go tutaj wydłużyłoby i tak już obszerny artykuł i byłoby mniej lub bardziej dosłownym przepisaniem z oryginału, co oczywiście nie jest naszym celem. Pozostaje dowieść jedynie istnienia prawostronnej odwrotności homomorfizmu i^*.

Rozważmy diagram przemienny odwzorowań ciągłych:



($q_X(x) = (x, y_0)$, $q_Y(y) = (x_0, y)$, π_X, π_Y naturalne rzutowanie na składowe iloczynu $X \times Y$) i indukowany przezeń diagram homomorfizmów:



Oczywiście odwzorowanie $\pi_X^* \oplus \pi_Y^* \circ (q_X^*, q_Y^*)$ jest prawostronną odwrotnością i^*.

Zauważmy, że zdefiniowany wyżej homomorfizm $(q_X^*, q_Y^*)\colon \tilde{K}(X \vee Y) \to \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$ jest izomorfizmem.

Twierdzenie 1, łącznie z lematem 3 i ostatnią uwagą, implikuje

WNIOSEK 1. *Odwzorowanie*

$$\Phi = j^* \oplus \pi_X^* \oplus \pi_Y^*\colon \tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$$

jest izomorfizmem.

Zauważmy, że odwzorowanie $\mu\colon K(X) \otimes K(Y) \ni (a \otimes b) \to \pi_X^*(a) \otimes \otimes \pi_Y^*(b) \in K(X \times Y)$ przeprowadza zbiór $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)$ w $\tilde{K}(X \times Y)$ (wystarczy zaobserwować, że μ zachowuje zerowy wymiar wirtualny transformowanych elementów).

Odwzorowanie

$$\mu' = \mu | \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)\colon \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$$

jest więc poprawnie określone.

Ponieważ złożenia $\beta_X \circ \Phi^{-1} \circ \mu'$ i $\beta_Y \circ \Phi^{-1} \circ \mu'$ (gdzie Φ jest izomorfizmem określonym we wniosku 1, a β_X i β_Y projekcjami $\tilde{K}(X \wedge Y) \oplus \tilde{K}(X) \oplus \oplus \tilde{K}(Y)$ na składowe, odpowiednio $\tilde{K}(X)$ i $\tilde{K}(Y)$) są homomorfizmami zerowymi, więc odwzorowanie

$$\tilde{\mu} = \beta_{X \wedge Y} \circ \Phi^{-1} \circ \mu'\colon \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y)$$

jest dobrze zdefiniowane. Powyższe rozważania wraz z faktem, że $\tilde{K}(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus \boldsymbol{Z}$ oraz elementarnymi własnościami iloczynu tensorowego pierścieni abelowych implikują istnienie diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} K(X)\otimes K(Y) & \to & (\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y))\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(Y)\oplus \boldsymbol{Z} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\mu}\oplus e_{\tilde{K}(X)}\oplus e_{\tilde{K}(Y)}\oplus e_{\boldsymbol{Z}}} \\ K(X\times Y) & \to & \tilde{K}(X\wedge Y)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(Y)\oplus \boldsymbol{Z} \end{array}$$

w którym strzałki poziome są izomorfizmami. Z diagramu tego wynika następujący ważny

WNIOSEK 2. *Homomorfizm μ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\tilde{\mu}$ jest izomorfizmem.*

Wniosek ten łącznie z twierdzeniem Botta o periodyczności implikuje

TWIERDZENIE 2. *Dla dowolnej przestrzeni zwartej X homomorfizm pierścieni*

$$\tilde{\mu}\colon \tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(S_2) \to \tilde{K}(X\wedge S_2)$$

jest izomorfizmem.

Uwzględniając fakt, że $\gamma = h-1$ jest generatorem nieskończonej grupy cyklicznej $\tilde{K}(S_2)$ (co będzie udowodnione w paragrafie X, wniosek 5) otrzymujemy

WNIOSEK 3. *Izomorfizm $\tilde{\mu}$ indukuje izomorfizm*

$$\tilde{K}(X) \ni a \to \tilde{\mu}(a\otimes\gamma) \in \tilde{K}(X\wedge S_2).$$

W szczególności, kładąc $X = S_n$, mamy

WNIOSEK 4. *Odwzorowanie*

$$\tilde{K}(S_n) \ni a \to \tilde{\mu}(a\otimes\gamma) \in \tilde{K}(S_{n+2})$$

jest izomorfizmem pierścieni.

Obliczyliśmy poprzednio, że $\tilde{K}(S_1) = 0$ i $\tilde{K}(S_2) \cong \boldsymbol{Z}$ (z trywialną strukturą multyplikatywną na $\boldsymbol{Z}$) (wniosek 2. VI, 3. VI, 5. X). Pozwala to w pełni na wyznaczenie struktury pierścienia $\tilde{K}(S_n)$ dla dowolnych wartości n. Mianowicie

WNIOSEK 5. $\tilde{K}(S_{2n}) \cong \boldsymbol{Z}$ *i* $\tilde{K}(S_{2n+1}) = 0$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Wniosek 1. VI interpretujący grupy homotopii pełnej grupy liniowej w terminach K-teorii implikuje natychmiast

WNIOSEK 6. $\pi_{2n}(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})) = 0$ *i* $\pi_{2n+1}(\mathrm{GL}(\boldsymbol{C})) = \boldsymbol{Z}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ostatnie dwa wnioski uzasadniają nazwę twierdzenia o periodyczności.

Na zakończenie tego paragrafu zauważmy jeszcze, że nietrywialność pierścieni $\tilde{K}(S_{2n})$ implikuje w banalny sposób twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.

X. Dowód twierdzenia Botta o periodyczności. Aby udowodnić że homomorfizm $\mu\colon K(X)\otimes K(S_2)\to K(X\times S_2)$ jest izomorfizmem, podamy konstrukcję odwzorowania $\nu\colon K(X\times S_2)\to K(X)\otimes K(S_2)$, odwrotnego względem μ. W tym celu skorzystamy z szeregu twierdzeń i lematów, których dowody w większości podamy dopiero w następnych paragrafach (w szczególności dotyczy to twierdzeń 1, 2 i 3 oraz lematów 1 i 2).

Podobnie jak przy konstrukcji wiązki Hopfa, rozważamy sferę S_2 jako jednopunktową kompaktyfikację płaszczyzny zespolonej $\boldsymbol{C}$; $S_2 = \boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$. Jak poprzednio $D_+ = \{z\in\boldsymbol{C}\colon |z|\leqslant 1\}$ i $D_- = \{z\in\boldsymbol{C}\colon |z|\geqslant 1\}\cup\{\infty\}$ oraz identyfikujemy podzbiór $X\times\{1\}\subset X\times S_2$ ze zbiorem X.

Dla wiązek nad $X\times S_2$ udowodnimy później następujące

TWIERDZENIE 1. *Wiązka η nad bazą $X\times S_2$ jest izomorficzna z wiązką postaci $(\xi\times D_+\underset{\varphi}{\cup}\xi\times D_-)$, gdzie $\xi=\eta|X$, a $\varphi\colon \xi\times S\to\xi\times S$ jest izomorfizmem wiązek, identycznościowym na $\xi\times\{1\}$, wyznaczonym za pomocą pewnej „konstrukcji Z". Każde dwa izomorfizmy wiązki $\xi\times S$ identycznościowe na $\xi\times\{1\}$, otrzymane w wyniku konstrukcji Z są izohomotopijne.*

W dalszym ciągu pisać będziemy (ξ,φ,ξ) zamiast $(\xi\times D_+\underset{\varphi}{\cup}\xi\times D_-)$.

Jak już wspomnieliśmy wcześniej (paragraf III), dowolny homomorfizm $\varphi\colon \xi\times S\to\xi\times S$ identyfikować można z sekcją $\varphi\colon X\times S\to\operatorname{Hom}(\xi\times S, \xi\times S)$ lub S-parametrową rodziną sekcji $\varphi\colon X\times S\to\operatorname{Hom}(\xi,\xi)$. Oczywiście, jeśli $\varphi\colon \xi\times S\to\xi\times S$ jest izomorfizmem, to odpowiadająca S-parametrowa rodzina sekcji jest elementem z $\Gamma_I(\xi, S)$, i odwrotnie. Posługiwać się będziemy wszystkimi trzema interpretacjami, przy czym z kontekstu wynikać będzie, która z nich jest w danym momencie użyta. Przyjmijmy obecnie ostatnią z nich. Wówczas dla ustalonego $x\in X$ odwzorowanie

$$S\ni z\to\varphi(x,z)\in\operatorname{Hom}(\xi_x,\xi_x)$$

jest ciągłym odwzorowaniem okręgu $S\subset\boldsymbol{C}$ w skończenie wymiarową zespoloną przestrzeń wektorową — $\operatorname{Hom}(\xi_x,\xi_x)$.

Niech $\sigma_1(x),\ldots,\sigma_k(x)$ będzie ustaloną bazą w $\operatorname{Hom}(\xi_x,\xi_x)$ i $\varphi(x,z) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x,z)\cdot\sigma_i(x)$, gdzie $\alpha(x,\cdot)$ są jednoznacznie wyznaczonymi ciągłymi funkcjami zespolonymi zmiennej zespolonej $z\in S$. Prosty rachunek wykazuje, że wartość

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\left(\int_S z^{n-1}\alpha_i(x,z)\,dz\right)\sigma_i(x)\qquad (n\in\boldsymbol{Z})$$

nie zależy od wyboru bazy $\{\sigma_i(x)\}_{i=1,\ldots,k}$. Wartość $a_n(x)$ jest więc dobrze określonym elementem z $\operatorname{Hom}(\xi_x,\xi_x)$, czyli

$$a_n\colon X\ni x\to a(x)\in\operatorname{Hom}(\xi,\xi)$$

jest sekcją. Jest to sekcja ciągła. Rzeczywiście, niech U będzie otoczeniem punktu x, dla którego wiązka $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)|U$ jest trywialna i niech σ_i: $U \to \mathrm{Hom}(\xi, \xi)|U$ $(i = 1, \ldots, k)$ będą liniowo niezależnymi sekcjami tej wiązki (tj. $\sigma_1(u), \ldots, \sigma_k(u)$ jest bazą w $\mathrm{Hom}(\xi_u, \xi_u)$). Dla elementu $(u, z) \in U \times S$ sekcja φ jest więc dana formułą:

$$\varphi(u, z) = \sum_{i=1}^{k} a_i(u, z)\sigma_i(u),$$

gdzie a_i: $U \times S \to \boldsymbol{C}$ są jednoznacznie określonymi funkcjami zespolonymi. W zbiorze U sekcja a_n ma zatem przedstawienie

$$a_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{k} \left(\int_S z^{n-1} a_i(u, z)\, dz \right) \sigma_i(u),$$

które, wobec ciągłości funkcji a_i i σ_i, implikuje jej ciągłość. Utwórzmy S-parametrową rodzinę sekcji

$$\varphi_n\colon\ X \times S \ni (x, z) \to \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=-i}^{i} z^k a_k(x) \in \mathrm{Hom}(\xi, \xi).$$

Zauważmy, że φ_n jest S-parametrową rodziną sekcji postaci

$$X \times S \ni (x, z) \to \sum_{i=-n}^{n} z^i b_i(x) \in \mathrm{Hom}(\xi, \xi),$$

gdzie b_i: $X \to \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ są sekcjami wiązki $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$. Rodziny S-parametrowe sekcji tej postaci nazywamy *sekcjami Laurenta stopnia* $\leqslant n$. W szczególności wyżej określone sekcje φ_n nazywamy *n-tymi sekcjami Laurenta* (rodziny) sekcji φ.

Stwierdzimy później, że

TWIERDZENIE 2. *Ciąg φ_n n-tych sekcji Laurenta sekcji φ jest zbieżny do φ (w sensie normy w przestrzeni $\Gamma(\xi, S)$).*

Przypuśćmy, że φ: $X \times S \to \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ jest sekcją z $\Gamma_I(\xi, S)$. Wybierzmy V_φ wypukłe otoczenie φ zawarte w $\Gamma_I(\xi, S)$. Wówczas z ostatniego twierdzenia wynika następujący podstawowy

WNIOSEK 1. *Dla dostatecznie dużych wskaźników n, sekcje Laurenta φ_n sekcji φ, jako zawarte w otoczeniu V_φ, są izohomotopijne z φ i izohomotopijne między sobą.*

Co więcej, dla danego $t \in [0, 1]$ izohomotopia $t\varphi_n \oplus (1-t)\varphi_m$ jest również sekcją Laurenta stopnia $\leqslant \max\{n, m\}$.

Zajmiemy się teraz szczegółową analizą dowolnych sekcji Laurenta oraz ich szczególnymi przypadkami, tj. sekcjami wielomianowymi $p_n = \sum_{i=0}^{n} z^i b_i$.

Zdefiniujmy $L^n(\xi)$ jako $(n+1)$-krotną sumę Whitneya wiązki ξ i oznaczmy przez $\mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$ algebrę macierzy kwadratowych rzędu $n+1$, o elementach z algebry $\mathrm{HOM}(\xi, \xi)$.

Z macierzą

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$$

skojarzyć można homomorfizm

$$F_A\colon L^n(\xi) \ni (x_0, \dots, x_n) \to \Big(\sum_{i=0}^{n} a_{0i}(x_i), \dots, \sum_{i=0}^{n} a_{ni}(x_i)\Big) \in L^n(\xi).$$

Nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie

$$\mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi)) \ni A \to F_A \in \mathrm{HOM}(L^n(\xi), L^n(\xi))$$

jest izomorfizmem algebr zespolonych. Algebry te będziemy w dalszym ciągu identyfikować. Mówimy, że macierz $A \in \mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$ jest macierzą izomorfizmu, jeżeli odpowiadający jej homomorfizm F_A jest izomorfizmem. W naturalny sposób wprowadza się pojęcie macierzy izohomotopijnych.

Z sekcją wielomianową $p_n = \sum_{i=0}^{n} z^i a_i$ stopnia $\leqslant n$ wiązki ξ skojarzyć można sekcję wielomianową $L^n(p_n)$ stopnia $\leqslant 1$ wiązki $L^n(\xi)$, kładąc

$$L^n(p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \;\; 0 \end{pmatrix}.$$

LEMAT 1. *Jeżeli* $p = \sum_{i=0}^{n} z^i a_i$ *jest sekcją izomorfizmów, to sekcja* $L^n(p)$ *jest również sekcją izomorfizmów. Sekcja* $L^n(p)$ *i* $p \oplus 1_n$ *są izohomotopijne* (1_n oznacza sekcję identyczności $1_n\colon X \times S \to \mathrm{Hom}(L^{n-1}(\xi), L^{n-1}(\xi))$).

W dalszym ciągu tego paragrafu wszelkie rozważane sekcje będą sekcjami izomorfizmów, a więc odpowiadające im homomorfizmy wiązek będą izomorfizmami.

Dla sekcji wielomianowej $p\colon X \times S \to \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ stopnia $\leqslant n$ oznaczmy wiązkę $(L^n(\xi), L^n(p), L^n(\xi))$ krótko przez $L^n(\xi, p, \xi)$. Zauważmy, że sekcja wielomianowa stopnia $\leqslant n$ może być w naturalny sposób traktowana jako sekcja wielomianowa stopnia $\leqslant n+1$, a zatem można utworzyć dla niej sekcję $L^{n+1}(p)$ i wiązkę $L^{n+1}(\xi, p, \xi)$. Oznaczać będziemy dalej przez 1 bądź jednowymiarową wiązkę trywialną (nad bazą X lub $X \times S_2$

w zależności od sytuacji), bądź sekcję identyczności $1\colon X\times S\to \mathrm{Hom}(\varepsilon,\varepsilon)$, gdzie ε jest odpowiednią, wynikającą z kontekstu, wiązką nad X. Z lematu 1 wynika natychmiast

WNIOSEK 2. $L^n(\xi,p,\xi)\cong(\xi,p,\xi)\oplus L^{n-1}(\xi,1,\xi)$.

LEMAT 2. *Jeżeli p jest sekcją wielomianową stopnia $\leqslant n$, to następujące pary sekcji wielomianowych stopnia $\leqslant 1$ są izohomotopijne*:

(a) $L^{n+1}(p)$ *i* $L^n(p)\oplus 1$,

(b) $L^{n+1}(zp)$ *i* $L^n(p)\oplus z$.

Izohomotopie między tymi sekcjami można wybrać w ten sposób, aby dla dowolnej wartości parametru $t\in[0,1]$ odpowiednia sekcja była również sekcją wielomianową stopnia $\leqslant 1$.

Lemat 2 wraz z lematem 2. IV implikuje

WNIOSEK 3. *Niech* $p\colon X\times S\to\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$ *będzie sekcją wielomianową stopnia* $\leqslant n$. *Wtedy*

(a) $L^{n+1}(\xi,p,\xi)\cong L^n(\xi,p,\xi)\oplus(\xi,1,\xi)$,

(b) $L^{n+1}(\xi,zp,\xi)\cong L^n(\xi,p,\xi)\oplus(\xi,z,\xi)$.

Obecnie zajmiemy się bliższą analizą sekcji wielomianowych stopnia $\leqslant 1$, tzn. sekcji postaci $p=az\oplus b$.

TWIERDZENIE 3. *Niech* $p=az\oplus b\colon X\times S\to\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$ *będzie sekcją wielomianową stopnia* $\leqslant 1$. *Wtedy istnieje kanoniczny rozkład ξ na sumę Whitneya subwiązek* $\xi_+\oplus\xi_-$ *o następujących własnościach*:

(a) $(\xi,p,\xi)\cong(\xi_+,z,\xi_+)\oplus(\xi_-,1,\xi_-)$.

(b) *Jeżeli* p_0 *i* p_1 *są izohomotopijnymi sekcjami wielomianowymi stopnia* $\leqslant 1$, *oraz izohomotopia* p_t *jest, dla każdego* $t\in[0,1]$, *również sekcją wielomianową stopnia* $\leqslant 1$, *wtedy* $\xi_+^0\cong\xi_+^1$ *i* $\xi_-^0\cong\xi_-^1$ (gdzie $\xi_+^i\oplus\xi_-^i$ jest rozkładem ξ odpowiadającym sekcji p_i; $i=0,1$).

(c) *Jeżeli p jest sumą prostą* $p_0\oplus p_1$, *gdzie* $p_i\colon X\times S\to\mathrm{Hom}(\eta_i,\eta_i)$ $(i=0,1)$ *są sekcjami wielomianowymi stopnia* $\leqslant 1$, η_0 *i* η_1 *subwiązkami* ξ *i* $\eta_0\oplus\eta_1\cong\xi$), *to* $\xi_+\cong\eta_{0+}\oplus\eta_{1+}$ *i* $\xi_-\cong\eta_{0-}\oplus\eta_{1-}$.

(d) *Dla* $p=z$ (*odpowiednio* $p=1$) $\xi_+\cong\xi$, $\xi_-\cong 0$ (*odpowiednio* $\xi_-\cong\xi$, $\xi_+\cong 0$).

Oznaczmy przez $L_+^n(\xi,p,\xi)$ i $L_-^n(\xi,p,\xi)$ składniki $L^n(\xi)_+$ i $L^n(\xi)_-$ rozkładu wiązki $L^n(\xi)$ podyktowanego przez sekcję wielomianową $L^n(p)$ stopnia $\leqslant 1$ (uzyskaną z sekcji wielomianowej p, stopnia $\leqslant n$). Podkreślmy, że $L_+^n(\xi,p,\xi)$ i $L_-(\xi,p,\xi)$ są wiązkami nad X, a nie nad $X\times S_2$.

WNIOSEK 4. (a) $L^n(\xi,p,\xi)\cong\big(L_+^n(\xi,p,\xi),z,L_-^n(\xi,p,\xi)\big)\oplus\big(L_-^n(\xi,p,\xi),1,L_-^n(\xi,p,\xi)\big)$,

(b) $L_+^{n+1}(\xi,p,\xi)\cong L_+^n(\xi,p,\xi)$,

(c) $L_+^{n+1}(\xi,zp,\xi)\cong L_+^n(\xi,p,\xi)\oplus 1$.

Dowód. (a) wynika bezpośrednio z twierdzenia 3 (a). Formuła (b) (odpowiednio (c)) jest konsekwencją lematu 2 (a) (odpowiednio lematu 2 (b)) i punktów (b), (c) i (d) twierdzenia 3.

Konstrukcja homomorfizmu ν. Możemy teraz przystąpić do konstrukcji zapowiedzianego homomorfizmu ν, odwrotnego względem μ.

Dla wiązki η nad $X \times S_2$ oznaczmy przez ξ restrykcję $\eta | X \times \{1\} = \eta | X$, a przez α klasę izomorfizmów opisaną w twierdzeniu 1 (otrzymanych w wyniku konstrukcji Z). Zgodnie z wnioskiem 1, dla $\varphi \in \alpha$, sekcje Laurenta φ_n sekcji φ (począwszy od pewnego wskaźnika) są izohomotopijne z φ i między sobą. Oznaczmy przez $p_{2n} = z^n \varphi_n$ sekcję wielomianową stopnia $\leqslant 2n$, uzyskaną przez pomnożenie sekcji Laurenta φ_n przez z^n i połóżmy

$$\bar{\nu}_n(\varphi) = [L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)] \otimes (h^{n-1} - h^n) + [\xi] \otimes h^n$$

(przypominamy, że $h^n = [\underbrace{\chi \otimes \ldots \otimes \chi}_{n}]$, gdzie χ jest wiązką Hopfa). Stwierdzimy, że $\bar{\nu}_n(\varphi) = \bar{\nu}_{n+1}(\varphi)$. Własności φ_n i φ_{n+1} ujęte we wniosku 1 implikują, że $tp_{2n+2} \oplus (1-t) z p_{2n}$ jest izohomotopią sekcji wielomianowych $p_{2n+2} = z^{n+1} \varphi_{n+1}$ oraz $z p_{2n}$ (stopnia $\leqslant 2n+2$), spełniającą warunki twierdzenia 3 (b). Wraz z formułami (c) i (b) wniosku 4, implikuje to, że $L_+^{2n+2}(\xi, p_{2n+2}, \xi) \cong L_+^{2n+2}(\xi, z p_{2n}, \xi) \cong L_+^{2n+1}(\xi, p_{2n}, \xi) \oplus \xi \cong L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi) \oplus \xi$.

Ostatni wzór łącznie z tożsamością $h^n - h^{n+1} = h^{n-1} - h^n$ (wniosek 4. VIII) pociąga za sobą równość $\bar{\nu}_{n+1}(\varphi) = \bar{\nu}_n(\varphi)$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{n+1}(\varphi) &= [L_+^{2n+2}(\xi, p_{2n+2}, \xi)] \otimes (h^n - h^{n+1}) + [\xi] \otimes h^{n+1} = \\ &= ([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)] + [\xi]) \otimes (h^n - h^{n+1}) + [\xi] \otimes h^{n+1} = \\ &= L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi) \otimes (h^{n-1} - h^n) + [\xi] \otimes h^n = \bar{\nu}_n(\varphi). \end{aligned}$$

Dla dostatecznie dużych n mamy więc $\bar{\nu}_n(\varphi) = \bar{\nu}_{n+1}(\varphi) = \ldots$ Element ten oznaczmy krótko przez $\bar{\nu}(\varphi)$. Niech teraz ψ będzie innym elementem klasy α; pokażemy, że $\bar{\nu}(\varphi) = \bar{\nu}(\psi)$. Załóżmy najpierw, że ψ należy do wypukłego otoczenia V_φ sekcji φ, opisanego we wniosku 1. Wówczas prawie wszystkie sekcje Laurenta ψ_n sekcji ψ będą również należały do tego otoczenia, a więc wobec wypukłości V_φ, sekcje φ_n i ψ_n będą izohomotopijne (dla dostatecznie dużych n). Implikuje to izohomotopijność sekcji wielomianowych $z^n \varphi_n$ i $z^n \psi_n$. Z twierdzenia 3 (b) oraz definicji $\bar{\nu}_n(\varphi)$ i $\bar{\nu}_n(\psi)$ wynika równość tych elementów (dla dużych n), a więc równość $\bar{\nu}(\varphi) = \bar{\nu}(\psi)$. Odwzorowanie

$$\bar{\nu}\colon \alpha \ni \varphi \to \bar{\nu}(\varphi) \in K(X) \otimes K(S_2)$$

jest więc ciągłe i lokalnie stałe (w α, jako podzbiorze $\Gamma(\xi, S)$ mamy topologię indukowaną przez normę, zaś w $K(X) \otimes K(S_2)$ przyjmujemy topologię dyskretną). Wobec łukowej spójności zbioru α, $\bar{\nu}$ jest odwzorowaniem stałym.

Ponieważ wiązka η nad bazą $X \times S_2$ wyznacza jednoznacznie klasę izomorfizmów a, której z kolei dowolny element φ jednoznacznie definiuje element $\bar{\nu}(\varphi) \in K(X) \otimes K(S_2)$, więc kładąc $\nu(\eta) = \bar{\nu}(\varphi)$, otrzymujemy dobrze określone odwzorowanie

$$\nu\colon \operatorname{Vect}(X \times S_2) \to K(X) \otimes K(S_2).$$

Z wyżej podanych faktów łatwo wynika, że ν jest homomorfizmem półpierścieni. Zgodnie z własnością uniwersalności pierścienia Grothendiecka, ν indukuje homomorfizm pierścieni (oznaczany również symbolem ν):

$$\nu\colon K(X \times S_2) \to K(X) \otimes K(S_2).$$

Zauważmy, że jeśli $\eta \in \operatorname{Vect}(X \times S_2)$ i $[\eta] \in K(X \times S_2)$, to $\nu(\eta) = \nu([\eta])$. Pozostaje sprawdzić, że $\nu \circ \mu$ i $\mu \circ \nu$ są identycznościami odpowiednio w $K(X) \otimes K(S_2)$ i $K(X \times S_2)$, tj. że $\nu \circ \mu = e_{K(X) \otimes K(S_2)}$ oraz $\mu \circ \nu = e_{K(X \times S_2)}$.

LEMAT 3. $\mu \circ \nu = e_{K(X \times S_2)}$.

Dowód. Zgodnie z poprzednimi uwagami, dowolną wiązkę η nad $X \times S_2$ można przedstawić w postaci $\eta \cong (\xi, \varphi_n, \xi)$, gdzie $\xi = \eta | X$, a φ_n jest odpowiednią sekcją Laurenta; $p_{2n} = z^n \varphi_n$. Pokażemy, że dla dowolnej wiązki η nad $X \times S_2$, $\mu \circ \nu([\eta]) = [\eta]$, co zakończy dowód lematu, bo elementy $[\eta]$ generują $K(X \times S_2)$. Stosując definicje odwzorowań μ i ν oraz banalne tożsamości otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mu \circ \nu([\eta]) &= \mu\big([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)] \otimes (h^{n-1} - h^n) + [\xi] \otimes h^n\big) = \\
&= \pi_1^*\big([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) \otimes \pi_2^*(h^{n-1} - h^n) + \pi_1^*([\xi]) \otimes \pi_2^*(h^n) = \\
&= \pi_1^*\big([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) \otimes \pi_2^*(h^{n-1}) - \pi_1^*\big([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) \otimes \pi_2^*(h^n) + \\
&\quad + \pi_1^*\big((2n+1)[\xi]\big) \otimes \pi_2^*(h^n) - \pi_1^*(2n[\xi]) \otimes \pi_2^*(h^n) = \\
&= \big(\pi_1^*\big([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) \otimes \pi_2^*(h^{-1}) + \pi_1^*\big((2n+1)[\xi] - [L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) - \\
&\quad - \pi_1^*(2n[\xi])\big) \otimes \pi_2^*(h^n) = A \otimes \pi_2^*(h^n).
\end{aligned}$$

Zbadamy teraz bliżej podtać elementu A. Z lematu 3. VIII wynika, że

$$\pi_1^*\big([L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) \otimes \pi_2^*(h^{-1}) = \big|\big(L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi), z, L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)\big)\big|,$$

Związek $\underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{2n+1} = L^{2n}(\xi) = L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi) \oplus L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)$ implikuje, że

$$[L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)] = (2n+1)[\xi] - [L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)],$$

czyli

$$\begin{aligned}
\pi_1^*\big((2n+1)[\xi] - [L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) &= \pi_1^*\big([L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)]\big) = \\
&= [L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi), 1, L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)].
\end{aligned}$$

Oczywiście $\pi_1^*(2n[\xi]) = [(L^{2n-1}(\xi), 1, L^{2n-1}(\xi))]$. Otrzymane formuły łącznie z twierdzeniem 3 i wnioskiem 2 tego paragrafu pozwalają stwierdzić, że $A = [(\xi, p_{2n}, \xi)]$. Rzeczywiście,

$$A = [L_+^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi), z, L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)] +$$
$$+ [(L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi), 1, L_-^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi))] - [(L^{2n-1}(\xi), 1, L^{2n-1}(\xi))] =$$
$$= [L^{2n}(\xi, p_{2n}, \xi)] - [(L^{2n-1}(\xi), 1, L^{2n-1}(\xi))] = [(\xi, p_{2n}, \xi)].$$

A zatem

$$\mu \circ \nu([\eta]) = [(\xi, p_{2n}, \xi)] \otimes \pi_2^*(h^n) = [\xi \times D_+ \bigcup_{p_{2n}} \xi \times D_-] \otimes [\chi^n \times X] =$$
$$= [\xi \times D_+ \bigcup_{z^{-n}p_{2n}} \xi \times D_-] = [(\xi, z^{-n}p_{2n}, \xi)] = [\eta],$$

ponieważ lemat 3. VIII zapewnia równość

$$[\xi \times D_+ \bigcup_{p_{2n}} \xi \times D_-] \otimes [\chi^n \times X] = [\xi \times D_+ \bigcup_{z^{-n}p_{2n}} \xi \times D_-].$$

Oznaczmy przez *1* klasę w $K(S_2)$ jednowymiarowej wiązki trywialnej nad S_2.

Wniosek 5. *Elementy h i 1 generują grupę $K(S_2)$.*

Dowód. Załóżmy, że X jest przestrzenią jednopunktową. Wtedy pierścień $K(X)$ identyfikować można z pierścieniem liczb całkowitych $\mathbf{Z}$, utożsamiając wiązkę wirtualną $K(X)$ z jej wymiarem witrualnym; identyfikuje się również pierścienie $K(S_2)$ i $K(X \times S_2)$.

Uwagi te łącznie z definicją odwzorowania ν: $K(S_2) = K(X \times S_2) \to$ $\to K(X) \otimes K(S_2)$ pozwalają zaobserwować, że dla dowolnego elementu $x \in K(S_2)$ wartość $\nu(x)$ jest postaci sumy skończonej $\Sigma n_k \otimes h^k$, gdzie n_k są liczbami całkowitymi identyfikowanymi z wiązkami wirtualnymi nad X o wymiarze wirtualnym n_k, a h^k potęgami wirtualnej wiązki Hopfa. Przypomnijmy jeszcze, że dowolna potęga $h^k = a_k 1 + b_k \cdot h$; $a_k, b_k \in \mathbf{Z}$ (wniosek 1. VIII). Reasumując, dowolny element pierścienia $K(S_2)$ jest postaci

$$x = \mu \circ \nu(x) = \sum n_k h^k = \sum_j (p_j 1 + q_j h),$$

co należało wykazać.

Uwaga. Grupa $\tilde{K}(S_2)$ jest, jak stwierdziliśmy poprzednio, izomorficzna z grupą $\mathbf{Z}$. Ponieważ $\tilde{K}(S_2) \cong K(S_2) \oplus \mathbf{Z}$, więc z wniosku 5 wynika, że element $h-1$ (o zerowym wymiarze wirtualnym) jest generatorem nieskończonej grupy cyklicznej $\tilde{K}(S_2)$. Przy okazji warto zauważyć, że jedynie grupowe struktury pierścieni $\tilde{K}(S_2)$ i $\mathbf{Z}$ są izomorficzne. Nie

dotyczy to struktur multyplikatywnych tych pierścieni: iloczyn dowolnych dwu elementów z $\tilde{K}(S_2)$ jest równy zero, ponieważ $(h-1)^2 = 0$ (lemat 4. VIII).

LEMAT 4. $\nu \circ \mu = e_{K(X)\otimes K(S_2)}$.

Dowód. Niech ξ będzie wiązką nad X. Stosując kolejno definicję odwzorowania μ, lemat 3. VIII oraz definicję ν, stwierdzamy, że

$$\nu\circ\mu([\xi]\otimes h) = \nu\big(\pi_1^*([\xi])\otimes\pi_2^*([\chi])\big) =$$

$$= \nu\big([\xi\times D_+ \bigcup_1 \xi\times D_-]\otimes[\chi\times X]\big) = \nu([\xi\times D_+ \bigcup_{z^{-1}} \xi\times D_-]) =$$

$$= \nu([\xi, z^{-1}, \xi]) = [L_+^2(\xi, 1, \xi)]\otimes(1-h)+[\xi]\otimes h = [\xi]\otimes h,$$

gdyż zgodnie z wnioskiem 4 (b) i twierdzeniem 3 (d) tego paragrafu $L_+^2(\xi, 1, \xi) = L_+^0(\xi, 1, \xi) = 0$. Zupełnie elementarne jest sprawdzenie równości $\nu\circ\mu([\xi]\otimes 1) = [\xi]\otimes 1$. Ponieważ elementy postaci $[\xi]\otimes h$ i $[\xi]\otimes 1$ generują pierścień $K(X)\otimes K(S_2)$ (wniosek 5), lemat jest udowodniony.

Tym samym zakończyliśmy dowód twierdzenia Botta o periodyczności, zakładając prawdziwość pewnych twierdzeń i lematów, przyjętych w tym paragrafie bez dowodu. Wykazaniu ich prawdziwości poświęcone będą następne trzy paragrafy.

XI. Dowody twierdzeń 1.X i 2.X.

LEMAT 1. *Niech B będzie retraktem deformacyjnym zbioru A, ξ_1 i ξ_2 wiązkami nad bazą A, a φ: $\xi_1|B \to \xi_2|B$ izomorfizmem restrykcji wiązek. Istnieje wówczas izomorfizm Φ: $\xi_1 \to \xi_2$ przedłużający izomorfizm φ. Izomorfizm Φ wyznaczony jest jednoznacznie z dokładnością do izohomotopii.*

Dowód. Niech r: $A \to B$ będzie retrakcją deformacyjną. Rozważmy następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \xi_1|B & \xrightarrow{\mu_1} & r^*(\xi_1|B) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^*} \\ \xi_2|B & \xrightarrow{\mu_2} & r^*(\xi_2|B) \end{array}$$

gdzie μ_i: $\xi_i|B \ni x \to (r(x), x) \in r^*(\xi_i|B)$ są odwzorowaniami włóknistymi nakrywającymi inkluzję j: $B \to A$, zaś φ^* izomorfizmem danym formułą $\varphi^*(x, a) = (\varphi(x), a)$. Zauważmy następnie, że wiązki ξ_i oraz $r^*(\xi_i|B)$ $(i = 1, 2)$ są izomorficzne, ponieważ $r^*(\xi_i|B) \cong r^*(j^*\xi_i) \cong (j\circ r)^*\xi_i \cong$ $\cong e_A^*\xi_i \cong \xi_i$. Izomorfizmy ψ_i: $r^*(\xi_i|B) \to \xi_i$ można wybrać tak, aby złożenia $\psi_i\circ\mu_i$ były inkluzjami $\xi_i|B$ w ξ_i. Połóżmy $\Phi = \psi_2\circ\varphi^*\circ\psi_1^{-1}$.

Wobec przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccccc} \xi_1|B & \xrightarrow{\mu_1} & r^*(\xi_1|B) & \xrightarrow{\psi_1} & \xi_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \xi_2|B & \xrightarrow{\mu_2} & r^*(\xi_2|B) & \xrightarrow{\psi_2} & \xi_2 \end{array}$$

izomorfizm Φ jest rozszerzeniem izomorfizmu φ.

Dowód jednoznaczności Φ (z dokładnością do izohomotopii) wynika z dowodu istnienia. Wystarczy oczywiście dowieść, że jeśli β_i: $\xi_1 \to \xi_1$ $(i = 0, 1)$ są automorfizmami wiązki ξ_1 identycznościowymi na $\xi_i|B$, to β_0 i β_1 są izohomotopijne. Traktując β_i jako izomorfizmy $\xi_1 \times \{i\} \to \xi_1 \times \{i\}$ $(i = 0, 1)$ określić można izomorfizm restrykcji wiązki $\xi \times I$

$$\beta_0 \cup \beta_1 \cup e_{\xi_1 \times B}\colon\ \xi_1 \times I|\tilde{A} \to \xi_1 \times I|\tilde{A},$$

gdzie $\tilde{A} = A \times \{0\} \cup A \times \{1\} \cup B \times I$. Ponieważ $\tilde{A}$ jest retraktem deformacyjnym zbioru $A \times I$, więc z pierwszej części dowodu wynika istnienie rozszerzenia izomorfizmu $\beta_0 \cup \beta_1 \cup e_{\xi_1 \times B}$ do izomorfizmu $\xi_1 \times I \to \xi_1 \times I$ ustalającego izohomotopię między β_0 i β_1.

Konstrukcja Z i dowód twierdzenia 1. X. Niech η będzie wiązką liniową nad $X \times S_2$. Oznaczmy przez $\eta_+ = \eta|X \times D_+$, $\eta_- = \eta|X \times D_-$ i $\eta_0 = \eta|X \times S$. Zauważmy, że $X = X \times \{1\}$ jest retraktem deformacyjnym zbiorów $X \times D_+$ i $X \times D_-$ oraz $\eta_+|X = \eta_-|X = \xi$. Zgodnie z lematem 1 możemy przedłużyć izomorfizmy identycznościowe wiązek $\eta_+|X$ i ξ oraz $\eta_-|X$ i ξ do izomorfizmów φ_+: $\eta_+ \to \xi \times D_+$ i φ_-: $\eta_- \to \xi \times D_-$. Izomorfizmy φ_+ i φ_- wyznaczone są jednoznacznie z dokładnością do izohomotopii. Izomorfizm $\varphi = (\varphi_-|\eta_0)^{-1} \circ (\varphi_+|\eta_0)$ jest więc w wyniku tej konstrukcji wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izohomotopii (konstrukcja Z). Wobec równości odwzorowań $e_{\xi \times s} \circ \varphi_+ = \varphi_- \circ \varphi$, wiązki $\eta = \eta_+ \bigcup_{e_{\xi \times S}} \eta_-$ i $\xi \times D_+ \bigcup_{\varphi} \xi \times D_-$ są izomorficzne (lemat 3 (c). IV).

Dowód twierdzenia 2. X poprzedzimy dwoma lematami.

Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową skończonego wymiaru (z dowolnie wybraną normą), a f: $S \to V$ odwzorowaniem ciągłym. Połóżmy dla $n \in \boldsymbol{Z}$ i $k \in \boldsymbol{N}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s z^{n-1} f(z)\, dz, \qquad s_k(z) = \sum_{i=-\kappa}^{k} z^i a_i \quad \text{oraz} \quad f_k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{n} s_j.$$

Jako natychmiastowy wniosek z klasycznego twierdzenia Féjèra [20] otrzymujemy

LEMAT 2. *Ciąg odwzorowań f_k jest jednostajnie zbieżny do odwzorowania f.*

Niech teraz ξ będzie wiązką liniową nad bazą zwartą. Przypomnijmy, że przy ustalonej metryce riemannowskiej w wiązce ξ można mówić o normie elementu $e \in E(\xi)$ oraz normie rodziny sekcji $\sigma \in \Gamma(\xi, S)$. Wzajemny stosunek tych pojęć wyjaśnia

LEMAT 3. *Jeżeli* $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ *są elementami z* $\Gamma(\xi, S)$ *i dla dowolnego* $(x, s) \in X \times S$, $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(x, s) - \sigma(x, s)\| = 0$, *to ciąg* σ_n *jest zbieżny do* σ *w sensie normy w przestrzeni unormowanej* $\Gamma(\xi, S)$.

Dowód. Jeżeli ξ jest wiązką trywialną, prawdziwość lematu jest natychmiastową konsekwencją zwartości przestrzeni $X \times S$. Niech $X_1, \ldots, X_k$ będzie pokryciem domkniętym przestrzeni X, dla którego wiązki $\xi | X_i$ $(j = 1, \ldots, k)$ są trywialne. Oznaczmy symbolem $\| \ \|_i$ normę w przestrzeni $\Gamma(\xi | X_i, S)$. Wtedy zgodnie z powyższą uwagą dla danego $\varepsilon > 0$ oraz $1 \leqslant j \leqslant k$ istnieje wskaźnik n_j, dla którego

$$\|\sigma_n | X_j - \sigma | X_j\| \leqslant \varepsilon$$

jeśli tylko $n \geqslant n_j$. Kładąc zatem $n^* = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ otrzymujemy dla $n \geqslant n^*$ oszacowanie $\|\sigma_n - \sigma\| < \varepsilon$, czyli — wobec dowolności ε — zbieżność σ_n do σ w sensie normy w $\Gamma(\xi, S)$.

Dowód twierdzenia 2. X. Ustalmy metrykę riemannowską w $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$. Na mocy lematu 2, przy każdym ustalonym $(x, s) \in X \times S$, ciąg $\varphi_n(x, s)$ wartości sekcji Laurenta w punkcie (x, s) jest zbieżny do $\varphi(x, s)$ w sensie normy w $\mathrm{Hom}(\xi_x, \xi_x)$. Lemat 3 zapewnia jednak w tym przypadku zbieżność ciągu φ_n do φ, czyli prawdziwość tezy twierdzenia 2.

XII. Dowód lematów 1.X, 2.X, 4.VIII. W paragrafie tym stale identyfikować będziemy homomorfizmy z $\mathrm{HOM}(L^n(\xi), L^n(\xi))$ z macierzami $\mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$.

Dla $a \in \mathrm{HOM}(\xi, \xi)$ zdefiniujmy macierz $\Gamma^{k,l}(a) = (\gamma_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$, $k \neq l$, kładąc

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ a & \text{dla } i = k,\ j = l, \\ 0 & \text{dla pozostałych wskaźników } i, j. \end{cases}$$

LEMAT 1. *Dla dowolnego homomorfizmu* $a \in \mathrm{HOM}(\xi, \xi)$, $\Gamma^{k,l}(a) \in \mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$ *jest macierzą izomorfizmu, izohomotopijną z macierzą identyczności.*

Dowód. Iloczyny macierzy $\Gamma^{k,l}(a) \cdot \Gamma^{k,l}(-a)$ oraz $\Gamma^{k,l}(-a) \cdot \Gamma^{k,l}(a)$ są macierzami identycznościowymi, $\Gamma^{k,l}(a)$ jest więc macierzą izomorfizmu. Oczywiście $\Gamma^{k,l}(ta)$ $(t \in [0, 1])$ jest izohomotopią macierzy $\Gamma^{k,l}(a)$ i macierzy identycznościowej.

Zdefiniujmy teraz dwa typy tzw. operacji elementarnych na macierzach z $\mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$. Niech $A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ będzie macierzą

z $\mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$, $0 \leqslant l \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $l \neq k$; a elementem z $\mathrm{HOM}(\xi, \xi)$. Wtedy $A(k, l, \cdot, a,) = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ i $A(\cdot, k, l, a) = (c_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ są macierzami, których elementy są następująco określone:

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{dla } i \neq k, \\ a_{kj} + a a_{lj} & \text{dla } i = k, \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{dla } j \neq k, \\ a_{ik} + a_{il} a & \text{dla } j = k. \end{cases}$$

Mówiąc niezbyt precyzyjnie, macierz $A(k, l, \cdot, a)$ (odp. $A(\cdot, k, l, a)$) powstaje z macierzy A przez dodanie do jej k-tego wiersza (odp. k-tej kolumny) l-tego wiersza (odp. l-tej kolumny) pomnożonej lewostronnie (odp. prawostronnie) przez homomorfizm a.

Mówimy, że macierze $A(k, l, \cdot, a)$ i $A(\cdot, k, l, a)$ powstały z macierzy A w wyniku operacji elementarnych.

Lemat 2. *Jeżeli $A \in \mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$ jest macierzą izomorfizmu, to macierze $A(k, l, \cdot, a)$ i $A(\cdot, k, l, a)$ są również macierzami izomorfizmów, izohomotopijnymi z A.*

Dowód. Zauważmy, że formuły

$$A(k, l, \cdot, a) = \Gamma^{k,l}(a) A \quad \text{oraz} \quad A(\cdot, k, l, a) = A \Gamma^{k,l}(a)$$

łącznie z lematem 1 implikują natychmiast pierwszą część tezy. Izohomotopia między macierzami A i $A(k, l, \cdot, a)$ (odp. $A(\cdot, k, l, a)$) realizowana jest przez rodzinę macierzy $\Gamma^{k,l}(ta)A$ (odp. $A\Gamma^{k,l}(ta)$); $t \in [0, 1]$.

Wniosek 1. *Macierz B otrzymana z macierzy izomorfizmu A, w wyniku stosowania skończonej ilości operacji elementarnych, jest również macierzą izomorfizmu, izohomotopijną z macierzą A.*

Uwagi te łatwo uogólnić na ciągłe S-parametrowe rodziny macierzy z $\mathscr{M}^n(\mathrm{HOM}(\xi, \xi))$.

Dowód lematu 1. X. Wystarczy pokazać, że macierz

$$L^n(p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ -z & 1 & & 0 \\ & -z & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & -z & 1 \end{pmatrix}$$

może być otrzymana z macierzy izomorfizmu

$$p \oplus 1_n = \begin{pmatrix} p & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

w wyniku stosowania skończonej ilości operacji elementarnych. Zdefiniujmy indukcyjnie skończony ciąg macierzy $B_0, A_1, B_1, A_2, \ldots, A_n, B_n$, kładąc

$$B_0 = p \oplus 1_n, \qquad A_i = B_{i-1}\Big(1, i+1, \cdot, \sum_{k=i}^{n} a_k z^{k-i}\Big),$$

$$B_i = A_i(\cdot, i, i+1, -z); \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Prosty rachunek wskazuje, że $B_n = L^n(p)$. Wniosek 1 implikuje zatem prawdziwość tezy.

Dowód lematu 2. X. (a) Połóżmy

$$A = L^{n+1}(p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 \\ -z & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -z & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = L^n(p) \oplus 1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 \\ -z & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -z & 1 \end{pmatrix}$$

i zauważmy, że $B = A(\cdot, n, n+1, z)$.

(b) Przyjmijmy

$$A = L^{n+1}(zp) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & \ldots & a_n \\ -z & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & -z & 1 \end{pmatrix}$$

oraz $B = A\left(\cdot, 2, 1, -\frac{1}{z}\right)$, $C = B(2, 1, \cdot, 1)$, $D = C(1, 2, \cdot, -1)$ i $E = D(2, 1, \cdot, 1)$. Ponieważ

$$E = \left(\begin{array}{c|c} z & 0 \\ \hline 0 & L^n(p) \end{array}\right) = z \oplus L^n(p),$$

więc zgodnie z wnioskiem 1 prawdziwość lematu 2 jest wykazana.

Dowód lematu 4. VIII. Udowodnimy najpierw, że $\chi^{-2} \oplus 2 = 2\chi^{-1} \oplus 1$.

Połóżmy $X = \{1\} \subset S_2$ i rozważmy wiązki nad S_2 jako wiązki nad $X \times S_2$. Używając poprzednio wprowadzonych symboli oraz wniosków 2. X, 3 (b). X, 3 (a). X możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \chi^{-2} \oplus 2 &\cong (1, z^2, 1) \oplus \big(L^1(1), 1, L^1(1)\big) \cong L^2(1, z^2, 1) \cong \\ &\cong L^1(1, z, 1) \oplus (1, z, 1,) \cong L^0(1, z, 1) \oplus (1, 1, 1) \oplus (1, z, 1) \cong \\ &\cong \chi^{-1} \oplus 1 \oplus \chi^{-1} \cong 2\chi^{-1} \oplus 1. \end{aligned}$$

W terminach K-teorii oznacza to, że $h^{-2}+2 = 2h^{-1}+1$, czyli $h^{-2} - h^{-1} = h^{-1}-1$, stąd mnożąc obustronnie przez h^{n+1} otrzymujemy $h^{n-1}-h^n = h^n - h^{n+1}$.

XIII. Dowód twierdzenia 3.X. Zaczniemy od udowodnienia prostych lematów dotyczących przestrzeni wektorowych. Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową (skończonego wymiaru), $\mathrm{Hom}(V, V)$ (odpowiednio $\mathrm{Iso}(V, V)$) przestrzenią wektorową homomorfizmów (odpowiednio: zbiorem izomorfizmów) V w V, a i b elementami z $\mathrm{Hom}(V, V)$, zaś p odwzorowaniem postaci

$$p\colon \boldsymbol{C} \ni z \to az+b \in \mathrm{Hom}(V, V).$$

Załóżmy ponadto, że $p(S) \subset \mathrm{Iso}(V, V)$. ($S$ oznacza, jak zwykle, okrąg jednostkowy w $\boldsymbol{C}$.) Zdefiniujmy homomorfizmy Q i $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ formułami

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\int_S (az+b)^{-1}a\,dz, \qquad T = \frac{1}{2\pi i}\int_S a(az+b)^{-1}dz$$

(złożenie dwóch homomorfizmów $\alpha\circ\beta$ zapisujemy krótko $\alpha\beta$). Zwartość okręgu S implikuje prawdziwość inkluzji $p(U) \subset \mathrm{Iso}(V, V)$, dla pewnego otoczenia U okręgu S. Zauważmy dalej, że wartości całek Q i T zależą tylko od klasy homotopii krzywej (zawartej w U), po której całkujemy (twierdzenie Cauchy'ego). W szczególności można zamiast okręgu S wziąć dowolny okręg zawarty w U i nie wpłynie to na wartość całek Q i T.

LEMAT 1. (a) *Homomorfizmy Q i T są rzutowaniami, tj. $Q^2 = Q$ i $T^2 = T$.*

(b) *Dla dowolnego $z \in S$, $p(z)Q = Tp(z)$, oraz $aQ = Ta$.*

Dowód (a). Dla dowolnych $z, w \in U$ ($z \neq w$) prawdziwe są następujące tożsamości:

$$(*)\qquad (aw+b)^{-1}a(az+b)^{-1} = (az+b)^{-1}a(aw+b)^{-1} = \frac{(az+b)^{-1}}{w-z} + \frac{(aw+b)^{-1}}{z-w},$$

wynikające z oczywistych równości

$$\frac{(az+b)^{-1}}{w-z} + \frac{(aw+b)^{-1}}{z-w} =$$

$$= (aw+b)^{-1}\frac{aw+b}{w-z}(az+b)^{-1} + (aw+b)^{-1}\frac{az+b}{z-w}(az+b)^{-1} =$$

$$= (aw+b)^{-1}\left(\frac{aw+b}{w-z} + \frac{az+b}{z-w}\right)(az+b)^{-1} =$$

$$= (aw+b)^{-1}a(az+b)^{-1}$$

symetrycznej roli zmiennych z i w.

Zauważmy, że pierwsza z tożsamości (*) jest prawdziwa dla dowolnych (niekoniecznie różnych) $w, z \in U$. Wynikające z niej równości dowodzą tezy (a):

$$p(z)Q = \int_S p(z)(aw+b)^{-1}adw = \int_S a(aw+b)^{-1}p(z)dw = Tp(z).$$

Równość $aQ = Ta$ jest trywialna.

(b) Załóżmy, że dla pewnego $a \in (0,1)$ okrąg $S_a = \{z \in \mathbf{C}: |z| = a\}$ jest zawarty w otoczeniu U. Wtedy stosując drugą z tożsamości (*) i twierdzenie Fubiniego otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q^2 = QQ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{z\in S}\int_{w\in S_a}(az+b)^{-1}a(aw+b)^{-1}adzdw = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{z\in S}\int_{w\in S_a}\left(\frac{(az+b)^{-1}}{w-z}a + \frac{(aw+b)^{-1}}{z-w}a\right)dzdw = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{z\in S}\left[(az+b)^{-1}a\int_{w\in S_a}\frac{dw}{w-z}\right]dz + \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{w\in S_a}\left[(aw+b)^{-1}a\int_{z\in S}\frac{dz}{z-w}\right]dw = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Pierwsza z całek I_1 jest równa zero ponieważ

$$\int_{w\in S_a}\frac{dw}{w-z} = 0,$$

druga zaś wobec równości

$$\int_{z\in S}\frac{dz}{z-w} = 2\pi i e_V,$$

równa jest Q.

Analogicznie przebiega dowód $T^2 = T$.

Oznaczmy przez $V_+ = \operatorname{im} Q$, $V_- = \operatorname{im}(e_V - Q)$, $V'_+ = \operatorname{im} T$ i $V'_- = \operatorname{im}(e_V - T)$. Z definicji tych podprzestrzeni wynika, że $V_+ \oplus V'_+$ i $V_- \oplus V'_-$ są sumami prostymi równymi V. Tożsamość $p(z)Q = Tp(z)$ (odpowiednio $aQ = Ta$) implikuje, że $p(z)(V_+) \subset V'_+$ i $p(z)(V_-) \subset V'_-$ (odpowiednio $\operatorname{im} a \subset V'_+$). Dla $z \in S$ izomorfizm $p(z)$ jest zatem sumą prostą dwu izomorfizmów $p_+(z) = a_+z + b_+ \colon V_+ \to V'_+$ i $p_-(z) = a_-z + b_- \colon V_- \to V'_-$ ($a_+ = a|V_+$, $a_- = a|V_-$, $b_+ = b|V_+$, $b_- = b|V_-$). Wynika stąd w szczególności równość wymiarów $\dim V_+ = \dim V'_+$ i $\dim V_- = \dim V'_-$.

LEMAT 2. (a) $a_+ \in \operatorname{Iso}(V_+, V'_+)$,

(b) $p_+(z) = a_+z + b_+ \in \operatorname{Iso}(V_+, V'_+)$, *dla* $|z| \geqslant 1$,

(c) $p_-(z) = a_-z + b_- \in \operatorname{Iso}(V_-, V'_-)$, *dla* $|z| \leqslant 1$.

Dowód. Dowiedziemy najpierw, że z inkluzji

(a') $\ker a \subset V_-$,

(b') $\ker p(z) \subset V_-$, dla $|z| > 1$,

(c') $\ker p(z) \subset V_+$, dla $|z| < 1$,

wynika teza. Wystarczy dowieść — wobec równości wymiarów przestrzeni V_+ i V'_+ oraz V_- i V'_- — że odwzorowania rozważane w tezie są monomorfizmami.

Niech $u \in \ker a_+$. Ponieważ $u \in V_-$ (inkluzja (a')) i $u \in \operatorname{pole} a_+ = V_+$, więc u musi być wektorem zerowym, a homomorfizm a_+ monomorfizmem.

Niech teraz $u \in \ker p_+(z)$ ($|z| > 1$). Inkluzja (b') implikuje, że $u \in V_-$, co w połączeniu z trywialnym faktem, że $u \in \operatorname{pole} p_+(z) = V_+$ dowodzi monomorfizmu $p(z)$ dla $|z| > 1$.

Analogicznie przebiega dowód dla $p_-(z)$, $|z| < 1$.

Pozostaje dowieść inkluzji (a'), (b') i (c'). Zauważmy, że $Q|\ker a = 0$, czyli $e_V - Q|\ker a = e_{\ker a}$, czyli $\ker a \subset V_-$.

Jeżeli $u \in \ker p(w)$ ($|w| \neq 1$), to $(az+b)(u) = \big((z-w)a\big)(u)$, czyli $\dfrac{u}{z-w} = \big((az+b)^{-1}a\big)(u)$. Zatem dla dowolnego $z \in S$ restrykcja homomorfizmu $(az+b)^{-1}a$ do przestrzeni $\ker p(w)$ jest równa $\dfrac{1}{z-w} e_{\ker p(z)}$. Implikuje to oczywiście, że

$$Q\,|\ker p(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{e_{\ker p(w)}}{z-w}\, dz = \begin{cases} e_{\ker p(w)} & \text{dla } |w| < 1, \\ 0 & \text{dla } |w| > 1, \end{cases}$$

skąd wynikają natychmiast inkluzje (b') i (c').

Rozważania powyższe łatwo uogólnić na przypadek wiązek liniowych i C-parametrowych rodzin sekcji. Niech ξ będzie wiązką nad przestrzenią spójną X, zaś a i b sekcjami wiązki $\operatorname{Hom}(\xi, \xi)$. Załóżmy, że ciągła C-parametrowa rodzina sekcji wiązki $\operatorname{Hom}(\xi, \xi)$

$$p\colon X \times C \ni (x, z) \to a(x)z + b(x) \in \operatorname{Hom}(\xi, \xi)$$

jest sekcją izomorfizmów dla wartości $z \in S$. Przy ustalonym $x \in X$, $p(x, \cdot)$: $\{x\} \times C \to \operatorname{Hom}(\xi_x, \xi_x)$ jest odwzorowaniem typu rozważanego w lematach 1 i 2.

Określmy sekcje Q i T wiązki $\operatorname{Hom}(\xi, \xi)$, kładąc dla $x \in X$

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \big(a(x)z + b(x)\big)^{-1} a(x)\, dz$$

oraz

$$T(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_S a(x)\big(a(x)z + b(x)\big)^{-1} dz.$$

Powtarzając rozumowanie przytoczone na początku poprzedniego paragrafu stwierdzamy, że Q i T są ciągłymi sekcjami wiązki $\operatorname{Hom}(\xi, \xi)$.

Z lematu 1 wynika natychmiast, że $Q^2 = Q$, $T^2 = T$ oraz $p(x, z)Q(x) = T(x)p(x, z)$ dla dowolnych $(x, z) \in X \times S$. W szczególności oznacza to, że odpowiadające sekcjom Q i T homomorfizmy Q i T (oznaczane tymi samymi symbolami) wiązki ξ w siebie, są rzutowaniami. Oznaczmy przez $\xi_+, \xi'_+, \xi_-, \xi'_-$ obrazy wiązki ξ poprzez rzutowania odpowiednio $Q, T, e_V - Q, e_V - T$. Są to oczywiście subwiązki wiązki ξ i $\xi \cong \xi_+ \oplus \xi_-$ oraz $\xi \cong \xi'_+ \oplus \xi'_-$.

Połóżmy $a_+ = a|\xi_+$, $a_- = a|\xi_-$, $b_+ = b|\xi_+$, $b_- = b|\xi_-$, $p_+ = a_+ z + b_+$, $p_- = a_- z + b_-$. (Przypominamy, że stale używamy identyfikacji przestrzeni sekcji wiązki $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ z przestrzenią homomorfizmów $\mathrm{HOM}(\xi, \xi)$.) Z warunku $p(x, z)Q(x) = T(x)p(x, z)$ wynika, że $p_+(x, z) \in \mathrm{Hom}(\xi_+, \xi'_+)$ i $p_-(x, u) \in \mathrm{Hom}(\xi_-, \xi'_-)$. Identyfikując $\mathrm{Hom}(\xi_+, \xi'_+) \oplus \mathrm{Hom}(\xi_-, \xi'_-)$ z podzbiorem $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$, odwzorowanie p można rozważać jako sumę prostą

$$p = p_+ \oplus p_- \colon X \times \boldsymbol{C} \to \mathrm{Hom}(\xi_+, \xi'_+) \oplus \mathrm{Hom}(\xi_-, \xi'_-) \subset \mathrm{Hom}(\xi, \xi).$$

Zauważmy jeszcze, że oczywiście $\dim \xi_+ = \dim \xi'_+$ i $\dim \xi_- = \dim \xi'_-$.

Dowód twierdzenia 3. X. (a) Stwierdzamy najpierw, że $S \times [0, 1]$ — parametrowe rodziny sekcji

$$p^t_+ \colon X \times S \times [0, 1] \ni (x, z, t) \to a_+(x)z + tb_+(x) \in \mathrm{Hom}(\xi_+, \xi'_+),$$

oraz

$$p^t_- \colon X \times S \times [0, 1] \ni (x, z, t) \to ta_-(x)z + b_-(x) \in \mathrm{Hom}(\xi_-, \xi'_-)$$

są sekcjami izomorfizmów.

Ustalmy $(x, z, t) \in X \times S \times [0, 1]$ i pokażmy, że $a_+(x)z + tb_+(x) \in \mathrm{Iso}((\xi_+)_x, (\xi'_+)_x)$. Dla $t = 0$ wynika to z lematu 2 (a). Zauważmy, że dla $t \in (0, 1]$, $a_+ z + tb_+ = t(a_+ z/t + b_+)$. Lemat 2 (b) implikuje, że $a_+(x)z/t + b_+(x) \in \mathrm{Iso}((\xi_+)_x, (\xi'_+)_x)$, czyli $a_+ z + tb_+ \in \mathrm{ISO}(\xi_+, \xi'_+)$. Podobnie lemat 2 (c) implikuje, że p^t_- jest $S \times [0, 1]$ — parametrową sekcją izomorfizmów. Homotopia

$$p^t = p^t_+ \oplus p^t_- \colon X \times S \times [0, 1] \to \mathrm{Hom}(\xi, \xi)$$

ustala zatem izohomotopię między sekcjami $p = az + b$ a $a_+ z + b_-$. Wiązki (ξ, p, ξ) i $(\xi, a_+ z + b_-, \xi) \cong (\xi_+, a_+ z, \xi'_+) \oplus (\xi_-, b_-, \xi'_-)$ są więc izomorficzne.

Z przemienności diagramów (przy dowolnym $z \in S$)

$$\begin{array}{ccc} \xi_+ & \xrightarrow{a_+ z} & \xi'_+ \\ {\scriptstyle e_{\xi_+}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_+^{-1}} \\ \xi_+ & \xrightarrow{z} & \xi_+ \end{array} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{array}{ccc} \xi_- & \xrightarrow{b_-} & \xi'_- \\ {\scriptstyle e_{\xi_-}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_-^{-1}} \\ \xi_- & \xrightarrow{e_{\xi_-}} & \xi_- \end{array}$$

i lematu 3 (c). IV wynika, że $(\xi_+, a_+ z, \xi'_+) \cong (\xi_+, z, \xi_+)$ i $(\xi_-, b_-, \xi'_-) \cong (\xi_-, 1, \xi_-)$, czyli $(\xi, p, \xi) \cong (\xi_+, z, \xi_+) \oplus (\xi_-, 1, \xi_-)$.

(b) Izohomotopię

$$p_t\colon X\times S\times[0,1]\to \mathrm{Hom}(\xi,\xi),$$

łączącą rodziny sekcji p_0 i p_1, rozważać można jako S-parametrową sekcję wielomianową stopnia $\leqslant 1$ wiązki $\mathrm{Hom}(\xi\times[0,1],\ \xi\times[0,1])$. Powtarzając w odniesieniu do tej sekcji wyżej opisaną konstrukcję, otrzymujemy rozkład wiązki $\tilde{\xi}=\xi\times[0,1]$ na subwiązki $\tilde{\xi}_+\oplus\tilde{\xi}_-$, o własnościach opisanych w punkcie (a). Obserwacja, że $\tilde{\xi}_+|X\times\{i\}\cong\xi^i_+$, $\tilde{\xi}_-|X\times\{i\}\cong\xi^i_-$ $(i=0,1)$, łącznie z wnioskiem 2. IV dowodzi tezy (b).

(c) i (d). Niech Q, Q_0, Q_1 i T, T_0, T_1 będą rzutowaniami otrzymanymi odpowiednio dla p, p_0 i p_1, według schematu opisanego na początku tego paragrafu. Teza (c) wynika natychmiast z prostego faktu, że $Q=Q_0\oplus Q_1$ i $T=T_0\oplus T_1$.

Podobnie z postaci rzutowań Q i T wynika (d).

Literatura

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. Math. 72 (1960), str. 20-104.

[2] — *Vector-fields on spheres*, ibidem 75 (1962), str. 603-632.

[3] M. F. Atiyah, *Lectures on K-theory*, mimeographed notes, Harvard University (1964).

[4] — *Immersions and embeddings of manifolds*, Topology 1 (1962), str. 125-132.

[5] — *Algebraic topology and elliptic operators*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), str. 237-249.

[6] — and R. Bott, *On the periodicity theorem for complex vector bundles*, Acta Math. 112 (1964), str. 229-247.

[7] — and F. Hirzebruch, *Vector bundles and homogeneous spaces in differential geometry*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 3 (1961), str. 7-38.

[8] — and I. M. Singer, *The index of elliptic operators on complex manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), str. 422-433.

[9] — *The index of elliptic operators, I, II*, Ann. of Math. 2, 87 (1968), str. 484-530. 546-604.

[10] L. Auslander and R. Mac Kenzie, *Introduction to differentiable manifolds*, New York 1963.

[11] J. Bochnak, *Wiązki liniowe (I)*, Prace Mat. (Comm. Math.) 12 (1968), str. 141-161.

[12] R. Bott, *The stable homotopy of classical groups*, Ann. of Math. 70 (1959), str. 313-337.

[13] A. Calderon, *Singular integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), str. 427-465.

[14] H. Cartan, *Travaux de Karoubi*, Sem. Bourbaki (1967/68).

[15] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton 1946.

[16] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), str. 501-517.

[17] S. T. Hu, *Homotopy theory*, New York 1959.

[18] D. Husemoller, *Fiber bundles*, New York 1967.

[19] J. Kohn and L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), str. 269-305.
[20] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1968.
[21] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton 1963.
[22] B. Morin, *Champs de vecteurs sur les sphères d'après J. F. Adams*, Sem. Bourbaki 233 (1961/62).
[23] R. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Amer. Math. Study 57, Princeton 1965.
[24] R. T. Seeley, *Integro-differential operators on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. 117(1965), str. 167-204.