ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

SETNA ROCZNICA URODZIN PROFESOR ANNY ZOFII KRYGOWSKIEJ

Josette Adda
Francja

„Formalizm zdegenerowany" w sensie A. Z. Krygowskiej i obrazy w matematyce

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Przede wszystkim chcę wyrazić moją głęboką wdzięczność i podziękowania wszystkim organizatorom tej ceremonii, którzy zaszczycili mnie zaproszeniem do wystąpienia na tej Jubileuszowej Sesji, abym mogła zaprezentować swoje przemyślenia na temat tego, co zawdzięczam A. Z. Krygowskiej. Szczególnie serdecznie dziękuję Mariannie Ciosek, Bogdanowi Noweckiemu, Maciejowi Klakli i Stefanowi Turnauowi. Proszę o wybaczenie, że będę mówiła po francusku. Nie będąc Polką ani uczniem A. Z. Krygowskiej *sensu stricto* uważam się jednak za jednego z Jej uczniów i dlatego jestem tak wzruszona mogąc być w tej chwili między Wami i mówić o tym, co Jej zawdzięczam.



Chcę również podziękować Maciejowi Klakli za tłumaczenie i Julii Koniwszczyńskiej za pomoc w przygotowaniu prezentacji komputerowej.

Od 1969 roku, aż do śmierci A. Z. Krygowskiej, stawałyśmy się sobie coraz

bliższe, ale Ona zawsze wywierała na mnie duże wrażenie. Miałam ogromny podziw dla Jej osobowości, Jej idealnego humanizmu, nigdy nie zniżającego się do kompromisów, prawie „politycznego", w najbardziej godnym i szlachetnym znaczeniu tego słowa. To właśnie w tym stanie ducha zaangażowała się w działania nad **badaniem i ulepszaniem nauczania matematyki**, zgodnie z nazwą naszej Międzynarodowej Komisji, której była najpierw wieloletnim Prezydentem a następnie Prezydentem Honorowym.

Trzeba przypomnieć, że od 1969 roku broniła *istnienia dziedziny badań, która nie może być włączona całkowicie ani do samej matematyki, ani do pedagogiki sensu stricto... .Narodziny dyscypliny „z pogranicza" i rozwój badań interdyscyplinarnych są jednym z charakterystycznych aspektów dynamizmu współczesnej kultury... Metodologia nauczania matematyki należy właśnie do tych nowo tworzących się dyscyplin, których rozwój kruszy tradycyjną klasyfikację badań.*

Również Krakowska Szkoła była, moim zdaniem, w istocie pierwszą Szkołą Dydaktyki Matematyki i wywarła tak wielki wpływ międzynarodowy, że można by prawie mówić o Szkole Bez Granic.

Tym, co Ją interesowało, nie było, jak u wielu jej współczesnych, znalezienie odpowiedzi na pytanie „czego uczyć", ani nawet „jak uczyć", (co znajdowało odbicie w projektach reform programów lub metod nauczania), ale poszukiwanie zrozumienia, „dlaczego" istnieją takie czy inne trudności w uczeniu się matematyki. Jej podejście zaowocowało szkołą myślenia, w której potrafiono badać nauczanie matematyki takie, jakie ono jest, a nie takie, jakim chciałoby się, aby było.

Zawsze wysoko oceniałam to podejście i podczas wielu konferencji, w których brałyśmy udział, miałyśmy długie konwersacje nie tylko w grupach roboczych, ale również podczas posiłków, czy w momentach odpoczynku, na spotkaniach Komisji CIEAEM, czy podczas kongresów ICME, bądź grupy GIRP, którą kierował Papy.

O błędach

Podczas swego ostatniego lata, w 1987 roku, na Spotkaniu CIEAEM w Sherbrooke (Kanada), poświęconemu **błędom**, wygłosiła A. Z. Krygowska wykład zatytułowany *Zrozumieć błąd w matematyce*, jak również *exposé* na obradach grupy roboczej, w której, jak zwykle, pracowała bardzo aktywnie, od początku do końca.

W moim dzisiejszym wystąpieniu zdecydowałam się ograniczyć do tematu „błędów", który Ją zajmował szczególnie, i do tego, co nazywała *zdegenerowanym formalizmem*, co najmniej od czasu opublikowania w 1957 roku swego

słynnego artykułu *O niebezpieczeństwach formalizmu i werbalizmu w nauczaniu algebry*, przetłumaczonego na wiele języków. Rozpoczęła go przez przytoczenie przykładów z algebry:

Podkreśliła, że uczniowie popełniający błędy nie piszą $\sqrt{4x^2+9y^2} = 2x \cdot 3y$, ale często $\sqrt{4x^2+9y^2} = 2x + 3y$ lub $5xy$. Nie jest to więc **byle jaki zapis** czy totalne głupstwo. Profesor Krygowska miała zbyt wiele szacunku do uczniów, by kiedykolwiek tak myśleć. Dla niej był to błąd, który trzeba **analizować** aby zrozumieć przyczyny jego powstania. Przytaczała również, znane Jej z praktyki nauczania, przypadki skracania ułamka $\frac{Arctg\alpha}{r}$ przez r. To właśnie tu przejawia się postawa reakcji wizualnej na zapis. Również i ja, w mojej pracy, zamieszczonej w czasopiśmie *Visible language* (*Widzialny język*), cytowałam podobne przypadki, jak np. ten, w którym, po „skróceniu" wyrażenia $-\frac{6}{3a-6}$ przez -6 otrzymywano ułamek $\frac{1}{3a}$.

Widoczne... Obrazy... „Uwidocznić niewidoczne"...

To właśnie jest temat, który rozwinę, przybliżając, w sposób ogólny, **prace z dydaktyki matematyki** do pewnych nowych studiów nad **antropologią obrazów** (w szczególności chodzi o wykłady w College de France, które prowadzili Marc Fumaroli — 2002 i Hans Belting — 2003).

Uwidocznić niewidoczne to przede wszystkim **uczynić obecnym to, co nieobecne**. Tradycja grecka przypisuje początki rysunku młodej koryntiance Dibutade. Zarysowała ona na murze kontury cienia swego narzeczonego, który wyjechał w podróż. Na ten temat pisano wiele, a w szczególności to, że aby wykonać ten portret, nie mogła ona spoglądać na mężczyznę, a tylko na jego cień. To nas doprowadza do przywołania sławnego mitu o Jaskini Platona. Co więcej, w szóstej księdze Republiki, Platon tak mówi o matematykach:

> Wykorzystują figury widoczne i ... na tych figurach konstruują rozumowania, nie mając na myśli właśnie tych figur, ale figury doskonałe, dla których te widoczne są obrazami, rozumując na widok kwadratu o nim samym, czy na widok jego przekątnej o niej samej, ale na widok przekątnej, którą rysują, nie o tej narysowanej; podobnie dla innych figur. Te zaś, które kształtują i cyzelują, przedmioty, które wytwarzają cienie lub które odbijają się na powierzchni wody, są z kolei traktowane przez nich jak kopie, gdy starają się zobaczyć figury absolutne, obiekty, których widzenie nie jest możliwe dla osoby w inny sposób, jak tylko poprzez myślenie o nich.

Tutaj mamy do czynienia nie tylko z przypadkiem **uwidocznienia nieobecnego**, ale z **uwidocznieniem tego, co jest niewidzialne**, ponieważ jest to częścią „świata idei".

To właśnie jest wielki, „odwieczny" temat (którego A. Z. Krygowska lubiła używać), **reprezentacji abstrakcji**:

Odnajdujemy tutaj zakazy biblijne Dekalogu: drugie przykazanie powiada:

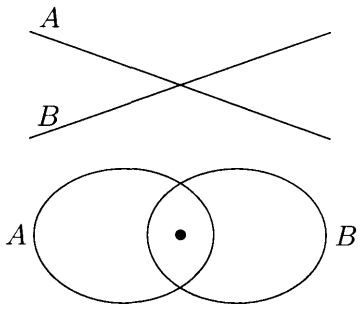
> Nie będziesz czynił żadnego obrazu czy rzeźby na podobieństwo tego, co żyje w przestworzach lub na ziemi, w wodach lub pod ziemią.

Jest zabronione tworzenie obrazów, ponieważ tworzymy rzeczy fałszywe — (np. współczesny problem klonowania...).

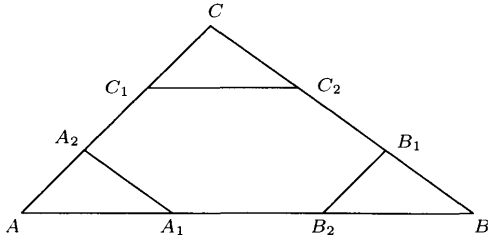
Spór o obrazy rozpalał świat od wieków, od czasu wojen średniowiecznych aż do odnotowanego ostatnio zniszczenia rzeźb i posągów w Bamian w Afganistanie. Trzeba by przypomnieć tutaj walki między *idolatrami* („bałwochwalcami", zwolennikami kultu obrazów), a *ikonoklastami* („obrazoburcami", przeciwnikami kultu obrazów); a także mówić o różnej specyfice obrazów, np. o *ikonach* ortodoksów, które są **archéïropoïète** (to słowo greckie oznacza „nie wykonany ręką ludzką"). Można by przywołać „chustę Weroniki" (t.j. „prawdziwy obraz"), która jest odbiciem oblicza Chrystusa, ma więc status relikwii (ale co z obrazami „chusty Weroniki"?...) i cytować przypadek „Mandylionu" (płótno, na którym Chrystus w cudowny sposób odcisnął obraz swojego oblicza, aby przesyłając ten obraz, w taki sposób odwiedzić króla Edessy, Agbara V), czy casus „Całunu Turyńskiego". Poza tymi wymienionymi szczególnymi przypadkami, trzeba zwrócić uwagę na wszystkie inne „obrazy święte" (patrz np. *Image et Culte*, autorstwa Hansa Beltinga, 1988). Otóż, kiedy ikonoklaści sprzeciwili się otwarcie adoracji „idoli", to zaatakowali właśnie rodzaj *zdegenerowanego formalizmu.*

W matematyce, to oczywiście przede wszystkim **figury geometryczne**, które grają bardzo ważną rolę, jeżeli chodzi o obrazy. Nie będę tu mówić o cudownych obrazach fraktalnych, bo to zupełnie inne zagadnienie, gdyż chodzi o przypadek, gdy matematyka prowadzi pośrednio do wytwarzania obrazów, które są często prawdziwymi arcydziełami sztuki wizualnej. Trzeba tu odnotować liczne prace A. Z. Krygowskiej dotyczące nauczania geometrii, w tym publikacje z lat 1959-1962 w *Mathematica et Pedagogia*, a także skromną, ale zdecydowaną krytykę pewnych aspektów reform „pierwszej fali" — *Mathématique-Moderne*, np. dotyczącą reprezentowania prostych na schemacie Venna (dwie proste przecinające się!)

W owym czasie ja również, może nawet w sposób bardziej agresywny i mniej dyplomatyczny, krytykowałam „patatomanię" (od francuskiego słowa *patate* — ziemniak, którym określano stosowane powszechnie w szkole schematy Venna), wskazując na sprzeczności w stosowanych regułach (np. zbiór pusty... a może wszystkie punkty są elementami... i co z dopełnieniem zbioru do niego samego?)



Ujawniałam również, explicite (1975), „idolatrię" w kulcie tzw. „Papygramów". A oto, co A. Z. Krygowska cytowała a propos trójkątów jako zbiorów punktów:

> Wiele osób, nie tylko uczniów, oswojonych z operacjami na zbiorach w geometrii, przedstawia fałszywe rozwiązanie pewnego problemu sformułowanego w podręczniku, w rozdziale poświęconym twierdzeniu Talesa i własnościom jednokładności, ponieważ wizja globalnego ujęcia euklidesowego towarzyszy ujęciu teoriomnogościowemu. Oto to ćwiczenie:
>
> > Od trójkąta ABC odejmujemy trójkąty $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, i $C_1C_2C_3$ będące obrazami trójkąta ABC w jednokładnościach o skali $1/3$ i środkach odpowiednio A, B, C. Czy figura otrzymana po wykonaniu tych operacji ma środek symetrii?
>
> 
>
>
> Odpowiedź jest często pozytywna: wskazuje się natychmiast środek symetrii; co przy traktowaniu płaszczyzny teoriomnogościowo, jest fałszywe, (mimo, że w klasycznej geometrii euklidesowej jest prawdą, gdyż to, co pozostaje po odjęciu trzech trójkątów jest sześciokątem, posiadającym ewidentnie środek symetrii). Z punktu widzenia teoriomnogościowego, otrzymana figura nie jest sześciokątem (należą do niej np. punkty wewnętrzne odcinka A_1B_2, ale nie należą punkty odcinka C_1C_2).

Czy więc można *pokazać*, czy to znaczy *udowodnić*? Kiedy Sokrates chce wyjaśnić Menonowi podwojenie kwadratu, rysuje na piasku figurę, ale ... chińskie przysłowie nie bez racji mówi: *Kiedy mędrzec pokazuje księżyc, głupiec spogląda na palec.*

Od 1959 roku, w pracy *Kilka problemów dotyczących nauczania geometrii*, A. Z. Krygowska podkreślała, co jest główną trudnością indukowaną przez reprezentacje:

> Brak równowagi w myśleniu ucznia polega na tym, że odbiera on pojęcia geometryczne jako schematy abstrakcyjne. Uczeń pokazuje tablicę i mówi: to jest tablica. Następnie wskazuje rysunek wykonany na tablicy i mówi: oto trójkąt. Te dwie wypowiedzi są analogiczne tylko werbalnie, w istocie wyrażają one rzeczy zupełnie różne, nawet dla początkujących w geometrii dedukcyjnej. Obiekt materialny, złożony z cząsteczek kredy, jest dla ucznia tylko nieprecyzyjnym modelem, który reprezentuje trójkąt, a nie schematem trójkąta, o którym on myśli. I mimo to, często nie odczuwa on potrzeby formalnej weryfikacji tezy geometrycznej, której dotyczy ten schemat. Co więcej, jeżeli nawet zna on podobną weryfikację, to zdarza się, że uzupełnia ją spontanicznie doświadczeniami wykonywanymi na tymże obiekcie złożonym z cząsteczek kredy. Takie postępowanie spowodowane jest, z jednej strony, pewnym brakiem czystości metodologicznej w geometrii szkolnej, a z drugiej, myśleniem na wpół formalnym i na wpół konkretnym debiutantów w geometrii dedukcyjnej.

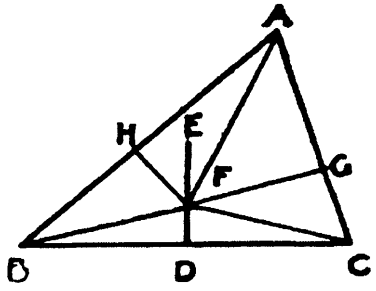
Miałam już okazję mówić tutaj, na Seminarium z Dydaktyki Matematyki w Krakowie, w latach osiemdziesiątych, o nieporozumieniach na linii *obiekt-reprezentacja*. Współpracowałam wówczas z W. Zawadowskim, który studiował *metafory i metonimie*. Przywoływałam wtedy słynny obraz Magritte'a *To nie jest fajka* (*Ceci n'est pas une pipe*) i do wykorzystywanych przez surrealistów nieporozumień związanych z pomieszaniem rzeczy i słów (Foucault, 1973).



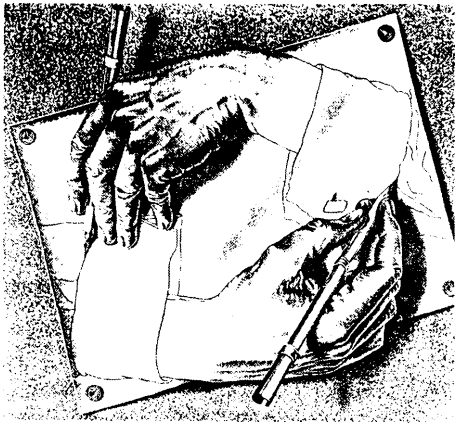
Te nieporozumienia są bardzo częste w umysłach uczniów, dla których trójkąt ABC, o którym mówią, mając w zeszytach jego rysunek (nawet wyraźnie formułując kwantyfikator ogólny), nie może być obiektem abstrakcyj-

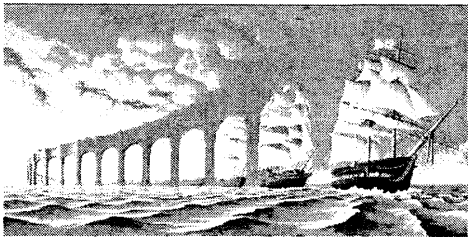
nym, który istnieje w umyśle każdej istoty ludzkiej, gdziekolwiek i w jakim momencie by to było. Stąd biorą się liczne błędy.

Liczne przykłady błędów spowodowanych przez złudzenia rysunkowe znajdujemy u Dubnova (1974), jak np. podany przez Levisa Carolla „dowód", że *wszystkie trójkąty są równoramienne*, wychodzący od „fałszywego" rysunku, przedstawiającego punkt F wewnątrz trójkąta, gdy w rzeczywistości powinien on się znajdować na zewnątrz.



To prowadzi nas do przywołania innych złudzeń wizualnych, tzw. złudzeń optycznych (jak np. te, które znajdujemy na rysunkach Eschera).





W tych przypadkach przyczyną naszych pomyłek są obrazy, ale dzisiaj, coraz częściej oszukuje się nas przez obrazy. Jest to więc formalizm intencjonalny, zdegenerowany po to, aby zatruwać propagandą... W świecie tak opanowanym przez media, jest ważne, bardziej niż kiedykolwiek, by nauczyć się ostrożności w odbiorze obrazów. Odnotujmy, że o dawien dawna przyjęto ślepotę jako alegorię błędu.



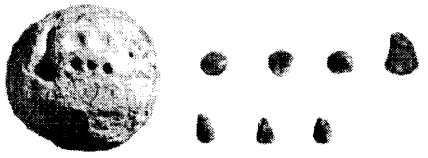
Ale nie można pominąć kontrprzykładu niewidomych geometrów (np. Profesor Morin ze Strasburga). Na ten temat pisał również Diderot w swoim *Lettre sur les aveugles* (*List o niewidomych*), gdzie mówi o niejakim Saundersonie, niewidomym od urodzenia, który bardzo dobrze rozpoznaje symetrię... mówi dużo o zwierciadle, wynajduje maszynę do rachunków, w której wykorzystuje zasadniczo dotyk (9 szpilek w wierzchołkach czworokąta podzielonego na cztery pola pomaga reprezentować cyfry od 1 do 9. Jest to coś w rodzaju minikomputera, który przedstawiała F. Papy w latach sześćdziesiątych).

Tymczasem A. Z. Krygowska wcale nie negowała użyteczności wykonywania rysunków figur (oczywiście nie byle jakich rysunków) i umiejętności patrzenia na nie) i przeciwstawiała się ekstremistycznym tendencjom nauczania *geometrii bez rysunków*. Myślała o tym wiele pod koniec życia. W swoim smutnym ostatnim liście[1], który napisała 15 kwietnia 1988 roku, na miesiąc przed śmiercią, informuje mnie, że nie będzie mogła, jak przewidywała, przyjechać do Paryża w maju, i niepokoiła się, czy zdrowie pozwoli Jej uczestniczyć w kongresie w Budapeszcie, gdzie, jak mówiła, *zgłosiłam komunikat dla grupy Gaulin „Visualisation", dotyczący roli rysunku odręcznego (szkicu) w rozumowaniach matematycznych i znaczenia niezmienników w takich rysunkach.* To mi nasuwa myśl o impresjonizmie i słynnej maksymie, którą cytuje Polya: *geometria to sztuka poprawnego rozumowania na niepoprawnych rysunkach.* Uderza mnie mocno ten bardzo nowatorski sposób mówienia o szkicu. Zresztą Laotseu mówi: *wielki obraz nie ma formy*, cytowany przez sinologa F. Julien (2003), który objaśnia bogactwo odwołań do szkicu dla chińskiego sposobu myślenia. Wiele aspektów tej problematyki odnajdujemy w funkcji inspirującej, jaką pełnią obrazy w matematyce.

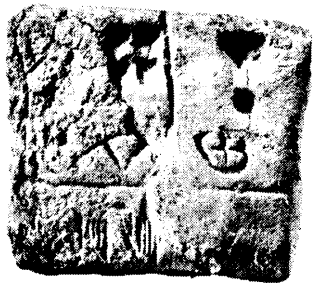
[1]Cytowałam ten list podczas CIEAEM 55 w Płocku w 2003 roku

Mimesis et methexis

J. L. Lancy, współczesny filozof, podejmuje zagadnienia dotyczące opozycji między *mimesis* (reprezentacja przez imitację, kopiowanie, klonowanie) a *methexis* (reprezentacja przez uczestnictwo, jako element reprezentujący klasę równoważności, dla pewnego rodzaju...). Sądzę, że można tu odnaleźć drogę do zrozumienia tego, co według matematyków różnicuje sposoby wykorzystania obrazów, jeżeli oczekujemy, że figura imituje obiekt matematyczny, popełniamy błąd, ale obraz może być podpórką dla myślenia. Jest frapujące uświadomienie sobie, że u źródeł i początków pisma znajdujemy zapisy liczb (obraz liczb).



Bulle-enveloppe et *calculi* de Suse
Suse, époque d'Uruk, vers 3300 av. J.-C.
Diam. 1,5 cm
Musée du Louvre, Antiquités orientales, Sb 1927. Copyright photo RMN



Tablette précunéiforme
Basse Mésopotamie, vers 3200-3100 av. J.-C.
Argile, H. 4,4 x l. 4 cm, ép. 1,5 cm
Musée du Louvre, Antiquités orientales, AO 8854



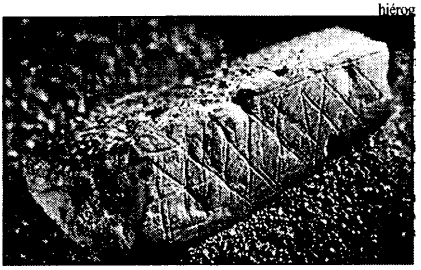
29 Tablette sumérienne archaïque : acte de vente d'un esclave mâle et d'une maison de la ville de Shuruppak
Argile cuite
Longueur : 8 cm ; largeur : 5 cm ; épaisseur : 2 cm
Mésopotamie
Époque des dynasties archaïques, vers 2600 av. J.-C.

Ostatnie odkrycie w Afryce Południowej rysunków w kamieniu, które datujemy na 77000 lat przed naszą erą, uważane za najstarsze znalezione dotych-

czas ślady myślenia ludzkiego, wywiera ogromne wrażenie, ponieważ wydaje się śladem myślenia matematycznego.

Można sądzić, że znajdujemy tam refleksję typu matematycznego, świadczącą o tym, że myślenie wyprzedzało rysunek, że schemat został najpierw *wyobrażony*. Zresztą, nie można mówić o obrazach w matematyce bez mówienia o obrazach mentalnych. W języku francuskim relacje między słowami *obraz* (*image*) a *wyobrażać* (*imaginer*) są bardzo ścisłe i zróżnicowane, tak samo zresztą jak słowa *reprezentować* (*représenter*) oraz *przedstawić sobie* (*se représenter*), które dotyczą odpowiednio obrazów materialnych, czy mentalnych.

Mais ce qui attire notre attention à Blombos, c'est l'existence de figures géométriques régulières (triangles), tracées sur de la pierre. L'essence même de l'esprit mathématique est déjà là !



PIERRE GRAVEE

GROTTE DE BLOMBOS

Cette succession de faits extraordinaires qui atteste de l'avancée technologique des peuples africains durant la préhistoire est déjà une indication précieuse pour apprécier l'émergence très ancienne des sciences mathématiques en Afrique.

W istocie wiemy dziś (i to usprawiedliwia to, co zostało powiedziane wyżej o niewidomych), że to mózg pozwala na „widzenie". Trzeba odróżniać „postrzeganie" (za pomocą oczu) od „widzenia" (za pomocą mózgu). Bernard Parzysz miał okazję przedstawiać, o ile pamiętam, właśnie na Seminarium z Dydaktyki Matematyki w Krakowie, swoją pracę o reprezentacjach na płaszczyźnie figur przestrzennych, w której analizował związki miedzy „widzieć" a „wiedzieć", co jest szczególnym przypadkiem dotyczącym roli kontekstu w rozumieniu i wyjaśnieniu, dlaczego ten sam obraz (podobnie jak i ta sama wypowiedź, w szerszym sensie), jest rozumiana, postrzegana i interpretowana w różny sposób przez różne osoby, a nawet przez tę samą osobę, ale w różnych warunkach. To także w tym tkwią trudności, które nauczyciel napotyka, zwracając się do klasy.

Również, „szkic" może pomóc w wyobrażeniu sobie obiektu matematycznego, trzy, cztero, lub więcej wymiarowego, ale zazwyczaj szkice różnych matematyków różnią się. Odnajdujemy tutaj zagadnienia rozpatrywane wyżej, przy okazji *sporu o obrazy*, dotyczące różnych reprezentacji pojęć abstrakcyjnych. Można by przytoczyć także przykład sztandaru: to, że reprezentuje ojczyznę, nie zmienia *mimesis*, a przeżycia każdego obywatela mogą nadać temu symbolowi tak głęboki sens, że będzie zdolny „umrzeć za sztandar". W końcu, chciałabym zasygnalizować bardzo oryginalne badania Daniela Arasse (2004) o tym, jak niektórzy malarze renesansu stosowali punkt ucieczki perspektywy, aby przedstawić Wcielenie Syna Bożego w licznych obrazach Zwiastowania.

Wnioski

Cytowałam powyżej filozofa Jean-Luc Lancy: *ikona jest obecnością niewidzialnego*; omawiając fotografie, powiedział również, że *całe tło tworzy powierzchnię w obrazie, która podlega animacji i powoduje, że podmiot, który ogląda obraz, jest poruszony*, a Belting dodaje: *kiedy oglądamy obraz, nasz mózg to ożywia... Wszystkie obrazy, które oglądamy, to obrazy animowane.* Wytworzony przez człowieka obraz jest ożywiany przez naszą wyobraźnię i fotografia staje się *obecnością nieobecnych* (J. P. Vernant). W ten sposób zdjęcie A. Z. Krygowskiej pozwala, aby choć przez chwilę odżyła w każdym z nas. Także inne obrazy, słowa, przedmioty czy sytuacje mogą *naszkicować* równie intensywnie Jej obecność. Przypisuje się Sokratesowi, że nie chciał po sobie pozostawić swoich wizerunków, ale uczniów, którzy by zachowali pamięć o nim. Złożony wizerunek Anny Zofii Krygowskiej, który zachowujemy i który na zawsze pozostanie dla nas inspiracją, jest czymś znacznie bogatszym, niż zwykła fotografia.



Literatura

A d d a, J.: 1975, L'incompréhension en mathématiques et les malentendus, *Educational Studies in Mathematics* **6**, no. 3, 311-326.

A d d a, J.: 1982, Difficulties with mathematical symbolism: synonimy and homonimy, *Visible language* **XVI** no. 3, 205-214.

A d d a, J.: 1988, Erreurs provoquées par les représentations, w: *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. Compte rendu de la 39^e rencontre internationale de la CIEAEM*, Les éditions de l'Universite de Sherbrooke, 329-335.

A d d a, J.: 1996, Analyse logique de certains dysfonctionnements de l'enseignement des mathématiques, w: *Actes du colloque «la logique dans l'enseignement des mathématiques», Liége, mai 1996 in Belgian Mathematical Society-supplement au vol. 5*, no. 5, 1-6.

A r a s s e, D.: 2004, *Histoires de peintures*, Denoël.

B e l t i n g, H.: 1998, *Image et culte*, Editions du Cerf.

B e l t i n g, H.: 2004, *Pour une anthropologie des images*, Gallimard.

D e r r i d a, J.: 1990, *Mémoires d'aveugle*, Reunion des Musées Nationaux, Le Louvre.

D i d e r o t, D.: 1999, *Lettre sur les aveugles*, editions Ellipses.

D o u b n o v, S.: 1974, *Erreurs dans les démonstrations géométriques*, Editions de Moscou.
F o u c a u l t, M.: 1973: *«Ceci n'est pas une pipe», Editions Fata Morgana.*
J u l l i e n, F.: 2003, *La grande image n'a pas de forme*, Editions du Seuil.
K r y g o w s k a, A. Z.: 1957, Sul pericolo del formalismo e del verbalismo nel'insegnamento dell'algebra, *Archimede fasc.* **4-5**, 165-177.
K r y g o w s k a, A. Z.: 1959, Quelques problémes concernant l'enseignement de la géométrie, *Mathematica & Paedagogia* **18**, 20-44.
K r y g o w s k a, A. Z.: 1962, L'enseignement de la géométrie dans la mathématique unitaire d'aujourd'hui, *Mathematica & Paedagogia* **23**.
K r y g o w s k a, A. Z.: 1966, Méthodologie de l'enseignement des mathématiques, w: *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques, Document UNESCO*, 202-218.
K r y g o w s k a, A. Z.: 1988a, Comprendre erreur en mathématiques, w: *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la CIEAEM*, Les éditions de l'Universite de Sherbrooke, 12-16.
K r y g o w s k a, A. Z.: 1988b, A study of certain types of errors linked to the symbolic terminology of elementary algebra, w: ibidem, 291-299.
P a r z y s z, B.: 1989, Représentations planes et enseignement de la géométrie dans l'espace au lycée, Contribution a l'étude de la relation voir/savoir, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.

Z francuskiego przełożył Maciej Klakla