ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

SETNA ROCZNICA URODZIN PROFESOR ANNY ZOFII KRYGOWSKIEJ

František Kuřina
Republika Czeska

Anna Zofia Krygowska i czeska dydaktyka matematyki

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Ż radością przyjąłem zaproszenie na waszą Sesję Jubileuszową z okazji setnej rocznicy urodzin Prof. A. Z. Krygowskiej. Serdecznie za nie dziękuję. Z przyjemnością spotykam się po latach z Koleżankami i Kolegami z Akademii Pedagogicznej, z przyjemnością wracam do Waszego pięknego Krakowa.

Dziękuję za możliwość wystąpienia na tej uroczystej sesji. Jestem jednak zakłopotany, ponieważ referat powinien mieć naukowy charakter. Mój referat jest bardzo osobisty, subiektywny. Kiedy jednak postawimy pytanie „Co to jest doniesienie naukowe?", możemy — w myśl idei Hansa Freudenthala, jednego z założycielskiej generacji dydaktyków matematyki, do której należała także nasza Jubilatka — odpowiedzieć, że atrybutem naukowości jest doniosłość. A będę mówił o wpływie dokonań Profesor Krygowskiej na czeską dydaktykę matematyki, który uważam za doniosły.

W trakcie przygotowywania tego referatu odkryłem jeden ważny fakt: A. Z. Krygowska wydźwiękiem swojego dzieła może wywrzeć wpływ na dydaktykę matematyki w XXI wieku bardziej, niż sobie to uświadamiamy. Niektóre jej idee dotąd nie zostały zrealizowane, a powinniśmy do nich wrócić. Są to według mnie przede wszystkim dwie idee.

1. Rozwój aktywności ucznia, orientacja procesu kształcenia na indywidualny proces uczenia się, a więc na **konstruowanie matematycznej wiedzy w umyśle ucznia**. W języku współczesnej terminologii nazywamy to konstruktywnym podejściem do nauczania matematyki.

Niektóre aspekty tego podejścia opracowaliśmy z Milanem Hejným w książce *Dítě, škola a matematika* [*Dziecko, szkoła i matematyka*] (Hejný, Kuřina, 2001), do której jeszcze wrócę.

2. Transformacja języka matematyki szkolnej według A. Z. Krygowskiej prowadzi do analizy problemów wizualizacji (sztuki widzenia), które się dziś stale wykorzystuje. Idee Pani Profesor wywarły ogromny wpływ na moją książkę *Umění vidět v matematice* [*Umiejętność widzenia w matematyce*] (Kuřina, 1989). Także do tej problematyki powrócę.

1 Spotkanie

Z nazwiskiem Anna Zofia Krygowska spotkałem się po raz pierwszy na stronach waszego czasopisma *Matematyka*, gdzie zainteresował mnie artykuł Profesor Krygowkiej *O realizacji programu geometrii w liceum ogólnokształcącym* (Krygowska, 1963). Czeską dydaktykę matematyki zapoznałem z ideami tej pracy w artykule *Shodná zobrazení v rovině v systému vyučování geometrii* [*Przekształcenia na płaszczyźnie w systemie nauczania geometrii*] (Kuřina, 1965). Podejście do izometrycznych przekształceń, dla mnie wówczas nowe, jawi się dziś jako klasyczne i przywołuję je także w swojej książce *Deset geometrických transformací* [*Dziesięć przekształceń geometrycznych*] (Kuřina, 2002). Przypomnę tu dla ścisłości na przykład ujęcie określeń i twierdzeń dotyczących przekształceń izometrycznych oraz twierdzenie o rozkładzie izometrii na trzy symetrie osiowe.

Kiedy ukazał się podręcznik *Geometria — podstawowe własności płaszczyzny* (Krygowska, 1965), napisałem jego recenzję *Netradiční cesta k euklidovské geometrii (O knize Zofie Krygowské: Geometria — podstawowe własności płaszczyzny)* [*Nietradycyjna droga do geometrii euklidesowej (O książce Zofii Krygowskiej: Geometria — podstawowe własności płaszczyzny)*] (Kuřina, 1966), która ukazała się w czasopiśmie *Pokroky*. Nie mogę tu nie przypomnieć faktu, że gdy spotkałem się po latach z Panią Profesor, to cytowała z mojej recenzji niektóre myśli, a za napisanie recenzji serdecznie mi dziękowała. Wspomniany podręcznik był próbą dedukcyjnej konstrukcji geometrii w szkole średniej. Jakkolwiek wówczas byłem zachwycony książką, muszę przyznać, że dziś mam na to zagadnienie odmienny pogląd. Aksjomatyczne i logiczne podejście, tak charakterystyczne dla matematyki jako nauki, nie jest odpowiednie na początku uczenia się matematyki. Tę tendencję, zrozumiałą w środowisku upojonym strukturami (przypomnę np. amerykańskiego pedagoga i psychologa J. S. Brunera), należało koniecznie korygować w dalszym rozwoju. Mimo to orientację geometrii na przekształcenia, którą Pani Profesor realizowała w duchu idei Feliksa Kleina, uważam także i dziś za właściwą. Moja recenzja kończy się takim wnioskiem:

Geometria Zofii Krygowskiej jest bardzo pouczającą książką o tym, jak w nowoczesny sposób rozumieć geometrię w szkole średniej. Zasadniczą rolę odgrywają

w niej przekształcenia geometryczne, które stają się istotną podstawą geometrii. Książka jest napisana żywym językiem, zapewne w znacznej mierze dostępnym dla uczniów. Ważnym narzędziem w nauczaniu jest schemat. Służy niekiedy do jasnego wyrażenia struktury dowodu, innym razem odkrywa proces abstrakcji przy tworzeniu pojęć, które są wprowadzane naturalnym sposobem. Książka „Geometria" jest — z uwagi na swe ujęcie i opracowanie — bezsprzecznie nietradycyjnym podręcznikiem. Na aktualnym etapie naszych prac nad modernizacją nauczania matematyki jest jej studiowanie bardzo pożyteczne.

To było moje pierwsze spotkanie z Panią Profesor.

2 Idee dla XXI wieku

W roku 1965 w 1. numerze rocznika *Prace z Dydaktyki Szkoły Wyższej* ukazał się artykuł odnoszący się do dydaktyki matematyki jako przedmiotu studiów wyższych (Krygowska, 1965). Niektóre idee sformułowane w tym artykule uważam za aktualne także i dla współczesnych przemyśleń nad problemami kształcenia matematycznego. Uważam, że są to zadania, które powinna rozwiązywać dydaktyka matematyki w XXI wieku; w naszej szkole oczywiście nie są one rozwiązane w zadowalający sposób. W artykule *Modernizace vyučování matematice na základnich devítiletých školách a studium matematiky na pedagogických fakultách* [*Modernizacja nauczania matematyki w podstawowych dziewięcioletnich szkołach oraz na kieruku matematyki na wydziałach pedagogicznych*] (Kuřina, 1966) sformułowałem je w roku 1966 dla naszej dydaktyki następująco:

1. Przybliżyć elementarną matematykę do współczesnej nauki.
2. Wprowadzić syntezę do elementarnej matematyki w celu zastąpienia wielości tematów i zadań przez strukturalną całość.
3. Uczynić z matematyki uniwersalne narzędzie użyteczne w teorii i w praktyce.
4. Ukazać uczniom te ludzkie oblicza matematyki, które przeżywa każdy matematyk twórca.

Za najważniejsze punkty uważam dwa ostatnie. Rozumieć matematykę jako narzędzie, a więc orientacja matematyki na zastosowania, nadal się raczej nie udaje, choć jest to podstawowe zagadnienie kształcenia na potrzeby społeczne. Ostatni punkt kieruje dydaktykę ku problemom rozwoju psychiki dziecka, a więc ku problematyce, którą dziś nazywamy konstruktywnym podejściem do nauczania, którego częścią składową jest nauczanie problemowe. Z przyjemnością przyznam, że z tej gleby wytworzonej przez A. Z. Krygowską, wyrosły moje dwie książki.

Z pierwszą z nich *Problémové vyučování v geometrii* [*Problemowe nauczanie geometrii*] (Kuřina, 1976) zapoznałem wasze seminarium w trakcie swojej pierwszej wizyty w Krakowie. Kiedy dziś, po zapoznaniu się z poglądami Rozsy Peterovej, wybitnej matematyczki węgierskiej, kartkuję tę książkę, stwierdzam, że dedukcyjny aspekt geometrii tłumi orientację na twórcze myślenie inspirowane realnym światem, który otacza ucznia. W książce *Dítě, škola a matematika* [*Dziecko, szkoła i matematyka*] (Hejný, Kuřina, 2001), omawiamy konstruktywne podejścia wywodzące się z idei Piageta. Wiele przedstawionych tam poglądów było pośrednio albo bezpośrednio zainspirowanych pracami A. Z. Krygowskiej. Przypomnimy tu choćby kilka poglądów z tzw. Dekalogu konstruktywizmu (s. 160):

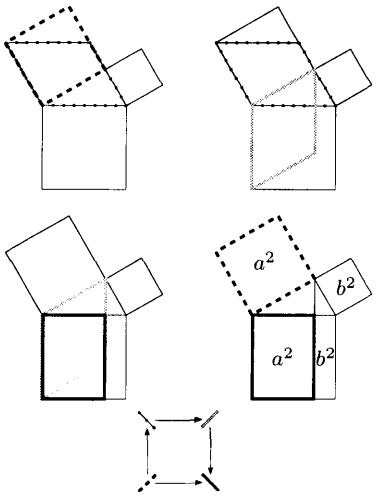
- **Matematykę rozumiemy przede wszystkim jako specyficzną ludzką aktywność**, a w żadnym razie nie jako jej rezultat, który się zazwyczaj sprowadza do zbioru definicji, twierdzeń i dowodów.
- Podstawowym elementem aktywności matematycznej jest **poszukiwanie zależności, rozwiązywanie problemów**, uogólnianie twierdzeń i ich dowodzenie.
- Wytwarzanie wiadomości opiera się na informacjach, jest wszakże **uzależnione od doświadczeń poznającego**.
- Proces kształcenia w matematyce należy realizować z co najmniej trzech stanowisk. Pierwszym jest **zrozumienie matematyki**, drugie jest **opanowanie matematycznego rzemiosła**, trzeci to są **zastosowania matematyki**".

Uważam, że stale aktualne są idee Pani Profesor Krygowskiej o poglądowości w nauczaniu. W książce *Umění vidět v matematice* [*Umiejętność widzenia w matematyce*] (Kuřina, 1989a, s. 18) cytuję Jej słowa (Krygowska, 1977b, s. 112):

> *Współczesna dydaktyka matematyki wypracowała bardzo efektywny sposób graficznej reprezentacji matematycznych treści... Schematy, grafy, tabelki,... stały się częścią języka elementarnej matematyki i zmieniły jej tradycyjny styl. Od białego obrazu na czarnej tablicy przeszliśmy do rysunku, w którym kolor odgrywa rolę istotnego elementu symboliki. Te środki należy wykorzystywać w wykładzie możliwie szeroko, ale racjonalnie: kolorowy rysunek nie jest dla ozdoby.*

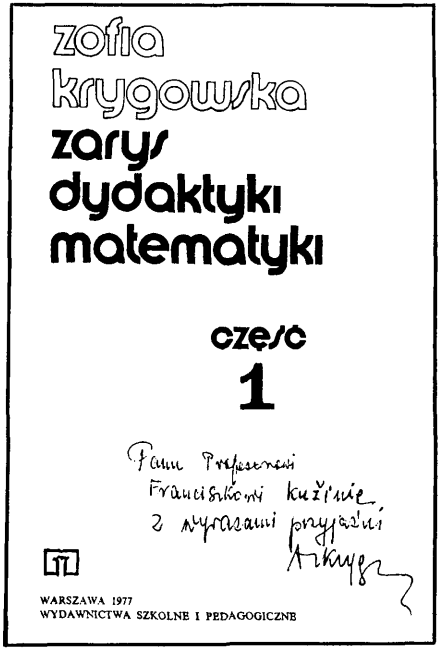
Autorka przewiduje tu liczne idee o niewerbalnym wyrażaniu, które znalazły zastosowanie we współczesnych czasach. Przypomnę tu np. książki *Proofs Without Words* [*Dowody bez słów*] amerykańskiego matematyka Rogera B. Nelsena (1993).

Oto przykład takiego dowodu bez słów.



Stosunkowo obszerny mój artykuł o tej tematyce opublikowano w Dydaktyce Matematyki *Jak myśl uczynić widzialną* (Kuřina, 1998).

Najważniejszym osiągnięciem pracy dydaktycznej Prof. Krygowskiej jest, moim zdaniem, trzytomowa książka *Zarys dydaktyki matematyki* (Krygowska, 1977a, 1977b, 1977c).



Czeską społeczność nauczycielską zapoznałem z tym dziełem w serii artykułów *Didaktika matematiky Zofie Krygovské* [*Dydaktyka matematyki Zofii Krygowskiej*] w czasopiśmie *Matematika a fyzika ve škole* (Kuřina, 1979). Przypomnijmy tu kilka myśli, według mnie aktualnych również w XXI wieku (w cytatach wytłuszczenia autora).

1. ***Główne problemy dydaktyki matematyki mające charakter teoretyczny*** *wyrastają na gruncie* ***praktyki****, na gruncie oczywistych* ***potrzeb*** *nauczania matematyki, któremu stawia się dziś coraz wyższe i coraz trudniejsze do realizacji wymagania.* (Krygowska, 1977a, s. 5)
2. *Pojęcia, twierdzenia, rozumowania matematyczne mają* ***charakter jawnie operatywny****, operatywny charakter ma w dużej mierze także język matematyki, jej słownik. Myślenie matematyczne nie jest bierną kontemplacją danej nam a priori sytuacji: jest bardzo wyraźną aktywnością, wykonywaniem różnego typu czynności. (...) Na stopniu elementarnym coś obliczamy, porządkujemy jakiś zbiór, wykonujemy działanie na jakichś zbiorach, porównujemy co do wielkości dwie liczby, wybieramy pomocnicze punkty, prowadzimy pomocnicze proste, wyróżniamy w zawiłej konfiguracji jakąś część, jak sądzimy szczególnie ważną, przekształcamy figurę geometryczną, odwzorowujemy, oznaczamy, symbolizujemy itp. Na poziomie wyższym operacje stają się bardziej skomplikowane, ale i one opierają się, jak na rusztowaniu, na pewnym zespole elementarnych, podstawowych czynności myślowych; są one złożonymi bardzo kombinacjami tych podstawowych czynności.* (Krygowska, 1977a, s. 84)
3. W nauczaniu matematyki niezastąpione są **doświadczenia ucznia**.

   Czynność matematyzowania na różnych poziomach, w naszej koncepcji dydaktycznej, uznajemy za istotną składową tego, co nazwiemy matematyczną aktywnością ucznia. Proces matematyzacji, w którym uczeń twórczo uczestniczy pod kierunkiem nauczyciela, ma przy tym wielostronne walory ogólnokształcące. I tego faktu nie możemy również w naszych rozważaniach specjalistycznych pomijać. (...) Matematyzację doświadczeń i intuicji ucznia powinno się przeprowadzać możliwie wcześnie, możliwie radykalnie, możliwie od początku czysto z punktu widzenia matematyki, choć zawsze w sposób możliwie naturalny. Między tymi dwoma postulatami nie ma istotnej sprzeczności. Ich równoczesna realizacja wymaga natomiast wnikliwego organizowania dydaktycznego procesu. (Krygowska, 1977a, s. 79)
4. ***Zbliżyć nauczanie do nauki*** *i* ***do praktyki*** *zbliżając je równocześnie do ucznia — to dziś najistotniejsze zagadnienia zarówno teorii, jak i praktyki nauczania matematyki* (Krygowska, 1977a, s. 30).

5. *Nauczanie matematyki to — ze strony nauczyciela — **organizowanie aktywnego i świadomego procesu uczenia się matematyki przez ucznia**, kierowanie jego prawidłowym przebiegiem i kontrolowanie jego wyników*

6. **Język** szkolnej matematyki nie powinien być tylko sposobem wyrażania myśli, ale ma być także **narzędziem w rozwiązywaniu problemów**.

   *Symboliczny język matematyki cechuje się bowiem tą osobliwością, że jest on specyficznym **narzędziem pracy matematyka**, bo — jak mówił Poincaré — są momenty, gdy sam **język za matematyka pracuje**. Wie o tym każdy uczeń, gdy po opanowaniu jakiegoś algorytmu prawie mechanicznie przekształca zapisy, aby ostatecznie rozwiązać zadanie* (Krygowska, 1977b, s. 30).

7. *Tylko **w toku rozwiązywania matematycznych problemów** uczeń zdobywa **kulturę myślenia**, którą może dać uczenie się matematyki* (Krygowska, 1977c, s. 4).

8. Obraz **matematyki uczeń tworzy sobie przez pryzmat rozwiązywanych zadań**.

   *Czym jest matematyka i czym może być ona dla niego, uczeń poznaje aktywnie właśnie rozwiązując **odpowiednio dobrane matematyczne zadania*** (Krygowska, 1977c, s. 3).

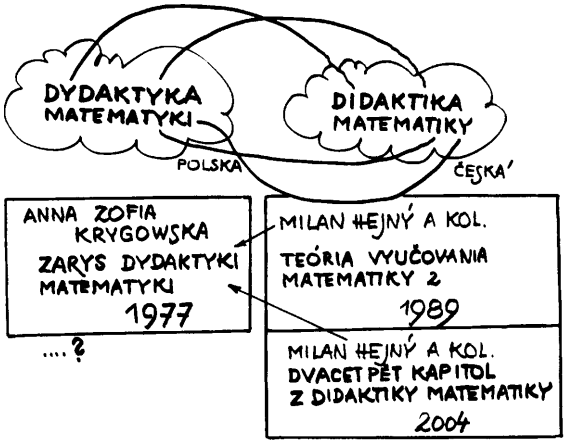
9. *W świetle tych doświadczeń i obserwacji można stwierdzić, że **zainteresowania dzieci zależą** przede wszystkim **od procesu nauczania**, od strawy intelektualnej, którą się dziecku daje. Są one szeroko otwarte dla rozmaitych motywacji, i tych praktycznych, i tych teoretycznych* (Krygowska, 1977c, s. 139).

10. *Można wyuczać szybko wiadomości i ćwiczyć szybko sprawności, **nie można kształcić w pośpiechu*** (Krygowska, 1977c, s. 165).

Zwięzłe przypomnienie niektórych idei pani Profesor oznacza naturalnie ich zubożenie, dlatego jestem przeświadczony, że są tu formułowane liczne postulaty dotąd nierealizowanego dobrego matematycznego kształcenia.

W języku czeskim opublikowane były trzy artykuły A. Z. Krygowskiej:
1957, *O nebezpečích formalismu při vyučováni algebře ve škole* [O niebezpieczeństwach formalizmu w nauczaniu algebry w szkole], *Matematika ve škole* **5**, 257-266;
1960, *Pozorování a pokus ve vyučování geometrii*, [Obserwacja i doświadczenie w nauczaniu geometrii] *Matematika ve škole* **1**, 42-52;
1960, *Dokazování vět v geometrii [Dowodzenie twierdzeń w geometrii]*, *Matematika ve škole* **2**, 110-119.

Chcę zwrócić jeszcze uwagę, że *Zarys Dydaktyki Matematyki* został wydany w 1977 roku a nasze podstawowe wspólne prace dydaktyczne, w których cytowana jest Profesor Krygowska, ukazały się w Czechach dopiero w 1989 i w 2004 roku.



3 Rozstanie

W roku 1984 światowa dydaktyka matematyki świętowała osiemdziesiąte urodziny Anny Zofii Krygowskiej. Wśród uczestników konferencji poświęconej tej to rocznicy były takie osobistości, jak Emma Castelnuovo, Tamas Varga i Hans Freudenthal. Wówczas nie uświadamiałem sobie, że widzę panią Profesor po raz ostatni, za cztery lata po tym spotkaniu zmarła. Szczegółowe informacje o krakowskiej szkole dydaktyki matematyki opublikowało nasze czasopismo *Matematika a fyzika ve škole* (artykuł: *Krakovská škola didaktiky matematiky a profesorka Anna Zofia Krygowská* [*Krakowska szkoła dydaktyki matematyki i profesor Anna Zofia Krygowska*] (Kuřina, 1985). Nekrolog z opisem jej dzieła publikowali np. rosyjscy autorzy Bloch i Czerkasow (1989) pod tytułem *O współczesnych tendencjach w metodyce nauczania matematyki.* Sam napisałem wspomnienie *Zemřela Profesorka A. Z. Kygowská čestná členka JČSMF* [*Zmarła Profesor A. Z. Krygowska, honorowy członek Towarzystwa Czechosłowackich Matematyków i Fizyków*], w: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* (Kuřina, 1989).

Pani Profesor była wiodącą osobowością międzynarodowej współpracy w dziedzinie nauczania matematyki. W szóstym światowym kongresie ICME-6, ktory odbył się w roku 1988 w Budapeszcie, już nie mogła uczestniczyć. Na dziesiątym kongresie ICME-10, który odbył się w 2004 roku w Kopenhadze,

Erich Wittmann użalał się: *W pogoni za nowymi wiadomościami nie szanujemy rezultatów opublikowanych w przeszłości.* Wydaje mi się, że ten okrutny los spotkał także wiele idei z dorobku i dziedzictwa pani Krygowskiej.

Moje wystąpienie jest zapewne zbytnio subiektywne, odzwierciedla fakt, że na moją dydaktykę, jako część czeskiej dydaktyki, Profesor Anna Zofia Krygowska miała wyraźny wpływ. Z szacunkiem pochylam się nad jej dorobkiem.

Z czeskiego przełożył Adam Płocki

Literatura

Блох, А. Я., Черкасов, Р. С.: 1989, О современных тенденциях в методике преподавания математики, *Математика в школе* **5**, 133-142.

Hejný, M. a kol.: 1989, *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava.

Hejný, M., Kuřina, F.: 2001, *Dítě, škola a matematika*, Portál, Praha.

Hejný, M. a kol.: 2004, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha.

Krygowska, A., Z.: 1957, O nebezpečích formalismu při vyučováni algebře ve škole, *Matematika ve škole* **5**, 257-266.

Krygowska, A., Z.: 1960, Pozorování a pokus ve vyučování geometrii, *Matematika ve škole* **1**, 42-52.

Krygowska, A., Z.: 1960, Dokazování vět v geometrii, *Matematika ve škole* **2**, 110-119.

Krygowska, A., Z.: 1963, O realizacji programu geometrii w liceum ogólnokształcącym, *Matematyka* **1/2**, 15-41.

Krygowska, A., Z.: 1965, *Geometria. Podstawowe własności płaszczyzny*, PZWS, Warszawa.

Krygowska, A., Z.: 1965, Założenia konstrukcji i doboru problematyki programu metodyki nauczania matematyki w szkołach wyższych kształcących nauczycieli, w: *Prace z Dydaktyki Szkoły Wyższej* **1.**, WN WSP, Kraków, 19-52.

Krygowska, A., Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, A., Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, A., Z.: 1977c, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

K u ř i n a, F.: 1965, Shodná zobrazení v rovině v systému vyučování geometrii, w: *Sborník II*, Pedagogická fakulta Hradci Králové, 239-265.
K u ř i n a, F.: 1966, Netradiční cesta k euklidovské geometrii (O knize Zofie Krygowské: Geometria — podstawowe własności płaszczyzny), *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **XI**, 229-239.
K u ř i n a, F.: 1968, Modernizace vyučování matematice na základních devítiletých školách a studium matematiky na pedagogických fakultách, w: *Sborník přírodovědné řady* **V**, Pedagogická fakulta Hradci Králové, 21-35.
K u ř i n a, F.: 1976, *Problémové vyučování v geometrii*, SPN, Praha.
K u ř i n a, F.: 1979, Didaktika matematiky Zofie Krygowské, *Matematika a fyzika ve škole* **2**, 84-90, č. 3, 163-169, č. 4, 250-263.
K u ř i n a, F.: 1985, Krakovská škola didaktiky matematiky a profesorka Zofie Krygowská, *Matematika a fyzika ve škole* **2**, 78-85.
K u ř i n a, F.: 1989a, *Umění vidět v matematice*, SPN, Praha.
K u ř i n a, F.: 1989b, Zemřela Profesorka A. Z. Krygowská čestná členka JČSMF, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, č. 2, 117-118.
[19] K u ř i n a, F.: 1998, Jak myśl uczynić widzialną, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **20**, 73-88.
K u ř i n a, F.: 2002, *Deset geometrických transformací*, Prometheus, Praha.
N e l s e n, R. B.: 1993, *Proofs Without Words I., II.*, Mathematical Association of America, Washington.