ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

SETNA ROCZNICA URODZIN PROFESOR ANNY ZOFII KRYGOWSKIEJ

Zbigniew Semadeni
Uniwersytet Warszawski

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O zasadzie właściwego ukierunkowania (rozwinięcie myśli Zofii Krygowskiej)[1]

1. Wstęp. Celem tej pracy[2] jest przeanalizowanie zasady, którą Krygowska sformułowała w latach sześćdziesiątych[3]. Przywiązywała do niej zawsze wielką wagę. Przedstawiła ją w sposób bardzo sugestywny: „*w nauczaniu nigdy nie powinno być takiej sytuacji, aby trzeba było usuwać z umysłu ucznia to, co zostało tam ukształtowane poprzednio z dużym wysiłkiem i nauczyciela, i jego wychowanka*" (Krygowska, 1977, s. 80; por. Puchalska i Semadeni, 1991, s. 58). Jest to zasada bardzo ważna, często bywa cytowana, a zarazem skłania do przemyśleń, dotyka bowiem fundamentalnych problemów nauczania matematyki. W pracy tej szczególną uwagę poświęcimy trzem kwestiom:

— trudnościom interpretacyjnym, gdy zasadę Krygowskiej próbuje się stosować w konkretnych sytuacjach dydaktycznych,

— niepożądanym konsekwencjom dydaktycznym wynikający z niewłaściwej interpretacji tej zasady (lub stosowania podobnie brzmiących zasad),

— powiązanie tej zasady z koncepcją idei głębokich (Semadeni, 2002a).

Przeczytawszy po raz pierwszy cytowaną powyżej wypowiedź Krygowskiej, czytelnik może odnieść wrażenie: przecież to oczywiste! Potem przychodzi chwila refleksji: skoro to jest takie oczywiste, to dlaczego tak bardzo ona to podkreślała? Nasuwa się oczywista odpowiedź: widocznie nie stosowano tego w praktyce. I następna wątpliwość: skoro nie przestrzegano tak oczywistej zasady, to musiały być jakieś tego przyczyny.

[1] Artykuł został przesłany do Redakcji. Nie był on wygłoszony ani odczytany na Sesji.

[2] Praca naukowa wykonana w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003–2006.

[3] W wydaniu z 1969 r. *Zarysu dydaktyki matematyki* zasada ta, znajdująca się na str. 78, była poprzedzona tekstem o trzech możliwych uzasadnieniach empirycznych twierdzenia o sumie kątów w trójkącie, sformułowana więc była w innym kontekście niż w 1977 r.

Oczywiście można winić nauczycieli, złe programy, staroświecką metodykę nauczania. Szczególnie ostro zarysował się ten problem w okresie szczytu popularności reform przeprowadzanych pod hasłem „nowej matematyki", około roku 1970. Głoszono wówczas, zwłaszcza we Francji, hasła kierowane do nauczycieli: zapomnijcie to wszystko, czego was dotąd źle uczono; dowiecie się teraz, czym jest matematyka, nauczycie się jej w nowoczesnym, poprawnym, ścisłym ujęciu. (Nawiasem mówiąc, burzenie z zamiarem budowania upragnionego systemu od nowa — to, jak wiemy z historii, typowe nastawienie rewolucjonistów i radykalnych reformatorów.)

1.1. Krygowska cytowaną tu zasadę sformułowała na końcu rozdziału o pierwotnym schemacie skierowanym do matematyzacji w nauczaniu szkolnym, podkreślając (w wydaniu z 1977 r.) wagę tej zasady rozstrzelonym drukiem. Poprzedziła ją takim tekstem:

> W tradycyjnym nauczaniu matematyki niejednokrotnie zacierano granicę między doświadczeniem fizycznym i matematycznym rozumowaniem w imię fałszywie rozumianej zasady poglądowości. Zestawienie tych doświadczeń z rezultatami osiągniętymi w nauczaniu zmodernizowanym nasuwa następującą hipotezę dydaktyczną, która powinna się stać podstawową hipotezą roboczą w badaniach na temat nauczania matematyki.
>
> Matematyzację doświadczeń i intuicji ucznia powinno się przeprowadzać możliwie wcześnie, możliwie radykalnie, możliwie od początku czysto z punktu widzenia matematyki, choć zawsze w sposób możliwie naturalny[4]. Między tymi dwoma postulatami nie ma istotnej sprzeczności. Ich równoczesna realizacja wymaga natomiast wnikliwego organizowania dydaktycznego procesu. Szkodliwą jest pseudomatematyzacja. Ślady takiej pseudomatematyzacji wryte głęboko w plastyczną początkowo, ale coraz mniej plastyczną z czasem myśl dziecka, są bardzo trudne do usunięcia w dalszym ciągu nauki (Krygowska, 1977, s. 79–80).

Krygowska nie nadała owej zasadzie żadnej nazwy. Choć sam tekst zasady jest jednoznaczny, niełatwo jest streścić go za pomocą jednego lub dwóch słów. Potrzebne mi to było, gdy zastanawiałem się nad tytułem tej pracy. Zdecydowałem się na określenie „*zasada właściwego ukierunkowania procesu matematyzacji przy wstępnym kształtowaniu pojęć u ucznia*" lub krótko: „zasada właściwego ukierunkowania". Słowo „ukierunkowanie" ma podkreślić, że

[4] Tę myśl Krygowskiej warto zestawić z tym, co przedstawił Dienes (1964) pod nazwą zasady *deep end*, którą można próbować tłumaczyć na polski jako „zasada maksymalnej ogólności". Jej sens jest następujący: ponieważ wiadomo, że uogólnianie jest bardzo trudne dla dzieci, więc — wychodząc od odpowiednich czynności na konkretach — należy od razu wprowadzać pojęcie tak ogólne, jak to jest możliwe na danym etapie rozwoju umysłowego dziecka. Dzięki temu później wystarczy przechodzić od ogólniejszego pojęcia do bardziej szczegółowego, co jest łatwiejsze.

nauczanie powinno być od samego początku nastawione na przyszłe, właściwe rozumienie pojęć matematycznych i ich własności.

1.2. Dopóki zasada właściwego ukierunkowania jest tylko ogólną deklaracją, wszystko wydaje się jasne. Istotne trudności pojawiają się jednak wówczas, gdy trzeba realizować to w klasie i gdy próbuje się znaleźć właściwe sposoby, jakimi niezbędną matematyzację można przeprowadzać rzetelnie i zarazem tak, aby to było naturalne dla dzieci. Pojawia się też pytanie, co to znaczy, że coś jest *naturalne* dla dzieci.

> Naturalne dla ucznia jest natomiast to wszystko, z czym zdołał się już oswoić, co może wykorzystać, co może wykorzystać w rozwiązywaniu zadań, co mu nasuwa pytania, na które chce i umie znaleźć odpowiedź. Interwencja nauczyciela, odpowiednie postępowanie dydaktyczne może uczynić naturalnym to, co się uczniowi wydaje w pierwszym momencie „niepojętym" (Krygowska, 1977, s. 76).

Powyższa refleksja dotycząca naturalności jest bardzo ważna. Należy jednak mieć na uwadze to, że Krygowska umieściła ją w akapicie rozpoczynającym się opisem konfliktu pojęciowego u dwunastoletnich uczennic, gdy jedna z nich zwróciła uwagę na to, że — przy jednokładności — wzajemnie jednoznacznym obrazem odcinka może być odcinek dłuższy od danego. Fakt ten był dla nich „niepojęty", choć uprzednio klasa zaakceptowała już formalne definicje rozpatrywanych terminów.

Nasuwa się pytanie, czy w sposób podobny do przedstawionego powyżej należy też interpretować „naturalność" w przypadku uczniów w okresie *przeddefinicyjnym*[5]. Istotne jest tu to, że w okresie tym pojęcia kształtują się u uczniów nie poprzez definicje, lecz jako wynik interioryzacji konkretnych doświadczeń z liczeniem i z figurami. W tym wieku naturalność to przede wszystkim zgodność z ze światem dziecka, z jego logiką.

1.3. Czy z zasady Krygowskiej wynika, że powinniśmy starać się uczyć dzieci od razu „poprawnych" pojęć? Konieczna jest tu specjalna ostrożność. W pewnych sytuacjach lepiej jest iść drogą zbliżoną do historycznej, dłuższą, bardziej okrężną, starając się przy tym pomóc uczniowi pokonać pojawiające się trudności (por. Duda, 1982). Próba „pójścia na skróty", z pominięciem niezbędnego okresu dojrzewania pojęć, lansowana przez zwolenników *Mathématique moderne* we Francji, niejednokrotnie okazywała się drogą z gruntu niewłaściwą (pewne tego przykłady: proporcjonalność wyjaśniana z pomocą funkcji i „królewska droga do geometrii" są wspomniane w Semadeni, 2003,

[5] Termin „przeddefinicyjny" zaczerpnąłem z tytułu pracy (Swoboda, 1993). W grę wchodzą też terminy: *pojęcie potoczne* lub *spontaniczne*, kontrastowane z *pojęciem naukowym* (Wygotski, 1971, s. 295) oraz *poziom przedpojęciowy* (Hejný, 1997, s. 21).

s. 130). Znacznie poważniejsze konsekwencje miała — podjęta na wielką skalę w Europie w latach siedemdziesiątych — próba pójścia na skróty przy rozwijaniu u uczniów pojęć z logiki, a także przedwczesne wprowadzanie zbyt abstrakcyjnych pojęć w nauczaniu arytmetyki i geometrii.

Tytuł tej pracy prowokuje pytanie, *jakie ukierunkowanie* — w rozpatrywanych poniżej sytuacjach — *należy uznać za właściwe*. Większość tych sytuacji jest przedmiotem ogromnej literatury, była badana i dyskutowana w wielu krajach. Warto jednak zwrócić uwagę na te przykłady, które pokazują wyraźnie, że na tak sformułowane pytanie może nie być łatwej odpowiedzi.

Trudności ujawniają się w sytuacji *dysonansu między rozmaitymi postulatami dydaktycznymi, z których każdy, traktowany z osobna, jest słuszny*. Kwestię tę będziemy analizować, dobierając odpowiednie przykłady. Każdy z nich ma na celu ukazanie jakichś problemów związanych z omawianą tu zasadą.

Oczywiście można by też podać mnóstwo przykładów, w których nie ujawniają się żadne dysonanse. Nie to jest jednak celem tej pracy. Głównym zagadnieniem, którym się tu zajmujemy, jest *ukazanie złożoności problematyki* związanej z tą zasadą i zarazem propozycja *usystematyzowania pewnych kluczowych kwestii*. Prowadzone tu rozważania prowadzą też do ogólnej, wspólnej tezy: *nauczanie powinno być ukierunkowane na prawidłowe ukształtowanie u uczniów odpowiednich idei głębokich*.

2. Zasada właściwego ukierunkowania a spiralność nauczania. Istota trudności ujawniających się przy próbach stosowania zasady Krygowskiej polega na tym, że żadnego niemal fragmentu matematyki szkolnej nie da się od początku przedstawić w postaci docelowej, w postaci dojrzałych pojęć. *Nauczanie musi być spiralne* (w sensie Brunera, 1964).

Cytowaną zasadę rozumiem więc nie jako postulat wczesnego wprowadzania abstrakcyjnych pojęć, lecz jako *unikanie wszystkiego, co mogłoby niepotrzebnie blokować późniejsze właściwe rozumienie*. Należy przy tym prowadzić uczniów od pojęć intuicyjnych do właściwych pojęć matematycznych stopniowo, w sposób konsekwentny, dostosowany do naturalnego rozwoju umysłowego dzieci.

Wiadomo (Sierpińska, 1988), że odróżnia się *przeszkody epistemologiczne* (tzn. przeszkody tkwiące w naturze przedmiotu, w sposobie jego ujmowania na danym etapie rozwoju, trudności wynikające właśnie z faktu rozwoju) od *przeszkód dydaktycznych*, wynikających z czynności konkretnego nauczyciela, ze sposobu dokonywanej elementaryzacji, z doboru konkretyzacji, z niewłaściwej transpozycji dydaktycznej w podręczniku itp. Omawiana tu zasada odnosi się do przeszkód dydaktycznych. Chodzi o to, aby nie zwiększać trudności uczniów ponad to, czego uniknąć się nie da.

Nieraz zdarzają się sytuacje, gdy odstąpienie od zasady właściwego ukierunkowania jest konieczne. Odstępstwo może okazać się — po rozważeniu wszystkich aspektów zagadnienia — pozorne, a zarazem jego dokładniejsza analiza pozwala na lepsze wniknięcie omawianej zasady.

PRZYKŁAD 1. W szkole podstawowej mówi się uczniom o Koperniku i o tym, że **Ziemia krąży dookoła Słońca** po okręgu. Maturzystom można przedstawić wersję Keplera: torem Ziemi jest nie okrąg, lecz elipsa, a Słońce leży nie w środku, lecz w ognisku elipsy. Student fizyki dowiaduje się o zagadnieniu wielu ciał: trzeba jeszcze uwzględnić oddziaływanie Księżyca i innych ciał Układu Słonecznego, co prowadzi do bardzo trudnych problemów matematycznych. Ucząc się ogólnej teorii względności, student dowiaduje się, że nawet w przypadku dwóch ciał model Newtona wymaga modyfikacji, bowiem po każdym obiegu planety dookoła Słońca obserwuje się małe przesunięcie perihelium, przewidziane przez ogólną teorię względności; wzór na to przesunięcie można znaleźć w (Einstein, 1997, s. 97). Zostało to potwierdzone precyzyjnymi pomiarami. Ziemia krąży więc dookoła Słońca nie po elipsie, lecz po pewnej rozetce, zaburzanej dodatkowo przez inne obiekty[6].

Jest oczywiste, że nie można już na początku przekazywać uczniowi tej zaawansowanej wiedzy. Nie miałoby to sensu. Ponadto z naukowego punktu widzenia wszystkie cztery opisy: Kopernika, Keplera, Newtona i Einsteina są matematycznie poprawnymi modelami zjawiska fizycznego. W konkretnej sytuacji wybiera się model najlepiej odpowiadający aktualnym potrzebom. Gdy wystarczy model Kopernika, nie ma potrzeby rozpatrywania modelu ogólniejszego. Za większą dokładność modelu płaci się komplikacją pojęciową i rachunkową. Każdy z tych czterech modeli ma więc swoje zalety i wady, każdy ma inne zastosowanie.

Dla naszej dyskusji najważniejsze jest to, iż ta kilkakrotna zmiana modelu, wymagająca za każdym razem powiedzenia uczniom, że ich poprzednia wiedza jest uproszczona i wymaga modyfikacji, nie jest bynajmniej sprzeczna z omawianą zasadą Krygowskiej. Jej chodziło o trudności związane z późniejszym usuwaniem z umysłu ucznia błędnych pojęć, wiodących go w niewłaściwym kierunku, blokujących poprawne pojmowanie zagadnienia. Natomiast w rozpatrywanym tu przypadku mówimy po prostu uczniom, że tor planety jest

[6] Model Kopernika daje dość dobre przybliżenie rzeczywistości z uwagi na to, że mimośród (stosunek $2c$ do $2a$, tj. stosunek odległości ognisk do osi wielkiej) każdej z pięciu głównych planet jest bardzo mały (np. mimośród Ziemi wynosi ok. 0,0167). Model Keplera dla planet jest odpowiedni, gdy można zaniedbać wpływ innych ciał na parę planeta–Słońce i zaniedbać stosunek masy planety do masy Słońca. Model Newtona sprawdza się dobrze, gdy można zaniedbać stosunek prędkości rozpatrywanych ciał do prędkości światła i subtelne odchylenia wyników pewnych doświadczeń.

podobny do tego, czego uczyli się wcześniej, ale jest bardziej skomplikowany.

Jest to spiralność naturalna. Wcześniejsza wiedza nie jest tu utrudnieniem dla późniejszej. Wręcz przeciwnie, takie uproszczone modele są niezbędnym wprowadzeniem do bardziej zaawansowanych. *Zasada właściwego ukierunkowania wymaga więc ścisłego powiązania jej z zasadą spiralności nauczania.*

PRZYKŁAD 2. W wielu (polskich i obcojęzycznych) podręcznikach omawianie **funkcji** autorzy rozpoczynają od ogólnego określenia tego pojęcia, którego uczniowie często nie rozumieją i z którego w praktyce i tak się nie korzysta, gdyż uczniowie zajmują się głównie (lub wyłącznie) funkcjami opisanymi prostymi wzorami (na ogół są to przez długi czas jedynie funkcje liniowe); problem ten poruszało wielu autorów, m.in. Sierpińska (1985, s. 159).

Nasuwa się więc oczywiste pytanie, czy rozpoczynanie nauczania funkcji od ogólnego określenia (jako przyporządkowania) to realizacja postulatu Krygowskiej, by matematyzacji dokonywać możliwie wcześnie, możliwie radykalnie, możliwie od początku czysto z punktu widzenia matematyki.

W omawianej zasadzie nie chodzi o to, aby od początku wprowadzać dane pojęcie w postaci docelowej, ale o to, *by przez niewłaściwe nauczanie nie utrudniać późniejszego przejścia na wyższy poziom abstrakcji lub ogólności.* W przypadku pojęcia funkcji chodzi o to, aby szczególne przypadki funkcji liniowych, od których trzeba oczywiście zaczynać, były przedstawiane w sposób, który nie będzie niepotrzebnie blokował późniejszego zrozumienia, czym jest funkcja na dowolnym zbiorze. Mowa tu więc o procesie długofalowym. Jego celem jest *prawidłowo ukształtowana idei głęboka funkcji*, natomiast wybór używanych nazw i sposób ewentualnego formalnego zdefiniowania funkcji jest sprawą wtórną.

Na każdym etapie rozwoju pojęcia funkcji stopień ogólności, zakres tego pojęcia (którym w praktyce jest zbiór funkcji opanowywanych przez ucznia czy studenta, np. funkcje trygonometryczne, przekształcenia geometryczne, funkcjonały) powinien odpowiadać aktualnemu poziomu jego matematycznego zaawansowania.

W latach siedemdziesiątych próbowano pewne ogólne pojęcia matematyczne wprowadzać najpierw w przypadku zbiorów skończonych poprzez aktywności z konkretnym materiałem, takim jak klocki[7]. W szczególności ćwiczenia tego typu miały kształtować pojęcia stanu i operatora oraz pojęcie przekształcenia z jednego zbioru skończonego w inny. Sądzono, że przyporządkowania objaśnione w łatwym, zrozumiałym dla dziecka kontekście pozwolą na ukształtowanie ogólnego pojęcia funkcji, które z kolei wykorzysta się przy funkcjach liniowych. Podejście to okazało się niefortunne, bowiem dzieci nie widziały

[7] W tym duchu opracowano m.in. interesujące ćwiczenia opisane w (Myx, 1973).

żadnego związku między ćwiczeniami dotyczącymi klocków a wykresami funkcji i proporcjonalnością dwóch wielkości. Transferu nie stwierdzono. Główną tego przyczyną było, że *każda zmiana reprezentacji pojęcia*, jakkolwiek często niezbędna, *powoduje specyficzne trudności dzieci*. Pojęcie ogólne kształtuje się w długofalowym procesie jako synteza wielu pojęć szczegółowych, z których każde musi być przedtem wystarczająco zrozumiane.

3. Zasada właściwego ukierunkowania a rozwój pojęć u dziecka. Podstawowym, trudnym problemem dydaktycznym jest kwestia *pogodzenia procesu naturalnego rozwoju dziecka* (będącego przedmiotem badań psychologów) *z wymogami procesu usystematyzowanego nauczania szkolnego*. Na styku tych procesów nieuchronnie ujawniają się napięcia i nieraz nie jest łatwo rozstrzygnąć, jakie postępowanie jest najkorzystniejsze dla dzieci.

PRZYKŁAD 3. Dla matematyków oczywiste jest, że **każdy kwadrat jest prostokątem**. Wiele osób uważa również, że należy to wyjaśnić uczniom, toteż w podręcznikach na poziomie klasy II nieraz znajduje się taka informacja. Z licznych doniesień nauczycielek wynika jednak, że uczniowie tego nie akceptują, nie rozumieją podawanych im wyjaśnień. Jedną z przyczyn jest oczywiście to, że w przedszkolu lub w klasie I, gdy większość dzieci poznaje nazwy podstawowych figur, o pewnych klockach mówi się „to jest trójkąt", o innych „to jest kwadrat", a o jeszcze innych „to jest prostokąt". Dla dzieci są to więc pojęcia rozłączne.

Z zasady Krygowskiej można wyciągnąć wniosek, że od samego początku, a więc już w przedszkolu powinno się poprawnie przedstawiać dzieciom zależność kwadrat–prostokąt, tak aby później nauczyciel nie musiał usuwać z ich umysłów błędnego sądu. W rzeczywistości sprawa jest bardziej skomplikowana. Jakakolwiek argumentacja uzasadniająca, dlaczego kwadrat jest prostokątem, pozostaje poza możliwością zrozumienia jej przez dzieci w tym wieku. Rozumowanie dorosłych opiera się bowiem na porównaniu definicji obu pojęć, a dzieci znajdują się — w terminologii van Hielego — na najniższym poziomie, na *poziomie wizualnym*. Takie dziecko rozpoznaje kształty przez spostrzeganie: „To jest prostokąt, ponieważ widzę, że to jest prostokąt" (van Hiele, 2003, s. 187–190). Podobnie człowiek dorosły rozpoznaje „to jest pies", nie korzystając z żadnej definicji psa. Dopiero kilka lat później, będąc już na wyższym poziomie, zwanym *deskryptywnym*, dziecko zaczyna być w stanie wnioskować na podstawie własności figur: „to jest prostokąt, bo ma cztery boki i cztery kąty proste".

Ponadto dla dzieci w pewnym wieku prostokąt to *prostokąt typowy* (por. Hejný, 1997, s. 24). Na przykład, prostokąt zbyt długi jest początkowo trudny do zaakceptowania dla dziecka pozostającego na poziomie wizualnym. Również

prostokąt przekręcony w stosunku do układu pion–poziom sprawia trudności (van Hiele, 2003, s. 186–187).

Opisaną tu trudność pogłębia fakt, że ogromny wpływ na sądy dzieci ma środowisko, w którym — w kontekście życia codziennego — kwadraty i prostokąty traktuje się, jakby to były pojęcia rozłączne. W sklepie meblowym pytanie: „Czy wolisz kupić kwadratowy stolik czy prostokątny?" mógłby zadać nawet matematyk, nie zauważywszy niewłaściwości tego pytania, gdyby je potraktować z punktu widzenia logiki formalnej. Niezależnie od interwencji nauczyciela i postulowanego odpowiedniego postępowania dydaktycznego na lekcji poświęconej figurom geometrycznym, dziecko znajduje się pod ciągłym wpływem otoczenia. Dawniej panowała tendencja do ignorowania tego wpływu lub traktowania go jedynie jako źródła nieporozumień i błędnych mniemań, wynikających z konfliktu terminologii matematycznej z językiem potocznym, mniemań, które nauczyciel musiał korygować. W ostatnim ćwierćwieczu rozpowszechnił się jednak pogląd, że *nie jest celowe zwalczanie wpływu kultury i środowiska na świadomość matematyczną dziecka i należy raczej starać się wykorzystywać to, co dziecko umie i co je zainteresuje.* Etnomatematyka stała się modnym działem dydaktyki matematyki.

Nauczyciele oczywiście chcieliby jasnej deklaracji dydaktyków: czy należy dzieciom w wieku 6–9 lat mówić, że każdy kwadrat jest prostokątem, czy też lepiej pominąć to milczeniem? Narzucanie dzieciom stwierdzenia, które jest dla nich niezrozumiałe i nie jest akceptowane, nie jest właściwe, przemilczanie zaś grozi jeszcze poważniejszymi trudnościami, które mogą ujawnić się wtedy, gdy tej kwestii nie da się uniknąć. Niestety, *tego dylematu nie da się łatwo rozstrzygnąć.* Jako postulat minimum uznałbym jednak uświadomienie sobie (przez metodyków, nauczycieli i tych, którzy kształcą nauczycieli), że taki problem istnieje.

W sumie jestem raczej za tym, by już w klasach I–III powiedzieć dzieciom, że każdy kwadrat jest też prostokątem, ale ze świadomością, że nie będą zapewne w stanie pojąć kryjącego się za tym rozumowania, toteż nie należy wymagać od nich wyuczonej odpowiedzi: „kwadraty są prostokątami".

PRZYKŁAD 4. Problemem podobnym do poprzedniego, ale mniej ważnym jest kwestia, czy należy uczniom klasy II mówić, że **zero jest liczbą parzystą.** Miałem okazję przekonać się, że nawet osoby po maturze, studentki kierunku *Edukacja początkowa*, przyszłe nauczycielki, kwestionowały parzystość zera, dziwiły się, że matematycy tak to definiują, nie rozumiały powodów, dla których 0 miałoby być liczbą parzystą. Jedynymi bezpośrednimi argumentami, jakie mi się nasunęły, były: albo odwołanie się do podzielności przez 2 (ale podzielność sama w sobie jest abstrakcyjna, a nadto podzielność zera kojarzy się z dzieleniem przez zero, co zawsze było zakazywane) albo wykorzystanie

podwójnej negacji (liczba elementów jest *nieparzysta*, gdy jeden element nie ma pary; w przypadku zera nie ma żadnego elementu bez pary). Żaden z tych argumentów nie trafiał jednak do przekonania studentek. Nieco skuteczniejsze natomiast okazało się (jakiś czas potem) zapytanie o kryteria podzielności przez 2. Studentki zdecydowanie mówiły, że ostatnia cyfra ma być parzysta (na szczęście nie było alternatywnej odpowiedzi: na końcu ma być 0, 2, 4, 6 lub 8). Wtedy zaproponowałem: zastosujmy to kryterium do liczby 70. Przykład ten pokazał, że parzystość zera przydaje się już w nauczaniu początkowym. W szkole kwestię parzystości zera warto więc odłożyć do klasy III, gdy będzie mowa o podzielności liczb. W przypadku uczniów klasy II nawet ten trzeci argument byłby przedwczesny, można jednak postąpić tak, jak w poprzednim przykładzie.

4. Zasada właściwego ukierunkowania w świetle teorii etapów: „intra", „inter" i „trans" Piageta i Garcii. Nawiązując do analogii typu filogeneza–ontogeneza (Duda, 1982) między historycznym rozwojem pojęć matematycznych a rozwojem tych pojęć u indywidualnych dzieci, wykorzystamy triadę etapów: *intra*, *inter* i *trans*[8], przedstawioną w (Piaget i Garcia, 1989, s. 29 i inne) w dwoistym kontekście historii nauki i rozwoju psychologicznego poszczególnych osób. Zostało to przez tych autorów ujęte w typowo piagetowskim duchu, w ramach ogólnej tezy, że *gdy pojęcia i sądy ukształtowane we wcześniejszym etapie rozwoju zostają zastąpione przez pojęcia i sądy na wyższym poziomie, to zawsze dotychczasowe struktury są integrowane z nowymi*[9].

Istotą koncepcji Piageta i Garcii, silnie ugruntowanej w ich epistemologii konstruktywistycznej, jest teza, że we wszelkich szczególnych przypadkach ogólnego mechanizmu rozwoju poznawczego zawsze można wyróżnić ten sam ciąg etapów, nazwanych:

— *intra* (analiza pojedynczych obiektów danego etapu poznania),

— *inter* (analiza związków między tymi obiektami lub przekształceń między nimi),

— *trans* (strukturalne ujęcie tych obiektów).

Koncepcję tę wykorzystamy, analizując i interpretując zasadę Krygowskiej.

[8] Etymologicznie łacińskie *intra* odpowiada polskiemu: „śród-", a także „wewnątrz" (np. w słowie *intramolekularny*, a także w angielskim słowie *intramural*, znaczącym „wewnątrz murów" (miasta lub uczelni); por. *introdukcja*, *introspekcja*; *inter* to „między", „wzajemny", „współ-" (np. w słowach: *interkontynentalny* i *interdyscyplinarny*); *trans* to „poprzez", „poza" (np. w słowach: *transatlantycki* i *transcendentalny*).

[9] Gdy takiej integracji nie ma, wiedza ucznia staje się niespójna, chaotyczna, niekonsekwentna. Cytowane na wstępie zdanie Krygowskiej można w tym kontekście rozumieć zupełnie inaczej: *wszelkie usuwanie czegokolwiek z umysłu ucznia jest czymś niewłaściwym samo w sobie*. Należy raczej przebudowywać to, co już jest ukształtowane.

PRZYKŁAD 5. Zajmiemy się teraz kwestią **pierwszego wprowadzenia odejmowania**, takiego jak 5−2. Oczywisty jest postulat, zgodny z zasadą Krygowskiej, aby w nauczaniu początkowym starać się nie stwarzać sytuacji, które w przyszłości mogłyby spowodować nadmierne trudności, wtedy gdy przyjdzie czas na uczenie się **liczb ujemnych** i na działania typu 3−5, 4+(−7) czy 8−(−5), gdy ujawni się konflikt pojęciowy między dotychczasową wiedzą uczniów a nowo poznawanymi faktami.

> Konfliktem pojęciowym nazywamy odczucie sprzeczności między wyobrażeniami czy intuicjami związanymi z pojęciami matematycznymi, których definicje zostały formalnie zaakceptowane (Krygowska, 1977, s. 75).

O konflikcie pojęciowym można też mówić na poziomie szkoły podstawowej, nawet wówczas, gdy pojęć takich jak *suma* czy *różnica* uczeń nie poznaje przez definicję.

Powyższa argumentacja prowadzi więc do postulatu, aby od początku starać się tak organizować nauczanie arytmetyki, aby uniknąć późniejszego niepożądanego dysonansu poznawczego po wprowadzeniu liczb ujemnych lub by przynajmniej go złagodzić. Jest to postulat słuszny, pod warunkiem jednak, że jego realizacja nie stanie się źródłem innych, poważniejszych trudności. Najważniejsze jest bowiem to, aby wszystko, czego dzieci się uczą, było dla nich naturalne w danym momencie i było dostosowane do specyfiki ich myślenia. Sensowne jest więc zalecenie, aby zamiast mówić kategorycznie uczniom, że *nie wolno odejmować liczby większej od mniejszej*, po prostu stwierdzić, że takiego odejmowania będą się uczyć później, gdy będą starsze.

Natomiast *nie powinno się używać w klasie rozumowań nie dostosowanych do poziomowi rozwoju umysłowego dzieci, uzasadniając to tym, że lepiej, by od razu opanowały lepsze ujęcie, które będzie potrzebne im kiedyś później.* Przykładów takiej niewłaściwej argumentacji dydaktycznej można spotkać wiele, w rozmaitych publikacjach. Nieraz niepotrzebnie zaleca się stosowanie już w klasie I metod zbyt trudnych lub zbyt abstrakcyjnych (np. przy dodawaniu i odejmowaniu z przekroczeniem progu dziesiątkowego) w przekonaniu, że metoda ta będzie bardzo przydatna w klasie III. Na podobnym przekonaniu opiera się następujący wywód, dotyczący pierwszego wprowadzenia odejmowania liczb i znaku odejmowania.

> Punktem wyjścia [odejmowania] może być każda z dwu zasadniczo odmiennych, a praktycznie równie ważnych sytuacji:
> — ujmowanie (zmniejszanie) lub ubywanie,
> — dopełnianie.
>
> (...) Która z dwu sytuacji: zmniejszanie czy dopełnianie, będzie stanowiła punkt wyjścia przy wprowadzaniu odejmowania? Rozpoczęcie od zadań, w których występuje zmniejszanie (zbioru lub wielkości) jest

> niewątpliwie łatwiejsze. (...) Potraktowanie operacji dopełniania jako podstawowej interpretacji odejmowania, zmniejszania zaś jako tylko jednego ze sposobów znajdowania różnicy, jakkolwiek trudniejsze do realizacji, ma duże zalety dydaktyczne. W procesie uczenia się matematyki przeciętnemu uczniowi zwykle najwięcej trudności sprawia konieczność uogólnienia pojęcia lub operacji (...) Przyzwyczajony od początku do tego, że odjąć b od a znaczy to samo, co zmniejszyć a o b, uczeń w przyszłości napotyka trudności przy opanowywaniu liczb ujemnych (...) Umożliwimy mu tę drogę uogólnienia, opierając pojęcie odejmowania na problemie dopełniania, tłumaczącym się w języku algebraicznym $b-a$ jako rozwiązanie równania $a+x=b$ (Turnau, 1986, s. 25–29).

Powyższe rozumowanie, postulujące wprowadzanie odejmowania nie jako ubywania, lecz od początku jako dopełniania, jest tylko pozornie słuszne.

Po pierwsze, nie sądzę, by sposób pierwszego wprowadzenia odejmowania (w klasie I lub w zerowej) miał jakikolwiek znaczący wpływ na przyszłe, po kilku latach, rozumienie odejmowania. W międzyczasie bowiem uczeń spotka tysiące sytuacji, w których odejmowanie będzie stale dawało efekt zmniejszania, co wytłumi wszelki wpływ wyjaśnień nauczyciela owego pierwszego dnia. Odejmowanie jako ubywanie jest bowiem głęboko *ugruntowane kulturowo.*

Po drugie, co znacznie ważniejsze, odejmowanie jest trudne dla dzieci, znacznie trudniejsze niż dodawanie. Wiadomo, że dodawanie może być prezentowane zarówno w sytuacjach statycznych (np. 3 jabłka czerwone i 5 jabłek żółtych) jak i w dynamicznych. Natomiast *pierwsze zetknięcie się dziecka z odejmowaniem musi dotyczyć sytuacji dynamicznej* (ma to silne uzasadnienie w psychologii Piageta i w czynnościowym charakterze matematyki).

Dynamiczne odejmowanie wymaga wyraźnego następstwa czasowego i jakiegoś związku przyczynowego. Niezbędne jest opowiedzenie dzieciom motywujących historyjek z trzema elementami: sytuacją początkową, samym ubywaniem i pytaniem o sytuację końcową.

Wbrew rozpowszechnionym poglądom, pojedynczy, statyczny rysunek typu: „5 jabłek i 3 ogryzki" wystarczająco wyjaśnia sytuację dopiero wtedy, gdy dziecko pojmuje już, czym jest odejmowanie. Na początku jednak taki rysunek sam z siebie nie jest zrozumiały dla znaczącej części dzieci. Dopiero po pewnej liczbie w pełni objaśnionych przykładów dzieci chwytają sens tej konwencji: mają one wywnioskować z rysunku, że najpierw było 8 jabłek, a potem 3 zjedzono. Wtedy wystarcza im już skrótowe przedstawienie kwestii.

Osobną trudnością jest zrozumienie sensu znaku „−" jako działania na liczbach (abstrakcyjnych, nie odnoszących się do konkretnej sytuacji), to znaczy przejście od zrozumianego już ubywania w konkretnej sytuacji do abstrakcyjnego działania typu 5−3.

Formowanie się indywidualnej idei głębokiej odejmowania u dziecka — to proces wieloletni, wywodzący się ze schematyzowania rozmaitych sytuacji. Idea ta tworzy się etapami, nowsze struktury budowane są na wcześniejszych.

Jednym z tych etapów jest *pojęciowe wiązanie odejmowania z dodawaniem.* Kształtuje się to przez wiele miesięcy od momentu opanowania odejmowania jako ubywania i jest dla dzieci znacznie trudniejsze, niż się ogólnie mniema. W wieku ok. 6–7 lat, na początku stadium operacji konkretnych w sensie Piageta, dzieci zaczynają być zdolne do odwracania konkretnych czynności. Odwracanie abstrakcyjnych działań to już wyższy poziom.

Wiadomo dziś z licznych publikacji (np. Demby, 1990; Pirie i Martin, 1997), że wykorzystywanie działań odwrotnych jest dla uczniów znacznie trudniejsze, niż sądzono w latach siedemdziesiątych.

Postulat myślenia o odejmowaniu np. 5−3 poprzez rozwiązanie równania typu $a + x = b$ ma swoje źródło w koncepcji (pochodzącej z początków XX wieku i bardzo znaczącej w myśleniu matematyków) naśladowania w nauczaniu szkolnym rozumowań znanych z dedukcyjnej arytmetyki i z teorii grup (w której zazwyczaj, choć nie zawsze, odejmowanie definiuje się wtórnie, poprzez odniesienie do dodawania). Niestety ten akademicki wzorzec drastycznie odbiega od genetycznego rozwoju myślenia dziecka.

Merytorycznie określanie różnicy np. 5−3 jako rozwiązania pewnego równania $3 + x = 5$ lub $x + 3 = 5$ wymaga *świadomości istnienia i jednoznaczności rozwiązania tego równania*; wówczas to jedyne rozwiązanie nazwane zostaje wynikiem wykonywanego działania.

Interpretując powyższe rozważania z punktu widzenia koncepcji trójek Piageta: *intra*, *inter* i *trans*, wyróżnimy trzy etapy w procesie formowania się pojęcia odejmowania u dziecka. Pierwszy z nich, etap *intra*, to początkowe kształtowanie się tego pojęcia w przypadku pojedynczych par liczb, co wymaga przejścia od konkretnego liczbowego efektu ubywania do abstrakcyjnego działania na oderwanych od konkretu liczbach.

Drugi etap *inter* to stopniowe kształtowanie świadomości podstawowych związków odejmowania z dodawaniem, a także umiejętność dokonywania obliczeń w systemie dziesiątkowym.

Trzeci wreszcie etap *trans* to odejmowanie w ramach strukturalnie ujmowanej arytmetyki, m.in. kształtuje się wtedy całościowe rozumienie odejmowania jako działania odwrotnego do dodawania. Pod koniec tego trzeciego etapu (lub po nim) pojawia się możliwość przejścia od arytmetyki do algebry.

Przy takiej interpretacji wprowadzanie odejmowania od razu jako szukania nieznanego składnika byłoby rozpoczynaniem od drugiego etapu rozwoju, z pominięciem pierwszego.

Gdy zaś „z systemu działań algebraicznych, z ich własności wyłania się

pojęcie liczby" (Krygowska, 1977, s. 98; Semadeni, 2004, s. 161), odpowiada to już trzeciemu poziomowi *trans*.

Postulat łączenia odejmowania od początku z dodawaniem był ongiś bardzo popularny, czego odbiciem są m.in. sformułowania w programie klasy I z 1983 r.: *Odejmowanie jako działanie odwrotne do dodawania* oraz *Dzielenie jako działanie odwrotne do mnożenia*, które ciągle jest obecne w myśleniu wielu metodyków. Szczególnie pouczające jest to, że gdy na zebraniu komisji ministerialnej w latach siedemdziesiątych zastanawiano się, czy celowe jest dopisanie dzielenia do dość przeciążonego programu klasy I, zgodzono się na to bez sprzeciwu, gdy padł argument odwołujący się do słusznej jakoby zasady, że „wprowadzanie jakiegoś nowego działania arytmetycznego powinno być połączone z wprowadzeniem działania doń odwrotnego". Na owym zebraniu powołano się wówczas, błędnie, na ustalenia psychologii; w rzeczywistości zasada ta, postulująca *de facto* rozpoczynanie od poziomu *inter*, była wyraźnie sprzeczna z teorią Piageta.

Ewentualne wprowadzanie odejmowania jako działania odwrotnego wówczas, gdy uczniowie nie znają jeszcze zadowalająco odejmowania jako ubywania, zasadniczo zwiększyłoby ich trudności już w klasie I i dla wielu z nich mogłoby okazać się to przeszkodą nie do pokonania, przyczyniając się do rezygnacji z prób rozumienia matematyki i do ograniczenia się do rozumienia instrumentalnego w sensie Skempa (por. van Hiele, 2003, s. 183). Takie nauczanie nie pomogłoby więc uczniowi w zrozumieniu w kilka lata później odejmowania liczb ujemnych, np. $6-(-2)$.

Reguła „minus i minus dają razem plus" jest w jakimś sensie częścią szerszego schematu myślowego, kształtującego się przez wiele lat, w najrozmaitszych kontekstach: *po dwóch odwróceniach wraca się do sytuacji początkowej*. Z tego powodu właściwym postępowaniem dydaktycznym będzie potraktowanie (w odpowiednim momencie) sytuacji typu $6-(-2)$ jako *świadomie zaprogramowanego konfliktu poznawczego*. Wychodząc od trafnie dobranych konkretnych sytuacji, nauczyciel powinien zorganizować w klasie d y s k u s j ę tak, aby uczniowie mieli sposobność zaakceptowania nowego dla nich faktu, że w przypadku odejmowania liczby ujemnej efektem jest nie zmniejszenie, lecz powiększenie (niektórzy uczniowie może nawet sami sformułują taki wniosek).

Jednakże, jak to stwierdza Kenschaft (2005), systematyczne podkreślanie, że odejmowanie odpowiada z a b i e r a n i u czegoś, połączone z czytaniem przez wiele lat zapisów typu $7-3$ każdorazowo z użyciem słów *take away* (zamiast *minus*) prowadzi do szkodliwych efektów, takich właśnie, przed jakimi przestrzegała Krygowska. Tak więc, jakkolwiek uważam, że w klasie I odejmowanie powinno być przez jakiś czas pojawiać się wyłącznie w kontekście ubywania, jestem też zdecydowanym zwolennikiem tego, by po paru miesią-

cach, jeszcze w klasie I uczeń zetknął się też z odejmowaniem w innych kontekstach, m.in. przy dopełnianiu, w konkretnych, zrozumiałych dlań sytuacjach (ale nie w sposób mechaniczny, nie tak, jak to cytowane jest poniżej w (1) w przykładzie 7).

PRZYKŁAD 6. Przy pierwszym **wprowadzaniu pojęcia ułamka** w szkole możliwe są trzy podejścia dydaktyczne. W tradycyjnym ujęciu ułamek traktowano jako *część całości*. Powodowało to rozmaite trudności (ujęcie to krytykował m.in. Straszewicz, 1966).

Po pierwsze, nie zawsze było jasne, czym jest owa całość. Gdy dawano wycięte lub zakreskowane części koła, specyficzny kształt figur od razu faworyzował koło jako umowną całość, przez co sytuacja była dość klarowna[10]. Jednakże uporczywe trzymanie się stereotypu rysunków części kół jako podstawowej (a czasem nawet jedynej) motywacji pojęcia ułamka grozi usztywnieniem myślenia i trudnościami, które nieuchronnie ujawnią się, gdy trzeba będzie przejść do innych przykładów. Natomiast gdy za całość bierze się jakiś prostokąt, to (przy bardziej zaawansowanych działaniach, w szczególności przy poglądowym ujmowaniu mnożenia przez ułamki większe od 1) na rysunku pojawia się wiele innych prostokątów i to zaciemnia schemat; czasem nie jest jasne, który z tych prostokątów odpowiada liczbie 1 i trzeba go np. rysować kolorową kredką.

Po drugie, ujęcie ułamka jako części całości utrudnia późniejsze przyswojenie przez uczniów ułamków, których liczniki są większe niż mianowniki. Jeśli uczeń zbyt silnie skojarzy ułamek z częścią, to wyrażenia takie jak $\frac{5}{4}$ będą dla niego niezrozumiałe.

Po trzecie wreszcie, ułamek jako taki, np. $\frac{1}{3}$, jest liczbą, nie może więc być częścią jabłka czy bochenka chleba; mówiąc obrazowo, część jabłka można zjeść, a ułamka nie można. Ułamek $\frac{1}{3}$ nie jest też częścią liczby 1.

Podejmowano próby wprowadzania ułamków w kontekście miar, wykorzystując przykłady takie jak $\frac{1}{2}\,\mathrm{kg} = 50\,\mathrm{dag}$, $\frac{1}{4}\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{cm}$, $\frac{1}{3}\,\mathrm{godz.} = 30\,\mathrm{min}$. Jest to koncepcja sugestywna, kontekst miar jest bardzo naturalny, dzieci wiedzą, że $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$, można więc wyjaśniać im, że ćwierć metra to 25 cm.

[10] Koło nadaje się dobrze do przedstawiania pojedynczych ułamków oraz do dodawania, odejmowania i porównywania ułamków. Schemat koła nie jest jednak adekwatny w przypadku mnożenia ułamków, które wymaga dwóch wymiarów. Mnożenie, gdy wyjdzie się poza liczby naturalne, w naturalny sposób łączy się z polem prostokąta i z iloczynem boków. Koło w tym kontekście jest „jakby jednowymiarowe", bowiem podziały koła (przy typowych reprezentacjach ułamków) dokonywane są wzdłuż brzegu. Dzieli się okrąg, który opisany jest przez jeden parametr: kąt φ (por. uwagę o kątach „miarowo jednowymiarowych" w Semadeni, 2002a, s. 63). Okrąg może być też opisany jako zbiór liczb zespolonych postaci $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Podział koła dotyczy więc tylko kąta φ, bo w kierunku promienia przy ćwiczeniach z ułamkami nie dokonuje się podziału.

Jednakże w praktyce podejście to okazało się trudne, bowiem — wbrew oczekiwaniom — pojęcie miary i związki między jednostkami miar nie są wystarczająco przyswojone przez dzieci, aby mogły być punktem wyjścia tak trudnego pojęcia, jakim jest ułamek.

Trzecia możliwa koncepcja postuluje, aby od początku kształtować pojęcie ułamka zgodnie z tym, co jest istotą tego pojęcia.

> Etymologicznie ułamek jest to cząstka lub kawałek „ułamany" od całości. Naturalnym przeciwieństwem ułamka jako części jest całość. Na tym przeciwstawieniu całości i części oparte było dawne wprowadzenie ułamka w szkole podstawowej, dyskryminujące ułamki większe od 1 jako „niewłaściwe". (...) Kształtując pojęcie ułamka, należy odwołać się do tych przykładów, które do dzisiaj nie straciły swej aktualności. Należy do nich wyrażenie stosunku dwu wielkości. Rozpatrzmy następującą sytuację praktyczną. Wybierając się samochodem z Krakowa do Warszawy, porównujemy długości tras: przez Częstochowę i przez Kielce. (...) Wynik porównania, wyrażony w kilometrach, jest więc różnicą tych długości. Nikomu jednak nie przyjdzie na myśl wykonywanie odejmowania dla porównania długości jednej z tych tras z długością odpowiadającej jej linii na mapie, gdyż byłoby to bezużyteczne. Ważny jest natomiast stosunek tych dwóch długości. Zapisuje się go zwykle w postaci 1:100 000 (...) Chcąc wyrazić stosunek dwu wielkości za pomocą liczb naturalnych, musimy na ogół użyć dwu liczb, które w zapisie rozdzielamy dwukropkiem lub kreską ułamkową, otrzymując symbol zwany w pierwszym przypadku **stosunkiem** lub **skalą**, w drugim — **ułamkiem** (Turnau, 1988, s. 13–14).

Niestety to matematycznie najtrafniejsze (wywodzące się od starożytnych Greków) ujęcie ułamka jako stosunku dwu wielkości jest już ze swojej natury na poziomie *inter*, bowiem trzeba tu porównywać dwie wielkości, a w wielu sytuacjach trzeba uwzględnić cztery wielkości, np. mówiąc, że odległość A ma się do odległości B jak 3:2. Wiadomo, że pojęcie stosunku jest trudne dla uczniów szkoły podstawowej i że kształtuje się dość późno, po ułamkach. Postulat rozpoczynania kształtowania pojęcia ułamka od stosunku dwu wielkości sprowadza się więc do rozpoczynania od drugiego etapu *inter* w koncepcji Piaget–Garcia, wspomnianej powyżej.

Wprowadzenie ułamków powinno rozpoczynać się od wykonywania przez dzieci konkretnych czynności podziału przedmiotów mających naturalną symetrię (placków, pizzy itp.). Następnie uczeń powinien stopniowo przechodzić na poziom symboliczny, opierając się na czynnościach podziału wykonywanych rysunkowo lub wyobrażonych. W ten sposób zapozna się on z pojedynczymi ułamkami i to odpowiada etapowi *intra*. Porównywanie ułamków, działania na nich, a także wiązanie ułamków z innymi pojęciami, ze stosunkami wielkości (zwłaszcza ze stosunkami wielkości różnego typu, szczególnie

trudnymi pojęciowo, jak np. stosunek drogi do czasu przy prędkości lub stosunek drogi w terenie do drogi na mapie) zaliczyć należy odłożyć do czasu, gdy uczniowie dojrzeją do etapu *inter* w rozwoju pojęcia ułamka.

5. Zasada właściwego ukierunkowania a kształtowanie idei głębokich. Poniższy przykład jest ilustracją tezy, że proces matematyzowania, jeśli jest zgodny z właściwie rozumianą zasadą poglądowości i ma być źródłem nowych pojęć, powinien być ukierunkowany na długofalowe kształtowanie odpowiednich idei głębokich.

PRZYKŁAD 7. W latach siedemdziesiątych, w ramach gruntownej reformy programu nauczania początkowego matematyki w Polsce, do klasy I wprowadzono **równania** z niewiadomą x. Decyzję tę popierały wówczas wszystkie osoby zaangażowane w reformę (jedyne poważne, krytyczne ostrzeżenia pochodziły od J. Hawlickiego z Przemyśla). Niestety nie było wówczas należycie opracowanej metodyki nauczania równań w klasach I–III, zgodnej z psychologicznym rozwojem dzieci i wystarczająco przetestowanej.

Dzisiaj jest dla mnie jasne, że w klasie I wszystkie równania powinny mieć postać okienek, w które wpisuje się niewiadomą liczbę, np. $3+\square = 8$. Zamiast okienka można użyć innej formy graficznej, takiej jednak, aby było to *oznaczenie miejsca*, w które ma być wpisana liczba będąca rozwiązaniem równania.

W owych czasach nie zdawano sobie należycie sprawy z zasadniczej różnicy między algebraicznym ujęciem niewiadomej (w postaci litery x) a okienkiem. Okienko można (stosunkowo łatwo) objaśnić uczniom jako m i e j s c e, w które trzeba wpisać szukaną liczbę. Natomiast jeśli ma on napisać odpowiedź w postaci $x = 5$, nieuchronnie pojawia się problem, czym jest ta litera x. Ponadto przy równaniu z okienkiem dwa procesy: *wpisywania rozwiązania* i *sprawdzania go* (przez przeczytanie całego zapisu) są ze sobą blisko związane, co jest korzystne w przypadku uczniów klasy I.

Okienko, a także inne symbole oznaczające miejsce, w które ma być niewiadoma liczba, związane jest z *myśleniem arytmetycznym*. Analizę roli okienka przeprowadzili Pirie i Martin (1997), podkreślając, że okienko nie jest „reprezentacją czegoś", nie ma „wartości", lecz jest *miejscem, w które wpisuje się liczbę*, m.in. pytali „o liczbę *w* okienku". Nieco inną, ale także arytmetyczną rolę odgrywa znak zapytania „?" używany czasem jako symbol niewiadomej w równaniu (różnice pojęciowe między użyciem znaku „?" w równaniu a użyciem litery x podkreślają Brown, Eade i Wilson, 1999).

Jednakże najbardziej niefortunne okazały się równania z niewiadomą x z powodu, którego niestety nikt nie przewidział przy wprowadzaniu ówczesnej reformy. Otóż nauczyciele klas I–III, którzy nigdy przedtem nie uczyli równań i nie wiedzieli, jak realizować ów nowy temat, zwracali się po poradę do ko-

legów uczących matematyki w klasach IV–VIII. W ten sposób, wbrew oficjalnym deklaracjom, *do nauczania początkowego przeniesiono elementy metodyki nauczania algebry z klas wyższych.*

Poniżej pokażemy, jak uczeń miał (zgodnie z wzorcami demonstrowanymi w ówczesnych podręcznikach dla uczniów) rozwiązywać pewne typowe równania. Lewa kolumna dotyczy klasy I, prawa klasy II.

$$(1) \qquad \begin{cases} x+3=8 \\ x=8-3 \\ x=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\cdot x=42 \\ x=42:7 \\ x=6 \end{cases}$$

Można by uznać, że w ten sposób realizuje się w pełni postulaty Krygowskiej. Pokazuje się tu przecież od początku prawidłową metodę tak, aby później nie trzeba było nic w niej zmieniać lub odwoływać.

Obserwacje pracy uczniów ujawniły jednak wiele niepokojących faktów. Na przykład, gdy uczeń pod równaniem $x+3=8$ pisał w następnym wierszu od razu $x=5$, nauczycielka nieraz obniżała za to ocenę, bowiem opuszczony był niezbędny, jej zdaniem, krok pośredni $x=8-3$. Kryło się za tym mniemanie, że gdy uczeń napisze $8-5$, to tak właśnie prawidłowo rozumuje. W rzeczywistości u wielu uczniów taki trzywierszowy zapis (1) może stanowić pewien wyuczony r y t u a ł, który bywa stosowany nawet wtedy, gdy jest całkiem zbędny, gdy nie ma żadnego związku z zadaniem i zapewne maskuje to, że uczeń nie wie, co ma robić.

Niektóre nauczycielki traktowały napisanie rozwiązania bez zapisu odejmowania jako „zgadywanie". Bardziej prawdopodobne jednak jest, że w takiej sytuacji uczeń nie zgaduje, ale albo oblicza poszukiwaną liczbę, dopełniając w pamięci 5 do 8, albo po prostu w i e, że szukaną liczbą musi być $x=5$, bowiem dobrze pamięta wyniki działań w obrębie 10 (ściślej: taka jest prawdopodobna interpretacja zachowania dziecka, może to być jednak niezbyt uświadomiona mieszanka różnych jego myśli). Niektórzy uczniowie wręcz tłumaczyli: przecież wiem, że $5+3=8$.

Z matematycznego punktu widzenia takie postępowanie jest w pełni poprawne, bowiem *daną liczbę uważa się za rozwiązanie równania, jeśli po wstawieniu jej do równania dostaje się równość prawdziwą.* Natomiast w polskiej tradycji nauczania początkowego, widocznej m.in. w podręczniku (Cydzik, 1968), takie podejście w ogóle nie było uzwględniane. Nacisk kładziony był na ogólną *metodę* postępowania, którą Cydzik starannie odróżniała od *sposobu.* Sposób mógł być dostosowany do konkretnej sytuacji, natomiast metoda powinna być o g ó l n a, tzn. dająca się stosować w szerokiej klasie zagadnień. Dlatego np. Cydzik konsekwentnie stosowała jedną, ogólną, tradycyjną metodę przekraczania progu dziesiątkowego przy dodawaniu, przez co w jej zeszycie

ćwiczeń znalazło się również obliczenie

$$9 + 10 = 9 + 1 + 9 = 10 + 9 = 19,$$

którego nonsensowność zauważyło wielu matematyków–rodziców. W takiej metodyce nie ma więc miejsca na pierwsze wprowadzenie równania w taki sposób, jak to jest opisane w (Puchalska i Semadeni, 1986, s. 182), tzn. przez podstawianie kartoników z liczbami w miejsce okienka (lub litery x) w równaniu na tablicy i stwierdzanie przez klasę, czy to prawda, czy nie.

Ogólną metodą rozwiązywania równań postaci $x + a = b$ jest odejmowanie $x = a - b$, zatem Cydzik w swych podręcznikach dla uczniów od początku, systematycznie stosowała sposób (1). Całe to ówczesne nastawienie było pozornie zgodnie z zasadą Krygowskiej, a w rzeczywistości było z nią sprzeczne, bowiem *usztywniało myślenie uczniów.*

Na to wszystko nakłada się dwuznaczność określenia „rozwiązanie równania", które może znaczyć zarówno konkretną liczbę, jak i proces rozwiązania równania, przez co zaciera się różnica między tymi pojęciami.

Można całą tę kwestię ująć inaczej, mówiąc nie o dwóch operacjach umysłowych w klasie I (dodawanie i odejmowanie), lecz o trzech, uwzględniając *dopełnianie* jako samodzielną, ważną operację umysłową, dającą odpowiedź na pytania typu: „Ile trzeba dodać do 5, aby mieć 8?".

Natomiast pośredni krok w (1), tzn. odejmowanie 8–3 bądź dzielenie 42:7, to *zastosowanie działania odwrotnego*, które stanowi istotną trudność dla dzieci 7-letnich.

Nauczycielki zapytane o to, dlaczego domagają się pośredniego odejmowania przy rozwiązaniu równania $x+3=8$, argumentowały, że co prawda w zakresie 10 uczeń może rozwiązać równanie w pamięci, ale gdy w klasie II lub III otrzyma takie równania z liczbami wielocyfrowymi, to rozwiązywanie pamięciowe będzie zbyt trudne i będzie musiał wykonać odejmowanie pisemne. Ta argumentacja wydaje się zgodna z zasadą Krygowskiej. Jednakże w klasie I najważniejsze jest, by uczeń pojął sens równania i umiał znaleźć rozwiązanie w łatwych przypadkach. *Bardziej zaawansowane metody należy wprowadzać dopiero wtedy, gdy są rzeczywiście potrzebne.*

Warto dodać, że nawet na poziomie klasy III nie zawsze opłaca się zastępować dopełnianie przez odejmowanie. Na przykład, jeśli trzeba rozwiązać równanie $498 + x = 501$, to dopełnienie w pamięci 498 do 501 jest natychmiastowe (wystarczy policzyć: 499, 500, 501), natomiast przy odejmowaniu pisemnym 501–499 pojawia się podwójne przekraczanie progu dziesiątkowego i wielu uczniów myli się przy obliczeniach.

Przejdźmy teraz do drugiego z równań (1) i owej wzorcowej metody rozwiązywania równania $7 \cdot x = 42$ poprzez obowiązkowy krok pośredni: $x = 42:7$.

Oprócz komentarzy analogicznych do tych, które sformułowaliśmy w przypadku równania z dodawaniem, dochodzi nowy argument, bardzo istotny. Zastanówmy się, jak w praktyce uczeń (a także dorosły) może wykonać dzielenie $x = 42:7$? Właściwie nie ma innej możliwości: trzeba sobie przypomnieć tabliczkę mnożenia i szukać w pamięci, przez jaką liczbę należy pomnożyć 7, aby otrzymać 42. Innymi słowy, szukamy rozwiązania równania $7 \cdot x = 42$, po czym stwierdzamy, że $x = 6$. Ujawnia się tu cała sztuczność tej rytualnej trójki:

$$7 \cdot x = 42, \qquad x = 42:7, \qquad x = 6.$$

Mając równanie $7 \cdot x = 42$, piszemy dzielenie $x = 42:7$ tylko po to, aby zaraz wrócić do punktu wyjścia, do $7 \cdot x = 42$. W takim razie po co wykonuje się ten krok, aby zaraz się z niego wycofać? Odpowiedź jest jasna: taki bowiem krok okaże się niezbędny w przypadku liczb wielocyfrowych. Jednakże jeśli równanie dotyczy liczb w zakresie tabliczki mnożenia, to opuszczenie przez ucznia pośredniego dzielenia jest racjonalne; w żadnym więc wypadku nie należy mu obniżać za to stopnia.

Powstaje pytanie, jak wobec tego powinien przebiegać proces przybliżania uczniom, czym są równania i jak się je rozwiązuje? Najogólniej można to ująć, postulując, że należy wspomagać uczniów w długim okresie spiralnego formowania się idei głębokich:

— idei głębokiej *równania*,

— idei głębokiej *rozwiązania równania* (tzn. liczby spełniającej warunek równania),

— idei głębokiej *sprawdzania rozwiązania*.

Równania z okienkami to początek tego procesu. Natomiast wczesne wprowadzanie ściśle określonych, standardowych procedur rozwiązywania równań, które będą potrzebne dopiero przy nauce algebry, nie jest właściwą drogą.

Przykład 8. Podobne do poprzednich argumenty dotyczą wprowadzania **znaku równości**. Wiadomo, że uczniowie klasy I traktują ten znak kierunkowo, od lewej do prawej, jako znak, po którym należy wpisać wynik działania. W szczególności mają trudności z akceptacją zapisu $8 = 5 + 3$. Z tego powodu pojawiały się głosy, że od początku należy uczulać uczniów na symetryczność znaku równości, gdyż jest to niezbędne dla prawidłowego rozumienia równań[11]. Zdarzało się jednak, że takie wyjaśnianie dawało złe efekty; uczniowie nie rozumieli, o co chodzi.

Do kwestii prawidłowego kształtowania znaku równości należy podchodzić ostrożnie, rozkładając proces pojmowania tego na wiele miesięcy, tak

[11] Kwestię trudności uczniów z pojmowaniem równań na lekcjach algebry, związanych z nieadekwatnym obrazem pojęciowym znaku równości omawia wielu autorów, m.in. (Pirie i Martin, 1997).

aby konflikt poznawczy uczniów nie okazał się destruktywny dla ich zaufania do swego rozumienia matematyki. Kształtowanie znaku równości powinno być spiralne, tak by wyższe formy rozumienia nadbudowywać na niższych, a nie zaczynać od razu od tych bardziej zaawansowanych.

Z brakiem należytego rozumienia znaku równości wiąże się też nieraz dyskutowana kwestia: „Co nazywamy sumą liczb?" (Semadeni, 2002b, s. 107). W wielu podręcznikach do klasy II można znaleźć wyjaśnienie, że sumą liczb 8 i 5 jest zarówno 5+8 jak i 13. Przekonałem się jednak wielokrotnie, że subtelności takich nie rozumie spora liczba studentek kierunku *Edukacja początkowa.*

Jestem więc obecnie przeciwny wczesnemu informowaniu uczniów o tym podwójnym znaczeniu słowa „suma". Świadomość, że 5+8 to też suma, powinna pojawiać się stopniowo, w miarę jak uczniowie poznają coraz to nowe sytuacje, w których mówi się o sumach.

6. Zasada właściwego ukierunkowania a zgodność terminologii szkolnej z uniwersytecką. Problemy terminologii i notacji sprawiają nieraz poważne kłopoty. Choć panuje dość powszechne przekonanie, że w matematyce wszystko powinno być jednoznaczne i klarowne, w rzeczywistości natura tej dziedziny wiedzy jest znacznie bardziej złożona i zdarza się, że nie ma dobrych, jednoznacznych odpowiedzi na pewne proste pytania.

PRZYKŁAD 9. Kilka lat temu toczyła się w Polsce dyskusja pod hasłem: **czy tangens jest funkcją ciągłą?** Odpowiednie cytaty i więcej szczegółów można znaleźć w (Semadeni, 2002c). Jest to ciekawy przykład kwestii, której nie da się zadowalająco rozstrzygnąć. Właściwie należy odrzucić zarówno odpowiedź *tak*, jak i *nie*, choć każdą z innych powodów[12]. W każdym razie nie da się tego zbyć stwierdzeniem, że ci, co twierdzą, że tangens jest nieciągły, są niekompetentni. Możliwe są dwa podejścia.

Odpowiedzią tradycyjną (do reform z lat sześćdziesiątych) było: tangens jest nieciągły w każdym punkcie zerowania się funkcji cosinus, w szczególności w punkcie $\frac{\pi}{2}$. Tak to *explicite* było ujęte w standardowych podręcznikach uniwersyteckich: (Leja, 1969) i (Fichtenholz, 1978, II. §4).

Odpowiedzią w duchu „nowej matematyki", a także „postmodernistyczną" (tzn. po *Mathématique moderne*) jest: tangens jest funkcją ciągłą, bowiem jest funkcją określoną na przestrzeni metrycznej

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left((2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right), \tag{2}$$

[12] W poniższym tekście używam słowa „tangens" jako wygodnego skrótu myślowego. W rzeczywistości chodzi tu w pierwszym rzędzie o funkcje wymierne, takie jak $\frac{1}{x}$ (a także o wszelkie funkcje trygonometryczne, których mianowniki mają punkty zerowe).

będącej sumą rozłącznych przedziałów otwartych. W każdym punkcie tej przestrzeni tangens jest ciągły, zatem (zgodnie z ogólnie przyjętą definicją) mówimy krótko: tangens jest funkcją ciągłą.

Odpowiedź tradycyjna też jest merytorycznie w pełni uzasadniona. Punktem wyjścia jest definicja ciągłości (ówczesna i dzisiejsza): funkcja f nazywa się *ciągła* w punkcie skupienia x_0 dziedziny funkcji[13], jeśli spełnione są następujące trzy warunki:

(p) funkcja f jest określona w x_0,

(q) f ma granicę w x_0,

(r) wartość $f(x_0)$ równa jest granicy w x_0.

Aby jednak trzeci warunek miał sens, muszą być spełnione oba pozostałe. Warunek (r) samoistnie nie może występować. Uściślamy więc tę definicję następująco: funkcja f jest ciągła w x_0, gdy prawdziwa jest koniunkcja

$$p \wedge q \wedge (p \wedge q \Rightarrow r). \tag{3}$$

Istota różnicy podejść: tradycyjnego i współczesnego leży jednak nie w kwestii ciągłości, lecz w podejściu do n e g a c j i ciągłości. Dawniej przyjmowano — jako rzecz oczywistą — umowę, że

(4) funkcja f jest nieciągła w x_0, gdy nie jest ciągła w x_0.

W tym ujęciu funkcja jest nieciągła w x_0, gdy prawdziwa jest negacja koniunkcji (3). Stosując prawo de Morgana, stwierdzamy więc, że funkcja f jest nieciągła w x_0, gdy fałszywe jest choć jedno ze zdań: p, q, $p \wedge q \Rightarrow r$. Wynika stąd natychmiast, że tangens jest nieciągły w $\frac{\pi}{2}$. Przyjęcie współczesnej terminologii wymaga więc odrzucenia warunku (4). Już sam ten fakt może stanowić trudność dla ucznia, gdyż jest to niezgodne ze standardową konstrukcją języka polskiego, na której oparte jest zdanie (4).

Ograniczenie myślenia o tangensie tylko do zbioru (2) jest nadmiernym zawężeniem ujęcia: w ten sposób funkcję tę traktuje się tak, jak gdyby pozostałe liczby rzeczywiste nie miały nic do rzeczy, a przecież punkt $\frac{\pi}{2}$ jest bardzo istotny dla całościowego ogarnięcia tangensa. Jest tam asymptota, nieodzowna do prawidłowej interpretacji wykresu, choć leży poza dziedziną funkcji.

Ujęcie takie jak w topologii, tzn. rozpatrywanie tangensa wyłącznie w odniesieniu do zbioru (2), zniekształca więc optykę zagadnienia.

Dawniej mówiło się o *funkcjach zmiennej rzeczywistej*; z tej perspektywy tangens był nieciągły. Bardzo ważne było rozróżnienie nieciągłości *usuwalnych* i *nieusuwalnych*; np. nieciągłość funkcji $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ można usunąć, przyjmując, że $\varphi(0) = 1$, natomiast nieciągłość pochodnej funkcji $\psi(x) = |x|$ jest

[13] W punkcie izolowanym x_0 swej dziedziny każda funkcja jest automatycznie ciągła, bowiem zbiór $\{x_0\}$ jest otwarty.

nieusuwalna, podobnie jak nieciągłość funkcji $\tau(x) = \sin \frac{1}{x}$. Przy ujęciu w duchu topologii ogólnej takie postawienie sprawy nie ma sensu, bowiem wszystkie trzy funkcje: φ, τ i ψ' są nieokreślone w punkcie 0, a zarazem ciągłe na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Zmiana terminologii uniwersyteckiej nastąpiła w wyniku rozszerzenia pojęcia funkcji. Oprócz funkcji określonych na przedziałach liczbowych rozważa się funkcje określone na dowolnym zbiorze. Był to bardzo wówczas wyraźny trend rozwoju matematyki. Wcześniej matematycy byli wprawdzie świadomi licznych analogii między odległymi pojęciami i czasem wykorzystywali to w rozumowaniach, nie czuli jednak potrzeby wprowadzania pojęć ogólniejszych, dopóki nie było to do czegoś wyraźnie potrzebne.

Nowa tendencja: *unifikacji i strukturalizacji całej matematyki* polegała na tym, że gdy zauważano jakąś analogię, starano się zdefiniować ogólniejsze pojęcie tak, aby owe analogiczne sytuacje stawały się specjalnymi przypadkami nowo zdefiniowanego pojęcia. Zmieniło to w sposób zasadniczy oblicze matematyki. Powstały nowe, ważne teorie i nowe ujęcia starych, m.in. dotyczące funkcji liczbowych i przekształceń (jakkolwiek nieraz owe ogólniejsze pojęcia okazywały się niezbyt udane lub mało przydatne i później z nich rezygnowano).

Ponadto w połowie lat sześćdziesiątych wprowadzono dla studentów matematyki kurs topologii (wydzielony lub włączony do analizy) oraz dostosowywano określenia z analizy do terminologii stosowanej w topologii ogólnej i w analizie funkcjonalnej. Dzięki temu udało się istotnie zmniejszyć dystans dzielący matematykę wykładaną na studiach od matematyki niezbędnej w badaniach naukowych. Nastąpiła przy tym istotna, całościowa zmiana uniwersyteckiego nauczania matematyki.

Po zmianie programów studiów istotnie zwiększył się rozziew między szkołą średnią a wyższą. Pojawiły się więc głosy, że należy również gruntownie zmienić program matematyki w liceum. Nastąpiło to w 1967 r., wywołując burzliwą dyskusję w środowisku matematyków. Od tego czasu wyrosło nowe pokolenie nauczycieli przyzwyczajone już do innej terminologii, nieświadome tego, co dawniej było normą.

W kontekście dyskutowanej tu zasady Krygowskiej nasuwa się pytanie: *Czy podawanie uczniom określeń, zgodnie z którymi tangens jest funkcją ciągłą, jest zgodne z tą zasadą?* Pozornie odpowiedź jest oczywista: trzeba tak czynić, bowiem w przeciwnym razie trzeba by później korygować ich wiedzę na wykładzie z topologii. Jednakże w rzeczywistości — jeśli uważnie wnikniemy w sformułowanie Krygowskiej — dojdziemy do wniosku przeciwnego. Miała ona na myśli usuwanie z umysłu ucznia tego, co niewłaściwe, a przy tym głęboko wryte w jego myśl. W przypadku tangensa wystarczy powiedzieć studentom, że jeżeli rozpatrujemy tę funkcję jedynie na jej dziedzinie określoności, a pozo-

stałe liczby rzeczywiste są poza rozpatrywaną przestrzenią, to tangens na tej przestrzeni jest ciągły. Taka informacja jest tylko modyfikacją, uzupełnieniem wiedzy ucznia, a nie burzeniem jej.

Krygowska kładła nacisk na plastyczność myśli dziecka i możliwość powstania fałszywych skojarzeń, błędnych mniemań. Otóż jeśli uczeń zapamięta, że sinus i tangens są ciągłe i podłoży pod obie funkcje zbliżony obraz myślowy, ryzykuje się poważniejsze nieporozumienia i fałszywe przekonania, znacznie trudniejsze do późniejszego wykorzenienia. Uczniowie bowiem (podobnie jak matematycy do połowy XIX wieku) wiążą ciągłość z brakiem przerw w wykresie funkcji[14]; dla większości z nich definicja oparta na (p), (q) i (r) jest zbyt trudna do zrozumienia, zwłaszcza w sytuacji konfliktu poznawczego.

Stwierdzenie, że tangens jest ciągły, wprowadza dysonans do intuicji ucznia. Nie jest to jednak dysonans korzystnego typu, który prowadziłby — po pokonaniu trudności — na wyższy poziom wiedzy. Jest to raczej *dysonans destrukcyjny*, z którym uczeń nie jest w stanie się uporać, z konieczności więc rezygnuje z prób zrozumienia. Nawiązując do 1.2, można stwierdzić, że choć uczniowie lub studenci muszą „formalnie zaakceptować" definicje podane w podręczniku, „niepojęte" dla nich może być to, że tangens jest ciągły, choć w jego wykresie są wyraźne przerwy.

W okresie reform pod hasłami „nowej matematyki" głoszono, że najważniejsze jest, by definicja szkolna była logicznie poprawna; jeśli koliduje ona z intuicją geometryczną ucznia, to należy powiedzieć uczniowi, że jego mniemanie jest błędne i że w matematyce nie opieramy się na intuicji, a jedynie na dokładnie odczytanym tekście definicji.

Dziś w dydaktyce matematyki przeważa świadomość, że lekceważenie intuicji ucznia i autorytatywne negowanie jego sądów z powodów, których nie jest on w stanie zrozumieć, jest wysoce niewłaściwe. Ścisłość wprowadzanych określeń nie może odbywać się kosztem zrozumiałości materiału.

Zresztą cała ta burza wokoło ciągłości tangensa była wynikiem braku należytej roztropności u części autorów podręczników i osób kształcących nauczycieli. Można przecież postąpić tak jak Kuratowski (1948), który zręcznie ominął trudność. Napisał po prostu, że funkcje wymierne i trygonometryczne są ciągłe, dodając: *oczywiście w punktach, w których są określone, tj. dla wszystkich x prócz tych, dla których mianownik znika.* Jest to klarowne i nie

[14] Takie ujęcie jest żywotne i dziś. Na przykład, w propozycji nowych podstaw programowych, opracowywanych w roku 2004 na zlecenie MENiS, w kolumnie „Treści" (dla zakresu rozszerzonego) znajdują się wprawdzie hasła: *Granica funkcji w punkcie (według Heinego). Pojęcie funkcji ciągłej*, jednakże obok, w kolumnie opisującej wymagania, czytamy: uczeń *rozpoznaje na podstawie wykresu funkcji, czy funkcja jest ciągła.* Na podstawie wykresu można jedynie stwierdzić, czy są przerwy w wykresie.

pozostaje w żadnej niezgodności ani z intuicją, ani z formalną definicją, której Kuratowski używał w swych publikacjach z topologii.

Najprostszym wyjściem z dylematu jest niepodawanie w szkole definicji ogólnego, dwuwyrazowego terminu „funkcja ciągła", bez uzupełniających słów, precyzujących, gdzie ta funkcja ma być ciągła. Należy więc ograniczyć się do zwrotów: „ciągła w x_0", „ciągła w przedziale", „ciągła w każdym punkcie, w którym jest określona" itp. Wówczas dylemat „Czy tangens jest funkcją ciągłą?" w ogóle się nie pojawi.

Nie przeszkadza to w używaniu zwrotu „funkcja ciągła" jako skrótu myślowego tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień. Okazuje się zresztą, że tak jest m.in. w podręczniku (Leja, 1969); nigdzie nie ma tam definicji terminu „funkcja ciągła"; zawsze jest to uzupełnione dodatkowymi słowami.

Jest to jednak rozwiązanie połowiczne. Nadal nie mielibyśmy terminologii pozwalającej rozróżniać nieciągłości usuwalne od nieusuwalnych. Brak tego kluczowego rozróżnienia u ucznia może być powodem jego błędnych intuicji, które później mogą być trudne do usunięcia, a więc powodem tego, przed czym przestrzegała Krygowska.

Warto więc odnotować, że w podręczniku akademickim H. i J. Musielaków (1993, s. 153), stanowiącym wprowadzenie do zaawansowanej analizy, pisze się *explicite*, że funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nie jest ciągła w punkcie 0, *bo nie jest w nim określona*, dodając że można ją uzupełnić do funkcji ciągłej, przyjmując $f(0) = 1$. Innymi słowy, zastosowano tu rozumowanie: ponieważ wyżej sformułowany warunek (p) nie jest spełniony dla $x_0 = 0$, więc funkcję f uznajemy za nieciągłą w tym punkcie.

Nie sądzę, by definicja Cauchy'ego, sama w sobie trudna i niezrozumiała, kiedykolwiek wzięła górę (na poziomie szkoły średniej) nad intuicją przerw w wykresie. Do przypadku tego można zastosować opinię, którą Tall (1996, s. 298) wypowiedział w innym kontekście: *Chociaż uczniom podaje się ogólną definicję* [pojęcia funkcji], *to tym, czego oni faktycznie doświadczają, są poszczególne przypadki.*

Z takich właśnie aktywności ucznia dotyczących konkretnych funkcji, a nie z przekazywanych definicji, wywodzą się intuicje ucznia. Wiedzę matematyczną należy budować, wykorzystując te intuicje, a nie wbrew nim. Podobną konkluzję dotyczącą algebry można znaleźć w (Demby, 2003, s. 106).

7. Zasada właściwego ukierunkowania a nadmierna dbałość o poprawność terminologii. Już w poprzednich przykładach wyłoniła się kwestia godzenia merytorycznej poprawności z koniecznością dostosowania nauczania do rozwoju dzieci. Teraz przeanalizujemy pewien przykład nadmiernego pedantyzmu terminologicznego.

PRZYKŁAD 10. W roku 1983 pojęcie **skali** pojawiło się w polskim programie matematyki już w klasie III szkoły podstawowej, sformułowane w postaci czynnościowej: *kreślenie odcinków w skali np. 1:2, 2:1, 1:4, 4:1, 1:1*". Kryło się za tym dość rozpowszechnione rozumowanie: skoro skala jest pojęciem matematycznym i skoro wprowadzono (w wyniku nacisku metodyków geografii) mapy i plany na lekcjach ze środowiska, więc — z uwagi na konieczność korelacji międzyprzedmiotowej — należy wcześniej przerobić odpowiednie tematy z uczniami na lekcjach matematyki.

Argumentacja ta, powielająca znany stereotyp, jest w istocie wątpliwa[15]. Nawet jeśli założyć, że na zajęciach ze środowiska w klasie III celowe jest zaznajomienie uczniów z planem lub mapą, to ogólna zasada opierania nowych pojęć matematycznych na czynnościach dotyczących czegoś, co jest naturalne i zrozumiałe dla ucznia, przemawiałaby raczej za tym, aby skalę prezentować po raz pierwszy właśnie na konkretnych przykładach zagadnień związanych ze środowiskiem ucznia, np. zajmując się planem klasy, szkoły lub planem osiedla, w którym znajduje się szkoła. Abstrakcyjne pojęcie skali mogłoby pojawić się w klasach IV–VI i wtedy wykorzystywałoby się uprzednie doświadczenia dzieci.

Przedstawiwszy niezbędne tło, zacytuję teraz wypowiedź jednej ze znanych i zasłużonych metodyczek geografii: umieszczenie w podręczniku do klasy III jakiegokolwiek planu lub mapy i użycie słowa „plan" lub „mapa" (lub nawet „mapka") bez podania skali byłoby błędem merytorycznym. Dodała ona przy tym, że w nauczaniu bardzo dużo zależy od pierwszego kontaktu dziecka z nowym materiałem i mogłyby być ono przekonane, że wolno używać słów „plan", „mapa" bez podania skali, toteż później nauczyciel klas IV–VIII musiałby korygować to błędne przekonanie. Jej argumenty, odwołujące się do znanego w psychologii prawa pierwszego kroku (czy też zjawiska wdrukowania, *imprinting*), są pozornie zgodne z omawianą tu zasadą Krygowskiej. Mimo to uważam je za całkiem chybione. Brak skali przy rysunku w podręczniku mógłby być wprawdzie złym sygnałem dla nauczyciela (jakkolwiek znaczenie takiego wpływu też wydaje się dyskusyjne), jednakże w przypadku pierwszego zetknięcia się dzieci z planem lub mapą najistotniejsze przecież jest to, by nauczanie było dostosowane do specyfiki ich myślenia. W początkowym okresie nauki powinny one przede wszystkim pojąć takie fundamentalne fakty, jak u m o w-

[15] Pomijam tu inną kwestię, a mianowicie to, że pojęcie skali w wersji jednowymiarowej (tzn. wyłącznie dotyczące odcinków) jest — wbrew mniemaniom tych, którzy układali ów program — trudniejsze dla dzieci niż pojęcie skali w przypadku figur dwuwymiarowych, gdzie bardzo istotną rolę odgrywa porównywanie k s z t a ł t ó w figur, a nie tylko obliczanie stosunków liczbowych. Odcinek stanowi przypadek skrajny i nietypowy, a doświadczenia zdobyte w tym przypadku nie dadzą się bezpośrednio zastosować do figur bardziej złożonych (Swoboda, 1993, s. 97).

ność symboli na mapie (np. to, że domy, kościół itp. inaczej wyglądają na fotografii z helikoptera, a inaczej na planie osiedla, na którym oznaczane są specjalnymi znakami) oraz pojąć pewne rzeczy dla nas oczywiste, np. dlaczego na planie nie zaznacza się samochodu, który widać na fotografii.

Nie sądzę, by w omawianym przypadku brak skali mógł się dzieciom jakoś wdrukować; raczej nie zwrócą na to uwagi. Uważam, że na tym etapie dzieciom wystarczy ogólna informacja, że na planie wszystko jest odpowiednio pomniejszone. W klasie III podanie skali jest o tyle bezużyteczne, że odczytanie odległości np. 4 cm lub 17 mm na planie (czy mapie) i przeliczenie tego na odległość w terenie przy skali takiej jak 1:10 000 czy 1:500 000 jest nierealne, odpowiada to bowiem poziomowi końca szkoły podstawowej. W grę wchodzi jedynie ewentualnie plan klasy np. w skali 1:100, z prostą regułą: 1 cm na planie to 1 metr w rzeczywistości, tak jak to tradycyjnie było robione w klasie IV przed reformami z lat siedemdziesiątych.

Należy przy tym zaznaczyć, że w sformułowaniu Krygowskiej mowa jest o usuwaniu z umysłu ucznia tego, co zostało tam ukształtowane poprzednio z dużym wysiłkiem. Z pewnością nie dotyczy to przypadku, w którym uczniowie na jednej lekcji zajmowali się planem, bez podanej skali.

8. Podsumowanie. Omawiana tu zasada Krygowskiej jest aktualnym i żywotnym problemem dydaktycznym. Jej właściwa interpretacja wymaga zwrócenia szczególnej uwagi na to, że matematyzacja i związane z tym kształtowanie pojęć powinno odbywać się *zawsze w sposób możliwie naturalny* dla uczniów, a także dla nauczyciela. Nastawienie się jedynie na możliwie wczesne (często przedwczesne) i naukowo poprawne wprowadzanie abstrakcyjnych pojęć, połączone z często spotykanym złudzeniem, że to, co wydaje się proste dla dorosłego, jest też proste dla dziecka — to byłby niewłaściwy wniosek z tego, co głosiła Krygowska.

Poważnym problemem jest więc badanie tego, co się dzieje, gdy ową zasadę usiłuje się zastosować bezpośrednio w praktyce szkolnej. Zjawiskiem, które obserwujemy od owych reform z lat siedemdziesiątych, jest to, że autorzy podręczników i dydaktycy stosują się do pierwszej części zasady: matematyzację powinno się przeprowadzać możliwie wcześnie i możliwie czysto z formalnego punktu widzenia, a pomijają rzecz znacznie trudniejszą: *jak to zrobić*, aby było to odbierane w klasie jako coś naturalnego.

Właśnie stąd brało się przedwczesne wprowadzanie pewnych nadmiernie abstrakcyjnych pojęć (sam nie jestem tu bez winy), bez należytego opracowania skutecznej metodyki, takiej, by zwykły nauczyciel był w stanie to realizować. Dzisiaj wiem, że stosowanie zasady Krygowskiej jest znacznie trudniejsze, niż mi to się zdawało, gdy pierwszy raz się z tym zetknąłem.

Biorąc pod uwagę zagadnienia zasygnalizowane w omawianych powyżej przykładach (a zwłaszcza kwestię ułamków), zasadę właściwego ukierunkowania należy interpretować następująco: wszystkie kolejne etapy kształtowania jakiegokolwiek pojęcia należy prowadzić tak, aby przy przechodzeniu na wyższe etapy rozwoju, opierać się (w możliwie zrozumiały sposób) na tym, co zostało ukształtowane na etapach poprzednich. Liczyć się trzeba jednak z tym, że wcześniejsze schematy będą nieraz musiały ulec akomodacji, a dotychczasowa wiedza nie tylko ma być rozszerzana, pogłębiana i uzupełniana, ale też nieraz z konieczności musi być modyfikowana, przekształcana, dostosowywana do bardziej dojrzałego ujęcia. Istotą tej zasady jest to, aby przy wszelkich niezbędnych zmianach, jak najwięcej wykorzystywać poprzednie doświadczenia ucznia i jego wcześniejszą wiedzę, starając się ponadto, by *odczuł i zaakceptował on potrzebę zmiany, wynikającą z przejścia na wyższy poziom.*

*

Pani Profesor Krygowska, wtedy gdy Ją poznałem, była pod bardzo silnym wpływem prądów *Mathématique moderne*. Z drugiej strony, była zbyt potężną indywidualnością, osobą o ogromnej wiedzy i przenikliwości myślenia, by po prostu zaakceptować wszystko, co wówczas głoszono. Jej poglądy przy tym stopniowo ewoluowały. Do końca życia imponowała stałą pasją zgłębiania problemów dydaktyki matematyki, widząc liczne trudności w tym tkwiące. Myślałem o Niej, że pomimo zaawansowanego wieku i nienajlepszego zdrowia, ciągle jest młoda duchem, bardziej aktywna umysłowo niż wiele osób młodszych wiekiem.

Krygowska wielokrotnie deklarowała, że nie jest zwolenniczką „nowej matematyki", później miała do tego prądu stosunek krytyczny, ale jednocześnie było dla mnie wyraźne, że do końca życia była głęboko przesiąknięta ideami, które do dydaktyki wnieśli w latach sześćdziesiątych matematycy francuscy i belgijscy.

Sądzę, że Krygowska nie akceptowała owego skrajnego hasła: „zapomnijcie to, czegoście się dotąd uczyli". Była świadoma poglądów (będących m.in. fundamentem koncepcji Piageta), że umysł ludzki wszystko, czego się uczy, zawsze jakoś buduje na tym, co było wcześniej. Nie można wyzerować świadomości matematycznej człowieka tak, jak się resetuje komputer. Trzeba z konieczności opierać się na tym, co już jest ukształtowane. I dlatego Krygowska z taką pasją walczyła o to, aby było czynione to rzetelnie, tak aby pojęcia na wyższym poziomie abstrakcji opierały się na solidnych podstawach. Nie wynika stąd bynajmniej, że należy wcześnie rozpoczynać od budowania tych wyższych pięter, co było podstawowym błędem koncepcji ogólnie określanych mianem „nowej matematyki".

Krygowska — jak nikt inny w XX wieku — wywarła olbrzymi wpływ na polską dydaktykę matematyki. Zostawiła nam też wielkie przesłanie: stale pracować na problemami nauczania, nie popadać w samozadowolenie, drążyć zjawiska, które obserwujemy.

Literatura

B r o w n, T., E a d e, F., W i l s o n, D.: 1999, Semantic innovation: Arithmetical and algebraic metaphors within narratives of learning, *Educational Studies in Mathematics* **40**, 53–70.

B r u n e r, J.: 1964 [1961], *Proces kształcenia*, PWN, Warszawa.

C y d z i k, Z.: 1968, *Metodyka nauczania początkowego, część II. Matematyka*, PZWS, Warszawa.

D e m b y, A.: 1990, O wykorzystywaniu kompensowania się działań odwrotnych przez uczniów na przełomie czwartej i piątej klasy szkoły podstawowej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **12**, 79–118.

D e m b y, A.: 2003, Kształtowanie się umiejętności przekształcania wyrażeń algebraicznych u uczniów w wieku 13–15 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 69–109.

D i e n e s, Z. P.: 1964, *An Experimental Study of Mathematics Learning*, Hutchinson & Co, Londyn.

D u d a, R.: 1982, Zasada paralelizmu w dydaktyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 127–138.

E i n s t e i n, A.: 1997 [1922], *Istota teorii względności*, Prószyński i S-ka, Warszawa.

F i c h t e n h o l z, G. M.: 1978 [1947], *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom I, wyd. VII, PWN, Warszawa.

H e j n ý, M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **19**, s. 15–28.

K e n s c h a f t, P. C.: 2005, Racial equity requires teaching elementary school teachers more mathematics, *Notices of the American Mathematical Society* **52**, s. 208–212.

K r y g o w s k a, Z.: 1977 [1969], *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, WSiP, Warszawa.

K u r a t o w s k i, K.: 1948, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*, Warszawa.

L e j a, F.: 1969 [1946], *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, wyd. X, PWN, Warszawa.

M u s i e l a k, H., M u s i e l a k, J.: 1993, *Analiza matematyczna*, tom I, Część 1, Wydawnictwo UAM, Poznań.

M y x, A.: 1973, *Modèles finis*, Monographie E. Galion, Cedic, Lyon-Paris.

P i a g e t, J., G a r c i a, R.: 1989 [1983], *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.

P i r i e, S. E. B., M a r t i n, L.: 1997, The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations, *Educational Studies in Mathematics* **34**, 159–181.

P u c h a l s k a, E., S e m a d e n i, Z.: 1991 [1980], Nauczanie początkowe matematyki w świetle ogólnych zasad nauczania, w: Semadeni, Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, tom **1**, WSiP, Warszawa, s. 57–77.

P u c h a l s k a, E., S e m a d e n i, Z.: 1986, Symbole literowe w nauczaniu początkowym, w: Semadeni, Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, tom **3**, WSiP, Warszawa, s. 173–192.

S e m a d e n i, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41–92.

S e m a d e n i, Z.: 2002b, Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 93–117.

S e m a d e n i, Z.: 2002c, Czy tangens jest funkcją ciągłą? *Matematyka* **5**, 267–270.

S e m a d e n i, Z.: 2003, Spłaszczanie się hierarchii pojęć, horyzontalne i wertykalne składowe matematyzacji i wieloznaczność terminu „model", *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 111–150.

S e m a d e n i, Z.: 2004, Aspekty znaczeniowe i aspekty strukturalne pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 151–168.

S i e r p i ń s k a, A.: 1985, O niektórych trudnościach uczenia się pojęcia granicy — na podstawie studium przypadku, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **4**, 107–167.

S i e r p i ń s k a, A.: 1988, Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 103–153.

S t r a s z e w i c z, S.: 1966, *Arytmetyka i algebra w klasach V–VIII szkoły podstawowej*, PZWS, Warszawa.

S w o b o d a, E.: 1993, Próba hierarchizacji trudności zadań na powiększanie figur na etapie przeddefinicyjnym pojęcia podobieństwa, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **15**, 85–101.

T a l l, D.: 1996, Functions and Calculus, w: Bishop et al. (red.) *International Handbook of Mathematical Education*, Part 1, Kluwer, Dordrecht, 289–325.
T u r n a u, S.: 1986, Odejmowanie liczb i jego związek z dodawaniem, w: Semadeni, Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, tom **3**, WSiP, Warszawa, s. 25–32.
T u r n a u, S.: 1988, Wprowadzenie do nauki o ułamkach, w: Semadeni, Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, tom **4**, WSiP, Warszawa, s. 11–25.
v a n A m e r o m, B. A.: 2003, Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 63–75.
v a n H i e l e, P. M.: 2003 [2002], Podobieństwa i różnice między teorią uczenia się i nauczania Skempa a poziomami myślenia van Hielego, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 183–202.
W y g o t s k i, L. S.: 1971, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa.

On a didactical principle formulated by Zofia Krygowska

S u m m a r y

The purpose of the paper is to analyse the following didactical principle considered by Krygowska: *In the process of instruction, there should never arise the need to erase from a student's memory anything that had earlier been formed with great effort by the teacher and the learner.* Special attention is paid to misinterpretations of such an idea in the past (leading, e.g., to premature teaching of abstract concepts) and to limitations of Krygowska's principle (e.g., it has to be combined with Bruner's conception of spiral education; the way a topic is taught should be as natural to children as possible and should take into account what is important in their daily life). Relations of the principle to the theory "intra–inter–trans" of Piaget and Garcia are discussed.

Examples used to illustrate the issues include: the context and methods of introducing subtraction of numbers to first-graders as an inverse operation; explaining to children who are at the visual level (in van Hiele's terminology) that each square is a rectangle; explanations that zero is an even number; insisting that equations must be solved by inverse operations from the very beginning; the context and methods of introducing fractions; introduction of the general concept of a function which is not used at the initial stage; premature introduction of the notion of scale of a map.

Another problem discussed in the paper is the tendency to introduce terminology of advanced theories (e.g., presenting the tangent function and rational functions as continuous, so that the definition should be the same as that of a continuous function in general topology).