ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Agnieszka Demby
Uniwersytet Gdański

Dobieranie operacji odwrotnych przez uczniów w wieku 13–15 lat przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych

Wstęp

Motywacją do przeprowadzenia badań, których wyniki są prezentowane w tej pracy[1], było wielokrotne obserwowanie następujących zjawisk podczas lekcji poświęconych rozwiązywaniu równań liniowych:

— wielu uczniów rozpoczynających naukę rozwiązywania równań, mając rozwiązać równania typu $3x = 7$ oraz $3x - 5 = 4$, nie wiedziało, jakie operacje trzeba wykonać na obu stronach równania, aby po lewej stronie otrzymać x,

— w przypadku równania $3x = 7$ część uczniów uważała, że wyznaczy x poprzez zastosowanie operacji *odjąć 3*,

— dla równania $3x - 5 = 4$ uczniowie proponowali między innymi wykonanie następujących ciągów operacji: *podzielić przez 3, a następnie dodać 5* lub *podzielić przez 3, a następnie odjąć 5.*

— gdy na tablicy lub w objaśnieniach słownych pojawiły się równości typu $3x : 3 = x$ lub $\frac{3}{4}x \cdot \frac{4}{3} = x$, niektórzy uczniowie pytali: *Skąd wiadomo, że to wyjdzie iks?*

Powyższych obserwacji dokonałam w klasach V–VIII szkoły podstawowej w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych. Podobne sytuacje obserwuję jednak również obecnie — w klasie VI szkoły podstawowej oraz w gimnazjum.

Umiejętność korzystania z wzajemnej odwrotności działań: dodawanie–odejmowanie i mnożenie–dzielenie, w szczególności wskazywania operacji odwrotnych, prowadzących do wyznaczenia wartości x z równania o niewiado-

[1] Opracowanie przedstawionych tu badań było wykonane w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003–2006.

mej x, jest kluczowa przy rozwiązywaniu równań liniowych. Jednakże w dostępnej literaturze nie natknęłam się na jakiekolwiek badania związane ze stosowaniem operacji odwrotnych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych (nie licząc stosowania tego przy rozwiązywaniu równań), w szczególności z dobieraniem operacji prowadzącej do redukcji pewnej części wyrażenia.

Celem moich badań było przeprowadzenie dokładniejszej diagnozy przytoczonych powyżej zachowań uczniów i zbadanie, jak stosują operacje odwrotne przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Nie chciałam jednak badać tych umiejętności uczniowskich w izolacji od innych, bardziej typowych umiejętności związanych z przekształceniami algebraicznymi. Postanowiłam zatem swe wcześniej zaplanowane, długofalowe badania dotyczące tożsamościowych przekształceń algebraicznych i wyznaczania wartości liczbowych wyrażeń poszerzyć o problematykę korzystania z operacji odwrotnych przy przekształceniach. Wskutek takiego usytuowania prezentowanych tu badań uzyskałam dodatkowe możliwości porównań i śledzenia rozwoju uczniów.

Analizę materiału empirycznego rozpoczęłam od części dotyczącej umiejętności bardziej typowych, co w konsekwencji spowodowało istotne opóźnienie opracowania wyników badań nad stosowaniem operacji odwrotnych. W tym czasie przeprowadzono w Polsce reformę oświaty. Jednakże w podręcznikach szkolnych opublikowanych po 1999 r. nadal nie ma — podobnie jak w dawniejszych — materiału do systematycznych zabiegów służących opanowaniu przez uczniów umiejętności dobierania operacji odwrotnych przy rozwiązywaniu równań, przez co mój problem badawczy jest nadal aktualny.

Faza zbierania przeze mnie materiału empirycznego składała się z dwóch etapów. Zaplanowałam je na dwa ważne momenty nauczania przekształceń algebraicznych i rozwiązywania równań liniowych — przypadały one wówczas na połowę klasy siódmej i na koniec klasy ósmej.

Celem przeprowadzonych w owych momentach testów i wywiadów indywidualnych było zbadanie, czy i w jaki sposób uczeń opisuje poprawną operację lub poprawny ciąg operacji prowadzących do wyznaczenia x z pewnych podstawowych wyrażeń algebraicznych (tj. takich wyrażeń, które uczeń na ogół napotyka po lewej stronie rozwiązywanego równania tuż przed podjęciem decyzji o doborze operacji odwrotnych).

Za podstawowe typy wyrażeń przyjęłam wyrażenia wymagające bądź odwrócenia jednego działania, np. $2+x$ lub $x:5$, bądź odwrócenia dwóch działań, np. $2x-3$ lub $5-x$, gdyż głównie w przypadku wyrażeń takiej postaci uczeń podejmuje decyzję o zastosowaniu operacji odwrotnej, pozwalającej na wyznaczenie x.

Prezentowane tu badania miały przyczynić się do poszerzenia naszej wiedzy w zakresie następujących kwestii:

Jakiego rodzaju trudności mają uczniowie z dobraniem poprawnej operacji lub poprawnego ciągu operacji prowadzących do wyznaczenia niewiadomej x z podstawowego wyrażenia algebraicznego (będącego np. lewą stroną równania)?

Które typy podstawowych wyrażeń algebraicznych są szczególnie trudne dla uczniów i dlaczego?

1 Przegląd literatury

Temat tej pracy wiąże się z trzema obszarami badań: (i) stosowaniem zależności między działaniami wzajemnie odwrotnymi, (ii) rozwiązywaniem równań liniowych, (iii) przekształcaniem wyrażeń algebraicznych.

Stosowanie zależności między działaniami wzajemnie odwrotnymi

Pewne typy trudności uczniów w stosowaniu operacji odwrotnych opisane są w pracy (Sadowski i Mc Ileven, 1984). Badano tam 135 uczniów amerykańskich klas czwartych i piątych, dając im test zawierający 24 jednodziałaniowe równania z okienkami. W równaniach tych pojawiły się wszystkie cztery działania arytmetyczne, a okienka występowały w różnych miejscach, również jako „wynik działania". Najwięcej błędów, sprawiających wrażenie pewnej regularności, pojawiło się przy równaniach takich jak

(A) $\square - 22 = 45$ i $\square : 12 = 24$

(popełniło je prawie 25% uczniów, często mających dobre wyniki w arytmetyce) oraz

(B) $76 - \square = 29$ i $90 : \square = 15$

(prawie 15% uczniów). Autorzy zaznaczyli, że grupy uczniów z błędami w (A) i z błędami w (B) były prawie rozłączne.

W czasie wywiadów okazało się, że błędom w przypadku (A) towarzyszyły bardzo różne wyjaśnienia uczniów i trudno było wskazać dominujące wzorce myślenia. Natomiast w przypadku (B) uczniowie natychmiast uzasadniali swój wybór działania, mówiąc np. *to jest jak lustro; pomnożyć–podzielić oraz dodać–odjąć idą razem* lub *dodać i odjąć są przeciwnościami, podobnie pomnożyć i podzielić; trzeba tylko wybrać to drugie odpowiednie*, lub *dzielenie usuwa mnożenie, podobnie odejmowanie usuwa dodawanie.* Niektórzy uczniowie podkreślali, że nauczyli się tego od swego nauczyciela.

Po tych wywiadach przeprowadzono specjalny ciąg lekcji (5–6 dni), ilustrowanych poglądowo za pomocą umownych konkretów (tzw. Noisy Number Blocks). Celem tych lekcji było sformułowanie i utrwalenie ogólnych zasad, np. jak wyznacza się niewiadomą odjemną, gdy dane są odjemnik i różnica.

Po tym nauczaniu zastosowano kolejny test, w którym błędy — zarówno dla przypadku (A), jak i (B) — pojawiły się tylko sporadycznie.

Po 6 kolejnych tygodniach uczniów tych poddano kolejnemu testowi. Tym razem okazało się, że u większości uczniów, u których zaobserwowano w pierwszym teście błąd w (B), znów ten błąd pojawił się. Natomiast uczniowie, którzy popełniali na początku błędy w (A), praktycznie przestali je popełniać, lecz u wielu spośród nich stwierdzono teraz błędy w (B).

Moje wcześniejsze badania dotyczące działań odwrotnych (Demby, 1990 i 1993) dotyczyły problemu, czy i w jakim stopniu uczniowie stosują kompensowanie się par operacji: „*dodać a*" i „*odjąć a*" oraz „*pomnożyć przez a*" i „*podzielić przez a*" w trakcie obliczeń arytmetycznych. Badaniami objęłam wtedy 32 uczniów w wieku około 11 lat (kończących klasę czwartą szkoły podstawowej). Składały się one z trzech etapów. Na każdym etapie uczniowie pisali test, po czym przeprowadzałam wywiady indywidualne ze wszystkimi uczniami piszącymi test. Odstępy czasowe między kolejnymi testami wynosiły około 2 tygodni. Wyniki badań pokazały między innymi, że:

— około $\frac{2}{3}$ uczniów nie umiało podać wartości wyrażeń typu $28+75-75$ lub $14 \cdot 15 : 14$, danych w pierwszym teście, bez wykonania co najmniej niektórych działań (w tym ok. $\frac{1}{4}$ wszystkich uczniów wykonało obliczenia we wszystkich danych 10 wyrażeniach);

— uczniowie, którzy wykonywali obliczenia, na ogół (nawet po mojej sugestii w czasie wywiadu) nie widzieli powodów, dla których można było zrezygnować z obliczeń; niektórzy twierdzili zdecydowanie: *wolę liczyć, bo to rozumiem*, inni mówili: *sprawdzam, czy mam dobry wynik*;

— uczniowie mieli poważne kłopoty z ułożeniem zadań tekstowych do wyrażeń zawierających parę działań odwrotnych (takich, jakimi zajmowali się w pierwszym teście); ułożenie przez ucznia poprawnego zadania do wyrażenia zawierającego parę mnożenie–dzielenie prawie się nie zdarzało;

— w ostatnim teście w owych badaniach (przeprowadzonym już po doświadczeniach z powyższym typem wyrażeń, w szczególności po wywiadach, w trakcie których rozmawialiśmy o możliwości rezygnacji z obliczeń w niektórych wyrażeniach) prawie połowa badanych uczniów wpadła w przygotowane przeze mnie pułapki, twierdząc na przykład, że $100-19+100$ jest równe 19 lub że $3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$ jest równe 3, przy czym część z nich powiedziała, że stosuje tu regułę: *jak są dwie liczby te same i jedna inna, to spisuję tę inną i mam wynik.*

Gilmore i Bryant (2004) badali, jak uczniowie radzą sobie z uzupełnianiem brakującego elementu w wyrażeniach zawierających parę działań odwrotnych dodawanie–odejmowanie. Były to wyrażenia arytmetyczne (z liczbami, nie z literami) następujących typów:

(1) $\square + b - b = a$, (2) $a + \square - b = a$, (3) $a + b - \square = a$, (4) $a + b - b = \square$.

W owej pracy znajdują się dane na temat rozwiązywania przez uczniów zadań związanych z typami (1) i (4). Badano 66 uczniów (średni wiek 8 lat, 11 miesięcy). Rozwiązywali oni zadania sformułowane w trzech postaciach: liczbowej (np. $15+12-12=\square$), słownego zadania tekstowego (np. o ludziach wsiadających do autobusu i wysiadających z niego) oraz w postaci ciągu kart z rysunkami (np. na pierwszej karcie pudełko z napisaną na przedniej ściance liczbą 15, na drugiej karcie — ilustracja dodawania 12 kulek do tego pudełka, na trzeciej — zabieranie 12 kulek, na czwartej — pudełko ze znakiem zapytania). Oprócz zadań związanych ze stosowaniem zależności między działaniami wzajemnie odwrotnymi uczniowie rozwiązywali też tzw. zadania kontrolne, również podane w trzech różnych formach (liczbowo, słownie, ciąg kart), ale bez pary działań odwrotnych (np. $\square + 14 - 9 = 18$), oraz poddani byli testowi sprawdzającemu tzw. ogólne rozumowanie arytmetyczne.

Okazało się, że forma, w jakiej podano uczniom zadania, miała wpływ zarówno na wyniki zadań z działaniami odwrotnymi, jak i zadań kontrolnych. Było to zwłaszcza widoczne w przypadku użycia kart w sytuacjach prowadzących do wyrażeń postaci (1) spośród opisanych powyżej; w tym przypadku uczniowie mieli najlepsze wyniki. Z kolei postać słownego zadania tekstowego okazała się trudna zarówno w przypadku zadań z działaniami odwrotnymi, jak i zadań kontrolnych.

Analizując wyniki badań, owi autorzy wyróżnili trzy grupy uczniów.

Grupę I (22 osoby) stanowili uczniowie o niskich umiejętnościach w zakresie wszystkich trzech badanych dziedzin, tj. w zakresie stosowania zależności między działaniami odwrotnymi, w zadaniach kontrolnych i w teście ogólnego rozumowania arytmetycznego; największe problemy mieli z pierwszą z tych dziedzin.

Do grupy II (21 osób) zakwalifikowano uczniów o wysokich umiejętnościach w zakresie tych trzech dziedzin; tu wyniki dotyczące dziedziny pierwszej były nieco słabsze od pozostałych.

W grupie III (16 osób) znaleźli się uczniowie o raczej niskich umiejętnościach w zakresie zadań kontrolnych i testu ogólnego rozumowania arytmetycznego oraz równocześnie o stosunkowo wysokich umiejętnościach w zakresie stosowania zależności między działaniami wzajemnie odwrotnymi. Nawiązując do tej ostatniej grupy, autorzy stwierdzili, że niektórzy uczniowie byli bardziej zaawansowani w rozumieniu pojęciowym, niż można byłoby się spodziewać na podstawie ich umiejętności rachunkowych.

Rozwiązywanie równań liniowych

Literatura poświęcona tej problematyce jest olbrzymia, są to setki prac. W artykule tym ograniczam się do omówienia tylko kilku wybranych prac, głównie nowszych, aby zarysować problemy różnych metodyk nauczania równań i obserwowanych w ich kontekście różnych trudności uczniów. Ponadto zwracam uwagę na *te typy równań, przy których rozwiązywaniu kończy się skuteczność metod opartych na myśleniu intuicyjno-arytmetycznym*, toteż potrzebne są metody bardziej zaawansowane, o charakterze algebraicznym.

Niektórzy autorzy (Filloy i Rojano, 1989; Herscovics i Linchevski, 1994; Pirie i Martin, 1997; Linchevski i Livneh, 1999; Brown, Eade i Wilson, 1999; Vlassis, 2002; Van Amerom, 2003) lokalizowali miejsce skoku trudności przy przejściu od myślenia arytmetycznego do algebraicznego oraz próbowali wyjaśnić źródło tych trudności, a Tirosh, Even i Robinson (1998) badali to samo w kontekście nauczycieli: czy są świadomi istnienia takiego skoku. Szeroko dyskutowanym problemem jest próba wyznaczenia „linii demarkacyjnej" między „arytmetycznymi" a „algebraicznymi" typami równań i zachowań uczniów.

Filloy i Rojano (1989, s. 19) koncentrowali się na stronie matematycznej tego, co dostawali uczniowie: na *strukturze rozwiązywanych równań*. Ich zdaniem, wyraźny, podstawowy skok trudności („rozziew dydaktyczny", *didactical cut*) ujawnia się przy przejściu od równań typu $ax + b = c$ (gdzie a, b, c są danymi liczbami) do równań typu $ax + b = cx + d$, w których niewiadoma pojawia się po obu stronach równania. W tym pierwszym przypadku wystarczy wykonać działania na współczynnikach, w tym drugim zaś trzeba też opanować pewne elementy syntaktyki algebraicznej. Tak więc do pewnego momentu wystarczy arytmetyczne pojmowanie znaku równości oraz myślenie w kategoriach *cofania się*[2]. Z tego powodu Filloy i Rojano nazywają równania typu $ax + b = c$ „arytmetycznymi". Równania „niearytmetyczne" typu $ax + b = cx + d$ wymagają *wykonywania działań na wyrazie zawierającym niewiadomą x, co wykracza poza myślenie arytmetyczne.*

Uczeń musi więc, ich zdaniem, nadać równaniu pewne *znaczenie*. Jego postępowanie przy rozwiązywaniu równania powinno być zgodne z tym znaczeniem. Wymaga to modyfikacji pojęć arytmetycznych u uczniów, takiej jednak, aby zachować istotne części ich dotychczasowej wiedzy. W tym celu autorzy ci postulują, aby opierać algebrę na pewnych *schematycznych modelach*, wywodzących się z konkretnego kontekstu. Dwa takie podstawowe modele to

[2] To cofanie się (*undoing*) ma jasne odniesienie komputerowe, bowiem „*undo*" znaczy „cofnij ostatnią operację". Wbrew pozorom, nie musi to być psychologicznie równoważne z zastosowaniem działania odwrotnego, może bowiem stanowić pewną niższą formę świadomości odwracania abstrakcyjnych działań.

model *geometryczny* (porównywanie pól na schematycznym rysunku, który modeluje dane równanie) i model *równowagi* (symboliczne ciężary, znane i niewiadome, równoważą się na symbolicznej wadze). Badanie zachowań dzieci ujawniło pewne specyficzne zalety każdego z tych modeli i zarazem rozmaite przeszkody poznawcze z nimi związane. M. in. wadą tych modeli jest to, że są nieadekwatne w przypadku równań o ujemnych rozwiązaniach.

Herscovics i Linchevski (1994) ujęli inaczej rozważaną tu kwestię. Zamiast akcentować skok dydaktyczny między typami równań, badali *lukę poznawczą* (*cognitive gap*) w *świadomości uczniów*. Zlokalizowali główne miejsce trudności nieco inaczej, a mianowicie w tym, że konieczne jest wykonanie działania na wyrazie zawierającym niewiadomą (*operate with or on the unknown*). Badali oni uczniów, którzy nie byli wcześniej uczeni algebry, dając im do rozwiązania równania liniowe o jednej niewiadomej n i współczynnikach a, b naturalnych. Stwierdzili, że w przypadku równań, w których występuje tylko dodawanie lub tylko mnożenie, tzn. równań typu:

$$n + a = b, \qquad a + n = b, \qquad an = b, \qquad na = b,$$

o współczynnikach na tyle dużych, aby nie można było rozwiązać równania w pamięci, większość uczniów stosuje działania odwrotne z udziałem współczynników liczbowych, nie wykonując żadnych przekształceń na niewiadomych.

Jeżeli jednak tym pojedynczym działaniem w równaniu było odejmowanie lub dzielenie, strategie uczniów zależały od tego, czy niewiadoma była na pierwszym czy na drugim miejscu; w strategiach tych również nie pojawiały się działania wykonywane na niewiadomych.

W dalszej części badań uczniowie rozwiązywali również trudniejsze typy równań, np.

$$5n + 12 = 3n + 24, \qquad n + 4n = 35, \qquad 17n - 13n = 32$$

oraz szczególnie trudne $5n + n = 78$ i $7n - n = 108$. Najważniejszym wnioskiem płynącym z badań (Herscovics i Linchevski, 1994) było to, że strategie uczniów przy równaniach, w których niewiadoma pojawiała się po obu stronach znaku równości, były takie same, jak w przypadku niewiadomej pojawiającej się dwukrotnie po tej samej stronie równania. Główną ich konkluzją było to, że *najważniejszą cechą linii demarkacyjnej między arytmetyką a algebrą jest poczucie niemożności wykonania przez ucznia działania, jeśli jego obiektem jest liczba, której nie zna.*

Do podobnych wniosków doszli również Vlassis (2002) i Van Amerom (2003). Z drugiej strony, Linchevski i Livneh (1999) stwierdzili duże trudności szóstoklasistów z uchwyceniem struktury wyrażeń czysto arytmetycznych (takich jak 50−10+10+10 lub 926−167+167), co potwierdza moje wcześniejsze obserwacje (Demby, 1990 i 1993), że już operacje wykonywane na samych

liczbach mogą prowadzić do typów błędów obserwowanych później przy przekształcaniu wyrażeń literowych.

W literaturze najczęściej mówi się o *dwóch podstawowych podejściach* do rozwiązywania równań *na poziomie syntaktycznym* (tzn. nie odwołujących się do jakiejś konkretyzacji); opisuję je poniżej tak, jak to zostało zaprezentowane w pracy (Pirie i Martin, 1997):

(I) Wielokrotne przekształcanie równań przez „wykonywanie tego samego po obu stronach równania" aż do otrzymania równania będącego zarazem odpowiedzią; dla równania postaci $ax + b = cx + d$ (o współczynnikach liczbowych) powstaje wtedy następujący ciąg równań: $ax + b - b = cx + d - b$, stąd $ax = cx + d - b$, stąd kolejno $ax - cx = cx - cx + d - b$, następnie[3] $x(a - c):(a - c) = (d - b):(a - c)$, stąd końcowy wynik $x = (d - b):(a - c)$.

(II) Przenoszenie pewnych jednomianów (składników wielomianu będącego jedną stroną równania) na drugą stronę ze zmienionym znakiem (nazywane krótko: „zmiana strony, zmiana znaku"). Tym razem przy rozwiązywaniu równania postaci $ax + b = cx + d$ otrzymuje się następujący ciąg kolejnych równań: $ax = cx + d - b$, stąd $ax - cx = d - b$, potem $x(a - c) = d - b$, stąd końcowy wynik $x = (d - b):(a - c)$.

Filloy i Royano (1989, s. 20) nazywają metodę (I) „modelem Eulera", a (II) „modelem Viète'a". Wspólną cechą obu podejść jest to, że *przekształca się wyjściowe równanie, tak aby kolejno dostawać nowe, prostsze równania.* Jedną z konsekwencji tego jest, że gdy uczniowie są przekonani, iż po wykonanych czynnościach mają ciągle „to samo równanie", to bądź nie czują potrzeby sprawdzania rozwiązania, bądź „sprawdzają" je, podstawiając liczbę do przedostatniego z przekształcanych równań.

W kontekście tej uwagi ciekawe jest podejście heurystyczne zaobserwowane w (Pirie i Martin, 1997). Lekcje przeznaczone były dla słabszych uczniów. Nauczyciel na określenie sensu znaku równości użył metafory „płotu", po którego obu stronach miała być ta sama liczba. Napisał on na tablicy równanie $\square+\square+18=\square+53$, dodając, że w każde okienko należy wpisać tę samą liczbę. Uczniowie mieli najpierw zaproponować jakąkolwiek liczbę i sprawdzić, czy jest rozwiązaniem. Następnie próbowali znaleźć rozwiązanie przez coraz bardziej ukierunkowane próby podstawiania różnych liczb. Później próbowali wymyśleć szybsze, efektywniejsze sposoby takiego szukania. Przez kilka początkowych dni uczniowie w ogóle nie przekształcali danych im równań. Dało to dobre efekty w tym sensie, że za każdym razem uczniowie cały czas zajmo-

[3] Autorzy nie zamieścili w tym ciągu równania $x(a - c) = d - b$, choć podali je w drugim z ciągów. Być może powodem tego była chęć skrócenia tekstu.

wali się tym samym równaniem, nie pojawił się więc problem równoważności logicznej równań. Nie wiązali oni też równań z żadnymi konkretami i dość szybko zrozumieli ogólny sens równania. Nie korzystali też *explicite* z działań odwrotnych, do których jednakże trzeba by było dojść, gdyby pojawiły się trudniejsze równania.

Pirie i Martin analizują również bardzo popularną metodykę rozwiązywania równań liniowych opartą na interpretowaniu równania jako sytuacji równowagi na wadze szalkowej. Zwracają uwagę na to, że z podejściem tym wiążą się (jak zwykle w przypadku odwoływania się do sytuacji „z realnego życia") trudności związane z symboliczną reprezentacją problemu, w tym problemu przedstawionego na rysunku i słownie. W szczególności uczeń musi wiedzieć, że *znak równości* „=" *użyty jest do przedstawienia stanu równowagi, a rozwiązanie zadania dokonuje się przez zabieranie tej samej rzeczy z obu stron tak, aby została zachowana równowaga.* Należy tu dodać, że uczeń musi też być świadom metafory „odważników" i „ważonych przedmiotów" w odniesieniu do jednomianów występujących w równaniu.

Autorzy ci zastanawiają się, czy pojęcie równowagi na wadze szalkowej rzeczywiście wiąże się z „realnym życiem" ucznia. Otóż po pierwsze współcześni uczniowie nie mają życiowych doświadczeń z ważeniem na takiej wadze; w praktyce ważenie polega dziś na położeniu ważonego przedmiotu na szalce wagi elektronicznej i odczytaniem cyfrowego wyniku. Po drugie zaś uczniowie często inaczej potocznie rozumieją pojęcie równowagi, np. kojarzy im się ze staniem na jednej nodze, gdzie nie pojawia się problemu równoważących się stron. Dodatkową trudność w języku angielskim stanowi fakt, że słowo *balance* (równowaga) ma też inne znaczenie, a mianowicie „saldo na rachunku bankowym", co odpowiada różnicy „dochody minus wydatki", a to prowadzi do fałszywych skojarzeń, niezgodnych z pojęciem równania.

W sytuacji, gdy uczniowie mieli uchwycić istotę równowagi na wadze szalkowej, można było stwierdzić, że podczas rozwiązywania równań odwoływali się oni do potocznych zwyczajów ważenia, co nieraz było całkowicie niezgodne z konwencją rozwiązywania równań. Oto przykłady takich obserwacji:

— gdy uczniowie otrzymali rysunek wagi z symbolicznymi torbami ziarna i odważnikami ułożonymi na obu szalkach wagi, *przestawili wszystkie torby na jedną szalkę, a wszystkie odważniki na drugą szalkę* (w przypadku prawdziwej wagi równowaga nie byłaby przy tym zachowana), po czym wyliczyli wagę jednej torby ziarna, dzieląc całkowitą wagę odważników przez liczbę toreb;

— gdy uczeń napotkał równanie $x+5=3$, powiedział: „*zabranie 3 odważników z każdej strony tu nie działa, gdyż otrzymamy coś, co nie waży; puszka i 2 odważniki tego nie zrównoważą, będą zbyt ciężkie*";

— gdy uczniowie rozwiązywali równanie $5x + 4 = 9$, zaproponowali: „*zabieramy 4 z każdej strony równania*", przechodząc do równania $5x = 5$; w tym przypadku metoda okazała się skuteczna, jednakże gdy mieli rozwiązać równanie $5x-4 = 2x-9$, zaproponowali tę samą operację z tym samym wyjaśnieniem, otrzymując równanie $5x = 2x-9-4$.

Nawiązując do ostatniej sytuacji, Pirie i Martin zwracają uwagę na fakt, że w przypadku posługiwania się modelem równowagi na wadze, potoczne doświadczenia podpowiadają jedynie „zabieranie tego samego z obu stron". Dołożenie stosuje się jedynie wtedy, gdy szalki z początku nie są w równowadze i dla uzyskania równowagi dokłada się odważniki tylko po jednej stronie.

Powyższe obserwacje wiążą się z rozwiązywaniem równań według pierwszego z opisanych na początku tego rozdziału podejść metodycznych, tj. „wykonywania tego samego na obu stronach równania". Jednakże autorzy przytaczają również obserwację C. Kieran (1989): gdy uczniowie rozwiązywali równanie, przenosząc wyrazy z jednej strony na drugą (miało to być drugie z powyżej podanych podejść), część z nich z równania postaci $x + a = b$ otrzymała równanie postaci $x = a + b$. Pirie i Martin przypuszczają, że i w tym przypadku rozumowanie uczniów mogło nawiązywać do zabierania odważników z jednej strony (odejmowanie, „−") i kładzenia ich na drugiej szalce (dodawanie, „+").

Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

W wielu pracach opisano różne problemy uczniów przekształcających tożsamościowo wyrażenia algebraiczne. Przeglądy badań na ten temat znajdują się w (Demby, 2000 i 2003). W ciągu dalszym tej pracy będę odwoływać się tylko do tych wyników, które bezpośrednio wiążą się z obserwacjami uzyskanymi w trakcie badań opisywanych w tej pracy.

Nie napotkałam natomiast żadnych prac dotyczących badań nad przekształcaniem wyrażeń algebraicznych za pomocą operacji odwrotnych. W dostępnej literaturze zagadnienie to było zawsze badane w kontekście rozwiązywania równań. Celem mojej pracy jest natomiast kwestia odwracania działań w sytuacji, gdy nie ma równań, a uczniowie mają przekształcać wyrażenia algebraiczne (potencjalne strony równań), a nie równania.

2 Organizacja badań

Zbieranie materiału empirycznego przeprowadziłam dwuetapowo. Pierwszy etap miał miejsce w na początku drugiego semestru klasy siódmej, a drugi w końcu drugiego semestru klasy ósmej. Taki wybór terminów badań wiązał się z organizacją nauki algebry (w tym nauki rozwiązywania równań) w programie

nauczania matematyki i w podręcznikach, z których korzystali uczniowie. W czasie gdy prowadziłam badania obowiązywał tylko jeden program nauczania matematyki i jeden podręcznik do danej klasy.

Początek drugiego półrocza klasy siódmej był wówczas ważnym momentem w nauczaniu algebry w szkole podstawowej. Dobiegła wówczas końca mocno rozciągnięta w czasie (rozpoczęta w końcu klasy piątej) nauka przekształcania względnie prostych wyrażeń algebraicznych (głównie działań na jednomianach i redukcji wyrazów podobnych) i rozwiązywania równań liniowych wymagających zastosowania co najwyżej takich typów przekształceń. W drugim semestrze klasy siódmej dochodziły przekształcenia powszechnie uważane za dużo trudniejsze dla uczniów (np. działania na wielomianach aż do wzorów skróconego mnożenia włącznie), a zarazem nauka algebry stawała się bardziej intensywna. Z kolei koniec drugiego semestru klasy ósmej oznaczał koniec nauki algebry w szkole podstawowej i zarazem praktycznie koniec nauki przekształcania wielomianów i rozwiązywania równań liniowych w ogóle.

Na każdym z obu etapów empirycznej części badań zorganizowałam najpierw pisemny test; pisało go 108 uczniów. Po każdym z testów następowały wywiady indywidualne z wybranymi uczniami. Przeprowadziłam je z 51 spośród uczniów piszących uprzednio test; w klasie ósmej rozmawiałam z tymi samymi uczniami, co w klasie siódmej.

Na obu etapach badana była ta sama grupa uczniów — byli to wszyscy uczniowie z czterech klas ze szkół w Gdańsku i Malborku. Klasy wybrane do badań uchodziły za przeciętne. Klasy te uczone były przez różne nauczycielki, w tym jedna klasa przeze mnie. Wszystkie te nauczycielki miały wyższe wykształcenie matematyczne oraz jakąś dodatkową formę kształcenia, np. studia podyplomowe. Każda z nich miała osiągnięcia w zakresie przygotowywania uczniów do konkursów matematycznych i do egzaminów wstępnych do szkół średnich. Uczyły one badanych uczniów systematycznie od klasy IV do VIII (jedynie sporadycznie zdarzało się, że na krótko nie były obecne w szkole).

Na każdym z etapów badań uczniowie otrzymali podczas testu trzy zadania. Obecna praca poświęcona jest analizie wyników tylko trzeciego z tych zadań. Wyniki pozostałych omówiłam już w pracach (Demby, 1997, 2000 i 2003). Przypominam, że w zadaniu 1 uczniowie mieli doprowadzić dane wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci (wykonując tożsamościowe przekształcenia algebraiczne), a zadanie 2 polegało na wyznaczeniu wartości liczbowych wskazanych wyrażeń z zadania 1 (dla podanych wartości zmiennych). W artykule tym będę odwoływać się do wyników zadań 1 i 2 tylko wtedy, gdy będzie to istotne dla problemu przekształcania wyrażeń algebraicznych za pomocą operacji odwrotnych, którego badaniu służyło zadanie 3.

Bardzo trudnym zadaniem było sformułowanie zadania 3 w taki sposób, by skoncentrować uwagę uczniów na przekształcaniu wyrażeń algebraicznych (potencjalnych stron równań liniowych), a nie na stosowaniu technik kojarzących im się z przekształcaniem równań, i aby — zarazem — zadanie to było dla nich zrozumiałe. Zadecydowałam że zastosuję zadanie sformułowane tak, jak w podręczniku Zawadowskiego dla klasy szóstej; wszyscy badani uczniowie korzystali z tego podręcznika w trakcie wcześniejszej nauki algebry. Przygotowując uczniów do rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, W. Zawadowski zamieścił (w wydaniach z lat 1986–1990 zadanie to znajduje się na s. 193) zadanie z pytaniami typu: *Jaką operację trzeba wykonać na wyrażeniu $9x$, aby otrzymać x? Jaką operację trzeba wykonać na wyrażeniu $9-x$, aby otrzymać x?* itp.

Z poprzedzającej to zadanie części teoretycznej rozdziału nauczyciel mógł domyślić się, że autor oczekuje od uczniów zaprezentowania za pomocą grafów operacji odwrotnych, takich jak „:9" itp.

Zadanie tego typu w pełni odpowiadało celowi moich badań. Równocześnie jednak zdawałam sobie sprawę z tego, że zadanie sfomułowane w taki sposób, zastosowane bez kontekstu, będzie po prostu niezrozumiałe dla wielu uczniów (choć sformułowania takiego typu, jak w poleceniu pojawiają się w sposób naturalny w trakcie rozmowy towarzyszącej rozwiązywania równań).

Aby zatem polecenie stało się bardziej zrozumiałe, zadbałam, aby przed rozwiązywaniem pisemnego testu uczniowie zostali dodatkowo ustnie poinformowani, że chodzi tu o wskazanie operacji typu: *„dodać 5"*, *„odjąć 1"*, *„pomnożyć przez 2"*, *„podzielić przez 3"*. Pokazano im też przykładowe rozwiązanie podobnego zadania, a mianowicie gdyby mieli wyrażenie $-4x+1$, to mogliby podać rozwiązanie *„odjąć 1, a następnie podzielić przez -4"*.

Na tablicy zaprezentowano im dwie formy zapisu tego rozwiązania: słownie (jak powyżej) oraz za pomocą grafu:

$$-4x+1 \xrightarrow{\quad -1 \quad} -4x \xrightarrow{\quad :(-4) \quad} x$$

Zadanie 3, które uczniowie otrzymali w teście pisemnym, zostało opatrzone następującym poleceniem:[4]

[4] Użyty w poleceniu W. Zawadowskiego zwrot *otrzymać x* zastąpiłam zwrotem *wyznaczyć x*, częściej stosowanym przez matematyków w zadaniach z algebry, zobacz np. polecenie typu *Wyznaczyć wielomian spełniający następujący warunek...* itp. w podręczniku algebry Mostowskiego i Starka (1975, s. 186). Z punktu widzenia rozumienia polecenia przez uczniów obie wersje polecenia (tj. zarówno moja, jak i W. Zawadowskiego) są niejasne bez zastosowania dodatkowych objaśnień, w szczególności zaprezentowania przykładowego rozwiązania. Natomiast w sposób świadomy nie użyłam w poleceniu zwrotów takich, jak *obliczyć x* lub *znaleźć x*, które mogłyby sugerować, że uczeń ma podać konkretną wartość liczbową x. (Zob. też komentarz Redakcji na s. 219.)

Jakie operacje trzeba wykonać na danym wyrażeniu, aby wyznaczyć x? Poleceniu temu towarzyszyły następujące wyrażenia:

Test I (przeprowadzony w połowie klasy VII)

Wersja A	**Wersja B**
a) $2+x$	a) $5+x$
b) $2-x$	b) $5-x$
c) $2x$	c) $5x$
d) $2x-3$	d) $5x-2$
e) $x:2$	e) $x:5$

Test II (przeprowadzony w końcu klasy VIII)

Wersja A	**Wersja B**
f) $-\frac{2}{3}+x$	f) $-\frac{3}{4}+x$
g) $x-3{,}1$	g) $x-2{,}1$
h) $5{,}4-0{,}4x$	h) $3{,}2-0{,}2x$
i) $3{,}1-x$	i) $2{,}1-x$
j) $x:\frac{2}{3}$	j) $x:\frac{3}{4}$
k) $\frac{2}{3}x$	k) $\frac{3}{4}x$
l) $-0{,}5x+\frac{2}{3}$	l) $-2{,}5x+\frac{3}{4}$

Komentarza wymaga dobór wyrażeń algebraicznych zastosowanych w zadaniu.

Po pierwsze, zamieściłam w testach tylko niektóre spośród typów wyrażeń wymagających zastosowania jednej lub dwóch operacji odwrotnych. Przypominam, że w teście były również dwa inne zadania, więc dalsze wydłużenie zadań na teście byłyby zbyt męczące dla uczniów, a ponadto wywiady indywidualne musiałyby trwać zbyt długo.

Po drugie, w teście dla klas ósmych zamieściłam wyrażenia algebraiczne o bardziej zaawansowanych współczynnikach. Zależało mi na tym, aby wyrażenia te w większym stopniu przypominały wyrażenia algebraiczne, z którymi ósmoklasiści spotykali się na lekcjach. Zauważyłam bowiem, że w takim wypadku uczniowie odczuwają większą potrzebę i poczucie sensowności objaśniania swoich dróg dojścia do odpowiedzi; natomiast na liczby naturalne „z młodszych

klas" często reagują zniecierpliwieniem i mniej chętnie odpowiadają na moje pytania. Ponadto chciałam poznać procedury towarzyszące dobieraniu operacji do takich bardziej zaawansowanych wyrażeń, w szczególności móc je porównać z procedurami użytymi dla wyrażeń ze współczynnikami naturalnymi.

Ani w czasie testu, ani w czasie wywiadu uczeń nie miał żadnych ograniczeń czasowych. Na początku wywiadu uczeń otrzymywał swoją pracę pisemną (która wyglądała tak, jak w momencie, gdy uczeń ją oddał; nie było na niej żadnych poprawek ani innych nowych znaków). Prosiłam ucznia, by przeczytał uważnie swoją pracę i — o ile uważa to za potrzebne — naniósł na kolorowo poprawki. Następnie prosiłam, aby wyjaśnił, w jaki sposób doszedł do swoich wyników z pracy.

Uzyskany materiał, tj. 2 razy po około 100 prac pisemnych oraz 2 razy po około 50 protokołów z wywiadów, poddałam dalszej analizie. Szukałam regularności wiążących się z odpowiedziami m. in. na następujące pytania:

Jakiego rodzaju trudności mieli badani uczniowie, w szczególności — jakie były typy popełnianych przez nich błędów? Z którymi wyrażeniami wiązały się te błędy?

Jakie były wskaźniki trudności poszczególnych wyrażeń testów, przyjmując za wskaźnik trudności wyrażenia łączny procent odpowiedzi błędnych i braków odpowiedzi? Jaka była względna hierarchia trudności wyrażeń z testu dla klasy siódmej, a jaka — dla klasy ósmej?

Czy trudności uczniów obserwowane pod koniec klasy ósmej różniły się od tych zidentyfikowanych w połowie klasy siódmej? Z czym się to wiązało?

3 Typy błędów i braki odpowiedzi

Uczniowie podawali operacje odwrotne dla poszczególnych wyrażeń testu najczęściej w formie słownej, np. w przypadku wyrażenia $2-x$ jeden z uczniów napisał: *„trzeba odjąć 2, a następnie pomnożyć przez -1"*, inny zaś: *„koło x trzeba napisać 2"*. Istotnie mniejsza część uczniów przedstawiła rozwiązania na grafach, np. w przypadku wyrażenia $5-x$

jeden z uczniów zamieścił graf: $5-x \xrightarrow{+2x} 5+x \xrightarrow{-5} x$,

inny zaś uczeń podał graf: $5-x \xrightarrow{+5} x$.

Niektórzy uczniowie mieli w pracach pisemnych wykonane obliczenia (rachunek algebraiczny). Np. w przypadku wyrażenia $5x-2$ jeden z uczniów napisał: $5x-2+2=5x$, $5x:5=x$; inny uczeń miał z kolei następujące oblicze-

nia: $5x:5-2+2=x$. Większość uczniów rachunki takie wykonywała dopiero w czasie wywiadu (spontanicznie lub pod wpływem mojej prośby o uzasadnienie) — czasami w pamięci. Zdarzało się, że uczeń był bardzo zdziwiony otrzymanym wynikiem i samodzielnie dostrzegał, iż zaproponował w pracy pisemnej niewłaściwą operację. Niektórzy uczniowie, zwłaszcza w klasie ósmej, wykonywali obliczenia tylko w przypadku wybranych, bardziej kłopotliwych dla nich wyrażeń. Na ogół obliczenia towarzyszyły odpowiedzi słownej, czasami jednak w pracy ucznia były wyłącznie takie zapisy-obliczenia i dopiero w czasie wywiadu byłam w stanie dowiedzieć się, jakie operacje odwrotne uczeń proponuje dla danego wyrażenia.

Sporadycznie zdarzały się też prace, w których uczniowie podawali zarówno odpowiedzi słowne, jak i w postaci grafu (ta druga forma miała na ogół charakter sprawdzający, gdyż naturalne było tam przeprowadzenie pewnych rachunków).

Zarówno prace pisemne uczniów, jak i — jeszcze w większym stopniu wywiady — pokazały, że zdecydowana większość uczniów (włączając w to wielu spośród uczniów, którzy nie podjęli żadnej próby rozwiązania tego zadania) rozumiała, czego się od nich oczekiwało w tym zadaniu. Oczywiście w czasie wywiadów spotkałam też uczniów, którzy nie byli tego świadomi; byli to jednak zawsze uczniowie, którzy mieli poważne kłopoty również z pozostałymi zadaniami testu, opatrzonymi standardowymi poleceniami (pisałam o nich w rozdziale 2).

Artykuł ten poświęcony jest analizie zidentyfikowanych podczas badań trudności uczniów w zakresie przekształcania wyrażeń algebraicznych za pomocą działań odwrotnych. Należy jednak wyraźnie zauważyć, że problem trudności i błędów nie dotyczył wszystkich badanych uczniów. I tak około 15% siódmoklasistów podało w odpowiedzi wyłącznie operacje poprawne, a kolejne 15% siódmoklasistów miało 4 odpowiedzi (na 5 możliwych) w pełni poprawne. W klasie ósmej procent uczniów mających wszystkie odpowiedzi poprawne jeszcze wzrósł — do około 20%; z kolei nieco ponad 10% badanych ósmoklasistów miało od 5 do 6 odpowiedzi całkowicie poprawnych (na 7 możliwych).

Szczegółowe dane ilościowe związane z charakterystyką trudności uczniów przedstawię w następnym rozdziale. Tu dokonam natomiast jakościowej charakterystyki trudności uczniów, prezentując błędy i braki dostrzeżone w pracach pisemnych. Zaznaczam, że poniższe 8 typów błędów i braków wyróżniłam uwzględniając również informacje uzyskane w czasie wywiadów.

Nierzadko zdarzało się, że uczeń popełniał więcej niż jeden błąd w tym samym wyrażeniu, np. stosował kombinację (Pseudoop)+(BłRach) lub kombinację (BłOdwr)+(OpFragm).

(BrakUkier) Brak ukierunkowania rozwiązania na operacje odwrotne prowadzące do wyznaczenia x

Część spośród uczniów, których rozwiązania zaliczam do tego typu błędów, po prostu podawała operacje odpowiadające wyrażeniu danemu (a nie działaniu odwrotnemu). I tak na przykład przy wyrażeniu $2 + x$ pisali oni: „*do 2 należy dodać x*".

Inni uczniowie podawali operacje, które wcale nie zmierzały do wyznaczenia x. Na przykład pewien uczeń zaproponował:

dla wyrażenia $5+x$ graf $5 \xrightarrow{+x} 5x \xrightarrow{-x} 5$,

dla wyrażenia $5x-2$ graf $5x \xrightarrow{-2} 3x \xrightarrow{+2} 5x$.

Czasami uczniowie podawali ciąg operacji wzajemnie odwrotnych, jednakże nie prowadzących do wyznaczenia x z wyrażenia danego. Na przykład w przypadku wyrażenia $5 + x$ proponowali „*odjąć 5, a następnie dodać 5*", a w przypadku wyrażenia $x:5$ „*pomnożyć przez -5, potem podzielić przez -5*".

Rozmowa z tymi uczniami w czasie wywiadu była bardzo trudna. Po pierwsze mieli oni poważne kłopoty z wykonaniem jakiegokolwiek rachunku algebraicznego — często ich procedury były bardzo niestałe i co chwila takie samo wyrażenie upraszczane było według innej zasady (były to tzw. Quasi-Reguły, opisane w moich pracach z roku 2000 oraz 2003). Podobnie niekonsekwentne zachowanie obserwowałam również w przypadku dobierania operacji odwrotnych. I tak na przykład po licznych naprowadzeniach z mojej strony uczeń twierdził, że rozumie polecenie i był w stanie wskazać poprawną operację odwrotną, po czym za chwilę — w przypadku wyrażenia algebraicznego o analogicznej budowie — znów nie był w stanie wskazać operacji i, co więcej, jego rozwiązanie często znów nie było ukierunkowane na poszukiwanie operacji prowadzącej do wyznaczenia x.

Błędy tego typu i dwóch poniżej opisanych typów: (Pseudoop) i (OpFragm) nie były ściśle związane z którymś z wyrażeń testu, wskazywały raczej — jak się wydaje — na niski stopień rozumienia przekształceń algebraicznych i operacji odwrotnych przez niektórych uczniów. Występowały stosunkowo rzadko, prawie wyłącznie w klasie siódmej.

(Pseudoop) Pseudooperacja

W tym przypadku uczniowie proponowali pewną modyfikację danego wyrażenia, posługując się raczej językiem manipulacji fizycznych w procesie pisania niż językiem operacji arytmetycznych. Jeden z uczniów w przypadku wyrażenia $2x - 3$ zaproponował: „*trzeba koło x napisać -2*", inny zaś przy wyrażeniu $5 - x$ stwierdził: „*należy za x podstawić -5*" i napisał $5 - 5x = x$.

Bardzo sporadycznie pojawiała się propozycja operacji typu „*przenoszę 2 na drugą stronę*". „Strona" oznaczała czasem stronę równania (którego tu uczeń nie miał), czasem zaś chodziło jedynie o przeniesienie 2 w inne niż dotychczas miejsce danego wyrażenia algebraicznego.

Tego typu błędy, jak już wspomniałam powyżej, związane były raczej z postawą ucznia niż trudnością określonego wyrażenia algebraicznego. Zidentyfikowałam je głównie w klasie siódmej przy wyrażeniach typu $a + x$ i $a - x$, gdzie ewidentne było ignorowanie przez ucznia struktury algebraicznej wyrażenia i „wsuwanie" pewnej dogodnej liczby bezpośrednio przed x.

(OpFragm) Operacja na fragmencie wyrażenia

Uczniowie popełniający ten błąd proponowali operacje powiązane jakoś z pewnymi fragmentami danego wyrażenia, nie mając świadomości, że operacje te mają być zastosowane do całego wyrażenia. I tak na przykład w przypadku wyrażenia $2x - 3$ uczniowie proponowali: „*trzeba 2 podzielić przez 2, a do* -3 *dodać 3*" lub nawet „*trzeba 2x podzielić przez 2x, a od 3 odjąć 3*". W czasie wywiadów zaobserwowałam, że w ogóle nie zwracali uwagi na powiązanie tej części wyrażenia, którą się zajmują, z całym wyrażeniem oraz byli zdziwieni, że proszę ich o wykonanie operacji na całym wyrażeniu.

Tego typu błąd czasami wydawał się być zbliżony do opisanych powyżej (Pseudoop), tyle że uczeń opisywał swe postępowanie w języku operacji arytmetycznych. Na przykład dla wyrażenia $5 - x$ pewien uczeń zaproponował: „*trzeba x pomnożyć przez 5*" i napisał $5 - 5x$. Inny w przypadku wyrażenia $x{:}2$ powiedział: „*od dwójki należy odjąć 2*".

Nie był to błąd występujący często i nie był związany z jakimś konkretnym typem wyrażenia; obserwowałam go głównie w klasie siódmej.

(BłOdwr) Błędna operacja odwrotna

Kwalifikując propozycje uczniów do tej kategorii, oceniałam poprawność tylko tych operacji, które wyrażone były w języku arytmetyki. Były to tylko operacje następujących typów:

(i) „*dodać a*", „*odjąć a*", „*pomnożyć przez a*", „*podzielić przez a*", tj. takich, które zostały podane uczniom w trakcie wyjaśniania polecenia do zadania (zobacz rozdział 2),

(ii) „*dodać ax*", „*odjąć ax*", „*pomnożyć przez ax*", „*podzielić przez ax*", które — zapewne przez analogię do powyższych — pojawiły się w pracach uczniów (były to rzadkie przypadki).

„redukcji" sprowadzali dane wyrażenie do — jak się okazało — najłatwiejszej dla nich (z punktu widzenia celu zadania) postaci ax. W klasie ósmej odnotowałam nieco mniej „redukcji" i błędnego stosowania rozdzielności niż w klasie siódmej. Natomiast zaobserwowałam tam wiele przypadków „gubienia" lub „niedostrzegania" minusa, np. dla wyrażenia $5{,}4 - 0{,}4x$ uczeń proponował operację „*odjąć* 5,4" i jako wynik wpisywał $0{,}4x$ lub dla wyrażenia $-0{,}2x$ proponował operację „*podzielić przez 0,2*" i pisał „$-0{,}2x : 0{,}2 = x$".

(RozwCzęść) Rozwiązanie częściowe

W przypadku wyrażenia wymagającego zastosowania więcej niż dwóch operacji uczeń proponował tylko jedną operację, wyznaczał jej wynik, różny od x, i na tym pracę kończył. Na przykład dla wyrażenia $5 - x$ proponował tylko jedną operację: „*należy odjąć 5*", wpisując jako wynik $-x$.

W czasie wywiadu większość takich uczniów mówiła, że nie wiedziała, co dalej robić, niektórzy przyznawali się do nieuwagi i proponowali dalsze operacje. Tego typu braki spotykałam zarówno w klasie siódmej, jak i ósmej — w obu przypadkach jedynie sporadycznie.

(BrakRozw) Brak rozwiązania

W czasie wywiadu okazało się, że większość spośród uczniów mających braki odpowiedzi w pracach z testu twierdziła, iż rozumie polecenie, ale nie umie podać operacji, która prowadziłaby do wyznaczenia x z danego wyrażenia. Nieduża część uczniów nie podjęła natomiast próby rozwiązania zadania (albo jego części), twierdząc: „*nie pamiętam, jak się to robiło na lekcjach*" lub „*nie wiem, o co chodzi w tym zadaniu*".

W klasie siódmej odnotowałam w pracach pisemnych uczniów aż około 21% sytuacji typu (BrakRozw), w klasie ósmej procent ten jeszcze wzrósł — do około 28%. Na ogół braki te wiązały się nie z jakimiś konkretnymi wyrażeniami testu, tylko z postawami części uczniów. Najwięcej braków odpowiedzi stwierdziłam w klasie siódmej w przypadku wyrażeń typu $x:a$ i $ax - b$, natomiast w klasie ósmej w przypadku wyrażeń $ax + b$ i $a - bx$.

4 Hierarchia trudności wyrażeń

W rozdziale tym dokonam kolejnego kroku w charakteryzowaniu zaobserwowanych trudności uczniów, wskazując, które wyrażenia testów były dla uczniów bardziej trudne, a które mniej trudne, jak również wymieniając cha-

rakterystyczne błędne odpowiedzi uczniów lub braki odpowiedzi, które wpłynęły na ukształtowanie się takiej hierarchii trudności wyrażeń testu.

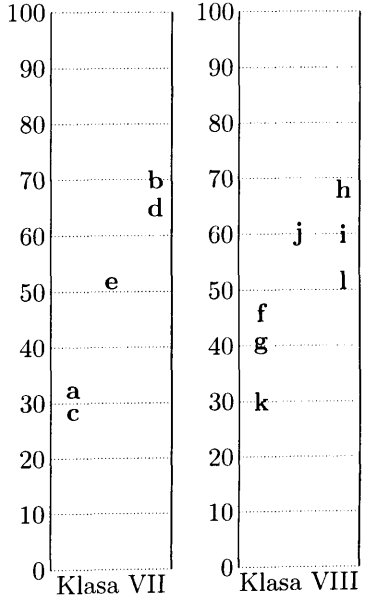
Poniższy diagram zawiera informacje ilościowe charakteryzujące trudności uczniów w przypadku każdego z wyrażeń obu testów. Znajdują się na nim jedynie symbole poszczególnych podpunktów rozważanego zadania testu (teksty zadań zostały podane w rozdziale 2).

W rozdziale 2 napisałam, że aby wyjaśnić uczniom polecenie zawarte w zadaniu testowym, zaprezentowano im przykładowe rozwiązanie podobnego zadania. W tym przykładowym rozwiązaniu wystąpiły operacje arytmetyczne typu „*dodać a*" lub „*odjąć a*", „*pomnożyć przez a*" lub „*podzielić przez a*", gdzie a było odpowiednią stałą. W trakcie badań niektórzy uczniowie zaproponowali nie tylko operacje takiego typu, ale również dodawanie lub odejmowanie wyrażeń algebraicznych typu ax, czasem też mnożenie lub dzielenie przez wyrażenie typu ax. O ile prowadziło to do wyznaczenia x, uznawałam również taką odpowiedź za poprawną (z uwagi na to, że sformułowanie polecenia było zwięzłe i nie wykluczało takiej interpretacji). W czasie wywiadu wszyscy ci uczniowie, którzy proponowali dodawanie lub odejmowanie wyrażeń typu ax, byli w stanie podać również operacje wykorzystujące wyłącznie stałe.

Korzystając ze skali na osi pionowej diagramu, dla każdego wyrażenia można odczytać wskaźnik jego trudności, tj. łączny procent b ł ę d n y c h odpowiedzi i braków odpowiedzi (włączając w to rozwiązania częściowe). Ten sposób prezentacji danych ilościowych daje możliwość natychmiastowego, wizualnego porównania względnych trudności poszczególnych wyrażeń w ramach jednego testu, jak również wyrażeń o tej samej strukturze z obu testów.

Symbole na diagramach są rozsunięte w poziomie; w ten sposób pokazuje się graficznie pewne grupowanie się wyrażeń. Wynika ono zarówno ze zbliżonych wskaźników trudności tych wyrażeń, jak i z częstości pojawiania się błędów lub braków, które są charakterystyczne dla tych wyrażeń.

DIAGRAMY TRUDNOŚCI WYRAŻEŃ TESTÓW



Na diagramie dla klas siódmych jedną grupę stanowią wyrażenia a) i c); te wyrażenia okazały się najłatwiejsze dla uczniów. W drugiej grupie — prze-

suniętej na prawo — znalazło się trudniejsze wyrażenie e), natomiast w trzeciej są najtrudniejsze wyrażenia b) i d).

Na diagramie dla klas ósmych grupa pierwsza od lewej to najłatwiejsze wyrażenia f), g) i k). W drugiej grupie jest wyrażenie j), a w trzeciej wyrażenia h), i) oraz l). Takie usytuowanie wymaga komentarza. Gdyby wyrażenia na diagramie grupowane były tylko pod względem wskaźnika trudności, to wyrażenie j) zaliczylibyśmy oczywiście do tej samej grupy co wyrażenia h), i) oraz l). Okazuje się jednakże, że gdy weźmiemy pod uwagę tylko rodzaje błędów lub braków popełnianych przez uczniów w przypadku poszczególnych wyrażeń testu, to wyrażenie j) należałoby umieścić w jednej grupie z wyrażeniem f). Z tego powodu umieściłam je w osobnej grupie na diagramie.

Klasa VII

Z powyższego diagramu odczytać można, że najtrudniejsze dla siódmoklasistów okazały się te wyrażenia, które wymagały zastosowania więcej niż jednej operacji odwrotnej — ich wskaźniki trudności były równe niemal 70%. Spośród tych wyrażeń trudniejsze było wyrażenie postaci $a - x$. W przypadku wyrażeń dwudziałaniowych dominowały braki typu (BrakRozw) oraz błędy typu (BłOdwr); ponadto sporo było błędów w rachunku algebraicznym (BłRach). W przypadku wyrażenia postaci $ax - b$ pojawiła się też znaczna liczba błędów typu (BłKol), a w przypadku wyrażenia postaci $a - x$ odnotowałam sporo błędów typu (Pseudoop).

Wśród wyrażeń, w których można było zastosować tylko jedną operację, zdecydowanie najtrudniejsze okazało się to, w którym należało wskazać operację odwrotną do dzielenia zmiennej x przez stałą, tj. postaci $x:a$. Wskaźnik trudności tego wyrażenia wyniósł około 50%. Odnotowałam tu wysoki procent braków (BrakRozw). Z kolei błędne odpowiedzi uczniów były najczęściej typu (BłOdwr), wśród nich pojawiało się od czasu do czasu „podwójne odwracanie".

Najłatwiejsze były wyrażenia, w których można było zastosować tylko jedną operację, a odwracane było dodawanie lub mnożenie (tj. wyrażenia postaci $a + x$ oraz ax); wskaźnik trudności każdego z tych wyrażeń był równy około 30%. Warto zauważyć, że odwracanie mnożenia okazało się — paradoksalnie — łatwiejsze niż odwracanie dodawania. W przypadku tej pary wyrażeń również spotykałam się z typem (BłOdwr) i (BrakRozw), jednak rzadziej niż w przypadku pozostałych wyrażeń.

Klasa VIII

Również w klasie ósmej wskaźniki trudności wyrażeń z testu wahały się w granicach od 30% do 70%.

Podobnie jak w klasie siódmej, wyrażenia wymagające zastosowania więcej niż jednej operacji odwrotnej były dla uczniów na ogół trudniejsze od wyrażeń z jedną operacją do odwrócenia. Był jednak jeden wyjątek: tym razem wyrażenie wymagające odwrócenia dzielenia miało ten sam stopień trudności, co wyrażenia wymagające zastosowania więcej niż jednej operacji odwrotnej. Wskaźniki trudności powyżej wymienionych wyrażeń zawierały się w granicach od 50% do 70%. Najtrudniejsze spośród nich okazało się wyrażenie postaci $a - bx$ (nie miało ono odpowiednika w teście dla klasy siódmej). Natomiast pozostałe wyrażenia z dwiema operacjami do odwrócenia miały struktury podobne do wyrażeń z dwiema operacjami użytymi w teście dla klasy siódmej. Choć wyrażenia z klasy ósmej miały bardziej zaawansowane współczynniki, wskaźniki trudności takich wyrażeń nieco zmniejszyły się w porównaniu z wskaźnikami dla wyrażeń o analogicznej budowie z testu dla klasy siódmej; wystarczy porównać wyrażenia b) oraz i), jak również d) oraz l).

Najtrudniejszym spośród wyrażeń, w których wystarczyło zastosować jedną operację odwrotną, było wspomniane już wyrażenie z dzieleniem zmiennej x przez stałą; w tej kategorii wyrażeń było ono najtrudniejsze również w klasie siódmej. Dla wyrażenia j) poprawnej odpowiedzi nie podało 60% ósmoklasistów, a więc więcej niż dla analogicznego wyrażenia e) z testu dla klasy siódmej.

Wskaźniki trudności pozostałych wyrażeń, dla których można było zastosować tylko jedną operację odwrotną, były w klasie ósmej w granicach od 30% do 50%. Podobnie jak w klasie siódmej, najłatwiejsze w tej grupie okazało się odwracanie mnożenia, pomimo nawet tego, że w klasie ósmej było to mnożenie przez ułamek w k), a nie przez liczbę naturalną jak w c). Z wyrażeniem tym nie poradziło sobie około 30% uczniów, tak jak w klasie siódmej. Również, podobnie jak w klasie siódmej, trudniejsze niż odwracanie mnożenia okazało się odwracanie dodawania. Jednakże różnica trudności między odwracaniem dodawania i mnożenia była w klasie ósmej wyraźnie większa, ponieważ w porównaniu z klasą siódmą wzrósł wskaźnik trudności wyrażenia z dodawaniem — wyniósł prawie 50%. W teście dla klasy ósmej wystąpiło ponadto jeszcze wyrażenie g) postaci $x - a$ (bez odpowiednika w teście dla klasy siódmej). Jego wskaźnik trudności okazał się nieco mniejszy niż dla wyrażenia z dodawaniem — był równy 40%.

W dużym stopniu zmieniła się strona jakościowa niepoprawnych odpowiedzi. Po pierwsze w klasie ósmej prawie zanikły błędy typu (BrakUkier), (OpFragm) oraz (Pseudoop), które sugerowały niski stopień rozumienia operacji odwrotnych przez popełniających je uczniów. Istotnie zmniejszyła się liczba błędów typu (BłOdwr), (BłKol) oraz (BłRach). Liczba braków typu (RozwCzęść) raczej nie zmieniła się — obserwowane były sporadycznie za-

równo w klasie siódmej, jak i ósmej. Natomiast wyraźnie wzrosła liczba braków odpowiedzi (BrakRozw). W czasie wywiadów zauważyłam, że w klasie ósmej nasiliła się postawa niepodejmowania choćby próby rozwiązania zadania w przypadku jakichkolwiek kłopotów.

Względnie wysoki procent niepoprawnych odpowiedzi dla wyrażeń wymagających zastosowania więcej niż jednej operacji odwrotnej wiązał się w klasie ósmej z względnie dużą liczbą błędów typu (BłOdwr) oraz (BrakRozw), jak również z pojawianiem się błędów typu (BłRach). W przypadku zaś wyrażeń, w których można było zastosować tylko jedną operację odwrotną, najpowszechniej spotykane były braki (BrakRozw). Z najtrudniejszymi wyrażeniami jednodziałaniowymi, tj. postaci $x:a$ i $a+x$, wiązały się ponadto błędy typu (BłOdwr). Wyższy niż w klasie siódmej wskaźnik trudności wyrażenia typu $x:a$ był spowodowany tym, że w klasie ósmej było to dzielenie przez ułamek, a nie przez liczbę naturalną. Sprzyjało to bowiem w większym stopniu błędowi „podwójnego odwracania". Z kolei wzrost wskaźnika trudności wyrażenia $a+x$ wynikł przede wszystkim z dwóch powodów. Po pierwsze nieco więcej osób niż w klasie siódmej proponowało tu zastosować mnożenie lub dzielenie przez a lub liczbę jakoś związaną z a. Ponadto współczynnik a dany w postaci ujemnego ułamka bardziej prowokował do błędu „podwójnego odwracania" (i ze względu na postać ułamka, i ze względu na znak minus). W przypadku wyrażenia postaci $a+x$ obserwowałam ponadto błędy typu (BłRach).

5 Dyskusja końcowa

Trzy grupy trudności uczniów

Zarówno w połowie klasy siódmej, jak i pod koniec klasy ósmej wielu spośród badanych uczniów miało wyraźne trudności z dobraniem operacji odwrotnych (prowadzących do wyznaczenia x) dla podstawowych wyrażeń algebraicznych pojawiających się jako strony równań liniowych. Wśród zidentyfikowanych w czasie badań błędów i braków pojawiły się w szczególności te, które obserwowałam na lekcjach szkolnych (przykłady podałam we wstępie).

Zaobserwowane trudności uczniowskie można podzielić na trzy grupy. Grupa pierwsza charakteryzuje się poważnymi kłopotami z rozumieniem wyrażeń algebraicznych, przekształceń algebraicznych i zależności między dodawaniem i odejmowaniem oraz mnożeniem i dzieleniem jako działaniami wzajemnie odwrotnymi. Uczniowie mający takie trudności albo nie potrafili np. w ogóle ukierunkować swego rozwiązania na działania odwrotne, popełniali błędy typu (BrakUkier), albo proponowali jedynie operacje wyrażone w języku fizycznych manipulacji typu (Pseudoop), np. „wsuwanie" pewnej liczby w wyrażenie alge-

braiczne, albo opisywali co prawda proponowane operacje w języku arytmetyki, ale stosowali je tylko do pewnych fragmentów wyrażenia (popełniając błędy typu (OpFragm)) — w podobny sposób, jak przy (Pseudoop). Tym trzem typom błędów towarzyszyły liczne błędy w rachunku algebraicznym, tj. błędy typu (BłRach), w szczególności „redukcje" wyrazów postaci ax z wyrazami wolnymi b, jak również „rozkładanie" wyrażeń postaci ax na składniki a i x. Jednakże, mimo tych poważnych trudności, uczniowie podejmowali próby rozwiązania zadania. Uczniów z tego typu trudnościami spotkałam przede wszystkim w klasie siódmej; było ich stosunkowo niewielu.

Druga grupa trudności charakteryzowała się niepodejmowaniem przez uczniów prób rozwiązania zadania, typem (BrakRozw). Tłumaczyli oni, że nie pamiętają tego z lekcji, i sugerowali, że w ogóle nie warto, aby próbowali szukać operacji odwrotnych, bo i tak nie poradzą sobie z algebrą. Liczba takich uczniów była znacząca w klasie siódmej, a w klasie ósmej jeszcze wzrosła.

Uczniowie, których trudności zaliczam do trzeciej grupy, rozumieli cel zadania i próbowali je rozwiązać. Ich trudności ujawniły się poprzez błędy typów (BłOdwr), (BłKol), (RozwCzęść) i (BłRach). Pomimo błędów popełnionych w rachunku algebraicznym, ich rodzaj wskazywał na lepsze uchwycenie struktury przekształcanego wyrażenia. Trudności grupy trzeciej były mniej niepokojące niż trudności grupy pierwszej. Było to na przykład niewłaściwe stosowanie rozdzielności lub „zgubienie" minusa. Liczbowo uczniowie z trudnościami grupy trzeciej dominowali zarówno wśród badanych siódmoklasistów, jak i ósmoklasistów. W klasie ósmej wyraźnie zmniejszyła się liczba błędów typu (BłOdwr), (BłKol) i (BłRach).

Pierwsza grupa trudności wskazuje, jak sądzę, na pewną niedojrzałość uczniów w stosunku do problemu, przed jakim zostali postawieni. Trudności tego typu prawie zanikły w klasie ósmej. Uczniowie mający takie błędy w pierwszym teście popełniali w drugim teście błędy charakterystyczne dla trzeciej z opisanych tu grup, niektórzy jednak zrezygnowali w ogóle z rozwiązywania całego lub części zadania (co, z kolei, było charakterystyczne dla grupy drugiej).

Druga grupa trudności świadczy zapewne o nadmiernych kłopotach uczniów w zakresie algebry, powiązanych również z problemami psychologiczno-emocjonalnymi. U praktycznie wszystkich uczniów, którzy w klasie siódmej nie podjęli się rozwiązania całego zadania lub ponad połowy zadania, w klasie ósmej zaobserwowałam nie mniejszy procent braków. Opisane tu kłopoty zazwyczaj są bardzo trudne do pokonania w zwykłym klasowo-lekcyjnym systemie nauczania, bez specjalnych zabiegów dydaktycznych.

Trzecia grupa trudności jest niewątpliwie bardzo niejednorodna i wymagałaby w przyszłości kolejnych, bardziej szczegółowych badań, tak aby dys-

ponować dostatecznym materiałem do wyróżnienia w niej mniejszych grup. Traktując opisane tu wyniki sondażowo, należałoby przeprowadzić badania na szerszej i bardziej zróżnicowanej próbie uczniów, aby zidentyfikować ewentualne inne trudności, a opisane tu podać bardziej szczegółowej analizie. Warto też zbadać korelację trudności uczniów z ich wiekiem i z etapem nauczania algebry[7], jak również z metodyką nauczania przekształceń algebraicznych i rozwiązywania równań, w szczególności korelacji ze stosowaniem różnych form konkretyzacji.

Znaczące jest wyraźne zmniejszenie się w klasie ósmej liczby błędów związanych z trzecią grupą trudności, mimo tego, że w drugim teście wyrażenia do przekształcenia były trudniejsze. Biorąc pod uwagę to, że badani uczniowie uczyli się w warunkach lepszych niż przeciętne (patrz rozdział 2) i że zaobserwowałam wyraźny postęp u uczniów tej grupy między oboma testami, uważam za uprawnioną hipotezę, że *były to typowe, normalne trudności obserwowane w rozwoju wielu uczniów.* Trudności uczniów nie są oczywiście niezależne od metod nauczania algebry stosowanych w ich klasach. Jednakże sądzę, że wielu spośród tych trudności nie da się uniknąć, *wiążą się bowiem z charakterystyczną dla znacznej części uczniów specyfiką myślenia i zapamiętywania informacji.*

Trzeba też wziąć pod uwagę fakt, że *wiele trudności o podobnym charakterze, tyle że dotyczących na ogół tożsamościowych przekształceń algebraicznych, obserwowano u uczniów w różnych krajach*, pomimo wyraźnych różnic między systemami oświaty, programami, podręcznikami, metodami nauczania i warunkami kształcenia (por. Demby 1997, 2000 i 2003). W Polsce takie trudności obserwowane są od kilkudziesięciu lat, choć w tym czasie przeprowadzono kilka kolejnych reform oświaty. Wiele informacji na ten temat znaleźć można w kolejnych pracach Z. Krygowskiej (1955, 1956, 1977, 1987).

Wskaźniki trudności wyrażeń algebraicznych zastosowanych w badaniach a budowa tych wyrażeń i rodzaj ich współczynników

Zgodnie z oczekiwaniami, spośród wyrażeń zastosowanych w testach — zarówno w klasie siódmej, jak i w ósmej — najtrudniejsze okazały się wyrażenia wymagające zastosowania dwóch operacji odwrotnych. Z kolei wśród wyrażeń

[7] W praktyce nauczanie algebry po reformie oświaty z roku 1999 różni się od nauczania z przełomu lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych (którym objęci byli badani uczniowie) jedynie *momentem rozpoczęcia tego nauczania.* Uprzednio nauczanie zarówno przekształceń algebraicznych, jak i rozwiązywania równań rozpoczynano pod koniec klasy piątej. Obecnie ma to zazwyczaj miejsce pod koniec klasy szóstej, przy czym ministerialna podstawa programowa dopuszcza możliwość wprowadzenia przekształceń algebraicznych dopiero w gimnazjum.

jednodziałaniowych w obu klasach najtrudniejsze było wyrażenie postaci $x:a$, a najłatwiejsze — wyrażenie postaci ax.

Trudniejsze współczynniki wyrażeń algebraicznych, które uczniowie mieli w teście w klasie ósmej, wpłynęły na wzrost trudności wyrażeń jednodziałaniowych postaci $x:a$ oraz $a+x$. W szczególności zwiększyła się liczba błędów typu (BłOdwr), gdyż pojawiająca się z zadaniu postać liczby a (tzn. występujący ułamek lub znak minus) prowokowała do błędu „podwójnego odwracania". Były jednak i inne przyczyny wzrostu trudności wyrażeń, np. w przypadku wyrażenia postaci $a+x$ obserwowałam wyraźniejszą niż w klasie siódmej tendencję do sprowadzania go do postaci ax.

Wyraźnym i zarazem dość nieoczekiwanym wynikiem okazała się *względnie niska trudność wyrażenia typu* ax w stosunku do np. wyrażenia typu $a+x$. Jednym z możliwych wyjaśnień jest to, że w przypadku wyrażenia postaci ax wielu ósmoklasistów po prostu zapamiętało z lekcji odpowiednią operację odwrotną. Do kwestii tej powrócę jeszcze w dalszej części pracy.

Mimo ułamkowego współczynnika w klasie ósmej wskaźniki trudności wyrażeń postaci ax były praktycznie takie same w klasie siódmej i w klasie ósmej. Co więcej, wskaźniki trudności wyrażeń dwudziałaniowych nawet nieco spadły. Odnosiłam wrażenie, zwłaszcza przy wyrażeniach dwudziałaniowych, że rodzaj współczynników miał drugorzędny wpływ na trudność doboru operacji odwrotnych. Podstawowym problemem było tu zaakceptowanie faktu, że potrzebne są dwie operacje, następnie podanie dwóch poprawnych operacji w odpowiedniej kolejności oraz uwzględnienie przy drugiej operacji tego, że po pierwszej operacji wyrażenie nie będzie wyglądało tak samo jak przedtem.

Zmniejszenie się trudności wyrażeń dwudziałaniowych związane było ze spadkiem liczby błędów typu (BłKol) i (BłOdwr) oraz — w mniejszym stopniu — typu (BłRach).

Wyniki badań wskazują zatem, iż *na trudność wskazania operacji odwrotnych dla danego wyrażenia w większym stopniu wpływała jego ogólna struktura niż rodzaj współczynników.* Warto przy tym zwrócić uwagę na *specyficzne trudności związane ze stosowaniem więcej niż jednej operacji dla wyrażenia złożonego.* Problem ten był szczególnie widoczny w przypadku uczniów młodszych, z mniejszym doświadczeniem w zakresie algebry.

Wyniki prezentowanych badań a wyniki innych badań

Wyników moich badań nie da się bezpośrednio porównać z zaprezentowanymi w rozdziale 1 badaniami nad rozumieniem przez uczniów zależności między działaniami wzajemnie odwrotnymi. Po pierwsze moje badania dotyczyły nieco innej problematyki — przekształcania wyrażeń algebraicznych,

a nie równości w arytmetyce, po drugie zaś badałam starszych uczniów. Jednakże zwracam uwagę na pewne wspólne spostrzeżenia.

Uporczywe błędy obserwowane przez Sadowski i Mc Ileven (1984) dotyczyły równań z okienkami typu $a-\square=b$ oraz $a:\square=b$. Źródłem tych błędów były uczniowskie „reguły" o dodawaniu i odejmowaniu oraz o mnożeniu i dzieleniu jako o *przeciwnościach*. Również przy moich badaniach wyrażenie postaci $a-x$ okazało się jednym z najtrudniejszych dla uczniów. W klasie siódmej większość popełnionych przy takim wyrażeniu błędów to propozycja operacji „*dodać a*".

Drugi wspólny punkt z badaniami Sadowski i Mc Ileven — to zidentyfikowanie *następujących po pewnym czasie wyraźnych zmian w podawanych przez uczniów operacjach odwrotnych*. Czasem było to zgodne z oczekiwaniem odejście od błędnych operacji w kierunku poprawnych, czasem zaś była to *zmiana typu błędu*. Na przykład w klasie ósmej dla wspomnianego wyrażenia postaci $a-x$ część uczniów zaczęła proponować operację „*odjąć a*", przy czym niektórzy uważali, że to już jest pełne rozwiązanie, inni zaś poszukiwali jeszcze operacji przeprowadzającej $-x$ w x.

Nawiązując do moich wcześniejszych badań (Demby, 1990 i 1993), które dotyczyły uczniów klasy IV, stwierdzam, że:

— tym razem większość uczniów osiągnęła już pewien stopień dojrzałości do algebraicznego myślenia o operacjach odwrotnych, gdyż była w stanie przystąpić do upraszczania np. wyrażenia postaci $5x:5$, mimo że „nie znała" wyniku mnożenia $5\cdot x$;

— w przypadku prezentowanych tu badań nie obserwowałam silnej uprzednio tendencji do sprawdzania poprawności wyniku działania operacji odwrotnej za pomocą rachunku (być może dlatego, że w tym wypadku musiałby to być rachunek algebraiczny);

— pewne schematy błędów, zidentyfikowane w trakcie wykonywania przez uczniów obliczeń arytmetycznych, ujawniły się również przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych; wystarczy porównać np. wykonywanie obliczeń typu $100-19+100=19$ z przekształceniem algebraicznym $5-x+5=x$.

Osoba świadoma trudności, jakie uczniowie mają ze stosowaniem operacji odwrotnych w celu wyznaczenia x z wyrażenia typu $ax+b$ (potencjalnej strony równania liniowego), może postawić pytanie, czy umiejętność ta jest rzeczywiście niezbędna przy rozwiązywaniu równań liniowych. Mam tu na myśli rozwiązywanie równań liniowych w ogólnym przypadku, tj. z niewiadomą po obu stronach oraz ze współczynnikami i rozwiązaniami wykraczającymi poza liczby naturalne.

W przypadku równań z niewiadomą po obu stronach zarówno Filloy i Rojano (1989), jak i Herscovics i Linchevski (1994) piszą o konieczności tzw. *algebraicznego myślenia*, wiążącego się z operowaniem na niewiadomej, a więc z przekształcaniem wyrażeń algebraicznych. Z kolei w przypadku równań o współczynnikach lub rozwiązaniach wykraczających poza liczby naturalne zdecydowanie niewystarczające, a czasem nawet zaburzające myślenie, staje się poszukiwanie rozwiązania równania z wykorzystaniem którejkolwiek z przedstawionych w rozdziale 1 poglądowych interpretacji równań: za pomocą równowagi na wadze szalkowej lub za pomocą równości pól odpowiednich figur zbudowanych z prostokątów.

Negatywne doświadczenia związane ze stosowaniem powyższych interpretacji do ogólnych przypadków równań liniowych skłaniają do analizowania możliwości rozwiązywania takich równań na poziomie syntaktycznym, tzn. bez podpórki w postaci jakiegoś konkretu.

W rozdziale 1 przypomniałam dwa podejścia metodyczne typu syntaktycznego, dominujące od pokoleń przy nauczaniu równań:

1° wykonywanie za każdym krokiem tej samej operacji na obu stronach równania (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia — z wyłączeniem mnożenia i dzielenia przez zero) oraz

2° przenoszenie pewnych jednomianów ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania (któremu musi towarzyszyć, oczywiście, również mnożenie lub dzielenie obu stron równania przez tę samą liczbę, takie jak w 1°).

Podejścia te różnią się tylko w części dotyczącej dodawania i odejmowania. Przy każdym z podejść 1° i 2° uczeń musi umieć dobrać operację odwrotną typu „*pomnożyć przez a*" lub „*podzielić przez a*" — najczęściej dla wyrażenia postaci ax, czasem dla $ax + b$, sporadycznie dla $x:a$.

Przy podejściu 1° równie często jak operacje „*pomnożyć przez a*" lub „*podzielić przez a*" należy dobrać operacje „*dodać a*" lub „*odjąć a*" — najczęściej w przypadku wyrażenia postaci $bx+a$. Przy podejściu 2° myśli się raczej nie o dodawaniu lub odejmowaniu liczby a, lecz o „przeniesieniu a ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania". Jednak uzasadnienie poprawności takiej reguły „przenoszenia" odbywa się właśnie na podstawie obserwacji efektu operacji „*dodać a*" lub „*odjąć a*" wykonanej na obu stronach równania[8]. Zatem

[8] Wprowadzanie reguły „o przenoszeniu wyrazów ze zmienionym znakiem" bez oparcia jej na rozważaniu operacji odwrotnych, wykonywanych na obu stronach równania, uważam za wysoce niewłaściwe dydaktycznie, prowadzi bowiem do mechanicznego stosowania nierozumianej przez ucznia reguły. Dla lepszego zobrazowania efektów tej mechanicznej reguły zacytuję tu reakcję jednej z moich uczennic, zaobserwowaną podczas lekcji poświęconej właśnie wprowadzeniu reguły „o przenoszeniu wyrazów". Krzyknęła ona spontanicznie: „*wreszcie rozumiem, o co chodzi mojemu tacie, gdy tłumaczy mi rozwiązywanie równań*".

również przy tym podejściu uczeń powinien umieć dobrać wszystkie te cztery operacje odwrotne i poprawnie je zastosować.

Badani uczniowie uczyli się rozwiązywania równań, wykorzystując najpierw pierwsze z tych podejść. Od pewnego momentu (pod koniec klasy szóstej) ich nauczyciele przeszli do opisywania operacji w języku drugiego z opisanych podejść. Przypuszczam, że z tego właśnie powodu najłatwiejsze w obu testach okazało się dla uczniów dobranie operacji odwrotnej do wyrażenia postaci ax, łatwiejsze niż dla wyrażenia postaci $a+x$, choć moje wcześniejsze badania (Demby, 1990 i 1993) jednoznacznie pokazały, że dla 11-latków zajmujących się obliczeniami liczbowymi dużo bardziej oczywiste jest kompensowanie się dodawania z odejmowaniem niż mnożenia z dzieleniem. Jednakże ci starsi uczniowie *mieli więcej doświadczeń* ze wskazywaniem operacji odwrotnej dla wyrażeń postaci ax niż dla $a+x$; stosowanie operacji odwrotnej dla wyrażenia postaci $a+x$ było zapewne często formułowane w innym języku — „przenoszenia wyrazu a na drugą stronę równania".

Badania me pokazały, że w klasie ósmej ta różnica trudności między wyrażeniami postaci ax oraz $a+x$ pogłębiła się, a ponadto wzrosła nieco tendencja do „upraszczania" wyrażenia $a+x$ do „bliższego" uczniom wyrażenia postaci ax.

Chciałabym tu podkreślić, że nie uważam za niewłaściwe korzystanie z różnych konkretyzacji przy pewnych typach równań, ale jedynie w przypadku tych uczniów i sytuacji, dla których jest to naturalne. W szczególności moje nauczycielskie doświadczenia z nawiązywaniem do metafory wagi na początku nauczania rozwiązywania równań są zdecydowanie pozytywne. Myślę tu o posłużeniu się analogią z zachowywaniem równowagi na wadze szalkowej w celu uchwycenia przez uczniów zasady: „wykonuje się to samo na obu stronach równania". Jednak po tym należy stosunkowo szybko odejść od tej konkretyzacji, bo już w przypadku równań o stosunkowo łatwych współczynnkach prowadzi ona do wielu paradoksów, kierując myślenie dziecka na tory niewłaściwe z punktu widzenia rozwiązywania równań, w szczególności kształtując niewłaściwe intuicje, opisane w pracy (Pirie i Martin, 1997).

Przy okazji zaznaczam, że pewne błędy uczniów przytoczone przez Pirie i Martin (wiążące się z interpretowaniem równania jako sytuacji równowagi na wadze), tj. przekształcanie równania $5x-4=2x-9$ w równanie $5x=2x-9-4$ z objaśnieniem *„zabieramy 4 z każdej strony równania"*, obserwowałam również przy podejściu syntaktycznym do rozwiązywania równań. Na przykład w opisywanych badaniach niektórzy uczniowie dla wyrażenia postaci $x-a$ proponowali operację *„odjąć a"*. Warto też zestawić to z obserwacjami, które przedstawiłam we wstępie do pracy.

W badaniach opisanych w pracach (Sadowski i Mc Ileven, 1984), (Demby, 1990 i 1993), (Gilmore i Bryant, 2004) przewija się problem możliwości i skuteczności użycia konkretyzacji jako środka pomagającego uczniowi w dostrzeganiu zależności między działaniami odwrotnymi. Wydaje się, że jest to środek pomocny i naturalny dla pewnej grupy uczniów, ale skuteczny niemal wyłącznie w przypadku pary działań dodawanie–odejmowanie. Ponadto nie jest obojętna forma tej konkretyzacji; w szczególności trudna i niezbyt skuteczna wydaje się forma zadania tekstowego, natomiast dobre efekty daje dynamiczne prezentowanie dorzucania i zabierania pewnych przedmiotów, np. kulek.

Wskazania dydaktyczne

Przeprowadzone badania, mimo że ograniczone tylko do pewnej wąskiej grupy uczniów, ujawniły trudności, które zapewne ma też znaczna grupa innych uczniów. Jak już zasygnalizowałam, nauczanie algebry po reformie oświaty nie zmieniło się w jakiś zasadniczy sposób, w szczególności podczas hospitowania lekcji nadal miałam okazję obserwować opisane tu trudności uczniów z dobieraniem operacji odwrotnych podczas rozwiązywania równań liniowych, a w podręcznikach nadal nie ma zabiegów i ćwiczeń służących systematycznemu nauczaniu stosowania i dobierania operacji odwrotnych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Nie opublikowano również żadnych nowych wskazówek metodycznych dla nauczycieli, które by istotnie zmieniły dotychczasową tradycję propedeutyki nauczania równań liniowych. Uważam zatem za celowe sformułowanie na podstawie otrzymanych wyników badań paru wskazań dydaktycznych, których realizacja może przyczynić się do lepszego przygotowania uczniów do rozwiązywania równań.

Zacznę od wskazań natury ogólnej. Z wypowiedzi wielu osób zajmujących się nauczaniem matematyki (w szczególności nauczycieli i pracowników wyższych uczelni) wynika, że nie zawsze są świadomi, że pojawianie się typowych trudności i błędnych schematów postępowania w trakcie nauki algebry zapewne jest — w odniesieniu do większości uczniów — sytuacją naturalną i nie do uniknięcia. Co więcej, większość tych osób zdaje się sądzić, że trudności i błędy uczniów są po prostu rezultatem niewłaściwego nauczania.

Ja natomiast uważam, na podstawie zarówno publikowanych na świecie wyników badań jak i swojej praktyki nauczycielskiej, że znacząca część trudności wiąże się z ogólnymi mechanizmami rozwoju umysłowego uczniów, z procesami charakterystycznymi dla zapamiętywania i przetwarzania przez nich informacji w trakcie uczenia się algebry. Pewne przykłady i uwagi na ten temat znajdują się w pracach (Byers i Erlwanger, 1989) oraz (Demby, 2003). Poszczególni uczniowie konstruują w swoich umysłach swoje własne obrazy

algebry, zawierające schematy postępowania odpowiadające specyfice ich myślenia. Schematy te na ogół nie od razu są poprawne, wymagają różnorodnych doświadczeń, w wyniku których są modyfikowane i coraz lepiej rozumiane.

Takie naturalne trudności pojawiają się zapewne również u uczniów w toku uczenia się dobierania operacji odwrotnych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych. Przy właściwie prowadzonym nauczaniu nauczyciel *powinien identyfikować trudności uczniów oraz pomagać je pokonywać.* Chodzi o zapobieganie temu, aby nie kumulowały się one i nie przekształciły się po jakimś czasie w trudności nadmierne, wobec których pomoc staje się nieskuteczna, bowiem uczeń stracił już wiarę w możliwość nauczenia się algebry, stracił motywację i nie próbuje nawet pokonywać trudności.

Nauczyciel powinien *pomagać uczniowi w gromadzeniu właściwych doświadczeń z wyrażeniami algebraicznymi i z ich stosowaniem.* Do wytworzenia się u ucznia poprawnych schematów postępowania niezbędna jest odpowiednio duża liczba różnodnych doświadczeń i ich powtórzeń, wykonywanych świadomie przez ucznia, nie mechanicznie. Zarazem należy *przeciwdziałać utrwalaniu się błędnych schematów*; zdarza się bowiem, że uczeń przyzwyczai się do swej niepoprawnej reguły i jest potem przekonany, iż tak właśnie wyjaśniał to nauczyciel.

Przedstawiane tu wyniki badań mogą pomóc nauczycielowi zorientować się lepiej, jakiej natury są trudności uczniów związane z dobieraniem operacji odwrotnych do podstawowych wyrażeń algebraicznych. W efekcie łatwiej będzie mógł dostrzec symptomy pojawienia się ich u swoich uczniów.

Do gromadzenia odpowiednich doświadczeń przez ucznia przyczyniają się nie tylko odpowiednio dobrane zadania, ale również właściwa interakcja uczeń–nauczyciel, zarówno na etapie wprowadzania nowych zagadnień z algebry, jak i ich na etapie ich utrwalania.

Poniżej wymienię niektóre charakterystyczne trudności uczniów, zaobserwowane w trakcie moich badań, proponując zarazem zadania, które mogą być przydatne przy pokonywaniu tych trudności.

Stosując wybrane przez siebie operacje odwrotne do przekształcenia wyrażeń algebraicznych postaci $ax + b$, uczniowie popełniali więcej błędów w rachunku algebraicznym niż w przypadku przekształcania analogicznych wyrażeń w innym zadaniu owego testu, wymagającym jedynie wykonania wskazanego przekształcenia, zapisanego w standardowej formie, z jaką zazwyczaj spotykali się na lekcjach. Jeżeli bowiem uczeń dostaje na przykład słowne polecenie: „od wyrażenia $2x + 3$ odejmij $3x$", lub choćby mniej typowy zapis $(2x + 3) - 3x$, okazuje się to trudniejsze niż pozornie to samo przekształcenie,

zapisane w standardowej formie [9] $2x + 3 - 3x$.

Wynika stąd, że należy uzupełniać i pogłębiać uczniowskie umiejętności w zakresie rachunku algebraicznego poprzez *dawanie im również zadań sformułowanych w sposób mniej typowy*. Na przykład warto podawać pewne wyrażenia algebraiczne i opisywać słownie operację do wykonania na tym wyrażeniu. W trakcie rozwiązywania tak sformułowanych zadań należy zwrócić uwagę na to, że operacja ma być wykonana na c a ł y m wyrażeniu, tj. że np. zadanie „wyrażenie $5x - 2$ podziel przez 5" prowadzi do obliczeń $(5x - 2):5$, a nie tylko $5x:5 - 2$. Należy też podkreślić, że czasem mamy sytuację rozdzielności jednego działania względem drugiego (np. gdy sumę mnożymy przez liczbę), a czasem należy postąpić inaczej (np. gdy dodajemy liczbę do wyrażenia).

Poza tym trzeba dawać zadania z więcej niż jedną operację do wykonania. Ważne jest, by co pewien czas polecić uczniom wykonać te operacje dwukrotnie, w różnej kolejności.

Odpowiednie ćwiczenia w rachunku algebraicznym mogą również dostarczyć doświadczeń przydatnych przy dobieraniu operacji odwrotnych dla danych wyrażeń. Uczniowie powinni na danych wyrażeniach wykonywać takie operacje, które prowadzą do kompensacji pewnej części wyrażenia. Niedługo po tym powinni zająć się wymyślaniem operacji prowadzących do tego typu kompensacji wraz ze sprawdzeniem — za pomocą rachunku algebraicznego — czy zaproponowane przez nich operacje rzeczywiście działają tak, jak przypuszczali. Jest to dość skuteczny zabieg metodyczny przy nauce wszelkich operacji odwrotnych, w szczególności przy nauce wyłączania wspólnego czynnika poza nawias jako operacji odwrotnej do mnożenia wielomianu przez jednomian.

Tak to w zarysie powinien być zorganizowany etap zbierania doświadczeń przez uczniów, analizowania tego, co robili i co im wyszło, wykorzystania tego do przewidywania operacji odwrotnej, a potem jeszcze raz „zobaczenia", czy operacja ta działa tak, jak się im wydawało.

Podsumowując te wywody, należy podkreślić, że bardzo ważne jest, by przed rozwiązywaniem równań (lub w początkowej fazie uczenia się tego) dostarczyć uczniom okazji do *wielu doświadczeń w stosowaniu operacji odwrotnych*, jak i do *operacji wzrokowo do nich podobnych*, które przez wielu uczniów mogą być uważane za odwrotne dla danych wyrażeń algebraicznych.

[9] Wśród przekształceń tożsamościowych w teście dla klas ósmych znajdowało się wyrażenie $(2x^2 + 5x) - 3x$. Wyrażenie o takiej budowie nie jest często spotykane ani w podręcznikowych zestawach zadań, ani na lekcjach związanych z nauką „opuszczania" nawiasów. W rezultacie w przypadku tego wyrażenia uczniowie popełnili dużo więcej błędów niż przy analogicznych wyrażeniach bez nawiasów. Było to zarówno stosowanie błędnej „rozdzielności odejmowania względem dodawania" (tj. odejmowanie $3x$ zarówno od $2x^2$, jak i od $5x$), jak i błędna redukcja w nawiasie (tj. zastąpienie sumy dwóch jednomianów z nawiasu przez jeden jednomian — postaci ax, ax^2 lub ax^3).

Na przykład pożyteczne byłoby, gdyby uczniowie wykonali na wyrażeniu $2-x$ zarówno operację „*dodać 2*", jak i operację „*odjąć 2*", a do wyrażenia $2x-3$ zastosowali zarówno ciąg operacji „*podzielić przez 2, a następnie dodać 3*", jak i ciąg „*dodać 3, a następnie pomnożyć przez* $\frac{1}{2}$". Wyniki takiego typu doświadczeń wykonanych w czasie wywiadów — dla sprawdzenia poprawności zaproponowanych przez uczniów operacji — zdumiały wielu uczniów i sprowokowały ich do zmiany błędnych przekonań, objawiających się w pracy pisemnej błędami lub brakami typów (BłOdwr), (BłKol), (RozwCzęść), (BłRach).

Dostarczenie takiej bogatej bazy doświadczeń (o ile, oczywiście, uczeń wcześniej opanuje podstawy rachunku algebraicznego) może przyczynić się również do pokonania obserwowanej u części uczniów postawy bezradności wobec zadań związanych z poszukiwaniem operacji odwrotnych, które w skrajnej postaci objawiają się niepodejmowaniem nawet prób rozwiązania takich zadań.

Literatura

B r o w n, T., E a d e, F., W i l s o n, D.: 1999, Semantic innovation: arithmetical and algebraic metaphors within narratives of learning, *Educational Studies in Mathematics* **40**, 53–70.

B y e r s, V., E r l w a n g e r,. S.: 1989, Pamięć w rozumieniu matematyki, *Dydaktyka Matematyki* **10**, 7–34.

D e m b y, A.: 1990, O wykorzystywaniu kompensowania się działań odwrotnych przez uczniów na przełomie czwartej i piątej klasy szkoły podstawowej, *Dydaktyka Matematyki* **12**, 79–118.

D e m b y, A.: 1993, L'usage de la compensation additionner–soustraire et multiplier–diviser par les élèves de onze ans, *Educational Studies in Mathematics* **24**, 239–249.

D e m b y, A.: 1997, Algebraic procedures used by 13-to-15-year-olds, *Educational Studies in Mathematics* **33**, 45–70.

D e m b y, A.: 2000, Typy procedur algebraicznych, stosowanych przez uczniów w wieku 13–15 lat, *Dydaktyka Matematyki* **22**, 45–74.

D e m b y, A.: 2003, Kształtowanie się umiejętności przekształcania wyrażeń algebraicznych u uczniów w wieku 13–15 lat, *Dydaktyka Matematyki* **25**, 69–109.

F i l l o y, E., R o j a n o, T.: 1989, Solving equations: the transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics* **9**(2), 19–25.

G i l m o r e, C., B r y a n t, P.: 2004, Children's use of the arithmetic principle of inversion; Poster 174, zaprezentowany podczas kongresu ICME 10 w Kopenhadze; streszczenie znajduje się w materiałach konferencyjnych — *Posters. Abstracts, ICME 10, Copenhagen, Denmark*, s. 179.

Herscovics, N., Linchevski, L.: 1994, A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics* **27**, 59–78.

Kieran, C.: 1989, The early learning of algebra: A structural perspective, in: C. Kieran and S. Wagner (Eds.), *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM, Reston, VA, 33–56.

Krygowska, Z.: 1955, O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry, *Matematyka* **4**, 21–32.

Krygowska, Z.: 1956, O niebezpieczeństwach formalizmu w nauczaniu algebry w szkole, *Matematyka* **4**, 15–26.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, tom II*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1987, A study of certain types of errors linked to the symbolic terminology of elementary algebra, w: *The role errors play in the learning and teaching of mathematics. Compte rendu de la* 39^e *rencontre internationale de la CIEAEM tenue à Sherbrooke*, Les Editions de l'Université de Sherbrooke, Kanada, 291–299.

Linchevski, L., Livneh, D.: 1999, Structure sens: the relationship between algebraic and numerical contexts, *Educational Studies in Mathematics* **40**, 173–196.

Mostowski, A., Stark, M.: 1975, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa.

Pirie, S. B., Martin, L.: 1997, The equation, the whole equation and nothing but equation! One approach to the teaching of linear equations, *Educational Studies in Mathematics* **34**, 159–181.

Sadowski, B. R., Houston Mc Ileven, D.: 1984, Diagnosis and remediation of sentence — solving error patterns, *Arithmetic Teacher*, January 1984.

Tirosh, D., Even, R., Robinson, N.: 1998, Simplifying algebraic expressions: teacher awarness and teaching approaches, *Educational Studies in Mathematics* **35**, 51–64.

Van Amerom, B.: 2003, Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 63–75.

Vlassis, J.: 2002, The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown, *Educational Studies in Mathematics* **40**, 341–359.

„Wyznaczanie x z wyrażenia $2x+5$" można określić następująco. Funkcja $f: x \to 2x+5$ jest złożeniem dwóch funkcji: $x \to 2x$ i $x \to x+5$. Należy podać dwie funkcje g, h, takie, że złożenie hgf jest funkcją tożsamościową $x \to x$. Rozumieć to można

„czynnościowo" lub „obiektowo". Rozumienie „czynnościowe" prowadziłoby do rozumowania np. takiego: „x to jakaś liczba, którą trzeba pomnożyć przez 2, a potem dodać 5; żeby od tego, co by wyszło, wrócić do x, trzeba najpierw odjąć 5, a potem wynik podzielić przez 2". Rozumienie „obiektowe" to myślenie o funkcjach jako obiektach: można je odwracać i składać, otrzymując nowe funkcje, a więc też szukać takich funkcji, które w złożeniu z daną funkcją dadzą żądaną funkcję. Rozumienie „obiektowe" to wyższy poziom abstrakcji, dla większości uczniów, nie tylko gimnazjum, z pewnością niedostępny. Jednak także rozumienie „czynnościowe" tego zadania okazuje się bardzo trudne, co dobitnie ujawnia ta praca. Odpowiedzi uczniów świadczą właśnie o tym, że nie widzieli oni w wyrażeniu zapisu kolejnych funkcji „nakładanych" na x, toteż nie umieli „nałożyć" na to wyrażenie takich funkcji, by otrzymać x. (Redakcja)

Selecting inverse operations by 13-to-15-year-olds transforming algebraic expressions

S u m m a r y

Observation of mathematics lessons in Grades 5–8 has revealed difficulties of students who were to name the inverse operation(s) needed in the procedure of finding x from a given equation. Dealing, e.g., with the equation $3x = 7$, part of students thought that subtracting 3 will give x. Dealing with $3x-5 = 4$, some students proposed that one should "divide by 3 and then add 5" or "divide by 3 and then subtract 5".

The purpose of the study was to diagnose thoroughly such difficulties. Students of Grade 7 were given a paper-and-pen test followed by individual interviews; at the end of Grade 8 the same students were subject to an analogous test and interviews. The students were to select an operation or a sequence of operations which would give x when applied to an expression such as $2+x$, $5x-2$ or $\frac{3}{4}x$ (no equation was given).

Students' difficulties have been characterized by identifying the following eight types of errors or no-answers in their written tests:

1) Lack of x-leading orientation in the student's answer;
2) Pseudo-operation;
3) Operation acting on fragment of the expressions only;
4) Incorrect inverse operation;
5) Incorrect order of operations;
6) Error in performing algebraic operations;
7) Partial solution;
8) No answer.

The difficulties of the expressions given in the tests are described in terms of characteristic errors or lacking answers and also quantitatively by the percentage of those with incorrect answers (including lack of answer).

Expressions requiring more than one operation were the most difficult. Surprisingly, both in Grade 7 and in Grade 8 the easiest were expressions of the type ax, where a was a given number.