dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

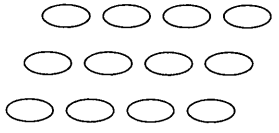
Bożena Rożek
Akademia Pedagogiczna w Krakowie

Strukturyzacja dwuwymiarowego szyku prostokątnego przez dzieci w wieku od 10 do 13 lat

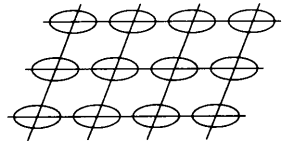
Uświadomieniu sobie struktury s p r z y j a różnorodność sytuacji, w których ona występuje, (...) jednym z kryteriów rozumienia struktury jest właśnie dostrzeganie jej w zmiennych sytuacjach i umiejętność posługiwania się nią w różnych sytuacjach (Krygowska, 1979, s. 45).

1 Wstęp

Praca ta[1] dotyczy pewnego typu regularnego układu figur na płaszczyźnie (rys. 1); nazwanego *szeregowo-kolumnowym układem figur* (w skrócie SKUF). Istotą SKUF jest specyficzne ułożenie figur, w którym można by wyróżnić dwie (skończone lub nieskończone) rodziny prostych równoległych (rys. 2).



Rysunek 1.



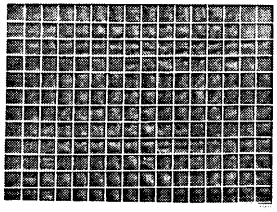
Rysunek 2.

[1]Praca naukowa wykonana w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003-2006. Składam serdeczne podziękowania prof. Milanowi Hejný'emu z Uniwersytetu Karola w Pradze za wskazówki metodologiczne oraz cenne uwagi dotyczące opracowania wyników badań.

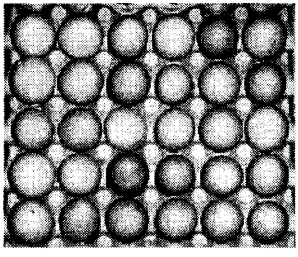
W typowych przypadkach proste jednej rodziny są prostopadłe do prostych drugiej rodziny, ale rozważa się także układy ukośne, gdy proste te przecinają się pod pewnym stałym kątem. Na przecięciu odpowiednich prostych znajdują się owe figury. Figury te nie muszą być przystające; mogą to być w zasadzie dowolne figury (zazwyczaj zakłada się jednak, że figury te nie zachodzą na siebie), istotne jedynie jest umowne miejsce ich położenia. Miejsca figur może wyznaczać np. dwuwymiarowa sieć punktów na płaszczyźnie o całkowitych współrzędnych w (prostokątnym lub ukośnokątnym) układzie współrzędnych. Ułożone w ten sposób elementy wzdłuż prostych (najczęściej prostych poziomych) jednej rodziny tworzą *szeregi*, a wzdłuż prostych drugiej rodziny (najczęściej pionowych) tworzą *kolumny*. Szczególnym przypadkiem omawianych układów, będącym przedmiotem prezentowanych tu badań, jest *dwuwymiarowy szyk prostokątny*, to jest taki, w którym szeregi i kolumny przecinają się pod kątem prostym. Wówczas szeregi bywają zwane *rzędami poziomymi*, a kolumny — *rzędami pionowymi*. Nazwy te mogą być jednak nieadekwatne np. gdy szyk prostokątny w typowym ułożeniu zostanie obrócony o 45 stopni.

Pojęcie szeregowo-kolumnowego układu figur obejmuje więc różnorodne typy układów: prostokątne i ukośne, skończone i nieskończone, pokrywające płaszczyznę lub nie. W (Rożek, 1998) zamieszczono matematyczną definicję omawianego pojęcia, która tutaj dla prezentacji przedmiotu badań jest zbędna, a nawet — ze względu na stopień jej komplikacji — może istotę tych badań bardziej zaciemnić niż wyjaśnić. SKUF może być dobrze rozumiany bez matematycznej definicji, w oparciu o ideę głęboką tego pojęcia (w sensie opisanym w pracy: Semadeni, 2002). Układ szeregowo-kolumnowy *„można uważać za ideę głęboką, powszechnie stosowaną w najrozmaitszych rozumowaniach bez uświadamiania sobie nawet, jaki mógłby być jej formalny opis"* (Semadeni, 2002, s. 78).

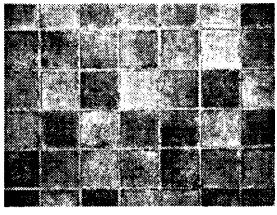
Przykłady dwuwymiarowych szyków w realnym świecie przedstawiają rysunki 3, 4 i 5 (na fotografii znajdują się: siatka z osłony autostrady, jajka w pojemniku, płytki w łazience).



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Rysunek 5.

Przykłady te reprezentują różne fenomeny rzeczywistego świata, o których mówi Turnau (1991). Uważa on, że istotny wpływ na stopniowe kształtowanie się pojęć abstrakcyjnych ma niejednokrotne stykanie się już małego dziecka ze światem fenomenów:

> Abstrakty powstają na nowo u każdego człowieka, a proces ich genezy zaczyna się we wczesnym dzieciństwie. Choć bardzo istotną rolę odgrywa w nim język, przedmioty myślowe powstające w okresie dzieciństwa wywodzą się przede wszystkim z kontaktu ze światem fenomenów. Dla ich prawidłowego ukształtowania konieczny jest *kontakt z różnorodnymi fenomenami wszystkich podstawowych typów rozciągnięty w dostatecznie długim czasie.* Zarówno brak kontaktu z ważnymi fenomenami, jak i sztuczne stłoczenie tego procesu w zbyt krótkim czasie, prowadzi do powstania abstraktów ułomnych, które nie mogą należycie pełnić swej funkcji, a w pewnych warunkach także do zablokowania dalszego procesu ich doskonalenia (Turnau, 1990, s. 121).

Prezentowane przykłady dotyczą rozmaitych fenomenów realnego świata i ukazują szyk kolejno w trzech różnych aspektach: liniowym (linearnym), punktowym i powierzchniowym (Rożek, 1997; Semadeni, 2004a, s. 157-158). W zaproponowanej przez Semadeniego koncepcji aspektów pojęć matematycznych, wymienione wyżej aspekty szyku odpowiadałyby aspektom znaczeniowym szeregowo–kolumnowych układów. Semadeni dodatkowo rozważa aspekty strukturalne, będzie to sposób ujmowania struktury przez daną osobę, np. gdy strukturę układu *„ujmiemy jako pewną cechę, którą trzeba dostrzec w tym układzie figur"* (Semadeni, 2004a, s. 158).

W świetle przytoczonego na początku cytatu Krygowskiej, różnorodność kontekstów występowania szyku w realnym świecie sprzyja stopniowemu uświadamianiu sobie pewnej struktury szyku. Wielokontekstowe percepcje związane z konkretnymi przykładami szyku stają się dla dziecka źródłem najprzeróżniejszych, często nieuświadomionych informacji o oglądanym obiekcie. Dopiero refleksje dziecka nad tymi postrzeganymi obrazami mogą stopniowo prowadzić do dostrzegania w tych zmiennych sytuacjach jednej wspólnej struktury szyku. Kształtowanie się pojęcia SKUF w umyśle dziecka opiera się więc na doświadczeniach nabytych w odpowiednich kontekstach i niewątpliwie różnorodność sytuacji, o której mówiła Krygowska, sprzyja wyodrębnianiu i stopniowemu intuicyjnemu uświadomieniu sobie struktur tego pojęcia.

Określenie „strukturyzacja szyku" użyte w tytule tej pracy jest zgodne z następującym znaczeniem podawanym w słowniku:

> **strukturalizacja** (...) rzadziej **strukturyzacja** (...) czegoś to nadanie temu jakiejś struktury (*Inny słownik języka polskiego* PWN).

Termin ten będzie tu traktowany nieco szerzej, będzie też obejmował różnego typu czynności związane ze strukturami szyku, tj. postrzeganie struktury, wyodrębnianie struktury, odkrywanie struktury, porównywanie struktur. Strukturyzacja nie oznacza przy tym pojedynczego aktu, ale jest ciągłym, długotrwałym procesem. Sądzę, że w wypowiedzi Krygowskiej cytowanej na początku artykułu chodzi także nie tyle o statyczne pojęcie struktury, co raczej o czynności umysłowe towarzyszące procesowi tworzenia się pojęcia struktury: uświadomienie sobie struktury, rozumienie struktury, dostrzeganie struktury, umiejętność posługiwania się strukturą. Czynności te dobrze uzupełniają sens określenia strukturyzacja. Warto jeszcze podkreślić, iż termin strukturyzacja szyku będzie użyty w dwóch zasadniczo różnych kontekstach. Pierwszy będzie dotyczył wyodrębniania struktur przez osoby na dostatecznym poziomie matematycznej abstrakcji i z tego punktu widzenia zostaną wyróżnione różne typy struktur. Drugi kontekst związany jest z opisem wyników badań i dotyczy działalności dziecka. Jest to język, którym nie posługuje się dziecko, ale służy badaczowi do opisu uchwyconych zjawisk. Badacz analizuje w zachowaniach i wytworach dziecka ślady mogące świadczyć o procesie strukturyzacji szyku i interpretuje je jako zalążki kształtowania się struktur w jego umyśle.

Dotychczasowe badania (Outhred, 1992; Rożek, 1994; Rożek, 1995; Rożek 1997; Rożek, 1988; Rożek, E. Urbańska, 1998; Outhred i Mitchelmore, 2000; Outhred i Mitchelmore 2002; Rożek, 2002) pozwoliły scharakteryzować naturalną, nieznaną dawniej wiedzę dzieci w wieku wczesnoszkolnym dotyczącą rozumienia szeregowo-kolumnowego układu figur. Dzieci na początku szkoły w sytuacji, gdy trzeba myślowo ogarnąć układ elementów w postaci szyku prostokątnego, mają poważne, większe niż wcześniej sądzono, trudności z dwuwymiarową koordynacją pionowych i poziomych rzędów. Podczas rysowania, jak mogłoby się wydawać oczywistego układu kwadratów w postaci szyku prostokątnego, dzieci mają trudności z wydobywaniem istotnych cech i jednoczesnym uwzględnianiem kilku z nich naraz.

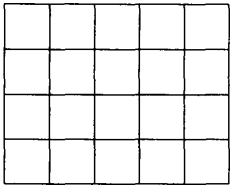
Porównania badań australijskich i polskich wskazują, że pewne wyniki tych badań były zadziwiająco zbliżone. Rysunki wykonywane przez dzieci australijskie i polskie okazały się podobne, co jest istotnym i ważnym faktem świadczących o zbliżonych reakcjach dzieci pochodzących z dwu różnych kultur. W naturalny sposób nasuwa się hipoteza, że struktura tego układu nie jest u dziecka ukształtowana z góry, lecz podlega procesowi konstruowania, i że pojmowanie tego układu podlega naturalnemu rozwojowi, które nie zależy od języka dziecka. Piaget (1993) zwraca uwagę, że struktury umysłowe nie są właściwością pojedynczego człowieka, ale są wspólne dla wszystkich ludzi tego samego poziomu umysłowego i stopniowo, w kolejnych stadiach podlegają rozwojowi.

Identyfikacja pewnych trudności u dzieci w wieku wczesnoszkolnym i wstę-

pny opis schematu myślowego[2] zachęciły mnie do podjęcia dalszych badań w tym zakresie. Naturalnym, kolejnym celem badawczym była próba diagnozy, jak rozumieją takie układy dzieci starsze, w wieku od 10 do 13 lat. Uczniom zaprezentowano pewien niestandardowy problem (opisany w dalszej części artykułu) związany z konkretnym przypadkiem szyku, który nie był im znany z nauki szkolnej. Istotne było analizowanie rozumienia szyku prostokątnego przez dziecko w nowej dla niego sytuacji zadaniowej, odmiennej od typowo szkolnych zadań. Badanie ujawniło różnorodność dróg poszukiwań dzieci prowadzących do wyodrębnienia różnych struktur w tej samej prostokątnej sieci punktów. Wyniki badań wskazały także na pewne trudności, jakie dzieci mają w odtwarzaniu szyku na rysunku.

2 Badania związane z szykami

Rozumienie przez uczniów własności prostokątnych szyków jest stosunkowo nową problematyką badawczą. Inspiracją w podjęciu tej tematyki przeze mnie były badania australijskie (Outhred, 1992) związane z postrzeganiem przez dzieci szczególnego przypadku szyku prostokątnego powstałego przez wypełnienie prostokąta o bokach całkowitych jednostkowymi kwadratami (rys. 6).



Rysunek 6.

W badaniach australijskich zwrócono uwagę na trzy aspekty istotne w rozumieniu pola prostokąta: geometria, mierzenie i liczba. Dzieci podczas prezentowania szyku kwadratw na rysunku miały poważne trudności przy koordynacji typu pion-poziom. Nie dostrzegały one także zależności pomiędzy

[2]Termin „schemat myślowy" przyjęłam za Krygowską (1979, 1986). Chodzi o badanie pierwszego, poglądowego wyobrażenia które „nie jest jeszcze pojęciem matematycznym, ale jest pewnym myślowym schematem w tym sensie, w jakim A. Rubinstein mówi o wyobrażeniach-schematach, które z jednej strony »przechodzą w pojęcia, z drugiej — odtwarzają w obrazach wspomnieniowych indywidualne spostrzeżenia« (Krygowska, 1979, s.50). Schemat ten zawiera bezpośrednie spostrzeżenia, wyobrażenia, własności, reguły oraz operacje związane z danym pojęciem. Schemat myślowy nie jest niezmiennym, izolowanym obiektem, ale podobnie jak Rubinsztein mówi o wyobrażeniu, „jest to twór zmienny i dynamiczny, tworzący się na nowo za każdym razem w określonych warunkach" (Rubinsztein 1962, s. 386).

powierzchnią prostokąta (liczbą jednostkowych kwadratów) a długością jego boków. Nie były także świadome, że liczba odpowiednich rzędów jest równa liczbie kwadratów przylegających do danego boku prostokąta, a więc równa długości tego boku. Uchwycenie tego warunku było konieczny do zrozumienia wzoru na pole prostokąta o bokach całkowitych jako iloczynu długości dwóch boków.

Trudności związane z rozumieniem pola prostokąta obserwowano także podczas powtórzenia badań australijskich w Polsce (Rożek, 1994; Rożek,1995). Dzieci po uprzednim wypełnieniu prostokąta kwadratowymi kafelkami miały narysowć to, co ułożyły. W wyniku analizy stosowanych przez dzieci strategii rysowania wyróżniłam cztery istotne warunki niezbędne do prawidłowego konstruowania pokratkowanego prostokąta: zachowanie szeregów i kolumn, pokrywanie całej powierzchni, zachowanie liczby kwadratów, zachowanie wielkości kwadratów. Istotną trudnością w przedstawianiu pokratkowanego prostokąta na rysunku było jednoczesne uchwycenie wszystkich czterech warunków.

Kolejne polskie badania (Rożek, 1997; Rożek, 2002) dotyczyły szyku prostokatnego w rozmaitych konkretyzacjach np. dotyczących regularnego ułożenia izolowanych, okrągłych przedmiotów. W odpowiednio dobranym kontekście sytuacyjnym dziecko budowało szyki prostokątne z konkretnego materiału, a następnie przedstawiało je na rysunku. Analiza wyników ujawniła różnorodne, naturalne trudności dzieci w rozumieniu związków między współliniowością położeń w przypadku konieczności koordynowania dwóch wymiarów. Wyróżniłam trzy rodzaje struktur: szeregowo-kolumnową, liczbową i powierzchniową, których pewne cechy były intuicyjnie dostrzegane przez dzieci. Dzieci — mniej lub bardziej świadomie — uwzględniały przy rysowaniu pewne cechy tych struktur, natomiast często miały trudności z uwzględnieniem kilku cech jednocześnie. Nastawienie dziecka np. na to, by liczba szeregów była taka sama jak we wzorze, powodowało nieraz nie zwracanie uwagi na konieczność uwzględnienia liczby kolumn. Okazało się także, że dla znacznej części dzieci w wieku do 7 lat, a także dla pewnej grupy ośmiolatków dostrzeżenie w SKUF jednocześnie szeregów i kolumn nie było oczywiste. Interesującym wynikiem było rozpoznanie u niektórych dzieci wyraźnej dominacji pewnych struktur nad innymi. Skupienie przez dziecko uwagi tylko na cechach pewnej struktury często blokowało uwzględnienie cech innych struktur i w konsekwencji prowadziło do dominacji jednej struktury nad pozostałymi.

W głębszych studiach nad kształtowaniem się pojęcia pola (Outhred i Mitchelmore, 2000) zwrócono uwagę, że ważną rolę przy stosowaniu mnożenia w celu obliczania liczby kwadratów pokrywających prostokąt odgrywa rozumienie liniowego (jednowymiarowego) mierzenia. Autorzy wyróżnili pięć poziomów rozumienia pola prostokąta u dzieci w młodszym wieku szkolnym: 1)

niekompletne pokrycie; 2) prymitywne pokrycie; 3) pokrycie szyku powstałe przez powtarzanie tej samej jednostki; 4) pokrycie szyku konstruowane przez mierzenie; 5) szyk implikowany przez wynik obliczenia. W wyniku badań wyróżniono operacyjne zasady konstruowania szyku na rysunku towarzyszące wymienionym poziomom rozumienia pola.

W kolejnych badaniach (Outhred i Mitchelmore, 2002) dotyczących tworzenia prostokątnych szyków autorzy wyróżnili trzy poziomy numerycznego strukturowania oraz pięć poziomów strukturowania geometrycznego. Podczas rysowania szyków prostokątnych uczniowie bardziej koncentrowali się na geometrycznej strukturze niż na strukturze numerycznej.

M. T. Battista, Clements, Arnoff, K. Battista, Borrow (1998) zwrócili uwagę, że przestrzenne strukturyzowanie dwuwymiarowych prostokątnych szyków kwadratów ma istotny wpływ na proces przeliczania (*enumeration*) elementów tych układów. Analizując zachowania uczniów podczas liczenia elementów i uzupełniania niekompletnych rysunków dwuwymiarowych szyków zbudowanych z kwadratów wyróżnili kilka poziomów ustrukturowienia szyku prostokątnego. Pierwszy poziom to całkowity brak ustrukturyzowania szeregów i kolumn, prowadzący do chaotycznego, niezorganizowanego przeliczania elementów, często błędnego, np. z powodu dwukrotnego przeliczania tego samego elementu. Drugi poziom dotyczył częściowego ustrukturowienia szeregów i kolumn, w którym uczniowie zauważali rzędy (szeregi lub kolumny), traktowali pojedynczy rząd jako złożoną jednostkę, ale nie potrafili poprawnie wyliczyć liczby tych rzędów mieszczących się w prostokącie. Trzeci poziom pełnej strukturyzacji szeregów i kolumn, w którym uczniowie dostrzegali związki pomiędzy szeregami i kolumnami, a liczbę elementów szyku obliczali przez sumowanie jednakowych składników lub mnożenie dwóch liczb.

Istotny wpływ przestrzennego strukturyzowania na procesy numeryczne zaobserwowali amerykańscy badacze także w sytuacjach trójwymiarowych szyków, gdzie zadaniem uczniów było obliczenie liczby jednostkowych sześcianów w prostopadłościanie (M. T. Battista i Clements, 1996). Niepełne ustrukturowienie prezentowanego obiektu przez uczniów powodowało błędne dwukrotne przeliczanie niektórych kostek, np. na krawędziach prostopadłościanu. Natomiast uczniowie, którzy ustrukturyzowali trójwymiarowy szyk np. w warstwy, organizowali obliczanie wszystkich elementów przez liczenie kostek w warstwie. Wyróżnione przez autorów poziomy przeliczania elementów pokazały, iż struktura mnożenia, służąca do obliczenia liczby kostek w prostopadłościanie, była stopniowo odkrywana przez uczniów.

W świetle tych rozważań interesujące stają się dalsze poszukiwania prowadzące do ujawnienia naturalnych dróg tworzenia się struktur tego typu układów w umysłach dzieci starszych.

3 Znaczenie struktur w kształceniu matematycznym

Rozważania dotyczące rozmaitych struktur, a także ich fundamentalnego znaczenia w kształceniu matemtycznym są istotnym elementem niniejszej pracy; pozwolą one przybliżyć kontekst w jakim określenie „struktura" zostało tutaj użyte.

Pojęcie struktury odegrało bardzo ważną rolę w matematyce XX wieku. W podsumowaniu międzynarodowego kolokwium poświęconego zagadnieniu koordynacji nauczania matematyki z nauczaniem fizyki z 1967 roku m. in. zwracano uwagę, że:

> Matematyka rozwija się coraz bardziej w kierunku ogólnej nauki o strukturach. Im zawdzięcza ogromne możliwości zastosowań, informacji i unifikacji (Krygowska, 1979, s. 15).

Warto wyraźnie podkreślić, że w pracy tej nie chodzi o pojęcie struktury w sensie definicji podawanej przez Bourbakistów.

B. Skarga zaliczyła pojęcie struktury (rozważane w wielu dziedzinach wiedzy) do ważnych, ogólnych kategorii myśli naukowej XX wieku, które w niektórych teoriach nadal jest używane, chociaż ścisłe określenie tego pojęcia wywołuje wiele sporów (Semadeni, 2004c, s. 199). Zdaniem Semadeniego *„wiele podstawowych pojęć używanych w matematyce i dydaktyce matematyki funkcjonuje nie jako jednoznacznie określone pojęcie, lecz (...) jako kategoria myśli"* (2004c, s. 198). Tak więc bliższe prezentowanym tu kontekstom użycia słowa „struktura" będzie stwierdzenie, że ogólne pojęcie struktury funkcjonuje jako kategoria myśli. Przyjmując takie podejście można wymienić trzy warunki na to, aby pojęcie, w tym przypadku pojęcie struktury, można uznać za kategorię myśli:

α) jest dostatecznie o g ó l n e;

β) odegrało ważną rolę w rozwoju nauki, uważane było za odpowiednie przy wyjaśnianiu kwestii naukowych, kształtowało pole teoretycznych badań, wyznaczało centralne jego problemy i u k i e r u n k o w y w a ł o myśl badaczy odwołujących się do tego pojęcia, gdy szukali wyjaśnienia rozmaitych kwestii;

γ) ma charakter p o l i s e m i c z n y, łączy w sobie niejeden sens i przez to jest trudne do jednoznacznego zdefiniowania, nie ma więc ścisłego, formalnego charakteru dobrze zdefiniowanego terminu naukowego (Semadeni, 2004c, s. 198).

Istotne w podejściu do struktury jako kategorii myśli jest więc ukazanie kontekstów, w jakich dydaktycy matematyki używają tego pojęcia, a także

próba zaadoptowania określenia „struktura" do opisu i klasyfikacji pewnych fenomenów charakteryzujących pojęcie szyku prostokątnego. Chodzi o wychwycenie takich sytuacji, w których:

> Słowo „struktura" używane jest też w obrębie szeroko rozumianej matematyki w innych, bardziej swobodnych sensach, związanych z intuicją jakiejś budowy, konstrukcji czy szkieletu (Semadeni, 2004a, s. 160).

Dydaktycy matematyki (Freudenthal, 1983; Freudenthal, 1987; Krygowska, 1979) wielokrotnie podkreślali, że odkrywanie struktur odgrywa zasadniczą rolę w tworzeniu pojęć matematycznych, pomaga lepiej rozumieć organizację naszej wiedzy. Freudenthal uważa, że rzeczywistość opanowujemy raczej przez strukturyzację niż przez tworzenie pojęć.

Krygowska, w cytowanej na początku artykułu myśli, z pojęciem struktury wiąże pewne czynności umysłowe: uświadomienie sobie struktury, rozumienie struktury, dostrzeganie struktury, umiejętność posługiwania się strukturą. Zwróciła uwagę, że ważnym elementem sprzyjającym rozwijaniu się tych czynności jest różnorodność sytuacji, w których występuje dana struktura. Ponadto wyodrębnianie struktur autorka wiązała mocno z procesem schematyzacji, stanowiącej fundamentalny składnik matematycznej aktywności. Schematy materialne, np. rysunek jakiejś sytuacji geometrycznej

> opierają się na intelektualnej aktywności schematyzacji, skierowanej do wyodrębniania pewnej szczególnej struktury wśród bogactwa struktur istotnych dla badanej sytuacji. (...) Czynność schematyzowania to nie tylko uświadomienie sobie strukturalnej analogii, ale także konstrukcja obiektu strukturalnie podobnego do innego obiektu (Krygowska, 1986, s. 32).

Krygowska uważała, że schematyzacja może być procesem prowadzącym do ujawnienia wspólnych struktur dla różnych obiektów. Zwraca uwagę, że

> pierwsze pojęcia geometryczne powstają w drodze naturalnej schematyzacji rzeczywistych stosunków przestrzennych, z którymi człowiek zapoznaje się od pierwszego ruchu, od pierwszego kontaktu z otoczeniem (Krygowska, 1979, s. 16).

W początkowym etapie w wyniku schematyzowania, czyli upraszczania i celowego pomijania nieistotnych cech, rodzący się schemat służy do przedstawiania jakiegoś układu rzeczywistych stosunków i jest środkiem badania tych stosunków. Potem, wiele lat później, sam schemat może stać się badanym obiektem oraz źródłem refleksji, umożliwiających odkrywanie tych samych struktur w różnych obiektach, przez dostrzeżenie wspólnych cech. Na jeszcze wyższym poziomie można uświadomić sobie izomorfizmy ze względu na wybrane relacje.

Wielostronną analizę dotycząca struktur zaprezentował Van Hiele (1986). Nie podał on także definicji struktury, lecz charakteryzował to pojęcie przez opisanie własności struktury oraz podanie wielu przykładów. Zwrócił uwagę na znaczenie struktur nie tylko w edukacji matematycznej, ale także w codziennym życiu: *potrzebujemy struktur w celu odpowiedniego działania.* W tym kontekście Van Hiele wyróżnił struktury mocne (*rigid structure*) i słabe (*feeble strukture*). Jeśli znana jest wystarczającą część struktury tak, że można ją kontynuować z dużą pewnością, stanowi ona strukturę sztywną. Wśród wielu przykładów Van Hiele prezentuje regularne ułożenie kwadratów w postaci szyku prostokątnego i traktuje go jako strukturę wizualną (visual strukture).

> (...) Zaczynam od nich [struktur wizualnych] ponieważ ich właściwości są widoczne najlepiej. Pierwszą obserwacją w tych strukturach jest fakt, że mogą być rozszerzone. Bardzo łatwo jest rozszerzyć strukturę kwadratów: jeśli da się małemu dziecku zestaw kwadratowych płytek, w większości przypadków będzie w stanie rozszerzyć ten wzór (Van Hiele, 1986, s. 13).

> (...) Konstrukcja struktur wizualnych w naszym umyśle bardzo często nie potrzebuje języka. Można poprosić dziecko, aby kontynuowało strukturę [kwadratów] i ono będzie to robić z powodzeniem bez wcześniejszego opanowania języka, który towarzyszy tej strukturze (Van Hiele, 1986, s. 16-17).

Van Hiele używa słowa „struktura" już na określenie samego obiektu — w powyższym przykładzie układ kwadratowych płytek w postaci szyku prostokątnego nazwał „strukturą kwadratów", a więc układ sam w sobie jest strukturą. W niniejszym artykule użycie słowa „struktura" będzie bliższe sformułowaniom takim jak: „w danym obiekcie można wyodrębnić różne struktury", „dany obiekt jest nośnikiem struktur", „obiekt można traktować jako bogatą strukturę". Precyzując kontekst, w jakim używam słowa struktura, posłużę się przykładem:

> Czworościan można traktować jako strukturę złożoną z czterech wierzchołków, sześciu krawędzi i czterech ścian ujętych we wzajemnych relacjach, tj. relacjach należenia wierzchołka do krawędzi i ściany, zawierania przez krawędź wierzchołka i jej zawierania się w ścianie, zawierania przez ścianę wierzchołka i krawędzi. Jest to struktura zwana kombinatoryczną; uwzględniamy bowiem tylko te relacje i zaniedbujemy wszystkie inne informacje na temat punktów, krawędzi i ścian, a więc to, że krawędzie są proste, ściany płaskie, że są one zbiorami punktów. (...) czworościan jest także bryłą sztywną w realnej przestrzeni, o prawdziwych wierzchołkach, krawędziach i ścianach. To także jest pewna struktura — struktura geometryczna. Jako struktura geometryczna czworościan stanowi strukturę bogatszą niż kombinatoryczna (...). Można o nim orzekać bardziej

> różnorodne twierdzenia; można, dla przykładu, mierzyć jego krawędzie, kąty, ściany, objętość. (...) Weźmy czworościan uformowany z gliny czy plasteliny i zgniećmy go, żeby odkształcić tę bryłę bez jej rozrywania czy sklejania tego, co było osobno. Możemy w ten sposób otrzymać okrągłą piłkę (...) Wierzchołki, krawędzie, ściany zniknęły. Otrzymany obiekt jest wciąż spójny, oczywiście na sposób bardzo specjalny, na sposób kuli, a z pewnością nie na sposób pierścienia. Jest to struktura topologiczna, (...) odległości, kąty, prostoliniowość itp. nie odgrywają teraz żadnej roli (Freudenthal, 1987, s. 27-28).

W cytowanym przykładzie czworościan traktowany jest jako bogata struktura. Podobnie SKUF *jest nośnikiem wielu struktur, spośród których można wyodrębniać struktury uboższe.* Struktury są zawsze obecne bądź w pojęciu matematycznym, bądź w relacjach tego pojęcia z innym. Rozumienie struktur wiąże się ze świadomym wyodrębnianiem ich z całego bogactwa innych możliwych struktur przez uwzględnianie wybranych relacji między elementami tego pojęcia i zaniedbywaniu informacji zbędnych. Wyodrębnianie różnorodnych struktur szyku jest bardzo ważne dla myślenia matematycznego — jest fundamentalne przy kształtowaniu wielu pojęć matematycznych i ich własności.

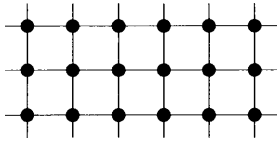
4 Struktury szyku prostokątnego

Dotychczasowe wyniki badań, a w szczególności bogactwo i różnorodność dziecięcych zachowań wskazują, że szeregowo-kolumnowy układ figur można traktować jako twór bogato wyposażony w struktury. Struktury te stanowią dla dziecka skomplikowaną sieć powiązań. W szczególności w szyku prostokątnym możemy wyodrębnić rozmaite struktury, a każda ze struktur może mieć związek z różnymi pojęciami matematycznymi. Poniżej wyróżnię kilka typów takich struktur jednocześnie przytaczając znane matematyczne przykłady. Z jednej strony ukaże to różnorodność struktur szyku wykorzystywanych w nauczaniu matematyki, z drugiej strony zwróci uwagę, jak istotna jest umiejętność, w zależności od kontekstu sytuacji, świadomego wyodrębniania danej struktury przy jednoczesnym pomijaniu innych.

I. **Struktury typu konfiguracyjnego**. Dana struktura wiąże się z wyróżnieniem pewnego ułożenia elementów szyku, np. w postaci równoległych rzędów. Oto kilka rodzajów struktur konfiguracyjnych:

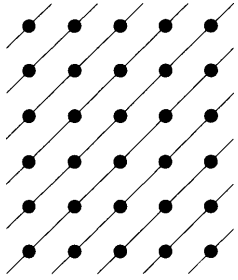
• *Standardowa struktura szeregowo-kolumnowa* charakteryzowana jest przez układ elementów w postaci równoległych szeregów i wzajemnie równoległych kolumn (schematycznie przedstawiona na rys. 7). Struktura ta jest podstawową strukturą szyku typu konfiguracyjnego. Pozwala ona zilustrować ilo-

czyn liczb naturalnych, prawo przemienności mnożenia oraz prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania lub odejmowania. Ma też podstawowe znaczenie w propedeutycznym kształtowaniu pojęcia pola prostokąta.



Rysunek 7.

• *Normalna struktura ukośna* jest charakteryzowana przez układ elementów wyróżnionych jako główne linie szyku, które pozostają równoległe do przekątnej w kwadratowym szyku typu $n \times n$. Rys. 8 przedstawia schematycznie *strukturę ukośną* w sytuacjach gdy szyk nie jest kwadratowy. Struktura ukośna jest wykorzystywana m. in. w tzw. metodzie przekątniowej w dowodzie twierdzenia o przeliczalności zbioru liczb wymiernych (a także przeliczalności produktu kartezjańskiego dwóch zbiorów przeliczalnych). Idea dowodu polega na ustawieniu wszystkich liczb wymiernych, reprezentowanych przez pary liczb całkowitych, w nieskończonej tablicy dwuwymiarowej. Wyznaczając przekątne tego układu (rzędy ukośne) kolejno jedno-, dwu-, trzy-, itd. elementowe, a następnie numerując wyrazy tych rzędów, tworzymy nieskończony przeliczalny ciąg liczb wymiernych (Rasiowa, 1984, s. 97).



Rysunek 8.

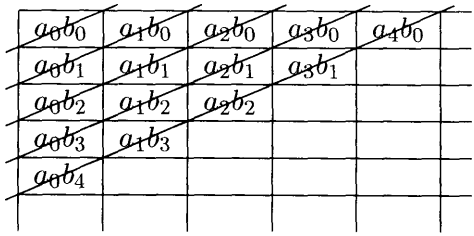
Strukturę ukośną można wykorzystać także w odpowiednio utworzonej tabeli przy mnożeniu szeregów w sensie Cauchy'ego. Na przykład, dla iloczynu szeregów potęgowych określonego następująco:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ dla } x \in (-r, r)$$

gdzie

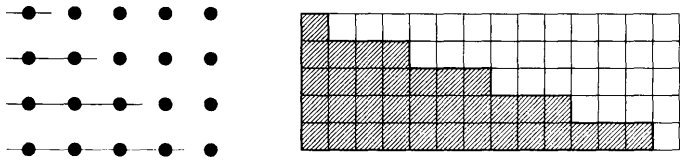
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0, \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

możemy utworzyć nieskończoną tabelę (zob. rys. 9). Kolejne wyrazy c_n otrzymamy przez sumowanie iloczynów wzdłuż odpowiednich rzędów ukośnych przy $i + j = n$.



Rysunek 9.

• *Struktura schodkowa* (rys. 10) charakteryzowana jest przez wyróżnienie np. w kolejnych szeregach nierównolicznych zbiorów elementów, ale tak, że każde dwa zbiory wyróżnione w sąsiednich szeregach różnią się o stałą liczbę elementów. Wyróżnienie w odpowiednim szyku *struktury schodkowej* pozwala w poglądowy sposób wyznaczać sumę ciągu arytmetycznego o wyrazach będących liczbami naturalnymi. Suma ta równa jest połowie liczby wszystkich kratek mieszczących się w prostokącie (rys. 10 z prawej strony), którego jeden bok jest sumą pierwszego i ostatniego wyrazu tej sumy, a drugi równa się liczbie wyrazów tej sumy.



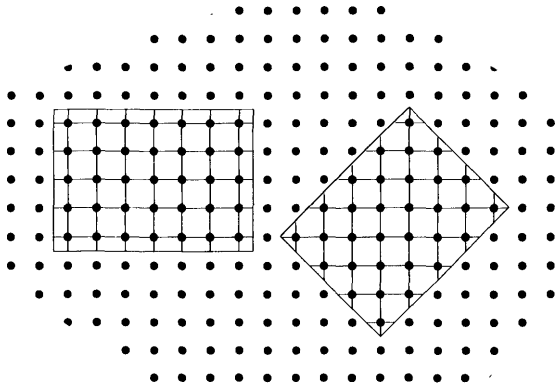
Rysunek 10.

• *Struktura narożnikowa kwadratowa* wyróżniona schematycznie w układzie o wymiarach $n \times n$ (rys. 11) podaje geometryczną ilustrację kolejnych liczb nieparzystych, a *struktura narożnikowa prostokątna* układu o wymiarach $n \times (n+1)$ (rys. 12) wyznacza kolejne liczby parzyste. Te rodzaje struktur konfiguracyjnych służą także do ilustracji liczb figuralnych (rys. 11 ilustruje klasę liczb kwadratowych, a rys. 12 klasę liczb prostokątnych). Dąbrowski (1992) zwraca uwagę, że dostrzeganie innych geometrycznych struktur odpowiednich układów umożliwia wizualizację dowodów pewnych własności liczb figuralnych.

badanych zjawisk. Chodziło o budowanie takiego systemu pojęć, który byłby możliwie bliski temu, co badamy u dzieci, i zarazem umożliwiał opis obserwowanych zachowań. Dzięki temu można było pełniej analizować to, co obserwowano u dzieci w trakcie badań. Język matematyczny pomagał interpretować ujawnione w czasie badań rozumowania dzieci. Należy wyraźnie podkreślić, że proponowane terminy matematyczne ważne są dla prowadzącego badania matematyka-dydaktyka; nie były natomiast stosowane w kontaktach z dziećmi w czasie badań i nie byłoby celowe, by mówić o nich *explicite* dzieciom.

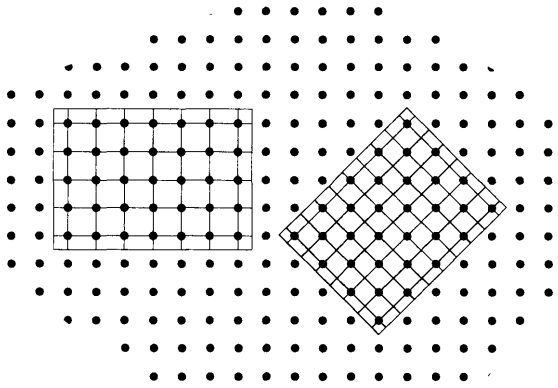
Przedmiotem opisywanych tutaj badań były, nieomówione do tej pory w pracy, dwa rodzaje struktur szeregowo-kolumnowych typu konfiguracyjnego.

• Na rysunku 14 kropki tworzą potencjalnie nieskończony dwuwymiarowy szyk, w którym wyróżniono dwa typy układów w kształcie prostokąta. Prostokąty te wyznaczają skończone dwuwymiarowe układy, które są charakteryzowane przez odmienne struktury. Wyróżnienie konfiguracji elementów w sposób przedstawiony na rysunku 14 w lewym prostokącie wyznacza szeregi i kolumny przecinające się z bokami prostokąta pod kątem prostym. W tym sensie można mówić o *strukturze prostokątnej*. W prawym prostokącie wyróżniono rzędy ułożone ukośnie w stosunku do boków prostokąta, co wyznacza pewien rodzaj *struktury ukośnej*.



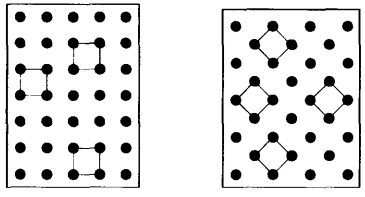
Rysunek 14.

• Narzucenie na wyróżnione prostokątne układy innej sieci konfiguracji (rys. 15) pozwala dostrzec w drugim prostokącie także inną strukturę. Zauważmy, że układy te są charakteryzowane przez odmienne struktury typu liczbowego: w pierwszym prostokącie widzimy m rzędów po n punktów w każdym, a w drugim prostokącie — układ r rzędów na przemian po s i $s+1$ elementów. Strukturę w drugim prostokącie można nazwać *strukturą naprzemienną*.



Rysunek 15.

• Rozważając dane prostokąty wyjęte z sieci punktów w położeniu takim jak na rys. 16 narzuca się jeszcze inna nazwa wyróżnionych struktur: *struktura kwadratów* oraz *struktura kwadratów obróconych o 45 stopni.*



Rysunek 16.

W opisie badań mówiąc o strukturach charakteryzujących te dwa prostokąty będę używała nazw: *struktura prostokątna* oraz *struktura ukośna.* Istotą badań było stwierdzenie, czy dzieci potrafią dostrzec obie te struktury w tym samym SKUF.

5 Cele badań, metody i organizacja badań

Prezentowane w tej pracy badania są typu diagnostycznego[4]. Warto podkreślić, że model badań nie miał charakteru badań projektujących (opisanych w: Nowak, 1982, s. 117) związanych z konstruowaniem dydaktycznej koncepcji nauczania i wdrażaniem jej do praktyki szkolnej.

[4]Zadaniem badań diagnostycznych jest: *„ustalenie cech, czy zasad funkcjonowania pewnego konkretnego wycinka rzeczywistości, będącego głównym przedmiotem naszych poznawczych zainteresowań"* (Malikowski, 1984, s. 35).

Ogólne cele badań to:

1. Diagnoza prawidłowości i trudności towarzyszących konstruowaniu się schematu szyku prostokątnego w umysłach dzieci.
2. Wstępne opisanie dróg postępowania towarzyszących konstruowaniu się schematu myślowego szyku prostokątnego.
3. Klasyfikacja sposobów rysowania stosowanych przez dzieci.

Ze względu na stosunkowo nową dziedzinę badań w zakresie rozumienia szyku prostokątnego przez uczniów oraz mało zbadany wycinek uczniowskiej wiedzy na temat szyku prostokątnego, a także na charakter postawionych celów, przeprowadzone badania miały charakter jakościowy. *„Badania jakościowe pozwalają odsłonić i zrozumieć nieznane dotąd zjawiska skrywane poza głównymi obszarami zainteresowań badawczych, pozwalają też na dotarcie do dużej liczby szczegółów różnych zjawisk"* (Zaręba, 1998, s. 47). Należy jednak pamiętać, że badania jakościowe *„cechuje znaczny stopień subiektywizmu. Dydaktyk wykorzystuje otwarte sposoby zbierania danych, stosuje narzędzia badawcze nieustrukturyzowane, realizuje niestandaryzowane sposoby opracowywania wyników badań"* (Palka, 1999, s. 125). Konsekwencją podejścia jakościowego w badaniach było przyjęcie odpowiednich metod badawczych. Podstawowa metoda stosowana w badaniach to studium przypadku, metoda, która nie służy weryfikacji, lecz pozwala na *„odkrywanie, opis tego, co niekoniecznie typowe, lecz niepowtarzalne i indywidualne"* (Turlejska, 1998). W celu zebrania różnorodnych informacji oraz wykrycia obiektywnych sposobów rozumowań dzieci stosuję w badaniach zadania diagnostyczne (Matczak, 1994, s. 130). Skonstruowanie takich zadań i zastosowanie ich w trakcie badań pozwala na planowe organizowanie i prowokowanie sytuacji, które ujawniają różnorodne drogi tworzenia się wiedzy ucznia związanej z szykiem prostokątnym. Zadania diagnostyczne mają służyć badaniu wszelkich reakcji dzieci oraz wykryciu prawidłowości i trudności w rozumieniu szyku. Diagnozie prowadzonej za pomocą skonstruowanej serii zadań towarzyszyła metoda obserwacji uczestniczącej (Kupisiewicz, 1974, s. 28; Nowak, 1982, s. 95), uwzględniająca obecność, a nawet drobne interwencje obserwatora. Obserwacja umożliwiła bezpośrednie poznanie działań dzieci w zakresie czynności manualnych, jak i rysunkowych. Kolejną metodą w badaniach była analiza dokumentów (Zaczyński, 1997, s. 158). W prowadzonych badaniach były to dokumenty tworzone intencjonalnie (w przeciwieństwie do dokumentów zastanych), a więc takie, które powstawały z zamiarem poddania ich późniejszej analizie. Głównie chodziło o wytwory dzieci w postaci rysunków oraz modeli wyciętych z papieru. Z jednej strony, analiza dziecięcych rysunków stanowiła uzupełnienie innych metod, a

z drugiej, w badaniach dotyczących przede wszystkim sytuacji geometrycznych, była nieodzownym sposobem poznania wycinka badanej rzeczywistości. Przegląd literatury związanej z rysunkiem dziecka stał się istotnym elementem prowadzonych badań.

Rysunek dziecka bywa uważany za etap pośredni pomiędzy rzeczywistością materialną a abstrakcją. Jest on wytworzonym schematem materialnym, uproszczeniem rzeczywistości z punktu widzenia jakiejś struktury. Aktywność graficzna pełni funkcję symbolicznej transformacji doświadczeń dziecka oraz kodowania obiektów i zjawisk obserwowanych w świecie realnym. Rysowanie można traktować

> jako formę dialogu między gestami a umysłem, a także jako uzewnętrznioną postać reprezentacji świata w umyśle dziecka i jego dialogu wewnętrznego (Wallon, Cambier, Engelhart, 1993, s. 9).

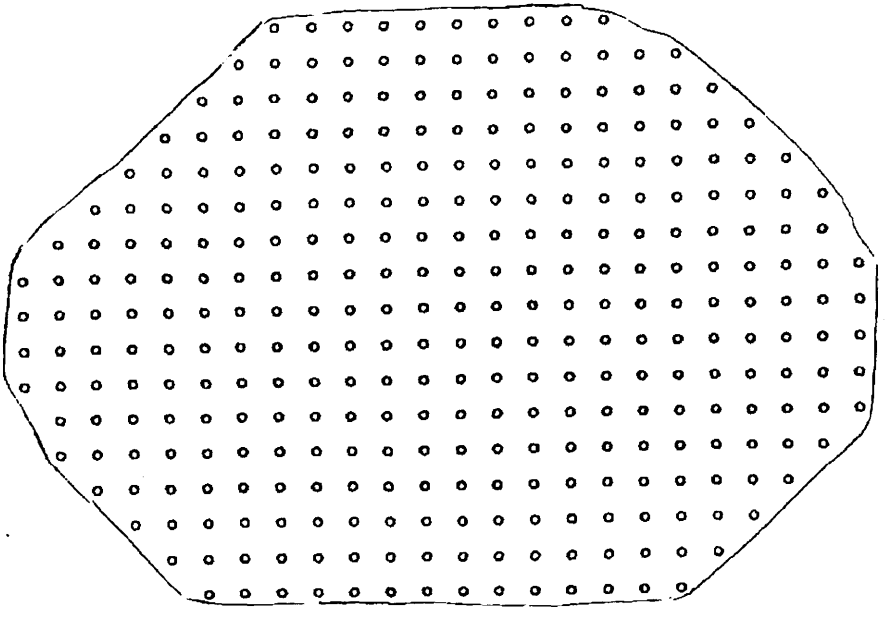
Rysunek staje się materializacją wnętrza, dostarcza informacji o dziecku, w tym o wszystkich jego osobistych doświadczeniach, ale powstały obraz zawiera także najważniejsze (dla dziecka) cechy obiektu przenoszonego na kartkę (Lowenfeld, Brittain, 1977). Czynność rysowania w pewnym sensie nie tylko odzwierciedla wiedzę dziecka, ale w dużej mierze tę wiedzę kształtuje. Na tego typu podwójną rolę rysunku zwraca uwagę Turnau:

> Funkcja rysunku jest złożona i niejednoznaczna. Z jednej bowiem strony jest on modelem-schematem rzeczywistości, w którym „zagęszczone" zostało całe długoletnie spontanicznie zdobyte doświadczenie dziecka, który gra więc bardziej rolę symbolu niż realnego obiektu badania. Z drugiej zaś strony ten sam rysunek ujawnia nowe stosunki przestrzenne, dotąd w inny sposób nie wykryte, często nawet trudne do zinterpretowania w pozarysunkowej rzeczywistości (Turnau, 1968, s. 84).

Rysunek powstaje przez tworzenie pojedynczych znaków graficznych, które jednak nie są dowolne, lecz łączą się w szczególnym ułożeniu. Charakter kreski oraz powstający obraz oddziaływuje na wykonującego rysunek. W efekcie znaki, które były skutkiem ruchu, stają się przyczyną następnego gestu, *„powstają na drodze poszukiwań wewnętrznych, na drodze osadzania się w indywidualnej świadomości licznych doświadczeń i badań, uczestniczących w procesie pogłębiania wiedzy"* (Wallon, Cambier, Engelhart, 1993, s. 28). W akcie graficznym łączą się zarówno czynniki percepcyjne jak i myślowe. Rysunek nie jest więc tworem jedynie motoryki, jest także owocem percepcyjnej funkcji sfery wzrokowej, doświadczenia i wiedzy dziecka. Bez wątpienia akt rysowania w pewien sposób odzwierciedla myśl dziecka. Toteż w badaniu kształtowania się u ucznia pojęć geometrycznych analiza rysunku ma szczególne znaczenie.

Badania przeprowadzono w 1999 roku wśród uczniów klas V-VII. Byli to uczniowie jednej ze szkół podstawowych w Krakowie. Łącznie uczestniczyło w nich 31 osób (8 dziesięciolatków, 8 jedenastolatków, 4 dwunastolatków, 11 trzynastolatków). Każdy uczeń pracował indywidualnie w obecności badacza. Zadania odczytywano uczniowi słownie, wręczając lub wskazując mu jednocześnie pomoce wykorzystywane w badaniach. Po zapoznaniu ucznia z pierwszym zadaniem badacz czekał na odpowiedź ucznia na postawione mu pytania. Następnie zapoznawał ucznia z kolejnym zadaniem i podobnie oczekiwał na jego rozwiązanie. W ten sposób każdy uczęń otrzymał trzy następujące zadania (tekst wyróżniony kursywą oznacza sformułowania kierowane do dziecka, pozostały tekst to opis gestów wykonywanych przez badacza w trakcie prezentacji zadań oraz komentarz do zadań):

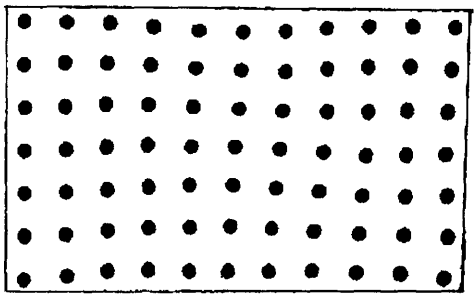
Zadanie 1. *Plansza przedstawia pomniejszony wzór pewnego materiału.* Uczniowi wręczano planszę przedstawiającą pomniejszony wzór materiału (rys. 17). Plansza ta była wycięta z papieru, na którym czarne kółeczka tworzyły szyk prostokątny. Dalej plansza ta zostanie nazwana „papierowym materiałem".



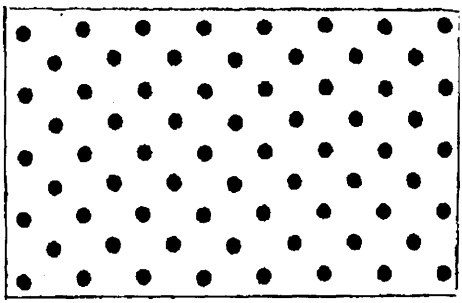
Rysunek 17.

To są dwie serwety. Uczeń otrzymywał rzeczywiste serwety, wykonane z prawdziwej tkaniny, białej w czerwone kropki, naklejonej na kartonowe prostokąty.

Czarno-białe zdjęcie tych serwet przedstawiono na rysunkach 18 i 19.



Rysunek 18.



Rysunek 19.

Czy obie te serwety wycięto z materiału o takim wzorze[5] *?* Uczniowi wskazano ponownie plansze z rys. 17. *Dlaczego tak sądzisz? Możesz mnie przekonać, że masz rację?*

W serwetach celowo uwypuklono dwie struktury: strukturę prostokątną (rys. 18) i strukturę ukośną (rys. 19). Intencją badacza było zbadanie, czy dzieci potrafią w tym samym szyku prostokątnym (papierowym materiale) dostrzec dwie różne struktury uwypuklone w serwetach (por. rys. 14). W poniższym opisie serwety te będą nazywane odpowiednio: „serweta prostokątna" i „serweta ukośna". Dodatkowym utrudnieniem zadania była prezentacja jedynie schematycznej, papierowej planszy materiału, a nie rzeczywistego materiału, z którego wycięto serwety. Na papierowej planszy zamiast kół były okręgi. Ponadto wzór na papierowym materiale był pomniejszony w stosunku do rzeczywistego materiału i w konsekwencji odległości między sąsiednimi kółeczkami na papierowym materiale były mniejsze niż na rzeczywistych serwetach. Niezależnie od tego, co uczeń odpowiedział na pytania postawione w zadaniu pierwszym, podawano mu drugie zadanie.

Zadanie 2. *Wytnij takie same serwety* (dziecku wskazano serwety z tkaniny, rys. 18 i 19) *z naszego papierowego materiału* (dziecku wskazano papierowy materiał, rys. 17). *Nasz papierowy materiał został pomniejszony, więc wycięte serwetki też będą mniejsze.*

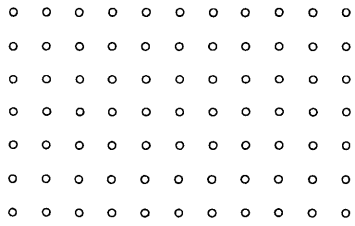
Wielkość „papierowego materiału" była taka, że z danej kartki można było wyciąć obie serwety: prostokątną o wymiarach 7 na 11 kropek oraz ukośną o 5 i 8 brzegowych kropkach. Jednak w sytuacji, gdy uczeń pierwszą serwetę

[5]Określenie „materiał o takim wzorze" nie jest zbyt precyzyjne. Obejmuje ono zarówno sposób ułożenia kropek, jak i rodzaj i kolor kropek. W trakcie rozwiązywania zadań czterech badanych uczniów zwróciło uwagę na cechy inne niż sposób ułożenia kropek, dlatego ich prace zostaną w analizie wyników ujęte oddzielnie. Interpretacja tego pytania ujawniona przez dzieci zostanie dokładnie omówiona w dalszej części artykułu.

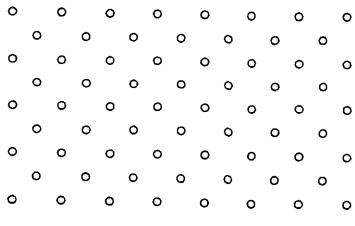
wyciął ze środka planszy i nie miał z czego wyciąć serwety drugiej (lub też po nieudanej próbie wycinania chciał spróbować wyciąć serwetę jeszcze raz), otrzymywał kolejną planszę papierowego materiału.

Następnie, po zakończeniu wycinania serwet przez dziecko, pokazywano mu „papierowe serwety" (rys. 20, 21). Były to przygotowane wcześniej przez badacza prostokąty wycięte z papierowego materiału, które ilustrowały serwety: prostokątną i ukośną. Jednocześnie ucznia pytano:

Czy wycięte przeze mnie (chodzi o badacza) *prostokąty* (dziecku wskazano papierowe prostokąty, rys. 20, 21) *przedstawiają nasze serwety* (dziecku wskazano rzeczywiste serwety, rys. 18 i 19)?



Rysunek 20.



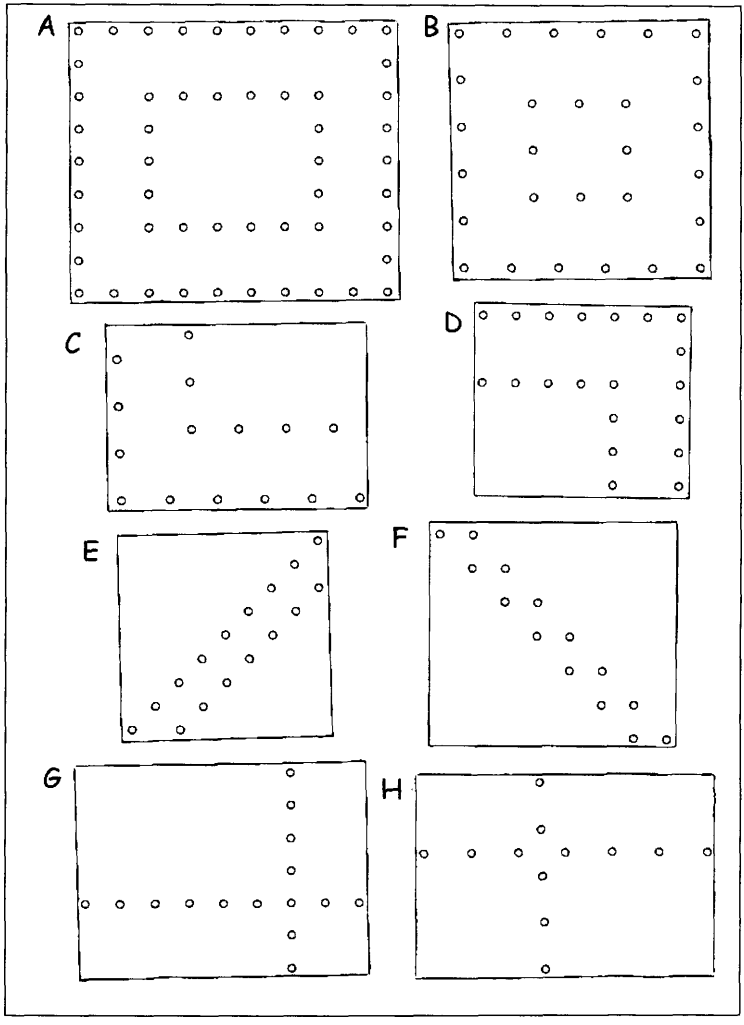
Rysunek 21.

Pokazanie uczniowi przygotowanych przez badacza „papierowych serwet" było wykorzystane jako istotny element do kolejnego zadania. Przy projektowaniu badań założono bowiem, że znajdą się zapewne uczniowie, którzy po zadaniu drugim nie dostrzegą we wzorze „papierowego materiału" z rysunku 17 dwóch struktur (prostokątnej i ukośnej) i nie uda im się w zadaniu drugim wyciąć dwóch typów serwet. Ponieważ w zadaniu trzecim pojawiły się oba typy serwet, ważna była prezentacja uczniowi faktu, że z papierowego materiału można wyciąć zarówno serwetę prostokątną, jak i serwetę ukośną. Istotą zadania trzeciego było rysowanie serwet prostokątnych i ukośnych na podstawie przedstawionych fragmentów. Dlatego też papierowe serwety miały być dla ucznia pomocne w rysowaniu serwet w zadaniu trzecim.

Zadanie 3. *Wszystkie serwety przedstawione na tej planszy* (rys. 22) *zostały wycięte z tego samego papierowego materiału* (dziecku wskazano „papierowy materiał", rys. 17), *z którego przed chwilą wycinałeś te serwety* (wskazano „papierowe serwety" wycięte przez ucznia). *Niestety na serwetach tych* (rys. 22) *brakuje kropek. Twoim zadaniem jest dorysować kropki tak, aby wzór serwety zgadzał się z wzorem na materiale.*

Prezentowana dziecku plansza (rys. 22) była formatu kartki A_4. Wzór serwet na tej planszy w stosunku do wzoru papierowego materiału z rys. 17 był w skali 1:1, czyli na planszy i na papierowym materiale kółka były tej samej

wielkości oraz odległości między kółkami były zachowane. Jednak na planszy nie było zaznaczone, które z serwet mają strukturę prostokątną, a które ukośną. Rodzaj serwety wynikał jedynie z fragmentu przedstawionego wzoru. Plansza zawierała cztery serwety o wzorze prostokątnym, czyli cztery „serwety prostokątne" (serwety A, D, F i G) oraz cztery o wzorze ukośnym, czyli cztery „serwety ukośne" (serwety B, C, E i H). W serwetach na planszy pozostały pewne fragmenty szyku, które miały uwypuklać nowe rodzaje struktur konfiguracyjnych.



Rysunek 22.

W dwóch pierwszych serwetach (A i B) uwypuklono „strukturę brzegową", wyodrębniając linie kropek wzdłuż brzegów. W następnych dwóch serwetach (C i D) poprzez wyróżnienie rzędów w kształcie litery „L" uwypuklono „strukturę narożnikową", w kolejnych dwóch (E i F) „strukturę ukośną", a w dwóch ostatnich (G i H) „strukturę rzędów przecinających się pod kątem prostym".

W zadaniu chodziło o zbadanie, czy dzieci na podstawie fragmentów układu kropek potrafią rozróżnić rodzaj serwety i czy potrafią odtworzyć szyk na rysunku.

6 Odkrywanie odmiennych struktur w tym samym szyku — analiza rozwiązań zadania pierwszego i drugiego

W czasie badań zaobserwowano rozmaite sposoby podejścia do rozwiązywania zadań stosowane przez uczniów i uzyskano różnorodne końcowe rezultaty. Analiza sposobów rozwiązywania zadania pierwszego i drugiego pozwala na wyróżnienie:

— zachowań dzieci, które blokowały im podjęcie dalszych poszukiwań bądź oddalały uczniów od końcowego sukcesu;

— zachowań dzieci, które powodowały modyfikacje kolejnych kroków w rozwiązaniu i przez to drogi poszukiwań ulegały zmianie i nieraz prowadziły do uzyskania końcowego sukcesu.

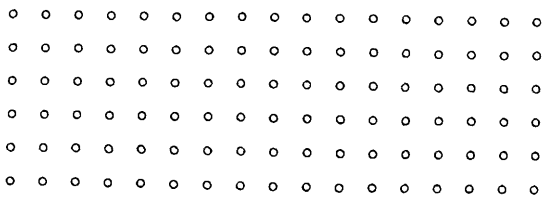
W prezentowanej analizie sam końcowy efekt rozwiązania zadań, opisany w tradycyjnych kategoriach porażki i sukcesu, nie jest najważniejszy. Potrzebny jest przede wszystkim do ukazania całości zachowania badanych uczniów, a także do prezentowania innych wniosków. Istotnym elementem analizy jest opis zachowań ucznia ujawnionych podczas jego pracy nad zadaniem, który odzwierciedlają drogi poszukiwań rozwiązania problemu (prowadzących do końcowego sukcesu lub też nie kończących się sukcesem). Chodzi przede wszystkim o próby rekonstrukcji spontanicznych dróg strukturyzowania szyku prostokątnego w konkretnej sytuacji, gdy badane dziecko ma dostrzec dwie różne konfiguracje tego samego układu.

Poniższa analiza składa się z kilku warstw, w których pod różnymi kątami i coraz głębiej będą charakteryzowane drogi poszukiwań uczniów. Prowadzi to z konieczności do pewnych powtórzeń opisu. Ta sama praca dziecka będzie więc przywoływana kilka razy, ale takie wielokrotne analizowanie uzyskanego materiału badawczego pozwala wniknąć w coraz głębsze oznaki dziecięcych rozumowań.

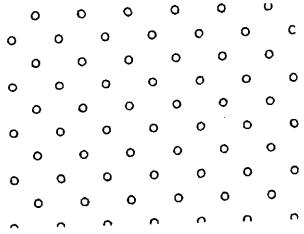
6.1 Opis wybranych prac dzieci

Charakterystyczne zachowania dzieci podczas rozwiązywania zadania pierwszego i drugiego zostaną zilustrowane na wybranych przykładach. Imiona niektórych uczniów zostały zmienione.

• Ewelina (13 lat i 8 miesięcy) w pierwszym zadaniu na postawione pytanie: *Czy obie te serwety wycięto z materiału o takim wzorze?* odpowiada: *Jest jedna wycięta, bo kółka są pionowo i poziomo, a druga nie, bo na skos.* Dziewczynka wycina serwetę o strukturze prostokątnej, ale nie zwraca uwagi na liczbę kropek i otrzymuje serwetę o wymiarach 6 na 17 (rys. 23). Początkowo twierdzi, że drugiej serwety nie można wyciąć z tego materiału. Potem jednak udaje jej się wyciąć serwetę o strukturze ukośnej, ale liczba kropek także nie zostaje zachowana (rys. 24). W końcu stwierdza: *Da się ją wyciąć z tego materiału, tylko był on przekręcony.*



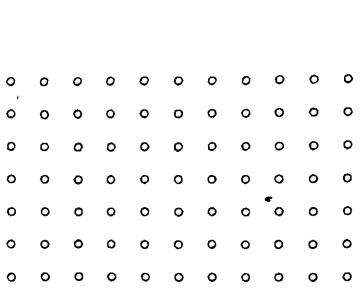
Rysunek 23. Serweta prostokątna



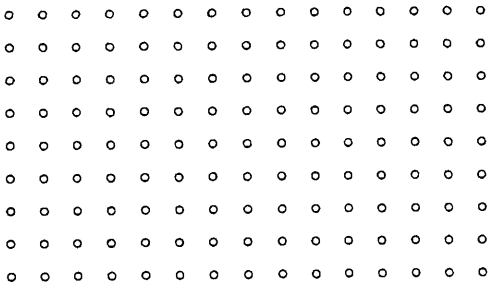
Rysunek 24. Serweta ukośna

• Kamil (10 lat i 3 miesiące) na pierwsze pytanie: *Czy obie te serwety wycięto z materiału o takim wzorze?* odpowiada: *Nie, no bo ten papier jest taki lekki, a te są takie twarde. Tu są koła* (wskazuje na serwety), *a tu okręgi* (wskazuje papierowy materiał). Kamil, odpowiadając na zadane mu pytanie, zwrócił uwagę na pewne cechy inne niż sposób ułożenia elementów: rodzaj materiału, kolor, kształt pojedynczego elementu. Podejmuje jednak próbę rozwiązania następnego zadania. Liczy brzegowe kropki w prostokątnej serwecie, odlicza je na papierowym materiale i wycina prostokątną serwetę o wymiarach 7 na 11 (rys. 25). W drugiej serwecie odlicza 5 brzegowych kropek i tak samo liczy 5 kropek na materiale, ale w ułożeniu prostokątnym. Zauważa, że to będzie za mała serweta i jeszcze raz odlicza do 5, wskazując co druga kropkę: *Tu są trochę większe odstępy, więc liczyłem co drugą, tu liczyłem normalnie* (pokazuje serwetę). *Bo tu jest 5* (liczy co drugą na wyciętej serwecie) *i tu też* (na wzorcowej serwecie). *Tu jest 8* (na wzorcowej) *i tu też* (liczy co drugą kropkę na wyciętej). W efekcie, zamiast serwety ukośnej, powstaje druga prostokątna serweta o wymiarach 9 na 15 (rys. 26). Podczas wycinania serwet Kamil dostrzega nowe cechy charakteryzujące owe serwety: istotna dla niego jest liczba

brzegowych kropek; zwraca uwagę, że odległości między kropkami na jednej serwecie są większe niż na drugiej.



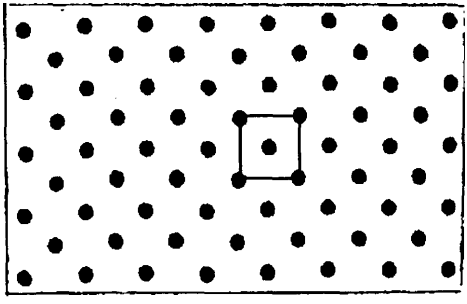
Rysunek 25. Serweta prostokątna



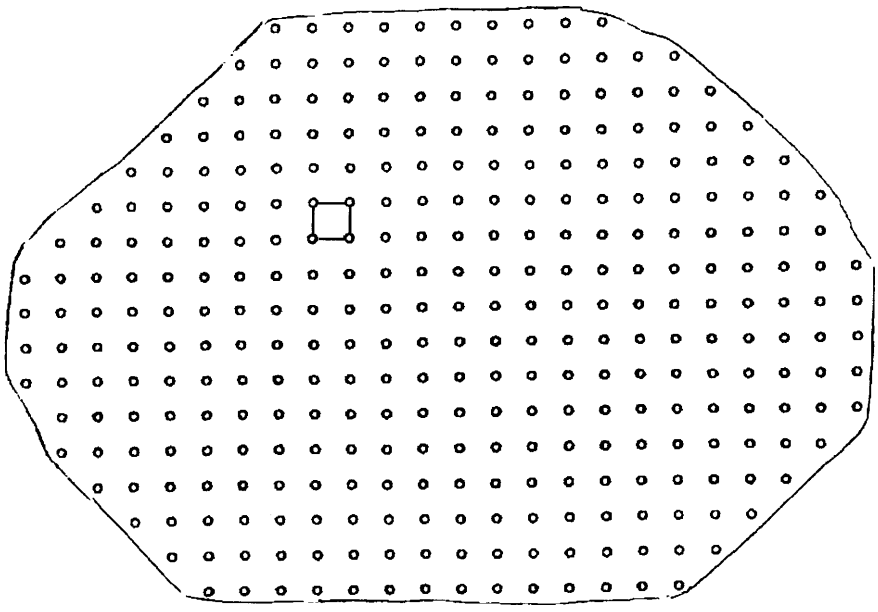
Rysunek 26. Serweta ukośna

• Piotr (13 lat i 9 miesięcy) od samego początku twierdzi, że obie serwety pochodzą z tego samego materiału o wzorze przedstawionym na papierowej planszy. Na pytanie postawione w zadaniu pierwszym odpowiada: *Tak, dwie. Ma taki sam wzór. Takie jakby kwadraty zrobione z kółek* (o serwecie prostokątnej). *Ta druga też* (o serwecie ukośnej), *bo tu też są kwadraty tylko pod innym kątem położone.* (Chłopiec opisuje strukturę serwet, która schematycznie przedstawiona jest na rys. 16.) *Jak przekrzywię materiał, to jest ta serweta.*

W zadaniu drugim widać wyraźnie, że dla Piotra istotna jest liczba kropek. Liczy elementy w prostokątnej serwecie i wycina zgodny ze wzorcem układ 7 na 11 kropek. Potem liczy kółka brzegowe w drugiej serwecie, odlicza 5 na 8 kropek na materiale, ale nie „przekrzywionym", próbuje obracać materiał, ale nie udaje mu się wyciąć serwety ukośnej: *Nie wiem, jak z tego wyciąć.* Po chwili stwierdza: *Ta* (o ukośnej) *chyba nie jest z tego, dlatego że w tym kwadracie jest kółko* (rys. 27), *a na tym materiale nie ma kółka (w środku)* (rys. 28). Mimo, że chłopiec w zadaniu pierwszym widzi konieczność obrócenia materiału, to jednak w praktyce nie potrafi wyciąć drugiej serwety.

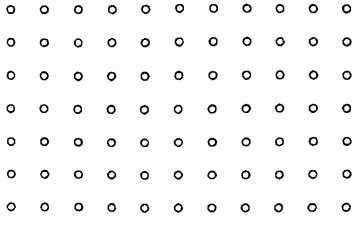


Rysunek 27.



Rysunek 28.

• Krzyś (11 lat i 1 miesiąc) o wzorze na serwecie ukośnej mówi: *Ten jest inny ułożeniem. To nie są kwadraty, tylko romby* (por. rys. 16). Chłopiec bez trudu wycina serwetę prostokątną, zachowując także liczbę kropek (rys. 29).

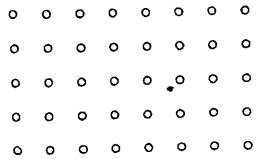


Rysunek 29. Serweta prostokątna

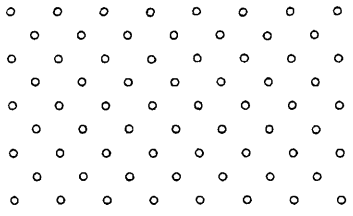
W drugiej serwecie liczy brzegowe kropki 5 na 8, ale podczas wycinania serwety zamiast struktury ukośnej uwzględnia strukturę prostokątną (rys. 30). Przygląda się wyciętej serwecie i mówi: *Wyraźnie nie.* Bierze kolejną kartkę papierowego materiału, obraca ją i teraz udaje mu się wyciąć serwetę 5 na 8 o wzorze ukośnym (rys. 31).

Podobnie jak Krzyś zachowało się jeszcze kilku uczniów. Wycięcie serwety 5 na 8, ale o strukturze prostokątnej powodowało konflikt poznawczy, który

uświadamiał tym uczniom, że zachowanie jedynie liczby elementów brzegowych nie jest wystarczające. Podjęcie kolejnej próby wycięcia serwety pozwoliły im odkryć nową, ukośną strukturę szyku.



Rysunek 30. Serweta ukośna — I próba



Rysunek 31. Serweta ukośna — II próba

6.2 Klasyfikacja rozwiązań zadania pierwszego

Można było oczekiwać, że wśród uczniowskich sądów wyrażonych w zadaniu pierwszym pojawią się zarówno odpowiedzi zaprzeczające typu: *NIE, obu serwet nie wycięto (lub nie można wyciąć obu serwet) z materiału o takim wzorze*, jak i odpowiedzi potwierdzające typu: *TAK, obie serwety wycięto (lub można wyciąć obie serwety) z materiału o takim wzorze.* Do odpowiedzi typu NIE zastały zaliczone sądy, w których uczniowie twierdzili, że:
— nie można wyciąć żadnej z tych serwet,
— można wyciąć serwetę prostokątną, ale nie można wyciąć serwety ukośnej. Nie było ani jednego dziecka, które twierdziło odwrotnie, że można wyciąć serwetę ukośną, ale nie można wyciąć serwety prostokątnej. Odpowiedzi typu TAK zawierały te sądy uczniów, w których uważali oni, że da się wyciąć zarówno serwetę prostokątną, jak i ukośną.

Ze względu na to, że w wyniku analizy zostały zidentyfikowane różne przyczyny i źródła pojawiających się odpowiedzi typu NIE, uczniowskie sądy zostały podzielone na dwie zasadnicze grupy: związane ze strukturą układu i niezwiązane ze strukturą układu.

Grupa A. Sądy uczniów związane ze strukturą układu

• Odpowiedź typu NIE z powodu dostrzegania różnic w strukturach
Zauważenie odmienności struktur charakteryzujących obie serwety często wywoływało u uczniów przekonanie, że serwety te nie mogły być wycięte z jednego materiału. Dzieci dostrzegały i opisywały odmienne struktury w prezentowanych serwetach:
— *Ta druga serwetka (o ukośnej) nie z tego materiału, tu są proste, a tu na skos* (Paweł, 13 lat i 11 miesięcy).

— *Tu poukładane obok siebie* (w prostokątnej pokazuje tworzący się kwadrat). *Tu nie* (o ukośnej), *bo w tamtym nie ma kółeczka. Tu kwadraty z kółeczkiem w środku* (o ukośnej) (Basia, 10 lat i 9 miesięcy).

Wielu uczniów sądziło, że z materiału o przedstawionym wzorze można wyciąć tylko serwetę prostokątną. W takim przekonaniu dodatkowo utwierdzał ich fakt poziomego ułożenia papierowego materiału na stoliku (mimo, że pomoce były wręczane dzieciom do ręki, najczęściej one same kładły przed sobą papierowy materiał właśnie w takim położeniu). Materiał leżał przed dzieckiem poziomo, a więc wizualnie dominującą strukturą, poziomą w stosunku do obserwatora, była właśnie struktura prostokątna. Statyczne oglądanie modeli, bez przesuwania i obracania ich utrudniało, czy nawet blokowało, uczniom dostrzeżenie dwu różnych struktur w tym samym układzie kropek.

• Odpowiedź typu TAK z powodu dostrzegania dwóch różnych struktur w tym samym układzie

Niektórzy uczniowie od razu zauważyli, że obie serwety zostały wycięte z tego samego materiału o zaprezentowanym wzorze. Oto przykład:

— *Tak, wzorek ukośny jest tylko przestawiony, to jest część materiału. Druga też jest z tego materiału, kropki są poziome i pionowe.* (Przemek, 13 lat i 3 miesiące).

Uczniowie ci, mimo odmienności struktur w serwetach, zauważyli oba sposoby ułożenia kropek w prezentowanym szyku.

Grupa B. Sądy uczniów nie związane ze strukturą układu

Analizując wyniki badań, trzeba wyraźnie oddzielić grupę czterech uczniów, którzy zwrócili uwagę na istotny szczegół interpretacji zadania pierwszego, gdyż przyczyny i źródła ich wypowiedzi były inne niż pozostałych uczniów.

• Odpowiedź typu NIE sugerowana cechami odmiennymi niż struktura układu

Uczniowie tej grupy w swoich wypowiedziach nie ujawnili cech związanych ze sposobem ułożenia kropek. Być może uczniowie ci postawione pytanie: *Czy obie te serwety wycięto z materiału o takim wzorze?* zinterpretowali inaczej i odpowiadali na pytanie typu *Czy obie te serwety wycięto z tego materiału?*:

— *Nie widzę związku między materiałowymi serwetkami, a papierowym wzorem* (Kasia, 13 lat).

— *Nie, no bo ten papier jest taki lekki, a te są takie twarde. Tu są koła, a tu okręgi* (Kamil, 10 lat i 3 miesiące).

— *Nie, bo są kropki większe na serwetkach i są czerwone* (Wojtek, 12 lat i 5 miesięcy).

— *Nie. Materiał ma mniejsze kółka* (Maciek, 10 lat i 3 miesiące).

Dla tych czterech uczniów nie była istotna struktura układu, ale inne cechy takie jak: kolor i wielkość kółek, rodzaj i wielkość materiału.
Określenie występujące w pytaniu „z materiału o takim wzorze" nie było zbyt precyzyjne. Obejmowało ono, oprócz ułożenia elementów, także rodzaj tych elementów. Tak więc zaprezentowane sądy uczniów były dla nich argumentem, aby dać zaprzeczającą odpowiedź.

Sądy tych czterech uczniów wyraźnie wskazują, że w pierwszym zadaniu nie zostali oni należycie wprowadzeni w kontekst rozważań na temat struktury układu. Pozostałe dwa zadania będą w tym artykule analizowane głównie ze względu na strukturę ułożenia kropek, dlatego w dalszej części uczniowie grupy B nie będą uwzględnieni.

6.3 Klasyfikacja rozwiązań zadania drugiego

Analizując efekt pracy, w zadaniu drugim warto zwrócić uwagę zarówno na strukturę konfiguracyjną wyciętych serwet, jak i na uchwycenie przez uczniów struktury liczbowej.

I. Uchwycenie struktury konfiguracyjnej

Większość uczniów bez trudu wycięła z papierowego materiału serwetę o strukturze prostokątnej. Wycięcie serwety ukośnej sprawiło im jednak wiele kłopotów. Analizując pod tym kątem prace uczniów, można je podzielić następująco:

• Wycięcie tylko serwety prostokątnej i niepodejmowanie próby wycięcia serwety ukośnej

Kilku uczniów było tak mocno przekonanych o niemożności powstania drugiej serwety z tego samego układu, że nie próbowali oni wycinać serwety ukośnej. Byli to najczęściej uczniowie, którzy w pierwszym zadaniu mówili o różnicach pomiędzy strukturami serwet.

• Wycięcie serwety prostokątnej i próba wycięcia serwety ukośnej

Niektórzy uczniowie, którzy bez trudu wycięli serwetę prostokątną, podjęli także próbę wycięcia drugiej serwety. Często jednak w efekcie tej pracy powstała serweta prostokątna. Nie poradzili sobie oni z wycięciem serwety ukośnej.

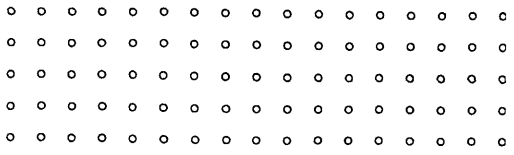
• Wycięcie obu serwet

Niektórzy uczniowie wycięli obie serwety, zarówno o wzorze prostokątnym, jak i ukośnym. Należy jednak wyróżnić w ramach tej grupy prace tych uczniów, którzy wprawdzie wycięli serwetę ukośną, ale skos był inny niż na prezentowanej im serwecie. Kąt pomiędzy rządami ukośnymi a brzegiem serwety nie był u nich równy 45 stopni.

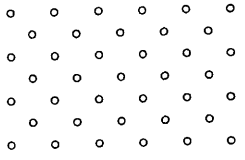
II. Uchwycenie struktury liczbowej

• Niezwracanie uwagi na liczbę elementów

U części uczniów struktura liczbowa nie odegrała roli podczas wycinania serwet. Skupiali oni uwagę na elementach struktury konfiguracyjnej i czasem cały ich wysiłek związany był z uwzględnieniem prostokątnej i ukośnej konfiguracji elementów, a nie z ich liczbą (rys. 32, 33). Przykładem tego typu jest także opisana wyżej praca Eweliny (rys. 23, 24), która zarówno w serwecie prostokątnej, jak i ukośnej nie zwracała uwagę na liczbę elementów.



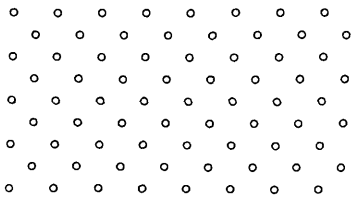
Rysunek 32. Serweta prostokątna, Iwona — 13 lat i 2 miesiące



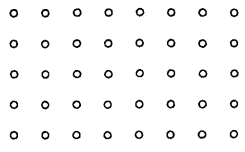
Rysunek 33. Serweta ukośna, Michał — 11 lat

• Uwzględnianie liczby elementów wzdłuż dwóch boków

Zachowanie liczby brzegowych elementów wyznaczonych przez strukturę narożnikową (por. rys. 11, 12) wraz z zachowaniem odpowiedniej struktury konfiguracyjnej najczęściej pozwalało uzyskać uczniom prawidłową liczbę elementów całego układu. Jednak, jak widać w pracy Pauliny (rys. 34), przeliczenie elementów pierwszej kolumny i pierwszego szeregu nie było wystarczające, w pracy dziewczynki zabrakło ostatniej pięcioelementowej kolumny. Byli także uczniowie (por. pracę Krzysia, rys. 30), którzy podczas tworzenia serwety ukośnej przeliczali 5 brzegowych kropek wzdłuż jednego boku i 8 wzdłuż drugiego, a następnie uwzględniali te liczby przy wycinaniu serwety, ale z uwzględnieniem konfiguracji prostokątnej (rys. 35). Taka realizacja także powodowała niezgodność ogólnej liczby elementów.



Rysunek 34. Serweta prostokątna, Paulina — 11 lat

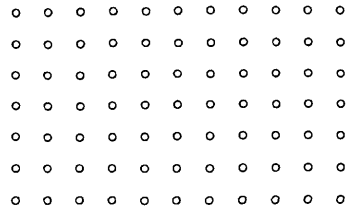


Rysunek 35. Serweta ukośna, Tomek — 13 lat i 11 miesięcy

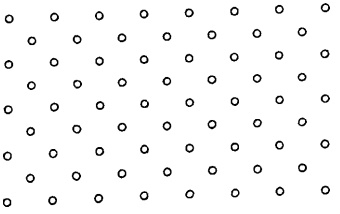
• Uwzględnianie ogólnej liczby elementów

Dla tych uczniów znaczenie struktury liczbowej jest istotnym elementem

i w efekcie końcowym otrzymują serwety z taką samą liczbą elementów, co prezentowane im plansze (rys. 36, 37).



Rysunek 36. Serweta prostokątna, Basia — 10 lat i 9 miesięcy



Rysunek 37. Serweta ukośna, Basia — 10 lat i 9 miesięcy

6.4 Stałość bądź zmienność uczniowskich sądów

Opisane wyżej realizacje zadania pierwszego i drugiego występowały w różnych kombinacjach. Efekt pracy uczniów w zadaniu drugim (wycięte serwety) bądź utwierdzał ich wcześniejsze przekonania, bądź też je zmieniał. Niektórzy uczniowie po doświadczeniach w zadaniu drugim nie zmieniali wyrażonego na początku poglądu, inni zmieniali swój sąd na przeciwny. Wyróżniono cztery typy[6]:

Typ I: Stały sąd: *„nie można wyciąć obu serwet"*

Do tej grupy można zaliczyć uczniów, którzy w zadaniu pierwszym podali odpowiedź NIE z powodu dostrzeganych różnic w strukturach, a w zadaniu drugim nie udało im się wyciąć serwety ukośnej. Po dwóch zadaniach nadal byli przekonani, że obu serwet nie można wyciąć z tego samego materiału.

Typ II: Zmiana sądu: *„można obie wyciąć"* na sąd: *„nie można obu wyciąć"*

Najczęściej uczniowie tej grupy od razu w zadaniu pierwszym widzą, że wystarczy przekręcić wzór, aby powstała serweta ukośna. Jednak w trakcie praktycznych czynności nie udaje im się wyciąć serwety ukośnej. Ten typ realizacji zadania reprezentuje opisana wcześniej praca Piotra (por. rozdz. 6.1). Początkowo Piotr podaje przekonujące uzasadnienie, że obie serwety są z tego samego materiału. Opisuje nawet sposób uzyskania rozwiązania, zauważając, że wystarczy przekręcić materiał. Jednak próba wycięcia serwety ukośnej w zadaniu drugim nie powiodła się. Chłopiec szukał argumentów, które utwierdziłyby go w nowym przekonaniu. Analiza percepcyjna dostarczyła mu nowych argumentów. Dostrzegł różnice w lokalnym ułożeniu kółek na ukośnej serwecie i materiale ułożonym w pozycji horyzontalnej. Piotr zmienił swój początkowy

[6]Ilościowe zestawienie uczniów zaklasyfikowanych do danego typu przedstawiono w tabeli w dalszej części artykułu.

sąd i stwierdził, że serweta ukośna nie powstała z tego samego materiału co serweta prostokątna.

Typ III: Zmiana sądu: *„nie można obu wyciąć"* na sąd: *„można obie wyciąć"*

Typ ten reprezentują uczniowie, którzy zmienili swój początkowy sąd w czasie praktycznej realizacji w zadaniu drugim. W rozmowie uczniowie najpierw stwierdzili, że nie da się wyciąć serwety ukośnej. Zwracali uwagę na różnice struktur uwypuklonych w serwetach. Ich przekonanie, iż dwa odmienne elementy nie mogą tkwić w jednym układzie było głównym powodem takich początkowych sądów. Jednak podczas próby wykonania zadania manipulacyjnego i obracania papierowego materiału uczniom tym udało się tak ułożyć materiał, że dostrzegli w nim także strukturę ukośną. W zadaniu drugim wycięli więc zarówno serwetę o wzorze prostokątnym, jak i ukośnym. Zaliczono tu także te prace, w których nie była zachowana liczba elementów, istotnym kryterium było uchwycenie struktury konfiguracyjnej (prostokątnej i ukośnej).

Typ IV: Stały sąd: *„można wyciąć obie serwety"*

Typ ten charakteryzuje następujące zachowanie uczniów: od początku zauważyli, że obie serwety zostały wycięte z jednego materiału o zaprezentowanym wzorze. W zadaniu pierwszym udzielili odpowiedzi typu: *TAK, obie serwety zostały wycięte z tego samego materiału.* Charakterystyczne dla dostrzeżenia dwu struktur w tym samym szyku było dynamiczne opisywanie relacji pomiędzy strukturami, z użyciem słów świadczących o ruchu, np. Klaudia (11 lat i 8 miesięcy) o wzorze na serwecie ukośnej stwierdziła: *ten też (z tego materiału), bo jak się odwróci materiał to tu też są kwadraty i tak samo ustawione.* W zadaniu drugim uczniowie nadal byli przekonani, że obie serwety można otrzymać z prezentowanego im materiału i wycięli serwetę zarówno o wzorze prostokątnym jak i ukośnym. Do tej grupy, podobnie jak w typie III, zaliczono także tych uczniów, którzy w wyciętych serwetach prostokątnych i ukośnych nie zachowali struktury liczbowej.

6.5 Drogi poszukiwania rozwiązywania problemu

Na podstawie analizy zadań pierwszego i drugiego można wyróżnić charakterystyczne zachowania uczniów, które opisują stopień uświadomienia sobie przez nich faktu, iż dwie różne struktury: prostokątna i ukośna mogą tkwić w tym samym regularnym układzie kółek. Analiza uczniowskich zachowań i wypowiedzi zwraca uwagę na różne ich podejścia do postawionego problemu i różne drogi w poszukiwaniu rozwiązania.

I. Sposoby uzasadniania dostrzeżonych różnic w strukturach

Większość badanych bez trudu dostrzegła, iż serwety charakteryzują się

różnymi strukturami. Jednak w swoich wypowiedziach różnie uzasadnili ten fakt. Można wyróżnić dwa zasadniczo różne podejścia:

• Lokalne różnice

Dzieci zwracały uwagę na lokalne cechy charakteryzujące daną strukturę, pokazując wybrane fragmenty układu. Takie lokalne analizowanie może być przydatne np. w trakcie rysowania tego typu układów w zadaniu trzecim, gdy należy odtwarzać kolejne fragmenty struktury. Wiele wypowiedzi bardzo dobrze opisuje spontaniczną wiedzę dziecka w tym zakresie:

— *Różnią się ułożeniem. To nie są kwadraty tylko romby* (Krzyś, 11 lat i 1 miesiąc).

— *Takie jakby kwadraty zrobione z kółek* (o serwecie prostokątnej). *Ta druga też* (o serwecie ukośnej), *bo tu też są kwadraty, tylko pod innym kątem położone* (Piotr, 13 lat i 9 miesięcy).

— *Tu są kwadraciki, a tu trójkąty* (Łukasz, 13 lat i 11 miesięcy).

• Całościowe różnice

Dzieci postrzegały układ całościowo i porównywały struktury, zwracając uwagę na elementy, z których zbudowany jest cały układ. Zauważały, iż w przedstawianych im układach pojedyncze elementy-kółka tworzą linie nachylone pod pewnym kątem. Oto kilka charakterystycznych wypowiedzi:

— *Jest jedna wycięta, bo kółka są pionowo i poziomo, a druga nie, bo na skos* (Ewelina, 13 lat).

— *To nie jest to samo, bo tu jest proste w rzędach, a tu krzywo* (Grześ, 12 lat i 6 miesięcy).

II. Drogi prowadzące do odkrycia, iż różne struktury mogą tkwić w jednym układzie

Jedynie niecała połowa badanych była w pełni przekonana, iż dwie różne struktury mogą charakteryzować ten sam regularny układ figur. Uczniowie ci potrafili z regularnego układu kropek wyodrębnić podukład zarówno o strukturze prostokątnej, jak i o strukturze ukośnej. Odkrycie tego faktu przebiegało u nich różnymi drogami:

• Transformacja (przekształcenie) jednej struktury w drugą

Uczniowie zauważyli, iż dokonanie pewnych transformacji tworzy identyczne układy pod względem ich struktury.

— *Tylko tą [można wyciąć]* (mówi o serwecie prostokątnej) *bo tu jest równo.* Po chwili. *Ale ta druga też, bo jak przekrzywimy wzór to też* (Norbert, 10 lat).

— *Tą drugą też.* Przykłada serwetę do papierowego materiału i przekręca ją tak, by struktury były zgodne. *Bo jakbyśmy tak nałożyli, to byłyby skośne* (Alek, 11 lat i 8 miesięcy).

Najczęściej dokonywali oni obrotu i przesunięcia całego układu tak, aby poszczególne elementy układów nakładały się na siebie. Niektórzy z badanych przekształcenia te wykonywali w wyobraźni, ale dla większości dopiero możliwość manipulowania w zadaniu drugim pozwala im na odkrycie tego faktu.

• **Konflikt liczbowy**

Czasami istotny w uzyskaniu przez uczniów końcowego sukcesu był konflikt liczbowy, który uczniowie potrafili samodzielnie rozwiązać. Dla tych uczniów początkowo liczba miała dominujące znaczenie, a powstały konflikt ujawnił się podczas manualnego tworzenia serwety ukośnej w zadaniu drugim. Uczniowie koncentrowali się na strukturze narożnikowej (por. pracę Krzysia, rozdz. 6.1), liczyli elementy wzdłuż dwóch sąsiednich boków ukośnej serwety i wycinali serwetę z taką samą liczbą brzegowych kółek, ale ze strukturą prostokątną. Po wzrokowej ocenie byli zaskoczeni, że mimo uwzględnienia liczby otrzymali odmienną serwetę od wzorcowej. Doszło do konfliktu poznawczego, coś tu się nie zgadzało. To prowokowało ich do dalszych poszukiwań. W efekcie udało im się pogodzić strukturę liczbową ze strukturą konfiguracyjną i uzyskać serwetę ukośną z odpowiednią liczbą elementów. Element struktury liczbowej w konfrontacji z informacją wizualną stał się przyczyną konfliktu i doprowadził uczniów do pełnego sukcesu.

7 Srukturyzacja dwuwymiarowych szyków w dziecięcych rysunkach — analiza zadania trzeciego

W zadaniu trzecim uczniom przedstawiono na planszy (rys. 22) niekompletne serwety, jedynie ich fragmenty, które pochodziły z takiego samego papierowego materiału, z którego uczniowie wycinali serwety. Zadaniem uczniów było dorysowanie brakujących kropek. Plansza zawierała cztery serwety o strukturze prostokątnej oraz cztery serwety o strukturze ukośnej.

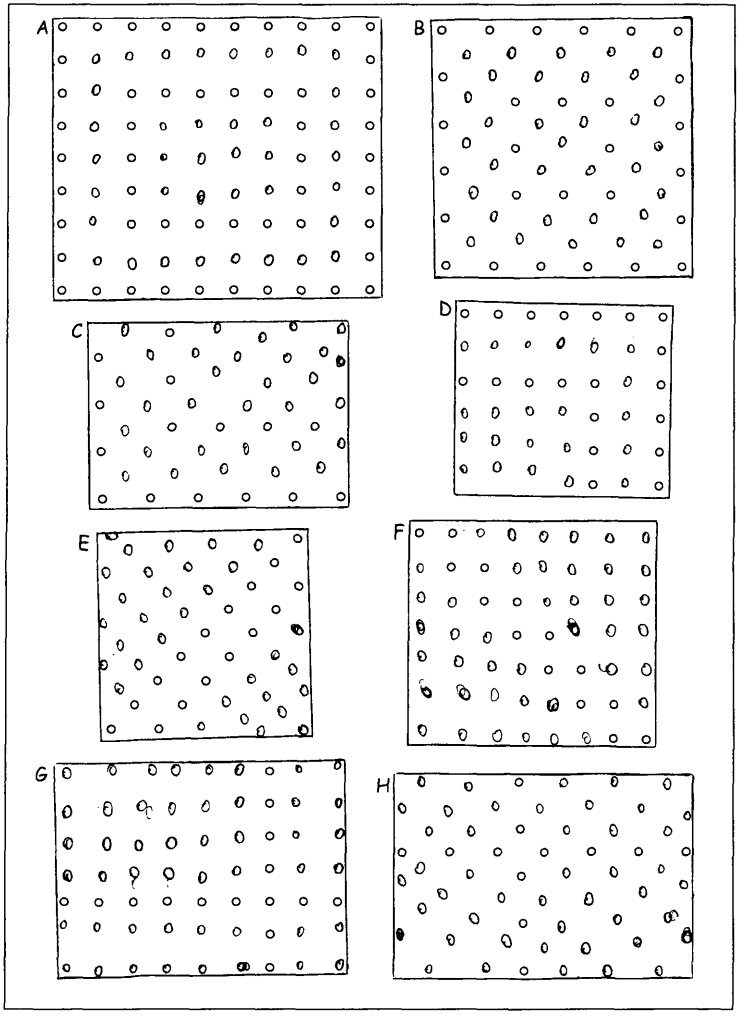
7.1 Odtwarzanie szyku na rysunkach

Analizując rozwiązania zadania trzeciego wyróżniono kilka charakterystycznych typów strukturyzacji szyków przez dzieci. Każdy typ zostanie zilustrowany przykładową pracą ucznia.

• **Zachowanie struktury prostokątnej i ukośnej**

Wszystkie serwety udało się odtworzyć dwóm uczniom, którzy we wcześniejszych zadaniach od początku twierdzili, iż obie serwety pochodzą z tego samego układu. Tomek (rys. 38) stosował różne strategie rysowania i uzyskał poprawne struktury. Dwie pierwsze serwety rysował zgodnie z uwypukloną

„strukturą brzegową". W serwetach: E (ukośnej) i F (prostokątnej) uwypu-

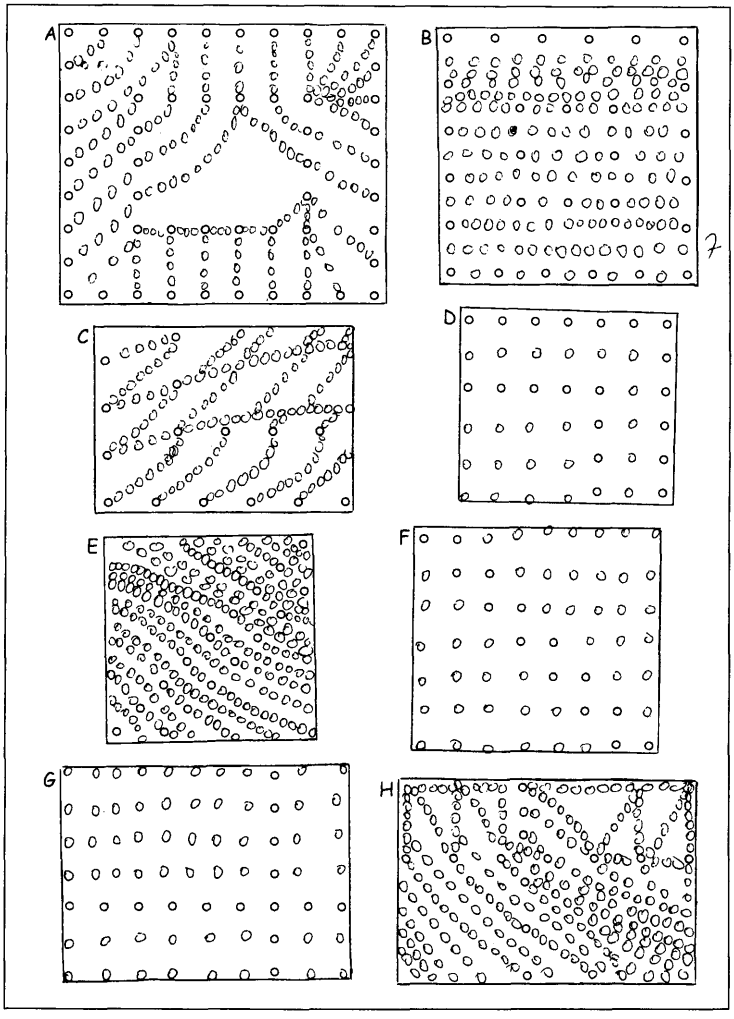


Rysunek 38. Tomek — 13 lat i 11 miesięcy

klono podstrukturę rzędów ukośnych. Tomek w serwecie E stosował strategię rysowania rzędów ukośnych, natomiast w serwecie F rysował rzędy poziome. Warto zwrócić uwagę, że przy obu tych sposobach chłopiec stosował tę samą zasadę: rysował rząd kropek (ukośny w E, poziomy w F), a następnie dorysowywał kolejne rzędy, układając kropki bezpośrednio jedna nad drugą, a nie naprzemian.

• **Tworzenie własnych struktur**

Część dzieci nie potrafiło odtworzyć ani struktury ukośnej, ani prostokątnej. Tworzyły nieregularne struktury. Najczęściej tworzyły linie z kropek tak, aby łączyły one już istniejące kropki. Marcin (rys. 39), co prawda potrafił od-



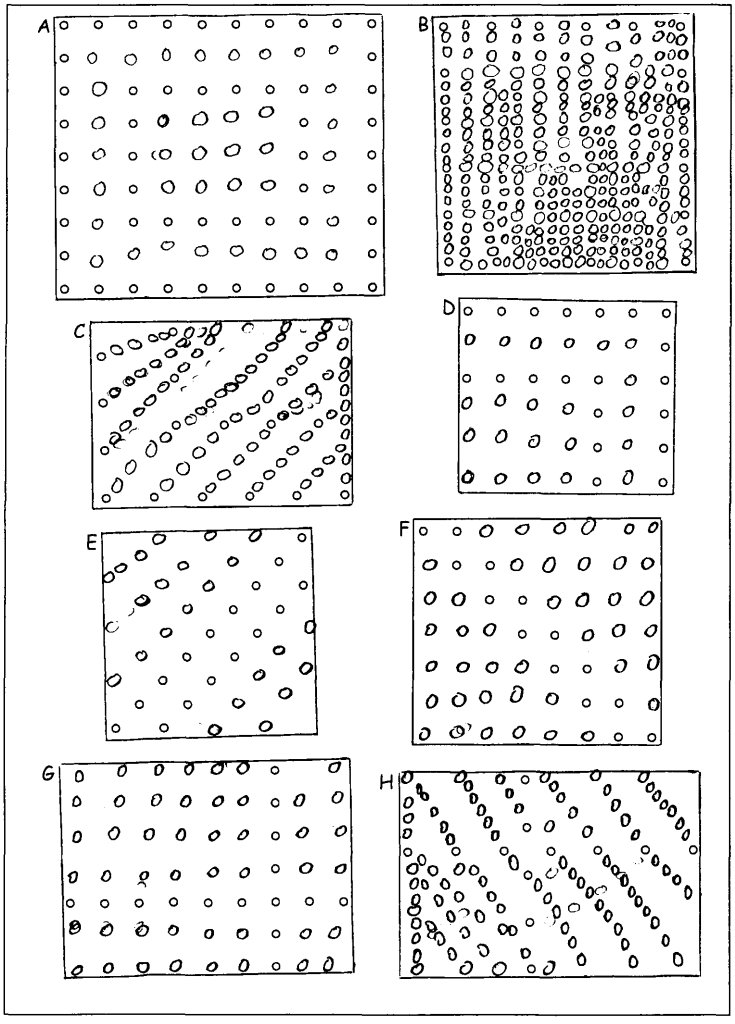
Rysunek 39. Marcin — 11 lat i 2 miesiące

zwierciedlić strukturę prostokątną aż w trzech serwetach, ale w pozostałych jego układy są chaotyczne. Jego struktura ujawniła się w łączeniu „liniami kropek" istniejących już kropek. Często trudności w odtworzeniu układów na rysunku miały te dzieci, którym nie udało się uzyskać serwety ukośnej w zadaniu drugim. Sam fakt zaprezentowania im gotowych modeli serwet dwóch

typów przed zadaniem trzecim okazał się dla nich niewystarczający.

• Brak koordynacji z drugim kierunkiem

Dzieci podczas rysowania równoległych rzędów w jednym kierunku (poziomym, pionowym lub ukośnym) nie zwracały uwagi na koordynacje z drugim kierunkiem. W efekcie nie prowadziło to do odtworzenia regularnego szyku na rysunku, a jedynie odzwierciedlało jeden z elementów struktury: tylko szeregi, albo tylko kolumny, albo tylko skosy. W pracy Rafała (rys. 40) widać,



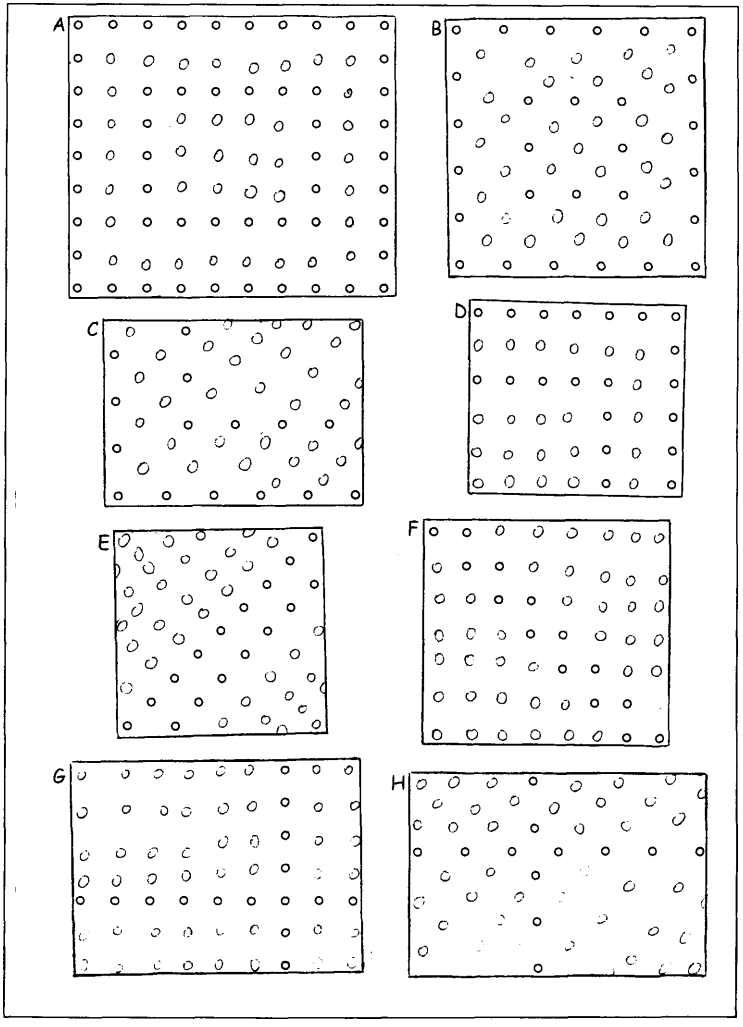
Rysunek 40. Rafał — 13 lat

że chłopiec miał trudności, szczególnie w serwecie C i H, przy koordynacji rzędów ukośnych. Także próba rysowania przez Rafała albo szeregów w pew-

nych miejscach serwety B, albo kolumn w innych miejscach, bez odpowiedniej koordynacji, doprowadziła do braku struktury szeregowo-kolumnowej w otrzymanym szyku.

• Rysowanie rzędów ukośnych

Odtworzenie serwet ukośnych było dla uczniów trudniejsze niż odtworzenie serwet prostokątnych. Iwona wszystkie serwety prostokątne (rys. 41, serwety: A, D, F i G) odtworzyła poprawnie. Rozpoznała także serwety ukośne, jednak



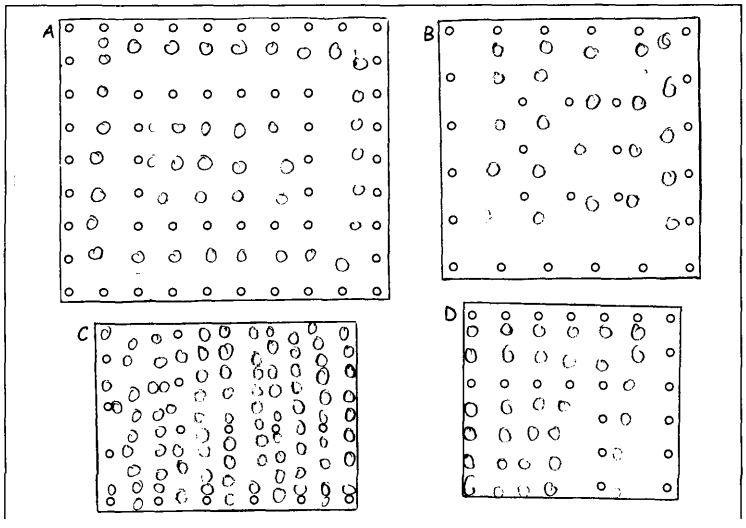
Rysunek 41. Iwona — 13 lat i 2 miesiące

na rysunku nie do końca udało się je odtworzyć. W serwecie B rysowała kółka na przemian raz u góry, raz u dołu i otrzymała prawie poprawną serwetę.

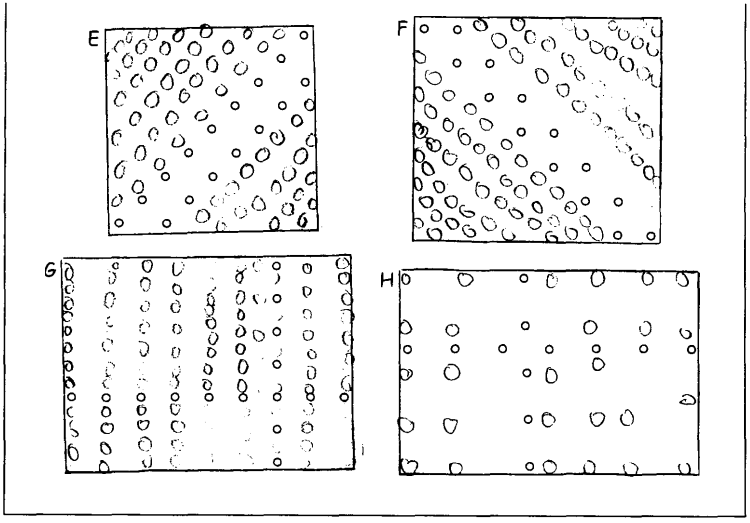
W pozostałych serwetach ukośnych (rys. 41, serwety: C, E, H) zmieniła strategię i rysowała rzędy ukośne. Zabrakło jednak koordynacji z drugim skosem i nie wystarczało to by stworzyć dokładny szeregowo-kolumnowy układ kropek. Często w serwetach ukośnych na rysunku udało się im jedynie uwzględnić element „tu muszą być skosy".

• **Rysowanie według uwypuklonej struktury**

W każdej serwecie uwypuklone zostały różne podstruktury: w dwóch pierwszych „struktura brzegowa", w serwecie C i D — „ struktura narożnikowa", w kolejnych dwóch „struktura ukośna", i w dwóch ostatnich „struktura rzędów przecinających się pod kątem prostym". Wśród badanych uczniów byli tacy, którym narzucone podstruktury sugerowały sposoby uzupełniania brakujących kropek i w niektórych serwetach uczniowie rysowali zgodnie z uwypuklonymi strukturami. Magda (rys. 42) pierwszą serwetę uzupełniała rysując kropki wzdłuż brzegów prostokąta, tak jak były ułożone kropki na serwecie. Wpływ zaznaczonej struktury na sposób tworzenia serwety wyraźnie było widać w serwetach E i F. Były to dwa typy serwet: ukośna i prostokątna, w których uwypuklono rzędy ukośne. Dziewczynka w obu przypadkach rysowała ukośne rzędy kropek, zgodnie z narzuconą strukturą, która uwypukliła się w jej myśleniu.



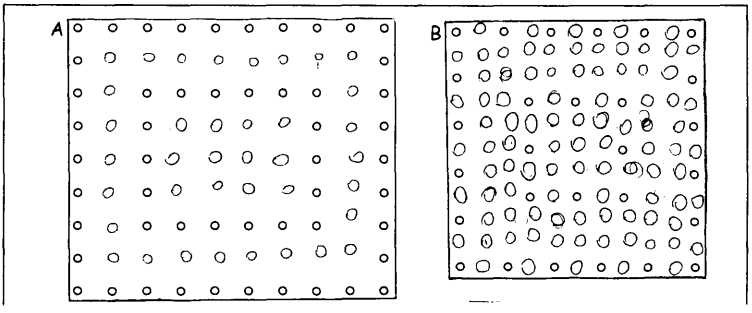
Rysunek 42. Magda — 11 lat i 3 miesiące (ciąg dalszy rysunku na nastpnej stronie)



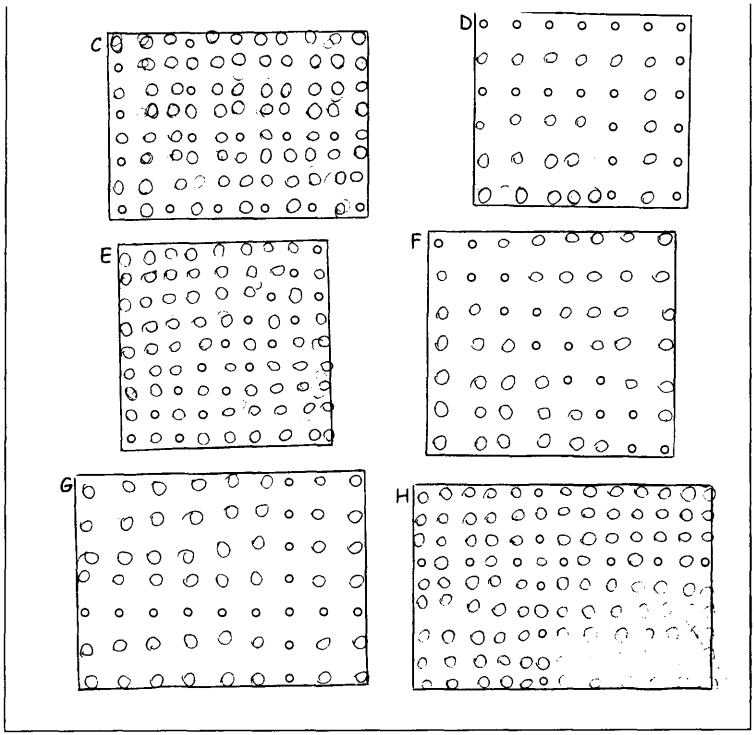
Rysunek 42. Magda — 11 lat i 3 miesiące (ciąg dalszy rysunku z poprzedniej strony)

• Zamiana serwet ukośnych na serwety prostokątne

Niektórzy uczniowie starali się na każdej serwecie tak rysować kropki, by utworzyć strukturę prostokątną. Basia (rys. 43) w serwecie B narysowała kilka poziomych rzędów gęsto ułożonych kropek, tak aby tworzyły one kolumny z zadanymi kropkami. Stwierdziła wówczas, że brakuje jeszcze kropek w pierwszym oryginalnym rzędzie i dorysowła dodatkowe kropki. Podobnie zagęszczała kropki w serwetach C, E, H zamieniając serwety ukośne na prostokątne.



Rysunek 43. Basia — 10;9 (ciąg dalszy rysunku na nastpnej stronie)



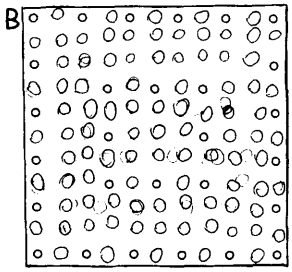
Rysunek 43. Basia — 10;9 (ciąg dalszy rysunku z poprzedniej strony)

7.2 Sposoby zamiany serwet ukośnych na serwety prostokątne

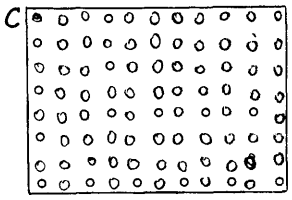
Odtworzenie struktury prostokątnej na rysunku okazało się dla dzieci o wiele łatwiejszym zadaniem, niż przedstawianie struktury ukośnej. Nic więc dziwnego, że niektóre dzieci dążyły do uzyskania, także w przypadku serwet ukośnych, struktury prostokątnej. Analiza dziecięcych wytworów pozwoliła wyróżnić trzy typy zamiany serwet ukośnych na serwety prostokątne:

- **Zagęszczanie kropek do struktury prostokątnej.**

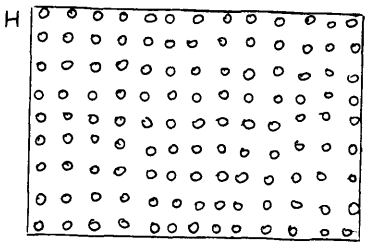
Niektórzy uczniowie starali się tak rysować kropki, by utworzyć strukturę prostokątną (rys. 44-46). Często przez zagęszczanie kropek badani zamieniali serwety ukośne na prostokątne. Dorysowanie dodatkowych kropek w serwetach ukośnych spowodowało powstanie struktury prostokątnej, jednak odległości między kropkami były mniejsze od odległości na papierowym materiale.



Rysunek 44. Basia — 10 lat i 9 miesięcy



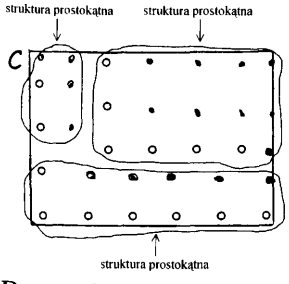
Rysunek 45. Kamila — 12 lat i 4 miesiące



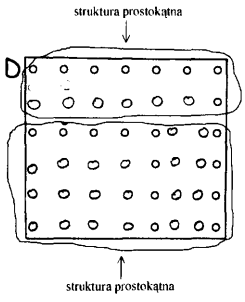
Rysunek 46. Paulina — 11 lat

• **Częściowe tworzenie struktury prostokątnej.**

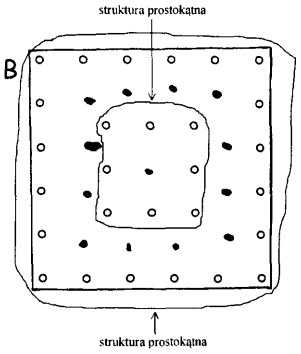
Dzieci często zwracały uwagę na fragmenty serwet, a nie analizowały wzoru całościowo. Do fragmentu serwety dorysowywały kropki tak, by w tej części zachowana była struktura prostokątna (rys. 47-49). Następny fragment serwety traktowały jako oddzielną część i dorysowywały kropki w położeniu „jedna nad drugą". W całości jednak serwety te nie charakteryzowała ani struktura prostokątna, ani ukośna.



Rysunek 47. Joanna — 12 lat



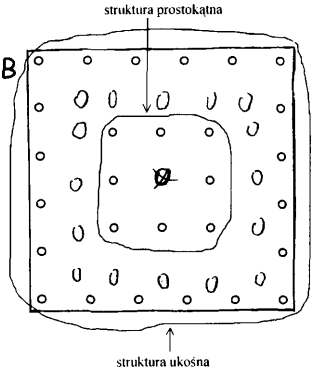
Rysunek 48. Iwona — 13 lat i 2 miesiące



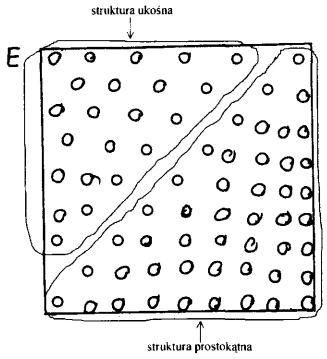
Rysunek 49. Michał — 11 lat

• **Tworzenie serwet o mieszanej strukturze.**

Były także takie prace, w których jeden fragment serwety dziecko uzupełniło zgodnie ze strukturą prostokątną, a w pozostałym fragmencie tworzyło strukturę ukośną (rys. 50–51). Często było to wynikiem uzyskania lokalnie pewnych regularności zgodnych z fragmentami istniejących już kropek. Trudność dziecka polegała na rozszerzeniu tych regularności na całą serwetę.



Rysunek 50. Krzyś — 11 lat i 1 miesiąc



Rysunek 51. Łukasz — 13 lat i 11 miesięcy

8 Zestawienie wyników wszystkich zadań

W tabeli 1 zostały umieszczone pewne informacje dotyczące rozwiązania trzech zadań. Dotyczą one tych uczniów, którzy w zadaniu pierwszym zwracali w swoich wypowiedziach uwagę na strukturę układu. Ze względu na analizowanie prac uczniów pod kątem strukturyzacji szyków pominięto w tabeli uczniów grupy B (opisanej w rozdz. 6.2). Uczniowie zostali uszeregowani w tabeli zgodnie z wyróżnionymi wcześniej czterema typami sądów wyrażanych podczas rozwiązywania zadania pierwszego i drugiego (por. rozdz. 6.4). W zadaniu trzecim uczniowie na podstawie fragmentów mieli odtworzyć na rysunku 4 serwety prostokątne i 4 ukośne. W tabeli podana jest liczba poprawnie odtworzonych serwet prostokątnych i ukośnych. Dodatkowo w ostatniej kolumnie podana jest liczba serwet, w których uczniowie nie dorysowali żadnych kółek, np. *2 brak* oznacza, że dwie spośród serwet ukośnych nie zostały uzupełnione. W kolumnie tej znajduje się także informacja o liczbie serwet prostokątnych utworzonych przez transformację serwety ukośnej do prostokątnej (por. rozdz. 7.2).

Lp.	Imię dziecka	Wiek dziecka (liczba lat; liczba miesięcy)	Zadanie 1: Czy obie serwety wycięto z materiału o takim wzorze?	Zadanie 2: Czy udało się wyciąć obie serwety prostokątną i ukośną?	Zadanie 3: Liczba serwet prostokątnych utworzonych na rysunku	Zadanie 3: Liczba serwet ukośnych utworzonych na rysunku
Typ I: Stały sąd: *„nie można wyciąć obu serwet"*						
1.	Patrycja	10;1	NIE	NIE	1	0 (brak 2 serwet)
2.	Paweł	13;1	NIE	NIE	1	0
3.	Joanna	12;0	NIE	NIE	1	1
4.	Magda	11;3	NIE	NIE	2	0
5.	Grześ	12;6	NIE	NIE	3	0
6.	Rafał	13;0	NIE	NIE	4	0
7.	Łukasz	13;11	NIE	NIE	4	0 (1 zamieniona na prostokątną)
Typ II: Zmiana sądu: *„można obie wyciąć"* na sąd: *„nie można obu wyciąć"*						
8.	Julia	13;6	TAK	NIE	0	0
9.	Alek	11;8	TAK	NIE	1	0 (brak 3 serwet)
10.	Marcin	11;2	TAK	NIE	3	0
11.	Norbert	10;	TAK	NIE	3	0
12.	Kamila	12;4	TAK	NIE	3	0 (2 zamienione na prostokątne)
13.	Piotr	13;9	TAK	NIE	4	1
Typ II: Zmiana sądu: *„nie można obu wyciąć"* na sąd: *„można obie wyciąć"*						
14.	Dawid	11;3	NIE	TAK	1	0 (brak 3 serwet)
15.	Gosia	13;7	NIE	TAK	3	1
16.	Basia	10;9	NIE	TAK	3	0 (4 zamienione na prostokątne)
17.	Mateusz	10;0	NIE	TAK	4	0
18.	Krzyś	11;1	NIE	TAK	4	0
19.	Paulina	11;0	NIE	TAK	4	0 (2 zamienione na prostokątne)
20.	Ewelina	13;8	NIE	TAK	4	1
21.	Robert	10;5	NIE	TAK	4	3
Typ IV: Stały sąd: *„można wyciąć obie serwety"*						
22.	Przemek	13;3	TAK	TAK	3	2
23.	Radek	10;7	TAK	TAK	4	1
24.	Iwona	13;2	TAK	TAK	4	2
25.	Michał	11;0	TAK	TAK	4	2
26.	Klaudia	11;8	TAK	TAK	4	4
27.	Tomek	13;11	TAK	TAK	4	4

Tabela 1.

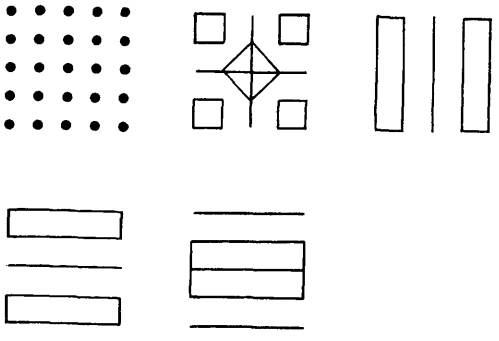
9 Dyskusja podsumowująca

Analiza wyników badań wskazuje na różnorodność naturalnych uczniowskich dróg strukturyzowania szyku podczas empirycznych poszukiwań prowadzących do stopniowego odkrywania i uchwycenia regularności. Uczniowie w konkretnym przypadku, na drodze empirycznej otrzymali okazję do poszukiwań, które niejednokrotnie zakończyły się sukcesem. Dzięki manualnym czynnościom, percepcji układu w różnych sytuacjach, werbalizacji zauważonych faktów stopniowo gromadzili oni doświadczenia, będące podstawą do stopniowego krystalizowania się różnych struktur szyku.

Badane dzieci, znajdując się w nowej dla nich sytuacji, w różnorodny sposób rozpoczynali pracę nad rozwiązaniem problemu, zauważali istotne różnice struktur szyku, a część z nich na drodze ciekawych dróg poszukiwań odkryła fakt istnienia dwóch różnych struktur w tym samym szyku. Czasem drogi poszukiwania rozwiązania problemu zaskakiwały nas swoim bogactwem, ale odkrywanie i opisywanie tych dróg przez badacza pozwala zdobyć niezwykle cenną wiedzę na temat naturalnego procesu konstruowania się tego typu struktur w umyśle dziecka.

Istotnym elementem badań było obserwowanie uczniów podczas wyodrębnienia różnych struktur w tej samej prostokątnej sieci punktów.

Jedną z cech percepcji, wymienianą przez niemieckiego psychologa Strunza (1953, s. 42), jest jej dwuznaczność. Pewna figuracja bodźców dochodzących do mózgu może wywoływać różne postaciowe przeżycia (Gestalterlebnisse). Autor jako przykład pokazuje wzór punktowy (rys. 52), stanowiący zresztą omawiany tutaj szyk prostokątny, który może tworzyć w umyśle różnego typu uporządkowania przedstawione schematycznie na kolejnych rysunkach (w myśl wprowadzonej wyżej terminologii w szyku punktowym możemy wyróżnić różne struktury typu konfiguracyjnego).



Rysunek 52.

Wyniki badań wskazują, że dzieci w opisywanym wieku mają trudności w wyodrębnieniu dwóch struktur w tym samym układzie w celu realizacji konkretnego zadania. Wprawdzie uczniowie bez trudu opisywali dostrzeżone różnice pomiędzy strukturą prostokątną a ukośną. Jednak właśnie te różnice często utwierdzały ich w przekonaniu, że obie struktury nie mogą charakteryzować tego samego szyku i często blokowały ich dalsze poszukiwania rozwiązania problemu. Z drugiej strony widać było wyraźnie, że droga empirycznych poszukiwań, czasem błądzeń, była dla tych uczniów naturalna.

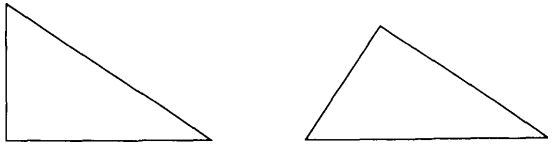
Byli jednak uczniowie, którzy potrafili spojrzeć na odmienne struktury uwypuklone w serwetach dynamicznie. Dokonywali oni obrotu, przesunięcia całego układu tak, aby poszczególne elementy układów nakładały się na siebie i w ten sposób odkrywali rozwiązanie. Inni czasami do rozwiązania dochodzili na drodze empirycznych poszukiwań podczas wycinania serwet: wizualne porównanie błędnie wyciętej serwety z serwetą wzorcową wywoływało u nich konflikt poznawczy, który stawał się impulsem do dalszych poszkiwań.

Na rodzaj dostrzeganych struktur istotny wpływ miało przede wszystkim położenie konkretnego szyku w stosunku do obserwatora. Inne cechy były dominujące dla dzieci w sytuacji, gdy szeregi pozostawały poziome w stosunku do dziecka-obserwatora, a inne, gdy cały układ był obrócony np. o 45 stopni.

Postrzeganie struktur szyku jest niewątpliwie uzależnione od różnego stopnia typowości tego układu, o której pisze Hejný:

> prostokąt w pozycji horyzontalnej jest bardziej typowy niż prostokąt w pozycji wertykalnej, a ten znowu jest bardziej typowy niż prostokąt w pozycji pochyłej (Hejný, 1997, s. 24).

Zykowa (1955, s. 27) także zauważa różnice w rozpoznawaniu figur w zależności od ich ułożenia. Stwierdza, że dziecko spotyka najczęściej na rysunku figury w położeniu standardowym i w związku z tym ma trudności w rozpoznawaniu i dostrzeganiu cech istotnych w sytuacji, gdy figura jest w pozycji niestandardowej. Badania, które opisuje autorka, dotyczyły m. in. trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku w dwóch położeniach: kąt prosty „u dołu" trójkąta oraz kąt prosty „u góry" (rys. 53).



Rysunek 53.

Trójkąt prostokątny był rozpoznawany i poprawnie nazywany o wiele częściej w sytuacji, gdy kąt prosty przylegał do poziomego boku.

Analogiczne zjawisko obserwowali także inni autorzy (Krygowska, 1979; Van Hiele, 2003) w przypadku kwadratu przedstawionego na rysunku w pozycji obróconej o 45 stopni, czyli takiej że jedna przekątna pozostawała pionowa. W takim kwadracie uczniowie czasami rozpoznawali romb. Krygowska źródło takich zachowań upatruje w preferowaniu kierunków pion i poziom:

> „przestrzeń graficzna", w której uczeń przedstawia figury rysunkiem, a więc kartka jego zeszytu, nie jest jednorodna: wyróżnione są tu dwa kierunki wyznaczone brzegiem kartki (Krygowska, 1979, s. 45).

Van Hiele obok przykładu z kwadratem przytacza także wątpliwości uczennicy, która dopytywała się, czy trójkąt równoramienny z jednym z ramion w pozycji poziomej naprawdę nazywa się trójkątem równoramiennym. Wyraźnie docenia on wpływ spostrzegania na rozpoznanie kształtu. Dzieci stopniowo uczą się, że nazwy figur nie zmieniają się, gdy figura znajdzie się w innym położeniu: *„Na początku dzieci nie rozumieją, że w geometrii figury są wyznaczone przez ich własności"* (Van Hiele, 2003, s. 186).

Podobne zachowania dotyczące wpływu pozycji obiektu na postrzeganie różnych cech tego obiektu można było obserwować także w opisywanych w tej pracy badaniach. Wyniki badań wyraźnie sugerują, że struktura prostokątna była dla dzieci bardziej oczywista niż struktura ukośna. Postrzeganą na „pierwszy rzut oka" strukturą była ta, w której rzędy pozostawały poziome w stosunku do obserwatora (lub w stosunku do innych, percepcyjnie ważnych elementów). To właśnie mogło powodować, że dana struktura dominowała, a często nawet blokowała widzenie innych struktur. Co prawda w papierowym materiale niektóre „boki" były równoległe także do rzędów ukośnych, jednak uczniowie najczęściej kładli go na stoliku w pozycji, w jakiej został przedstawiony na rys 17. Wówczas oglądali układ w pozycji, w której poziome w stosunku do obserwatora rzędy wyznaczały strukturę prostokątną. Powodem takiego ułożenia papierowego materiału przez uczniów mógł być jego kształt. Plansza nie miała co prawda kształtu prostokąta, ale była ustawiana przez uczniów tak, że szerokość planszy była dłuższa od jej wysokości. Była to pozycja horyzontalna, a więc *typowa* w terminologii Hejný'ego. Rozpoznawanie kształtu figury w zależności od jej pozycji, o którym mówili Zykowa, Krygowska i van Hiele, można było zauważyć podczas opisywania przez dzieci różnic w serwetach: *tu są kwadraty, a tu romby.* Takie lokalne postrzeganie struktur miało także wpływ na realizację zadań. Prowadzone rozważania rzucają światło na hipotetyczne przyczyny zachowań dzieci: uczniowie bez trudu dostrzegali w papierowym materiale strukturę prostokątną, natomiast mieli trudności z dostrzeganiem struktury ukośnej.

Ważnym wynikiem badań było wyróżnienie dwóch sposobów analizowania struktur przez dzieci: całościowego ujawnionego w wypowiedziach typu „tu kółka są pionowo i poziomo, a tu na skos", „tu jest proste w rzędach, a tu krzywo", oraz lokalnego — „tu są kwadraty, a tu romby", „takie jakby kwadraty zrobione z kółek, tu też są kwadraty, tylko pod innym kątem położone". Możliwe jest, że te dwa sposoby to pewne predyspozycje uczniów, które charakteryzują ich sposób myślenia. Niewątpliwie jednak te typy analizowania struktur są istotne dla matematycznego myślenia.

Dostrzeganie i wyodrębnianie struktur jest ściśle związane ze spostrzeganiem analityczno-syntetycznym, które pozwala wyodrębnione szczegóły ujmować jako elementy całości, co sprawia, że i całość, i części widzi się jednocześnie we wzajemnym powiązaniu. Na znaczenie takiego spostrzegania w geometrii zwraca uwagę Matczak:

> Zdolność analitycznego spostrzegania i syntezy ma ważne znaczenie zarówno dla praktycznej działalności człowieka skierowanej bezpośrednio na przedmioty i otoczenie przyrodnicze, jak i dla tych jego kontaktów z rzeczywistoścla, które dokonują się za pośrednictwem rysunków, schematów, wykresów itp. (...) Na dalszych etapach nauczania spostrzeganie analityczno-syntetyczne staje się szczególnie ważne w zakresie przedmiotów przyrodniczych i geometrii (Matczak, 2003, s. 57-58).

Podczas rysowania szyków dzieci ujawnily trudności związane z koordynacją dwoch kierunków: pionu i poziomu w strukturze prostokątnej oraz skosów w strukturze ukośnej. Oczywistym wnioskiem było stwierdzenie, że rysowanie serwet ukośnych jest dla dzieci trudniejsze niż rysowanie serwet prostokątnych. Jednak interesującą obserwacją był fakt uzupełniania przez niektóre dzieci wszystkich serwet (także ukośnych) w ten sposób, aby powstała struktura prostokątna. Dzieci te rysowały dodatkowe kropki pomiędzy kropkami serwety ukośnej i przez zagęszczenie otrzymywały strukturę prostokątną.

Przedmiotem omawianych badań był jeden szczególny przypadek szeregowo-kolumnowego układu figur, a mianowicie szyk prostokątny oraz para kontrastujących z sobą struktur tego układu, toteż opisane rozumowania uczniów dotyczą tylko tego problemu. Można jednak przypuszczać, że wyniki badań rzucają światło na szerszy problem: strukturyzowania innych regularnych układów, a być może nawet na kształtowanie się w umyśle ucznia struktur różnych obiektów geometrycznych. W wyniku badań można wysunąć hipotezę, że umiejętność dostrzegania dwóch różnych konfiguracji w tym samym obiekcie (nie koniecznie w szyku) jest trudnym zadaniem dla uczniów w opisywanym wieku. Bez wątpienia empiryczne doświadczenia są niezbędnym elementem w długotrwałym procesie kształtowania się różnorodnych struktur geometrycznych. Tylko droga własnego eksperymentowania może wpłynąć na pogodzenie

w umyśle początkowo sprzecznych idei. Umiejętność dualnego spojrzenia na tą samą sytuację zadaniową, zdolność do różnorodnych strukturyzacji tego samego obiektu, umiejętność dostrzegania dwu odmiennych elementów w tym samym obiekcie — to niezbędne elementy nie tylko w uczeniu się geometrii, ale w całej matematyce.

Można podać wiele przykładów z geometrii szkolnej, w których znalezienie rozwiązania wymaga różnorodnych strukturyzacji danego obiektu, strukturyzacji w sensie, o którym była mowa w artykule.

Należy wyraźnie podkreślić, że przejawy zachowań uczniów związane z wyróżnionymi tutaj strukturami nie świadczą o pełnej ich świadomości u badanych osób. To jest interpretacja badacza, opisane i nazwane struktury to stuktury, które widzi badacz w wytworach dzieci. Z obserwowanych faktów nie wynika, że uczniowie mają świadomość zachodzących procesów.

Wszelkie drogi strukturyzacji geometrycznych układów u uczniów w tym wieku biegną nie poprzez teoretyczne wnioskowanie, lecz wywodzą się z doświadczeń empirycznych, zarówno manualnych, jak i percepcyjnych oraz werbalnych. Różnorodne wzbogacanie doświadczeń w konkretnych sytuacjach, analizowanie ich pod różnymi kątami przez dzieci, werbalizowanie spostrzeżeń — to właściwa droga do konstruowania struktur geometrycznych w umyśle dziecka.

Literatura

B a t t i s t a, M. T., C l e m e n t s, D. H.: 1996, Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes, *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(3)**, 258–292.

B a t t i s t a, M. T., C l e m e n t s, D. H., A r n o f f, J., B a t t i s t a, K., B o r r o w, C. V. A.: 1998, Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares, *Journal for Research in Mathematics Education*, **29(5)**, 503–532.

D ą b r o w s k i, M.: 1992, O akceptowalności dowodów przez uczniów na przykładzie dowodów pewnych własności liczb naturalnych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **14**, 5–70.

F r e u d e n t h a l, H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster.

F r e u d e n t h a l, H.: 1987, Co znaczą struktury naukowe i struktura nauki w rozwoju poznawczym i w nauczaniu, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **7**, 24–42.

F r e u d e n t h a l, H.: 1991, *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

H e j n ý, M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towa-*

rzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki **19**, 15–28.

Löwenfeld, V., Brittain, W. L.: 1977, *Twórczość a rozwój umysłowy dziecka*, PWN, Warszawa.

Outhred, L.: 1992, *The array: convention or confusion*, referat wygłoszony na ICME-7, Quebec.

Outhred, L. Mitchelmore, M.: 2000, Young children's intuitive understanding of area measurement, *Journal for Research in Mathematics Education*, **31(2)**, 144–167.

Outhred, L. Mitchelmore, M.: 2002, Across the great divide: From counting to subdivision of rectangular area, w: R. Nata (Ed.) Progress in Education, Vol 5. New York: Nova Science Press.

Krygowska, Z.: 1979, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25–41.

Kupisiewicz, Cz.: 1974, *Podstawy dydaktyki ogólnej*, PWN, Warszawa.

Malikowski, M.: 1984, *Metody i techniki badań społecznych*, Wydawnictwo WSP w Rzeszowie.

Matczak, A.: 1994, *Diagnoza intelektu*, Instytut Psychologii PAN, Warszawa.

Matczak, A.: 2003, *Zarys psychologii rozwoju*, Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa.

Nowak, W.: 1982, Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 61–126.

Palka, S.: 1999, *Pedagogika w stanie tworzenia*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagielońskiego, Kraków.

Piaget, J.: 1972, *Strukturalizm*, Wiedza Powszechna, Warszawa.

Piaget, J., Inhelder, B.: 1993, *Psychologia dziecka*, Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław.

Rasiowa, H.: 1984, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

Rożek, B.: 1994, Rozwój świadomości struktury rzędów poziomych i pionowych w szyku szeregowo-kolumnowym u dzieci w wieku od 6 do 9 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **16**, 39–72.

R o ż e k, B.: 1995, O trudnościach związanych z rozumieniem pojęcia pola przez dzieci w wieku od 6 do 9 lat, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Prace Pedagogiczne XVII* **172**, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 83–92.

R o ż e k, B.: 1997, Struktury szeregowo-kolumnowe u dzieci w wieku od 6 do 8 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **19**, 29–46.

R o ż e k, B.: 1998, *Schemat myślowy szeregowo-kolumnowego układu figur u dzieci w wieku od 6 do 9 lat*, niepublikowana rozprawa doktorska, WSP Kraków.

R o ż e k, B.: 1999, Schemat myślowy szeregowo-kolumnowego układu figur u dzieci w wieku od 6 do 9 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **21**, 129–134.

R o ż e k, B.: 2002, Denkschema eines Reihen-Kolonnenfigurensystems bei Kindern im Alter von 6 bis 9 Jahren, *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der Didaktik der Mathematik in Klagenfurt*, Verlag Franzbecker, 427–430

R o ż e k, B., U r b a ń s k a, E.: 1998, Children's Understanding of the Row-Column Arrangement of Figures, *Proceedings of CIEAEM 50*, Neuchâtel, 303–307.

R u b i n s t e i n, S. L.: 1962, *Podstawy psychologii ogólnej*, Książka i Wiedza, Warszawa

S e m a d e n i, Z.: 2002, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41–92.

S e m a d e n i, Z.: 2004a, Aspekty znaczeniowe i aspekty strukturalne pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 151–168.

S e m a d e n i, Z.: 2004b, Stany i działania na stanach jako aspekty znaczeniowe pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 169–192.

S e m a d e n i, Z.: 2004c, Kategorie myśli w historii nauki i w dydaktyce matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 193–212.

S t r u n z, K.: 1953, *Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens*, Quelle&Meyer, Heidelberg.

T u r l e j s k a, B.: 1988, Monografia pedagogiczna i stadium przypadku, w: Palka S. (red.), *Orientacje w metodologii badań pedagogicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagielońskiego, Kraków, s. 43–54.

T u r n a u, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

V a n H i e l e, P. M.: 1986, *Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education*, Academic Press Inc. London.
V a n H i e l e, P. M.: 2003, Podobieństwa i różnice między teorią uczenia się i nauczania Skempa a poziomami myślenia van Hielego, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 183–202.
W a l l o n, P., C a m b i e r, A., E n g e l h a r t, D.: 1993, *Rysunek dziecka*, WSiP, Warszawa.
Z a c z y ń s k i, W.: 1997, *Praca badawcza nauczyciela*, WSiP, Warszawa.
Z a r ę b a, E.: 1988, Badania empiryczne ilościowe i jakościowe w pedagogice, w: Palka S. (red.), *Orientacje w metodologii badań pedagogicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagielońskiego, Kraków, s. 43–54.
З ы к о в а, В. И.: 1955, *Очерки психологии усвоения начальных геометриисских знаний*, М., Учпедгиз.

Structuring of two-dimensional rectangular arrays by 10-to-13-year-olds

S u m m a r y

The paper deals with n by m arrays (*arrays*, in short). *Array structures* are structures identified theoretically in the arrays and used as a tool to study children's activities. The following five types of array structures have been distinguished during the study and labelled as 'configurational' (the visual pattern), 'numerical', 'symmetry-based', 'Cartesian', and 'surface' structures.

A *configurational* structure is the way the location of the items is perceived; the following are the most important: (C1) the rectangular $n \times m$ row-by-column configuration, called the *standard configuration*, and (C2) the $n \times m$ *normal slanted configuration* (in which the lines of items which are distinguished as main lines of the array are in fact parallel to the respective diagonals of a standard array, that is, the main directions have been rotated by 45°).

A *numerical structure* gives a representation of certain geometric regularities expressed as numerical relationships. Examples of numerical structures concerning the standard configuration are the following relations: (N1) each column has the same number of items, (N2) the number of rows is equal to the number of items in a column, (N3) the total number of items is equal to $n \cdot m$.

An example of a *Cartesian structure* of an $n \times m$ array is the structure of pairs (i, j) that determine the positions of items in the array.

Surface structures concern the area covered by items (particularly conspicuous in the case of squares representing the tiles, which are to fill a rectangle).

The main goal of the empirical part of the study was a diagnosis of difficulties that children encounter with arrays and a preliminary description of regularities in the spontaneous process of forming various array structures in children's minds.

Students worked individually in the presence of the resercher. Each of them was asked to solve three problems of types not covered by school instruction and new to the child, so that the responses were not influenced by prior learning. The child received: 1) a piece of paper, with a rectangular pattern of small circles (the shape of the piece was irregular so that no particular drrection was suggested), referred to as 'paper material', and 2) two napkins (cut out of real fabric and pasted on cardbord), one with (C1)-structure of small circles and the other cut out according to a (C2)-structure. The task was to cut two paper 'napkins' out of the same 'paper material' so that they look as the given real napkins (to succeed, the child had to discover both structures in the paper material and to make the second cut along the skew lines). The pattern on 'paper material' was reduced in size so that the child could not find a solution by simply putting the napkins to the paper material.

In the next task the child received a piece of paper which was described as representing a piece of polka-dotted fabric with several dots missing. The child was to draw the lacking dots so that the pattern should look as previously in 'paper material'.

The behaviour of children revealed a variety of types of responses, which were interpreted and described in terms of suitable array structures (this does not mean that children were aware of such structures). Children easily noted differences between (C1) and (C2) and were able to articulate them, but many of them inferred that such napkins could not be cut out of the same material, and this conviction blocked further attempts. Coordination of four directions (horizontal, vertical, and two diagonal directions) was difficult for them and so was recognizing both structures (C1) and (C2) in the same array. The perception of the type depended on the position of the napkin with respect to the child and changed after rotating it by 45°. Several students were able to perceive the pattern globally and dynamically. They rotated the napkins and shifted them as to make the patterns look the same. However, for many children a natural way of searching for solution was to try a cut and compare it visually with the given napkin. Interestingly, some children added extra dots in between the given dots of a (C2)-pattern and obtained a (C1)-pattern this way.