dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zbigniew Semadeni
Uniwersytet Warszawski

Idee głębokie struktur matematycznych określonych aksjomatycznie

1. Wstęp. W pracy tej[1] zajmujemy się nadal koncepcją *idei głębokich*, przedstawioną w (Semadeni, 2002a). Pewne jej aspekty omówimy w 2.1–2.13 poniżej, rozwijając kilka wątków z owej pracy, a następnie zajmiemy się dwoma zagadnieniami, oznaczonymi (I) i (II).

(I) *Doprecyzowanie pojęcia modelu formalnego idei głębokiej tworu matematycznego.*

Dotąd wystarczało nam ogólnikowe stwierdzenie, że modelem formalnym idei głębokiej tworu X nazywamy odpowiednik tego tworu w jakiejś adekwatnej teorii aksjomatycznej, eksplikowane z pomocą odpowiednio dobranych przykładów. Doprecyzowanie jest niezbędne z uwagi na drugie zagadnienie.

(II) *Przeanalizowanie koncepcji idei głębokich tych tworów, które same określane są w sposób aksjomatyczny*, w tym idei głębokich *podstawowych struktur matematyki*, których typowym przykładem jest grupa.

Chodzi tu o idee głębokie tych pojęć, które Gårding (1993, s. 14–16) określił mianem *modeli drugiej generacji*, a więc również tworów takich jak „pierścień", „przestrzeń liniowa", „struktura porządku częściowego", „struktura porządku całkowitego", „algebra Boole'a", „przestrzeń topologiczna", „przestrzeń probabilistyczna" (a także wiele innych, por. 2.5). Ponieważ wymienione tu pojęcia z reguły są definiowane aksjomatycznie, nasuwają się naturalne pytania dotyczące wzajemnego stosunku idei głębokiej takiej jak „grupa" do jej modelu formalnego, skoro model ten jest też wyrażony aksjomatycznie. Wyjaśnienie różnych aspektów tego zagadnienia — to główny cel tej pracy.

[1] Praca naukowa wykonana w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003–2006.

2. Idee głębokie indywidualne i epistemologiczne. Przypomnimy krótko i zarazem nieco rozwiniemy tu koncepcję *idei głębokiej* tworu matematycznego[2].

Termin *twór matematyczny* ma charakter pomocniczy, jest niezdefiniowany. Obejmuje rozmaitego typu obiekty będące przedmiotem rozważań matematyków. Takim tworem X może być: *pojęcie* (zarówno ogólne, np. „liczba naturalna" lub „zbiór", jak i szczegółowe, np. „liczba 7" lub „przestrzeń Hilberta $L^2[0,1]$", „rozkład normalny"), może to być też pewne *zdanie*, *forma zdaniowa*, *relacja*, *struktura*, pojedyncze *twierdzenie* (np. fakt $3+4=7$, wzór $(\sin x)' = \cos x$ lub zasadnicze twierdzenie algebry), może to być idea pojedynczego, dobrze znanego *dowodu*, a także ogólne pojęcie twierdzenia i dowodu w matematyce; może to też być pojedynczy *algorytm*, lub jakiś standardowy, często powtarzany element rozumowania, lub też związek typu „pojęcie A jest uogólnieniem pojęcia B" lub „sytuacja A jest uogólnieniem sytuacji B" (Lubomirski, 1983; Mason, 1996).

Trzeba pamiętać, że samo pojęcie „idea głęboka" (a także jego szczególne przypadki typu „idea głęboka pojęcia pierwiastka") jest niedefiniowalne (tzn. nieredukowalne do czegoś bardziej fundamentalnego). Wszelkie wyjaśnienia (w 2.1, w 2.10 i w innych miejscach) — to jedynie przybliżanie tej koncepcji.

2.1. Idea głęboka tworu X (lub krócej: idea głęboka X) jest to *należycie ukształtowana abstrakcyjna idea* zawierająca szeroko rozumiane *znaczenie* tego tworu, jego *podstawowe własności*, jego *związki* z innymi tworami (zarówno matematycznymi jak i niematematycznymi, w rzeczywistym świecie, w fizyce itd.) oraz główne *cele*, dla których dany twór jest rozpatrywany. Idea głęboka nie jest jednak jakąś sumą takich składników. Musi być ich *dojrzałą syntezą umysłową, elastyczną, odporną na konflikty poznawcze.*

[2] Koncepcja ta zainspirowana została przez rozróżnienie między *strukturą głęboką* a *strukturą powierzchniową* zdań w psycholingwistyce (Lyons, 1976; Kurcz, 1992; Gleason i Ratner, 2005). Odbiorca jakiegoś zdania (usłyszanego lub przeczytanego, np. w języku polskim) musi „odkodować" jego strukturę powierzchniową, aby odkryć znaczenie leżące u podstaw wypowiedzi — czyli strukturę głęboką tego zdania. Podobnie osoba czytająca tekst matematyczny lub słuchająca jakiegoś wywodu, musi „odkodować" ujrzaną lub usłyszaną reprezentację powierzchniową, aby ją zrozumieć. Jest to wykonalne pod warunkiem należytego ukształtowania się odpowiednich pojęć w umyśle danej osoby. Oczywiste jest jednakże (ze względu na specyfikę pojęć i zdań matematycznych), że różnice między prowadzonymi tu rozważaniami a psycholingwistyką są tak istotne, że można mówić jedynie o inspiracji. Ponadto struktura głęboka dotyczy pojedynczego zdania (np. języka polskiego), a idee głębokie dotyczą tworów matematycznych rozmaitych typów, nie tylko zdań. Dodajmy uwagę terminologiczną: ponieważ słowo „struktura" ma inne, ustalone znaczenia w matematyce, mówimy o „ideach głębokich". Ma to m. in. tę zaletę, że pozwala mówić np. o *idei głębokiej struktury grupy.*

Na przykład, X może oznaczać pojęcie: *wielomian*. Można mówić o idei głębokiej wielomianu (lub o idei głębokiej „wielomian" lub jakoś podobnie, zależnie od stylistycznej konstrukcji zdania). W „wersji podstawowej" pojęcia wielomianu, na poziomie szkolnym, w zakresie liczb rzeczywistych, idea ta jest syntezą myślową ogólnej postaci wielomianu

$$a_n x^n + \ldots + a_0, \tag{1}$$

jej szczególnych przypadków, a także interpretacji wielomianu jako funkcji na $\mathbb{R}$. W tej idei głębokiej zawierają się też inne, takie jak „wykres wielomianu", „pierwiastki wielomianu", „twierdzenie Bézout" oraz ich wzajemne związki, np. „trójmian kwadratowy to szczególny przypadek wielomianu" (związek ten jest też ideą głęboką, wiążącą trzy dalsze: „wielomian", „trójmian", „szczególny przypadek").

Tak więc omawiana idea głęboka „wielomian" to *skomplikowana sieć pojęć i ich wzajemnych związków, które stają się oczywiste i naturalne, jeśli ta idea jest należycie ukształtowana*. W wersji zaawansowanej idea głęboka „wielomian" obejmuje wersję podstawową oraz wiele innych idei głębokich: „wielomian zmiennej zespolonej" (wraz z zasadniczym twierdzeniem algebry), „wielomian wielu zmiennych", „wielomian w pierścieniu (odróżniany od funkcji wielomianowej w pierścieniu)" itp.

Powyższych słów: „oczywiste", „naturalne" nie należy interpretować w ten sposób, że jakoby wszystkie dowody stały się łatwe (jakkolwiek dla eksperta są one niewątpliwie łatwiejsze niż dla początkującego). Znaczy to jedynie, że pojęcia i twierdzenia są tak znajome, bliskie, że wydają się oczywiste, konieczne.

2.2. Każda idea głęboka X ma podwójny status[3]: *psychologiczny* (jako twór myślowy, byt psychiczny) i *epistemologiczny* (jako twór matematyczny, byt epistemiczny). Rozróżniamy mianowicie dwie (ściśle ze sobą związane) koncepcje: *indywidualne idee głębokie* X w umysłach poszczególnych ludzi oraz *jedną ideę głęboką epistemiczną* X w matematyce jako nauce.

Jednakże przy niejednym stwierdzeniu dotyczącym procesu kształtowania się idei głębokich nie trzeba doprecyzowywać, o który status tej idei chodzi, bowiem — z uwagi na zasadę paralelizmu (Duda, 1982) — dane stwierdzenie może dotyczyć zarówno kształtowania się idei głębokiej epistemicznej w filogenezie jak i kształtowania się indywidualnej idei głębokiej w ontogenezie. Oczywiście jest też mnóstwo sytuacji, w których żadnego takiego prostego związku nie ma.

[3] Takie podwójne umiejscowienie pojęcia nie jest czymś wyjątkowym. W zasadzie każde pojęcie matematyczne (np. „zbiór", „liczba $\sqrt{2}$" czy „okrąg") może być z jednej strony uważane za pewien byt epistemiczny, którym zajmują się matematycy i logicy, a z drugiej strony jest także bytem psychicznym (w świadomości konkretnej osoby), którym zajmują się psychologowie (por. Beth i Piaget, 1966).

Przykładem indywidualnej idei głębokiej jest piagetowska *konserwacja liczby kardynalnej* u dziecka, pod warunkiem, że jego przekonanie o stałości liczby przemieszczanych elementów jest *stabilne, niezależne od kontekstu, rozciągnięte na dowolnie wielką liczbę elementów i odporne na konflikty poznawcze.*

W powyższym sformułowaniu jest mowa o przemieszczaniu przedmiotów, o ruchu, a więc o tym, co konwencjonalnie bywa zaliczane do fizyki. W koncepcji idei głębokich zjawiska związane z ruchem, z upływem czasu traktujemy jako nie mniej ważne niż to, co dotyczy nieruchomej przestrzeni.

Jak to podkreślał Skemp (1982), indywidualne idee głębokie są tworami czysto umysłowymi, niewidzialnymi; mogą być przekazywane innym osobom jedynie poprzez ich *reprezentacje powierzchniowe* (słowa, symbole, rysunki, gesty). Badanie indywidualnych idei — to zadanie psychologów i dydaktyków, natomiast idee głębokie epistemiczne, jako wspólne mniej lub bardziej licznym grupom osób, są przedmiotem analiz teoretycznych matematyków i historyków matematyki. Idee głębokie epistemiczne tworzą niezmiernie złożoną sieć; jej struktura i semantyczne zależności są trudne do analizy.

2.3. Zaczniemy od tego, że jedną z najważniejszych kwestii jest opisanie, choćby w zarysie, procesu t w o r z e n i a się idei głębokich w u m y s ł a c h ludzi. Jest to oczywiście kwestia interdyscyplinarna, w której główną rolę pełnią badania psychologów (na pierwszym miejscu należy wymienić tu Piageta) i dydaktyków matematyki.

Ogólnie biorąc, kluczowa w procesie kształtowania się idei głębokich jest *świadoma aktywność rozmaitego typu*, w szczególności stosowanie matematyki poprzez *matematyzowanie* różnorodnych sytuacji, najpierw konkretnych, później również na wyższych poziomach abstrakcji. Dzięki temu twory matematyczne nabierają bogatych, wielokontekstowych znaczeń, odczuwanych jako ich naturalne cechy. Jednym z wczesnym etapów tego kształtowania się jest *schemat* w sensie, w jakim użył tego terminu Hejný (1997, s. 16). Dobrym przykładem są też *aspekty znaczeniowe* i *aspekty strukturalne* (Semadeni, 2004a). Bardzo istotnym składnikiem opisu formowania się idei głębokich jest zjawisko *spłaszczania się hierarchii pojęć* (Semadeni, 2003).

Idea głęboka zawiera też syntezę *wiedzy proceduralnej* („wiem, jak") i *wiedzy deklaratywnej* („wiem, że"), a także pewne formy *wiem, dlaczego*, jakkolwiek nie należy tego identyfikować ze znajomością dowodu lub miejsca danego związku jakiejś teorii dedukcyjnej. Zawiera też pewną syntezę *rozumienia instrumentalnego* i *rozumienia relacyjnego* (Skemp, 1976; van Hiele, 2003, s. 183 i 197), a także przetwarzania posiadanych informacji.

Użytego w 2.1 i w powyższym zdaniu słowa „synteza" nie należy interpretować zbyt wąsko. Dla wielu osób nie jest łatwe rozróżnienie, z czego korzystają w danym momencie, gdy myślą o X: czy z pamięci (dana osoba wie coś o X)

czy z rozumowania. Bardzo bowiem szybko, niemal natychmiastowo informacje bywają przekształcane. Wiąże się to z tym, że w procesie kształtowania się pojęć istotną rolę odgrywa *kondensacja* procedur, rozmaitych czynności wykonywanych coraz sprawniej, coraz szybciej, później niemal momentalnie; do zjawiska kondensacji odwoływała się m. in. Sfard (1991).

Użycie tu słowa „synteza" implikuje również to, że owe różne części składowe idei głębokiej sklejają się w jeden obiekt, którym operuje się jako całością. Dzięki wysiłkom pokoleń matematyków, filozofów, psychologów etc. można te poszczególne składniki wyodrębnić, poddać analizie, a także budować systemy dedukcyjne z pewnych wydzielonych części. Osoba o należytym wykształceniu matematycznym *potrafi rozumować na tych wydzielonych częściach, nie biorąc pod uwagę odrzuconej myślowo reszty*, tak jak nie uwzględnia się tych własności przedmiotów, które zostały pominięte w procesie abstrahowania. Wyszkolony matematyk potrafi rozumować tak, jak gdyby cała ta odrzucona reszta nie istniała. W praktyce jednak idea głęboka jest pewną całością, z której za chwilę, gdy zajdzie potrzeba, wybierze się inną część. Tego właśnie nie potrafi wielu uczniów i studentów: przejść od jednej wyuczonej interpretacji do innej, która może wydawać się oczywista, a mimo to uczeń nie jest jej świadom (choć nawet mógł być tego uczony).

Proces tworzenia się idei głębokiej pojęcia X (w filogenezie i w ontogenezie) istotnie zależy od miejsca X w hierarchii pojęć, takich jak poziomy Piageta (1981), etapy *intra*, *inter*, *trans* (Piaget i Garcia, 1989), poziomy van Hielego (2003), etapy *reifikacji* i zbliżone koncepcje przechodzenia od procesów do tworów myślowych (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991; Gray i Tall, 1994; Mason, 1996), pięć etapów Hejnego (1997, s. 17), a także hierarchie matematyków.

Dwie kwestie są bardzo istotne przy tworzeniu się idei głębokich. Pierwsza — to *rola modeli formalnych* w tym procesie. Tylko niektóre idee (np. liczb naturalnych i działań na nich) kształtują się w pełni bez istotnego udziału dedukcji. Bardziej zaawansowane idee na ogół wymagają jakichś modeli formalnych (niekoniecznie wyrażonych *explicite*), np. idea głęboka „liczba rzeczywista" na poziomie uniwersyteckim wymaga należytego opanowania podstawowych własności tych liczb (tzn. aksjomatów ciała uporządkowanego, nieistotne jak nazwanych) wraz z aksjomatem ciągłości (w jednym z kilku możliwych sformułowań). Podobnie idea głęboka „suma kątów w trójkącie" wymaga jakiejś dedukcji (por. 4.1).

Drugą kwestią jest rola *etapu automatyzacji* w procesie kształtowania się idei głębokiej danego pojęcia. Zestawmy różne opinie:

> Nowy fragment wiedzy jest automatyzowany przez wielokrotne powtarzanie. Jednak, w moim rozumieniu, ten etap nie należy do mechanizmu *rozwojowego*. Jest jedynie częścią szkolnej praktyki. Automatyzm ma na

celu zachowanie energii intelektualnej dla bardziej interesujących przedsięwzięć. (...) uczeń wykonujący dzielenie 54831:71 powinien znać na pamięć tabliczkę mnożenia. W przeciwnym razie włoży wiele intektualnego wysiłku w znalezienie wyników mnożenia 7×7, a w takiej sytuacji wykonywanie dzielenia pisemnego staje się zadaniem nie do pokonania (Hejný, 1997, s. 18).

Dla rozwoju myślenia jest szczególnie ważne, aby *czynności dziecka były wykonywane świadomie i skierowane na określony cel.* Najkorzystniejsze są zadania, które pozwalają dziecku zdać sobie sprawę, czy osiągnęło ono zamierzony w zadaniu cel, czy też popełniło jakieś błędy. (...) Natomiast wiele badań psychologicznych wskazuje na to, że wielokrotne powtarzanie tej samej czynności prowadzi do jej automatycznego wykonywania, co utrudnia jej myślowe ujęcie. *Im wcześniej jakaś czynność jest zautomatyzowana, tym mniej bierze w niej udział świadomość* (Szemińska, 1991, s. 132).

Charakterystyczną cechą [procedury] typu (A) jest zautomatyzowanie operacji związanych z przekształceniem: uczeń natychmiast podawał poprawny wynik przekształcenia i był autentycznie zdumiony pytaniami *Jak doszedłeś do tego wyniku?* i *Dlaczego sądzisz, że jest on poprawny?* Typowe odpowiedzi uczniów były następujące: *To oczywiste. Nie mam pojęcia, skąd to wiem.* (...) *Widzę to od razu, jak patrzę na wyrażenie.* (...) Typ ten obserwowałam tylko w klasie ósmej, jedynie w przypadku najlepszych uczniów, i to wtedy, gdy przekształcenie było dla nich bardzo łatwe (Demby, 2000, s. 54).

Dwie pierwsze wypowiedzi wskazują na negatywne konotacje zautomatyzowania, podczas gdy trzecia — wręcz przeciwnie — podkreśla to, co można uznać za pozytywną cechę kształtujących się idei głębokich. Nie ma tu jednak sprzeczności.

Szkodliwe jest bowiem przedwczesne zautomatyzowanie, nie oparte na właściwym rozumieniu, uczenie się instrumentalne (a nie relacyjne) w sensie Skempa, bez uprzednich, ukierunkowanych aktywności, bez refleksji nad tym, co się robi. Natomiast zautomatyzowanie będące wynikiem swoistej kondensacji ciągu świadomie wykonywanych czynności i powtarzania ich w różnorodnych sytuajach — to nie jest jedynie kwestia sprawności rachunkowej.

Wiele danych wskazuje na to, że właśnie owe setki czy tysiące powtórzeń są niezbędne do utworzenia się pewnych idei głębokich w arytmetyce i algebrze. Najpierw są to powtórzenia świadome, nieraz wymagające wysiłku, później stają się rutynowe i stopniowo coraz bardziej zautomatyzowane. Iluzją (często spotykaną u matematyków) jest to, że dobre rozumienie pojęć przez ucznia może być wynikiem wyjaśnień opartych na dedukcji, nie wspartych dostatecznie licznymi powtórzeniami podobnych czynności, wykonywanych świadomie przez ucznia.

W sumie granica między zautomatyzowaniem powiązanym z ukształtowaniem się odpowiednich idei głębokich a zautomatyzowaniem wynikającym tylko z długotrwałej praktyki nie jest ostra i łatwa do wyznaczenia.

2.4. W procesie kształtowania się idei głębokich istotną rolę odgrywają *reprezentacje powierzchniowe* tworów matematycznych, tj. *znaki*, które można widzieć (napisy, symbole, rysunki, ruch, np. gesty), słyszeć, dotykać i które reprezentują te twory. Do reprezentacji powierzchniowych zaliczamy też zapisy w pamięci komputerów oraz niektóre przedmioty, którymi można manipulować (np. liczmany, bryły, parkiety) i przedstawiać w ten sposób pewne idee (np. pokazywać krawędzie sześcianu).

Reprezentacje te pełnią trzy podstawowe funkcje: 1° *komunikowania* myśli matematycznych innym osobom; 2° są *narzędziem* rozumowania, rachowania, rozwiązywania zadań; 3° przedstawiają *nazwy* tworów matematycznych, przez co istotnie przyczyniają się do kształtowania się pojęć.

Trzeba zdać sobie sprawę z tego, że *reprezentacje powierzchniowe są jakoś nieodłącznie zrośnięte z indywidualnymi ideami głębokimi* (a pośrednio także z epistemicznymi). Wprawdzie teoretycznie pojęcie matematyczne jest czymś zupełnie innym niż symbol je oznaczający i nie ma między nimi bezpośredniego związku (nazwy i symbole są w zasadzie arbitralne), nie da się jednak odseparować w ludzkiej świadomości np. pojęcia liczby π od jej zapisu dziesiętnego 3,14..., ani odseparować własności działań od wzorów takich jak $a(b+c) = ab+ac$. Wpływ notacji na obraz pojęć widać dobrze na przykładzie funkcji x^n i n^x, a także na przykładzie równości $s\big(a, s(b,c)\big) = s\big(s(a,b), c\big)$, w której, nie mając wprawy, można nie rozpoznać prawa łączności dodawania $a+b$ oznaczonego tu symbolem funkcji dwóch zmiennych $s(a,b)$.

Do reprezentacji powierzchniowych należą wszelkiego typu *środki wizualne* stosowane w nauczaniu. Dobrą, syntetyczną analizę zagadnienia daje (Dreyfus, 1994). Zwraca on uwagę na to, że zdaniem wielu matematyków argumentacja wizualna jest wprawdzie dydaktycznie cenna, ale jest jedynie wprowadzeniem do „prawdziwego" rozumowania opartego na słowach i symbolach.

Jest oczywiste, że przy kształtowaniu się pojęć geometrycznych główną rolę odgrywają: percepcja wzrokowa, ruch, rysunki figur, modele brył itp. Natomiast *w arytmetyce i algebrze jednym z kluczowych czynników przy kształtowaniu się idei głębokich jest* (oprócz motywacji mających swe źródło w konkretnych zagadnieniach z życia, z matematyki i innych czynników) *właśnie manipulowanie symbolami.*

Reprezentacje powierzchniowe nie są oddzielnymi, izolowanymi znakami. Są one częściami rozmaitych, heterogenicznych systemów. Są częścią naszego dziedzictwa kulturowego.

2.5. W przypadku pojęć najprostszych (takich jak liczba naturalna, dodawanie liczb naturalnych czy podstawowe figury geometryczne: prostokąt, linia prosta itp.) odpowiadające im idee głębokie powstały już w starożytności i wywodziły się z matematyzowania sytuacji życiowych, z intuicji konkretu, ze świata realnego w dosłownym sensie.

Wyżej w tej hierachii znajdują się idee głębokie pojęć, które wyłoniły się w wyniku matematyzowania bardziej zaawansowanych pojęć naukowych, głównie z fizyki, takie jak idee głębokie: „pochodna" (z dopowiedzeniem, o jaki stopień ogólności chodzi, np. z dodaniem słów „funkcji jednej zmiennej"), „całka", „równanie różniczkowe". Pojęcia fizyki (np. mechaniki Newtona) też dotyczą świata realnego, ale naukowo wyidealizowanego.

W XIX i XX wieku pojawiają się twory będące wynikiem matematyzowania sytuacji, na których „świat realny" składają się twory abstrakcyjne, pojęcia matematyczne, które wcześniej same były wynikiem matematyzacji. Z tego powodu owe nowe obiekty (których przykłady podane zostały we wstępie) są nazywane *modelami drugiej generacji.*

Nie jest to jednak poziom w jakimś sensie maksymalny. W XX i XXI wieku w umysłach matematyków stale tworzą się *idee głębokie pojęć na coraz wyższych poziomach abstrakcji*, a w pewnych cyklach o typowej kolejności: a) definicja obiektów na pewnym wyjściowym poziomie, b) nowe pojęcia zdefiniowane w języku tych obiektów, c) nowe obiekty zbudowane z tych pojęć, d) badanie własności tych nowych obiektów, e) nowa teoria aksjomatyczna, której punktem wyjścia są te własności.

Jako przykład takiej hierarchii wymienimy kolejne szczeble abstrakcji w teorii algebr operatorów (Żelazko, 1968; Semadeni, 1971): 1) konkretne przykłady zespolonych przestrzeni Hilberta ℓ^2, $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ i innych; 2) aksjomatycznie określona *przestrzeń Hilberta* H jako wspólne uogólnienie przestrzeni z poprzedniego szczebla; 3) pojęcie *operatora liniowego ograniczonego* $\Phi : H \to H$; 4) algebra $B(H)$ operatorów liniowych ograniczonych na H; 5) aksjomatycznie określona *algebra* A *typu* C^*, której modelem semantycznym jest $B(H)$ (dowodzi się, że każda przemienna algebra typu C^* jest izomorficzna z pewną przestrzenią $C(X)$ funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej X, ale typowe algebry C^* są nieprzemienne); 6) pojęcie *stanu* na algebrze A typu C^*; 7) zbiór K (wypukły i zwarty) wszystkich stanów; 8) pojęcie *stanu czystego*, będącego *punktem ekstremalnym* zbioru stanów; 9) pojęcie całki względem miar Radona po zbiorze ∂K stanów czystych; 10) pojęcie sympleksu Choqueta (jest to zbiór wypukły zwarty K taki, że takie przedstawienia elementów zbioru K w postaci całek po ∂K są jednoznaczne).

Szczeble 2) i 5) to teorie aksjomatyczne, unifikujące obiekty poprzedniego etapu, niezbędne dla całej hierarchii. Szczeble 3), 6), 8), 9), 10) to defini-

cje wyrażone w języku danej teorii aksjomatycznej, pozostałe zaś szczeble to zbiory obiektów z poprzedniego etapu. Nie miałoby jednak sensu mówienie o modelach „n-tej generacji", a to dzięki zjawisku *spłaszczania się hierarchii pojęć* (por. Semadeni, 2003). Możliwe bowiem (co nie znaczy: łatwe) jest tak dobre opanowanie wymienionych powyżej pojęć, ich własności i ich wzajemnych związków, że traktuje się je w praktyce, jak gdyby były na tym samym poziomie abstrakcji.

Podstawowe pojęcia z każdego z owych etapów są niewątpliwie ideami głębokimi u tych osób, które zajmują się nimi twórczo, które spędziły wiele lat na badaniu ich, na wykorzystywaniu ich w bardzo rozmaitych układach pojęciowych, tak że stały się tak bliskie i znajome, jak pojęcia szkolnej planimetrii dla dobrego maturzysty.

Powyższe dziesięć bardzo ważnych etapów daleko nie wyczerpuje wszystkich etapów kolejnego pnięcia się wzwyż po szczeblach takiej hierarchii. Można np. rozpatrywać: rozmaite kategorie wymienionych wyżej obiektów, potem funktory na takich kategoriach, potem transformacje naturalne tych funktorów itd. Powstała też tzw. nieprzemienna teoria prawdopodobieństwa (formułuje się ogólne aksjomaty prawdopodobieństwa i definicje podstawowych pojęć w języku funkcjonałów na przemiennej algebrze $C(X)$ i następnie zastępuje się $C(X)$ przez nieprzemienną algebrę $B(H)$). Podobna myśl przyświecała twórcom tzw. nieprzemiennej geometrii, odgrywającej w mechanice kwantowej rolę analogiczną do roli klasycznej geometrii w mechanice klasycznej.

Celem tych wielce skondensowanych przykładów jest poglądowe zilustrowanie specyficznych trendów współczesnej matematyki, ogromnie odbiegających od tego, co działo się 100 lat temu. To także, obok przykładów idei głębokich takich jak $4+3=7$ i przykładów z poziomu szkoły średniej, trzeba także brać pod uwagę, gdy się rozważa zagadnienia związane z ideami głębokimi.

2.6. Zwrócimy teraz uwagę na kilka kwestii, które bywają niewłaściwie interpretowane przez osoby stykające się po raz pierwszy z koncepcją idei głębokich.

— Indywidualne idee głębokie powstają n i e t y l k o w umysłach matematyków. Mogą być już ukształtowane w umyśle dziecka (np. piagetowska stałość liczby kardynalnej lub równość $4+3=7$). Później idee te ulegają modyfikacjom, nieraz istotnym. Przyjmujemy jednak — jako podstawowe założenie teorii — że są to *te same* idee. Liczba 7 w umyśle dobrego ucznia kończącego szkołę podstawową i liczba 7 w umyśle Gaussa to dwie indywidualne, zmienne w czasie realizacje tego samego tworu: epistemicznej liczby 7.

— *Znajomość definicji pojęcia X nie jest ani warunkiem koniecznym ani dostatecznym na to, aby X było ideą głęboką u danej osoby.* Nie wymagają

tego np. trzy idee głębokie wymienione w poprzednim akapicie, a również idee głębokie „zbiór", „liczba rzeczywista", „para nieuporządkowana" i „para uporządkowana". Co więcej, idee głębokie takie jak „szyk prostokątny" (Rożek, 2005) lub „uogólnienie" są używane przez matematyków bez żadnej definicji; więcej na ten temat można znaleźć w (Lubomirski, 1983; Semadeni, 2002a, s. 78). Idee głębokie takie jak „para uporządkowana", „kąt", „wielomian", „szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$" czy „zmienna" bywają używane bez świadomości kłopotów związanych z ich zdefiniowaniem (Semadeni, 2002a, s. 161–163). Z drugiej zaś strony, zdarza się, że matematyk z n a i r o z u m i e definicję jakiegoś pojęcia X, a nawet jest w stanie zaakceptować jakieś związane z tym dowody, a mimo to pojęcie X nie jest u niego ukształtowane jako idea głęboka (np. gdy próbuje nauczyć się jakiejś teorii).

— Indywidualne idee głębokie obejmują n i e t y l k o pojęcia najbardziej fundamentalne, które weszły do matematyki już w starożytności lub są w programach szkolnych; obejmują również pojęcia bardzo zaawansowane (por. 2.5).

2.7. Przyjmujemy, że *u osoby A ukształtowała się już idea głęboka* X, jeśli spełnione są następujące warunki:

(α) X jest wystarczająco *przyswojone* przez tę osobę i ma ona silne poczucie, że wie, co znaczy X, i potrafi tym operować swobodnie, bez konieczności odwoływania się do reprezentacji powierzchniowych tworu X;

(β) X jest u tej osoby dobrze osadzone w spójnej sieci pojęć i więzów między nimi (izolowane pojęcia nie mogą tworzyć idei głębokich), przy czym osoba ta zna i należycie *rozumie* zarówno X jak i najważniejsze związki X z innymi tworami matematycznymi, na adekwatnym poziomie ogólności;

(γ) osoba ta ma silne poczucie *pewności* dotyczące podstawowych, matematycznie zasadnych stwierdzeń o X;

(δ) osoba ta potrafi sensownie *stosować* X w rozmaitych sytuacjach matematycznych i pozamatematycznych;

(ε) w wyniku rozlicznych doświadczeń związanych ze stosowaniem X osoba ta intuicyjnie rozumie, że X interpretowane w sytuacjach z życia codziennego (a w przypadku bardziej zaawansowanym również w rozmaitych działach matematyki i nauk ścisłych) nabiera bogatych, różnorodnych znaczeń, odczuwanych przez tę osobę w tych kontekstach jako ich *naturalne cechy*;

(ζ) wiedza i rozumienie X przez tę osobę są *odporne na typowe konflikty poznawcze* (jakkolwiek mogą podlegać ewolucji pod wpływem nowych doświadczeń).

Oczywiście te warunki są ze swej natury nieostre. Ich sens i kwestia, jak mają być interpretowane, zależą od tworu X, od teorii, w której powinny być rozpatrywane, od poziomu wiedzy danej osoby, toteż mogą być stopniowo

wyjaśniane jedynie w kontekście różnorodnych, odpowiednio dobranych przykładów (Semadeni, 2002a). Oto jeszcze jeden, charakterystyczny przykład:

> Zrobiłem krótką, błyskawiczną ankietę między przypadkowo wybranymi matematykami, pytając: co to jest kąt? Okazuje się, że nikt z nich nie pamiętał żadnej konkretnej definicji; każdy próbował na poczekaniu podać swoją definicję i ich definicje nie były równoważne. Mimo to uważam, że każdy z nich wiedział, co to jest kąt. Prof. Sikorski powiedział kiedyś żartobliwie, że matematyk naprawdę dobrze zna jakieś pojęcie, gdy zapomni jego definicję, a mimo to umie je stosować (Grzegorczyk, 1970, s. 287).

Powyższy tekst dobrze opisuje fakt, że owi matematycy mieli ukształtowaną ideę głęboką kąta. Nie było istotne miejsce tego pojęcia w jakimś układzie dedukcyjnym. I tak wiedzieli świetnie, o co chodzi — dzięki temu, że wiele lat obcowali z tym pojęciem, znali jego własności, umieli je stosować w bardzo różnorodnych sytuacjach, sensownie i elastycznie.

Warunek (ε) w przypadku np. idei głębokiej „liczba 7" u ucznia oznacza m. in. wymóg, by rozumiał on intuicyjnie, że liczba 7 w kontekście „7 metrów" ma inny sens niż ta sama liczba w kontekście „7 jabłek". Nie wymaga się oczywiście, by osoba ta była w stanie wyrazić tę myśl słowami.

2.8. O *epistemicznej idei głębokiej* X możemy mówić, gdy w umysłach lu- dzi, którzy aktywnie zajmują się tworem X, komunikują się między sobą, potwierdzają cudze rozumowania lub je kwestionują i domagają się uściśleń lub poprawek, a nadto czynią to przez dostatecznie długi czas (wiele stuleci lub lat, a przy współczesnym tempie komunikowania się może to być nawet kwestia miesięcy) — ukształtowały się indywidualne idee głębokie i są one wzajemnie zgodne w swej matematycznej istocie, w sensie wyjaśnionym poniżej.

Z powyższego opisu nie wynika bynajmniej, że epistemiczne idee głębokie są wynikiem jakiegoś konsensusu czy negocjacji, takich jak w kwestiach społecznych, gdzie z natury rzeczy dopuszcza się pewną arbitralność. Idee te powstają w wyniku wysiłku wniknięcia w cudzą argumentację i zintegrowania jej z własnymi ideami głębokimi aż do pełnego jej zrozumienia i uznania jej za konieczność logiczną i zaakceptowania jej z tego właśnie powodu. Słowo „logiczne" odnosi się tu do dowodów w ramach normalnie przyjętych standardów ścisłości matematycznej; niekoniecznie musi to być wyrażone w języku logiki formalnej.

Indywidualne idee głębokie powstają jako efekt interakcji dwóch czynników: świadomych aktywności osób usiłujących je pojąć i zarazem wpływu społecznego, przede wszystkim nauczania. Epistemiczne idee głębokie tworzą się więc jako wynik historycznego procesu rozwoju matematyki w filogenezie, a z drugiej są odczuwane — przez osoby, u których są należycie ukształtowane — jako wiedza pewna.

Z warunku (γ) w 2.7 nie wynika, że dana osoba ma znać dowody owych stwierdzeń. Na przykład zasadnicze twierdzenie algebry może stać się indywidualną ideą głęboką nawet w sytuacji, gdy dana osoba nie zna (nie pamięta lub nigdy nie znała) żadnego dowodu tego twierdzenia, ale rozumie dobrze jego sens i stosowała je wystarczająco często, świadomie, w różnorodnych sytuacjach.

2.9. W XX wieku wiele pojęć logiki matematycznej, np. najważniejsze pojęcia związane z dowodem twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki, a także wiele innych, znacznie bardziej zaawansowanych, bardziej wyrafinowanych i niezrozumiałych dla ogółu matematyków, spełnia wymienione powyżej warunki (α)–(ζ) w odniesieniu do znaczącej liczby osób, toteż należy zaliczyć je do idei głębokich epistemicznych.

Przytoczmy słynne zdanie, które ongiś napisał Kurt Gödel (por. Mostowski, 1948, s. 373; Krajewski, 2003, s. 216).

> Niezależnie jednak od tego, że obiekty teorii mnogości są tak odległe od doświadczenia zmysłowego, jednak w jakiś sposób je postrzegamy, o czym świadczy fakt, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę żadnych racji, dla których mielibyśmy mieć mniejsze zaufanie do tego rodzaju percepcji, to znaczy do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która skłania nas do budowania teorii fizycznych (...) intuicji matematycznej nie musimy pojmować jako zdolności dającej nam *bezpośrednią* wiedzę o badanych obiektach. Wydaje się raczej, że — tak jak w przypadku doświadczenia fizycznego — kształtujemy nasze idee także tych obiektów na podstawie czegoś innego niż to, co jest bezpośrednio dane. Tylko to coś innego *nie* jest (a przynajmniej nie jest głównie) wrażeniem (Gödel, 1964; Murawski, 2002, s. 121).

Powyższy opis dobrze odpowiada pojęciu idei głębokich tworów matematycznych, ich kształtowaniu się w umyśle i ich „percepcji" przez umysł ludzki. Pewne rozumowania są dla matematyka równie oczywiste jak percepcja przy odczytywaniu wskazań przyrządu w laboratorium (co też wymaga należytego, uprzedniego ukształtowania odpowiednich pojęć). Pomimo, że natura oczywistości percepcyjnej jest istotnie różna od oczywistości pewnych stwierdzeń dotyczących idei głębokich, widoczne są pewne analogie między nimi, na które zwrócił uwagę Gödel.

2.10. Idee głębokie nie są stałe i niezmienne. Ulegają ewolucji i przeobrażeniom: idee indywidualne w ontogenezie, a epistemiczne — w filogenezie.

Indywidualne idee głębokie tworu X u różnych ludzi z pewnością nie są identyczne, nie są *takie same* (z uwagi na różną wiedzę, różne doświadczenia, różne sposoby myślenia poszczególnych ludzi). Jednakże uważamy je za *indywidualne realizacje tej samej idei głębokiej epistemicznej.* Co więcej, ma sens

mówić o różnych poziomach, na których dana idea głęboka jest ukształtowana u poszczególnych ludzi. Wyjaśnimy tę kwestię na przykładach.

Idee głębokie pojęcia „linia prosta" (na płaszczyźnie) w umysłach Euklidesa, Kanta i Hilberta musiały różnić się znacząco, choćby z uwagi na ogromne zmiany kulturowe i różne poglądy filozoficzne. Jednakże matematyczna istota pojęcia prostej (w tym aksjomat, że przez każde dwa punkty przechodzi jedna i tylko jedna linia prosta) była u nich zasadniczo taka sama. Z tego powodu możemy mówić o pojedynczej idei głębokiej epistemicznej „linia prosta" (podobnie jak można mówić o jednym pojęciu „rzeka Pregoła", choć dzisiejsza Pregoła różni się od tej, przy której przechadzał się Kant, i od tej, przy której przechadzał się Hilbert). Jest to szczególny przypadek filozoficznie trudnego pojęcia *identyczności*, analizowanego m.in. w (Quine, 2000, s. 95; Hospers, 2001, s. 24).

Przyjmujemy więc następujący postulat metodologiczny, mianowicie *postulat tożsamości idei głębokich*: Jeśli indywidualne idee głębokie tego samego tworu X u osób A i B są należycie ukształtowane, to zawierają *pewną wspólną zasadniczą część*, pewien wspólny *ośrodek*, i to pozwala je utożsamić.

Na przykład, do wspólnego ośrodka wszystkich indywidualnych idei głębokich pojęcia „trójkąt" musi być zaliczone to, że jest to figura płaska, ma trzy boki, suma miar kątów wynosi 180°, że trójkąt może być rozwartokątny itd. Natomiast świadomość np. tego, że trójkąt to szczególny przypadek n-wymiarowego sympleksu[4], wykracza poza ów minimalny ośrodek, podobnie jak świadomość tego, że trójkąt na płaszczyźnie to graniczny przypadek trójkątów sferycznych przy $r \to \infty$.

2.11. Precyzyjnej definicji takiego ośrodka idei głębokiej nie da się sformułować, ani też nie da się podać jakiegoś kryterium, co do niego miałoby należeć. Nawet w przypadku dobrze znanego pojęcia, jak np. rozważanego powyżej pojęcia „trójkąt", zaliczenie jakiejś cechy do ośrodka jest uznaniowe, subiektywne. Pewne cechy takiego tworu z pewnością musimy zaliczyć do ośrodka, uważając je za fundamentalne, bowiem przy ich braku nie orzekniemy, że X jest ideą głęboką ukształtowaną u danej osoby. Inne zaś cechy uznamy za drugorzędne i nie zaliczymy ich do ośrodka (jak w powyższym przykładzie).

Zawsze jednak znajdą się jakieś cechy wątpliwe, dyskusyjne, na pograniczu. Jednakże z faktu, że nie potrafimy jednoznacznie wskazać, jakie cechy zaliczamy do ośrodka np. idei głębokiej „pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej", nie wynika, że koncepcja ośrodka jest bezużyteczna. Jako założenie rozpatrywanej tu teorii, przyjmujemy, że każda idea głęboka ma taki, nieostro

[4] Z kolei n-wymiarowy sympleks jest szczególnym przypadkiem sympleksu Choqueta (wspomnianego w 2.5), który może być nieskończenie wymiarowy.

zarysowany, ale istotny ośrodek. Indywidualne idee głębokie X, Y uważamy za tę samą ideę wtedy, gdy mają wspólny ośrodek.

Dzięki tej specyficznej własności matematyki możliwa jest pełna kompatybilność interpretacji typowych tworów matematycznych, niezależnie od tego, czy są przedstawiane przez bourbakistę w Paryżu w języku francuskim czy przez nauczonego innego podejścia Japończyka w Tokyo. Jeśli nawet dwaj kompetentni matematycy napotykają trudności związane z różnym ujęciem tej samej kwestii czy z różną terminologią, daje się to przezwyciężyć[5], choć może to wymagać dużego nakładu pracy (oczywiście uwaga ta nie dotyczy przypadków, gdy niemożliwe jest zrozumienie czyichś wywodów z powodu niedostatecznej znajomości jakiejś teorii).

Ten właśnie fakt odróżnia matematykę od takich dziedzin wiedzy jak psychologia lub filozofia, w których ścisłe rozumowanie może być prowadzone jedynie w ramach jakiejś określonej teorii, a przejście od pojęć (nawet podstawowych) jednej teorii do pojęć innej może być niewykonalne, bowiem mogą w ogóle nie dać się wysłowić w języku drugiej teorii (np. pojęcia psychologii Piageta mogą nie dać się wyrazić w języku innej teorii psychologicznej i na odwrót). Stąd m. in. bierze się zasada, że w humanistyce powinno cytować się innych autorów dosłownie, aby nie zniekształcić sensu ich myśli, podczas gdy matematycy — jeśli należycie rozumieją twierdzenia i dowody pochodzące od innych osób — niemal zawsze przekazują je własnymi słowami bez obawy, ze może to zmienić ich sens. Podobnie zdarzają się ogromne, czasem nieprzezwyciężalne trudności z przekładem tekstu humanistycznego na inny język, ale nie ma w zasadzie żadnych trudności (poza ewentualnie terminologicznymi) z przekładem zrozumianego już tekstu twierdzenia lub dowodu z języka np. angielskiego na polski lub na odwrót.

Znaczące jest, że również znaczna część filozofii matematyki ma taki humanistyczny charakter. Na przykład, jakkolwiek matematyczna część sformułowania słynnego twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki i poprawność jego dowodu nie budzą żadnych wątpliwości u osób kompetentnych, to związane z tym interpretacje filozoficzne, w szczególności implikacje tego twierdzenia w kwestii, czy umysł mógłby być zastąpiony przez maszynę, są dalekie od jednoznaczności, a zastrzeżenia co do zasadności prowadzonych rozumowań zgłaszane są nawet odnośnie wywodów wybitnych uczonych (por. Krajewski, 2003).

W naukach humanistycznych istotną rolę odgrywa powoływanie się na wypowiedzi autorytetów. Dotyczy to też dydaktyki matematyki. Również w tej

[5] Jedynym wyjątkiem mogą być różnice natury filozoficznej (np. między platonikiem a zadeklarowanym intuicjonistą), gdy jedna z osób kwestionuje — ze względów pryncypialnych — zakres środków logicznych użytych przez drugą osobę.

pracy przywoływane są poglądy osób takich jak Mostowski, Thom, Freudenthal. Natomiast w pracach czysto matematycznych nie ma takiej praktyki. Publikuje się dowód i właśnie lektura dowodu ma przekonać czytelnika; powoływanie się na czyjś autorytet nie jest argumentem za poprawnością rozumowania. Z drugiej jednak strony istnieje wyraźny wpływ środowiska jako całości: skoro nie można osobiście sprawdzić wszystkich dowodów w matematyce, trzeba w jakimś stopniu polegać na tych, co sprawdzali to przed nami.

2.12. Jednym z argumentów na rzecz celowości analizowania konstruktu myślowego „idea głęboka" jest to, że podejście to pozwala wyjaśniać pewne standardowe zjawiska obserwowane w praktyce matematyków, ujawniające się jako anomalie poznawcze, gdy rozpatruje się je w stereotypowej interpretacji dedukcyjnej. Przykłady tego można znaleźć w (Semadeni, 2002a); szczególnie istotne jest swoiste zapętlenie zależności logicznych między parami uporządkowanymi a ciągami dwuwyrazowymi.

Podstawową tezą pracy (Semadeni, 2002a) jest to, że w rozumowaniach matematycznych kluczową rolę odgrywają idee głębokie; ich modele formalne są wprawdzie niezastąpione, ale w sytuacjach konfliktów poznawczych dotyczących podstawowych pojęć arytmetyki, geometrii i teorii mnogości na ogół dominują idee głębokie (o ile nie ujawni się jakaś nieusuwalna sprzeczność). Ciąg dalszy tej pracy — to uzupełnienie tej tezy w przypadku pojęć na wyższym poziomie abstrakcji, wymagających definicji aksjomatycznej.

3. Idea głęboka pojęcia grupy i innych struktur określanych aksjomatycznie. Po tym wprowadzeniu zajmiemy się kwestią (II). Jako przykład paradygmatyczny tworu będącego modelem drugiej generacji rozpatrzymy pojęcie grupy.

3.1. Takie idee głębokie, jak „liczba naturalna", „prostokąt" i wiele innych, są kształtowane w umyśle niezależnie od jakiejkolwiek formalizacji, toteż modele formalne są jedynie ich uzupełnieniem, ukazują je w innym świetle, ujawniają ukryte przedtem zależności, ale nie zmieniają tego, co w nich matematycznie najbardziej istotne. Jak już sygnalizowaliśmy w 2.5, nie wszystkie jednak idee głębokie są elementarne.

W (Semadeni, 2002a, s. 77), wyróżnione zostały trzy typy idei głębokich pojęć matematycznych: 1° pojęcia, które kształtują się przed poznaniem ich definicji, 2° pojęcia, które zazwyczaj poznawane są za pośrednictwem definicji, a odpowiadające im idee głębokie kształtują się później, 3° pojęcia, które są powszechnie używane przez matematyków bez odczuwania potrzeby jakiegoś ich zdefiniowania, gdyż są w pełni zrozumiałe.

Ideę głęboką pojęcia „grupa" zaliczamy do typu 2°, tj. do poznawanych za pośrednictwem definicji, jednakże chodzi tu teraz o *definicję aksjomatyczną*

struktury pewnego typu (por. uwagi w 3.4, 3.6 i w 4.6). W takim przypadku *model formalny jest niezbędny już na etapie kształtowania się tej idei.*

Mimo to niezbędne jest fundamentalne *rozróżnienie między ideą głęboką „grupa" a jej modelem formalnym.* Model formalny to fragment aksjomatycznej teorii grup (jednej z wielu możliwych, por. Semadeni, 2002b, s. 98). W takim modelu pojęcie grupy zredukowane jest do definicji, czyli do układu aksjomatów teorii grup, a wszelkie rozumowanie musi być czystą dedukcją, o d e r w a n ą o d z n a c z e n i a, od sensu, który przypisujemy pojęciu grupy i podstawowym pojęciom teorii (takim jak homomorfizm czy grupa ilorazowa), od motywacji, które kierowały tworzeniu się tych pojęć, od przykładów, które do nich wiodły. Natomiast idea głęboka „grupa" musi ponadto zawierać szeroko rozumiane z n a c z e n i e przypisowane grupom, sens rozumowań prowadzonych w takim modelu (sens aksjomatów grupy, sens przypisywany krokom dedukcyjnym), i n t e r p r e t a c j e ogólnych pojęć teorii na konkretnych przykładach grup, przykłady ich s t o s o w a n i a do różnych zagadnień, a także świadomość c e l ó w, dla których pojęcie grupy jest rozważane.

W 3.2–3.4 wyróżnimy kilka idei głębokich, na różnym poziomie ogólności: „ogólne pojęcie grupy", „grupa przekształceń", „grupa liczb całkowitych" itp.

3.2. Znane jest twierdzenie Cayleya: każda grupa G z działaniem $\star$ jest izomorficzna z grupą przekształceń pewnego zbioru (por. Freudenthal, 1991, s. 33). Dowód tego jest natychmiastowy (por. np. Birkhoff i Mac Lane, 1963, s. 146): jeśli $a \in G$, oznaczmy $\varphi_a(x) = a \star x$ dla $x \in G$; wówczas $\varphi_a : G \to G$ jest bijekcją, a przyporządkowanie $a \mapsto \varphi_a$ wyznacza izomorfizm grupy G z grupą tych wszystkich przekształceń $G \to G$, które są postaci φ_a, gdzie $a \in G$.

Arnold (2001, s. 23) pisze, że z uwagi na twierdzenie Cayleya teorię grup można przedstawić studentom jako teorię grup przekształceń, bez wprowadzania standardowej aksjomatyki. Oczywiście ma w pełni rację, głosząc, że podawanie aksjomatów grupy bez wcześniejszego poznania wystarczającej liczby przykładów grup przekształceń jest wielce niewłaściwe (por. van Hiele, 2003, s. 196). Jednakże istotą pojęcia grupy jest właśnie to, że j e d n o ogólne p o j ę c i e działania $\star$ obejmuje — jako szczególne przypadki — zarówno działanie dodawania lub mnożenia l i c z b jak i składanie p r z e k s z t a ł c e ń.

Kształtowanie takiego jednolitego, ogólnego pojęcia wymaga podania jego n a z w y i jednej uogólniającej d e f i n i c j i. Bez tego można wprawdzie zauważać pewne a n a l o g i e między działaniami na liczbach a składaniem przekształceń, jednak przejście od analogii do ogólnego p o j ę c i a jest zasadniczą zmianą jakościową.

Objaśnienie pojęcia grupy za pomocą intuicyjnych określeń typu: „grupa to wspólna cecha następujących tworów ...", nie byłoby zapewne wystarczająco zrozumiałe, a z pewnością nie byłoby definicją matematyczną. Niezbędne jest

podanie jednoznacznych kryteriów pozwalających ujawnić strukturę grupy w jakimś obiekcie, tj. warunków, jakie mają być spełnione. Te warunki — to właśnie definicja aksjomatyczna (por. 3.5). Dopiero sformułowanie *explicite* warunków, które są istotne w pojęciu grupy, pozwala właściwie zrozumieć, o jaką „wspólną cechę" tu chodzi.

3.3. Mylny byłby sąd, że indywidualna idea głęboka „dowolna grupa" może ukształtować się w sytuacji, gdy dana osoba zajmuje się jedynie systemem aksjomatów grupy i wydedukowanymi zeń abstrakcyjnymi wnioskami. Idea ta powstaje bowiem jako swoista synteza rozmaitych typów grup (*agregat* w sensie wyjaśnionym w Semadeni, 2002a, s. 69–70). Jest ona wynikiem różnorodnych aktywności i świadomego zbierania doświadczeń dotyczących zarówno specjalnych przykładów grup, jak i zestawiania ogólnych twierdzeń o grupach i ogólnych rozumowań z ich odpowiednikami dla konkretnych, ważnych grup (zwłaszcza grup związanych z geometrią). Nieodzowne też jest opanowanie *wnioskowania wykorzystującego jedynie abstrakcyjne własności działań.*

Takie wnioskowanie, oderwane od ich egzemplifikacji jako działań na liczbach, na macierzach czy jako składania przekształceń geometrycznych, znajduje się na wyższym poziomie hierarchii pojęciowej niż zajmowanie się poszczególnymi grupami. Przejście na ten poziom przypomina nieco przejście z poziomu deskryptywnego geometrii na poziom teoretyczny (van Hiele, 2003): przejście bywa bardzo trudne, może być nieosiągalne w przypadku osoby na niższym poziomie, ale nawet jeśli osoba ta dojrzeje do wyższego poziomu, to *bez wprowadzenia języka wyższego poziomu pozostanie nadal na niższym.*

Ponadto, zgodnie z postulatem Arnolda można wprawdzie przedstawić np. grupę $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych jako grupę przekształceń $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (na tym polegała niefortunna francuska koncepcja liczb jako operatorów). Jednakże utożsamianie statycznych liczb z dynamicznymi operatorami nie jest bynajmniej naturalne. Utożsamianie takie wydaje się łatwe matematykom, bowiem znają już pojęcie grupy. Kwestia ta wiąże się z rozróżnieniem między stanami a działaniami. Ponadto już samo wysłowienie twierdzenia Cayleya wymaga użycia pojęcia izomorfizmu, które trzeba by formułować dla każdego konkretnego przykładu grupy z osobna.

Postulat Arnolda można interpretować tak: nie warto tracić czasu i energii na wpajanie uczniom i studentom ogólnego pojęcia grupy; do pewnego poziomu wystarczy najważniejszy, szczególny przypadek: grup przekształceń.

Tak więc stwierdzamy tu pewien paradoks: składnikiem ukształtowanej idei głębokiej grupy jest z jednej strony czysto aksjomatyczne, w pełni oderwane od konkretnych przykładów ujęcie grup i podstawowych wnioskowań z nimi związanych, a z drugiej strony składnikiem tej idei jest też pojęcie grupy ściśle powiązane z konkretnymi przykładami i zastosowania. Żaden z

tych składników sam z siebie nie może stanowić idei głębokiej. Zapewne *jednym z wielu powodów, dla których teorie aksjomatyczne* (takie jak teoria grup) *stały się standardową metodą badań naukowych z matematyki w XX wieku, jest to, że pozwala to na zbliżenie idei głębokich do ich modeli formalnych.*

3.4. Logicy przez aksjomatyczne ujęcie pojęcia grupy rozumieją zazwyczaj teorię sformalizowaną w języku pierwszego rzędu, nie używającego pojęcia zbioru (więcej na ten temat można znaleźć w 4.5 i 4.6). Aby lepiej wyjaśnić, jak w praktyce matematycy rozumieją definicję aksjomatyczną, taką jak definicja grupy, zacytujmy fragment autorytatywnego podręcznika (inny taki przykład znajduje się w 3.6).

> Zbiór G wraz z działaniem mnożenia, operacją brania elementu odwrotnego oraz wyróżnionym elementem 1 nazywamy *grupą* (*abstrakcyjną*), gdy (dla dowolnych $f, g, h \in G$) spełnione są warunki
> (G1) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$; (G2) $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$; (G3) $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f$
> nazywane *aksjomatami grup* (Białynicki-Birula, 1976, s. 372).

Zwróćmy uwagę na to, że termin „aksjomat" użyty jest tu jako zastępujący termin „warunek". Natomiast w definicji grupy podanej w (Białynicki-Birula, 1987, s. 13) użyte jest określenie dwuczłonowe: „warunki–aksjomaty". W tym ujęciu aksjomaty grupy są *założeniami*, jakie ma spełniać działanie grupowe. Jest to standardowe podejście matematyków i nie ma nic wspólnego z ujmowaniem aksjomatów jako „pewników", które ciągle pokutuje w słownikach i w popularnych artykułach.

Pewnik to „fakt, wiadomość całkowicie pewne, nie budzące wątpliwości; prawda oczywista" (Słownik języka polskiego PWN). Uważanie aksjomatów geometrii za „prawdy oczywiste" skończyło się definitywnie w XIX wieku wraz z odkryciem geometrii nieeuklidesowych. Ostatnim aksjomatem uważanym za pewnik (i tak do dzisiaj nazywanym) był aksjomat wyboru w teorii mnogości. Natomiast nie ma sensu uważanie ogólnych aksjomatów grupy za „prawdy oczywiste" (skoro warunki te nie są spełnione np. w zbiorze liczb naturalnych). Są to wyłącznie z a ł o ż e n i a, jeśli o grupie G nie wiemy nic poza tymi aksjomatami (inną natomiast sytuację mamy w przypadku jakiejś znanej, konkretnej grupy, np. grupy $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych; można tu stać na platonistycznym stanowisku, że np. łączność dodawania w $\mathbb{Z}$ jest „pewna").

3.5. Rozważania o idei głębokiej „grupa" uzupełnimy podobnymi uwagami dotyczącymi innych struktur określonych aksjomatycznie.

Analogony twierdzenia Cayleya znane są w wielu teoriach. Należą do nich: twierdzenie Stone'a o algebrach Boole'a (Rasiowa, 1969, s. 284, 290), twierdzenie Kuratowskiego o izomorfiźmie dowolnego zbioru uporządkowanego z odpowiednią rodziną zbiorów (uporządkowaną przez $\subset$) oraz wiele innych twierdzeń

podobnego typu: każda przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ jest sumą prostą skończonej lub nieskończonej liczby kopii $\mathbb{R}$; każda przestrzeń Banacha jest izometrycznie izomorficzna z podprzestrzenią pewnej przestrzeni $C(X)$ funkcji ciągłych; każda przestrzeń Hilberta jest izomorficzna z pewną przestrzenią $\ell^2(T)$ itd.

W każdym z tych przykładów obiekt wyposażony w strukturę zdefiniowaną aksjomatycznie jest izomorficzny z obiektem, który jest dany *explicite* (lub jest jakimś podobiektem takiego obiektu), toteż — teoretycznie — można by tę abstrakcyjną strukturę definiować poprzez takie „konkretne" obiekty. Nie prowadzi to jednak do celu z tych samych powodów, które omówiliśmy w przypadku grupy. Izomorfizmy te nie wystarczają do należytego ukształtowania się pojęć wyższego rzędu (algebry Boole'a, przestrzeni liniowej, przestrzeni Banacha itp.), o d e r w a n y c h od tych konkretnych reprezentacji. Jednym z licznych argumentów jest to, że już sama definicja izomorfizmu takich abstrakcyjnych obiektów wymaga wcześniejszego podania ich definicji. Dlatego właśnie ujęcie aksjomatyczne okazuje się tu niezbędne.

3.6. Mówiąc o aksjomatycznej definicji grupy (w 3.4), wspomnieliśmy, że w podręcznikach algebry definicja ta podawana jest na ogół w języku t e o r i i m n o g o ś c i. We współczesnych podręcznikach matematyki aksjomatyczne definicje podstawowych struktur z reguły formułowane są w taki właśnie sposób. Oto typowy przykład:

> Przez *przestrzeń topologiczną* rozumiemy zbiór X, w którym każdemu zbiorowi $A \subset X$ przyporządkowany został zbiór $\overline{A} \subset X$ (zwany *domknięciem zbioru* X) spełniający cztery następujące warunki (zwane *aksjomatami domknięcia*):
>
> $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad A \subset \overline{A}, \qquad \overline{\emptyset} = \emptyset, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$
>
> (Kuratowski, 1977, s. 110).

Natomiast w terminologii logików (por. 4.4) układ warunków podany w 3.4 nazywa się *modelem semantycznym teorii* (która w przypadku teorii grup jest formalizowana w języku pierwszego rzędu, por. 4.6).

3.7. Należy podkreślić, że konieczność odwołania się do modelu formalnego w procesie kształtowania się idei głębokich dotyczy nie tylko struktur takich jak „grupa", „przestrzeń liniowa" i innych przykładów podanych we wstępie. Dotyczy to również pojęć zdefiniowanych w t ó r n i e, już w ramach takiej teorii aksjomatycznej. Przykładem może być *liniowa niezależność* w przestrzeni liniowej (por. Semadeni, 2002a, 13.2, s. 78).

Z tego powodu, na przykład, algebra liniowa wykładana w języku abstrakcyjnych przestrzeni liniowych nad $\mathbb{R}$ bywa poza zasięgiem pojęciowym wielu studentów, jest to bowiem istotnie trudniejsze od tych samych pojęć w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Efektem tego jest pamięciowe opanowywanie materiału do egzaminu i rozumienie instrumentalne w sensie Skempa.

Jeszcze trudniejsze, z tych samych powodów, jest rozumowanie w przestrzeni liniowej nad dowolnym ciałem K, choć niejeden wykładowca zdaje się sądzić, że skoro w tym ogólniejszym przypadku definicje, twierdzenie i dowody na ogół nie różnią się niczym poza zmianą jednego symbolu ($\mathbb{R}$ na K), to trudność tego dla studentów nie różni się istotnie. Nie biorą oni pod uwagę, że już zamiana ciała $\mathbb{R}$ na ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych stanowi istotne podwyższenie poziomu trudności, *bowiem u typowego studenta I roku matematyki* $\mathbb{R}$ *już jest ideą głęboką, a* $\mathbb{C}$ *jeszcze nie.* Reprezentacje powierzchniowe wywodów teoretycznych wyglądają wprawdzie tak samo, ale *na uczucie obcości pojęcia przestrzeni liniowej nakłada się obcość świeżo poznanych liczb zespolonych.* Ponadto przy przejściu do konkretnych przykładów, bez których nie ma właściwego opanowania nowych pojęć, sprawa komplikuje się też merytorycznie (np. przestrzeń 2-wymiarowa nad ciałem $\mathbb{C}$ jest 4-wymiarowa w sensie, z którym student się spotykał wcześniej).

4. Doprecyzowanie koncepcji modelu formalnego idei głębokiej tworu matematycznego. Przypomnijmy określenie: *modelem formalnym* idei głębokiej tworu X nazywamy odpowiednik tego tworu w jakiejś adekwatnej teorii aksjomatycznej[6].

4.1. Teoria aksjomatyczna, o której mowa powyżej, nie musi być jedną z typowych, znanych teorii, rozpatrywanych w matematyce. Może to być również jakiś system *ad hoc*, dostosowany do fragmentu d e d u k c j i l o k a l n e j. Przykładem takiej dedukcji jest dowód twierdzenia, że suma kątów w trójkącie równa jest dwóm kątom prostym. Do tego celu wystarczy „miniteoria aksjomatyczna", której pojęciami pierwotnymi są: „trójkąt", „prosta równoległa", „prosta przechodząca przez dany punkt", „kąt", „kąt prosty", „równość kątów",

[6] Określenie „model formalny" idei głębokiej, wprowadzone w (Semadeni, 2002a) i używane w obecnej pracy, wzorowane jest na tym, jak słowo „modele" rozumiał Mac Lane (1981, s. 466–467), a więc zarówno jako różnorodne *formalne modele pewnych aspektów rzeczywistości*, jak również np. *alternatywne modele* liczb porządkowych w teorii mnogości. W podobnym duchu użył słowa „model" Bernays (1935), gdy pisał, że platonizm dostarcza *modeli dla pewnych pomysłów abstrakcyjnych.* Termin „model" używany jest w nauce w kilkunastu lub kilkudziesięciu sensach. W kontekście matematyki termin ten ma nie tylko wiele znaczeń, ale nawet w niektórych z nich model obiektu jest na w y ż s z y m poziomie abstrakcji w stosunku do tego obiektu, a w innych odwrotnie — model jest na n i ż s z y m poziomie abstrakcji niż sam obiekt (por. Freudenthal, 1991, s. 33; Bocheński, 1992, s. 145; Semadeni, 2003, s. 142–144). Modele formalne idei głębokich mają wiele cech wspólnych z *modelami matematycznymi* rozumianymi w sensie *modelowania* (problemy modelowania stanowią dziś już określoną dziedzinę dydaktyki matematyki; na kongresach ICME bywa specjalna sekcja temu poświęcona).

Pojęcie modelu formalnego idei głębokiej należy odróżniać od pojęcia *modelu semantycznego* teorii sformalizowanej (por. 4.4).

„dodawanie kątów", „kąty wierzchołkowe", „kąty odpowiadające", a aksjomatami są przesłanki niezbędne do dowodu tego twierdzenia (nie dbamy specjalnie o to, aby aksjomaty były niezależne, a liczba pojęć pierwotnych maksymalnie zredukowana). Niepotrzebna jest też nazwa „teoria aksjomatyczna". Istotna jest świadomość, że te właśnie pojęcia i te własności (i tylko one) są wykorzystywane w tym dowodzie. Nie jest tu konieczny cały aparat dedukcji globalnej (w wersji Hilberta lub innej).

Model formalny nie jest na ogół wyznaczony jednoznacznie przez twór X. W grę wchodzi zarówno możliwość wyboru różnych teorii jak i — znacznie rzadziej — mogą istnieć dwa modele tworu X w tej samej teorii; przykłady ilustrujące takie sytuacje podane są w (Semadeni, 2002a, s. 56 i 47).

Jest oczywiste, że modeli formalnych idei głębokich nie można rozpatrywać w izolacji jednych od drugich. Podobnie jak reprezentacje powierzchniowe (por. 2.4), *modele formalne są częściami rozmaitych systemów.* W (Semadeni, 2002a, s. 56) podany jest przykład dwóch modeli formalnych π_C, π_D idei głębokiej „liczba π". Są to wprawdzie modele pojedynczej liczby, ale sens takiego modelu ujawnia się jedynie w ramach jakiejś teorii, obejmującej modele wszystkich tworów pewnego typu.

4.2. Wzorem dla koncepcji modeli w logice matematycznej były modele geometrii nieeuklidesowej Łobaczewskiego, zwłaszcza model rzutowy Kleina (1871 r.), w którym wychodzi się wprawdzie od ustalonego koła na płaszczyźnie euklidesowej, ale następuje potem charakterystyczne przemianowanie niektórych nazw. Nazwy euklidesowe zastąpione są przez nowe nazwy w modelu. „Punktami" w modelu są wewnętrzne punkty koła; „prostymi" są cięciwy koła. Definiuje się ponadto nieeuklidesowe „przemieszczenia" w modelu i „przystawanie" figur, które mogą wydawać się zupełnie niezrozumiałe, jeśli czytelnik nie zna odpowiednich twierdzeń o dwustosunkach w geometrii rzutowej; motywowują one bowiem te definicje, a zarazem odgrywają rolę pomocniczą przy sprawdzaniu poprawności konstrukcji (Courant i Robbins, 1998, s. 220–223). Taką sztuczną zmianę nazw, bardzo trudną do zrozumienia dla osób przywiązanych do bezpośredniego ujmowania figur geometrycznych, spotyka się w wielu modelach.

Model Kleina jest zarówno modelem geometrii nieeuklidesowej T w geometrii euklidesowej T^*, jak i modelem formalnym idei głębokiej „geometria Łobaczewskiego". Oba użycia słowa „model" są tu zgodne, ale nie tożsame.

4.3. Poza logiką matematyczną słowo „model" występuje głównie w kontekście matematyzacji.

> Może się wydawać pedanterią nazywanie zbioru liczb naturalnych modelem matematycznym, odrębnym od rzeczywistości i logiki. Prawdopodobnie większość greckich filozofów nie zgodziłaby się na taki podział.

> Ale to greccy matematycy stworzyli model — geometrię euklidesową — który dokładnie pasuje do tego schematu. Jest on opisany w *Elementach* Euklidesa i zajmuje się liniami prostymi, kątami i innymi obiektami matematycznymi (Gårding, 1993, s. 14).

Przejście od idei głębokiej do jakiegoś jej modelu formalnego nazywamy *formalizacją* [7]. Czasownika „formalizować" w postaci niedokonanej będziemy używać w sensie: „dokonać jakiegoś kroku w kierunku formalizacji".

Uzupełnimy teraz rozważania z (Semadeni, 2002a) dotyczące związków między ideami głębokimi a ich modelami formalnymi. Wymaga to doprecyzowania terminologii.

4.4. Nawiążemy teraz do rozróżnienia między *teoriami aksjomatycznymi* a *sformalizowanymi teoriami matematycznymi* (Mostowski, 1948, s. 230; Rasiowa, 1968, s. 248). W jednych i drugich teoriach dokonuje się wyboru pojęć pierwotnych i aksjomatów, a przy dowodzeniu wolno korzystać jedynie z tych wcześniej przyjętych pojęć i aksjomatów. Teorie sformalizowane są uściśleniem teorii aksjomatycznych. Różnica między stadium aksjomatycznym rozwoju teorii a stadium sformalizowanym polega na tym, że *w pierwszym z nich nie precyzuje się środków logicznych, jakich wolno używać przy dowodzeniu twierdzeń, a wnioskowanie opiera się na oczywistości wynikania*, w tych drugich zaś należy sformalizować *język teorii*, a w szczególności podać wszystkie *stałe specyficzne* teorii (symbole interpretowane jako pojęcia pierwotne) i *zmienne indywiduowe* oraz precyzyjnie podać dopuszczalne reguły wnioskowania[8].

Z drugiej strony, w pracach analizujących teorie sformalizowane, takich jak (Tarski, 1959), a także w pracach Gödla oraz Mostowskiego widać wyraźną *równoległość dwóch toków myślenia*: jednego sformalizowanego i drugiego w ideach głębokich, interpretującego sens wywodów pierwszego toku.

Przez *model semantyczny* teorii sformalizowanej T rozumie się, mówiąc poglądowo, taki układ elementów, zbiorów i relacji, w którym spełnione są wszystkie twierdzenia teorii T (Mostowski, 1948, s. 356); jest to więc model teorii T w teorii mnogości; stałe i zmienne teorii są interpretowane za pomocą pojęć pierwotnych teorii mnogości.

---

[7] Formalizację idei głębokiej należy odróżniać od formalizacji teorii aksjomatycznej (por. 4.4), a także od formalizmu (zarówno rozumianego jako doktryna filozoficzna, jak i tendencja dydaktyczna).

[8] W *Małej encyklopedii logiki* znajdujemy termin: *system aksjomatyczny sformalizowany* oraz termin krótszy: *system aksjomatyczny* (bez dodatkowego określenia), w domyśle: niesformalizowany (Marciszewski, 1970). Mostowski (1955) milcząco zakłada, że „system aksjomatyczny" oznacza system sformalizowany. Grzegorczyk (1975, s. 97) pisze, że terminów „teoria sformalizowana", „teoria dedukcyjna", „system dedukcyjny" i „system sformalizowany" używa zamiennie.

4.5. Przy badaniu teorii sformalizowanej kluczową kwestią jest to, czy — oprócz pojęć czysto logicznych — dopuszcza się w rozumowaniach pojęcia pochodzące z teorii mnogości. Bardzo ważne jest odróżnianie teorii sformalizowanych pierwszego rzędu od teorii sformalizowanych drugiego (lub wyższego) rzędu (Mostowski, 1948, s. 242–244 i 336; Rasiowa, 1968, s. 248, Grzegorczyk, 1971, s. 276; Grzegorczyk, 1975, s. 183 i 274; Ferreirós, 1999, s. 388; Malcev, 1970, s. 138–192). Teoria sformalizowana nazywa się *teorią elementarną* lub *teorią pierwszego rzędu*, gdy nie występują w niej zmienne inne niż zmienne indywiduowe, nie występuje pojęcie przynależenia elementu do zbioru (tzn. nie ma symbolu $\in$ i nie można go zdefiniować). Natomiast w *teorii drugiego rzędu* dopuszcza się zmienne będące zbiorami indywiduów, ale nie dopuszcza się zmiennych wyższych typów, takich jak zbiory zbiorów (które są wyrażalne w języku trzeciego rzędu).

Na przykład, aksjomatykę Peano liczb naturalnych można sformalizować na dwa sposoby: jako teorię drugiego rzędu (wówczas w aksjomacie indukcji pojawia się dowolny zbiór liczb naturalnych) lub jako teorię pierwszego rzędu, w której aksjomat indukcji przedstawiony jest w postaci schematu formuł (akceptowalnych w języku teorii). Podobnie aksjomatykę liczb rzeczywistych (jako ciała uporządkowanego) można sformalizować na dwa sposoby: jako teorię drugiego rzędu (wówczas w aksjomacie ciągłości mowa jest np. o supremum dowolnego zbioru ograniczonego liczb rzeczywistych) lub jako teorię pierwszego rzędu, w której aksjomat ciągłości przedstawiony jest w postaci schematu nieskończonej liczby formuł.

Każda z tych dwóch teorii arytmetycznych drugiego rzędu jest kategoryczna, tzn. dowolne dwa jej modele semantyczne są izomorficzne (dowód tego jest dość naturalny i nietrudny), natomiast arytmetyki pierwszego rzędu mają wiele nieizomorficznych modeli. Arytmetyka pierwszego rzędu liczb rzeczywistych ma nawet (paradoksalnie) model semantyczny przeliczalny, a arytmetyka pierwszego rzędu liczb naturalnych ma model nieprzeliczalny. Teorie pierwszego rzędu nie charakteryzują więc w pełni swych obiektów. Użycie teorii drugiego rzędu zakłada, że sens określenia typu „wszystkie podzbiory" (np. zbioru liczb naturalnych) jest ustalony z góry, przed aksjomatyzacją, bądź też że aksjomaty danej teorii arytmetycznej uzupełnia się o jakiś system aksjomatyczny teorii mnogości. Logicy najchętniej zajmują się teoriami pierwszego rzędu, natomiast dla potrzeb matematyki potrzebne są na ogół teorie wyższych rzędów. W szczególności w aksjomatyce liczb rzeczywistych pierwszego rzędu nie da się udowodnić pewnych twierdzeń z analizy, których znajomości wymaga się od studenta I roku matematyki.

W praktyce teorie sformalizowane rzadko prezentowane są z pełnym wypisaniem wszystkich szczegółów, gdyż jest to żmudne i zajmuje dużo miejsca w

druku (lub dużo czasu na wykładzie). Na ogół podaje się jedynie najważniejsze punkty (w tym wszystkie aksjomaty), a pozostałe szczegóły kompetentny czytelnik z łatwością może sam uzupełnić. Najistotniejszą jest przy tym informacja, czy chodzi o teorię elementarną czy o teorię wyższego rzędu.

Typowym przykładem tego sposobu redagowania jest aksjomatyka Peano podana w (Łoś, 1955, s. 11). Jest to pomyślane jako system gotowy do sformalizowania (Łoś pisze np. że N jest nazwą pewnego zbioru, a 0 jest nazwą pewnego przedmiotu), natomiast aksjomat indukcji zaczyna się od słów „Jeśli Z jest dowolnym zbiorem takim, że 1° $0 \in Z$ ...", które od razu sygnalizują, że chodzi o teorię drugiego rzędu. Ponieważ jest to tekst przeznaczony dla studentów, Łoś zredagował go tak, że może być czytany na dwóch poziomach: student czyta go na poziomie niesformalizowanym, a czytelnik bardziej zaawansowany — na poziomie sformalizowanym. Dzięki temu, że jest to system drugiego rzędu, możliwe jest udowodnienie (s. 39), że dla dowolnych dwóch modeli semantycznych M, K tego systemu aksjomatów istnieje dokładnie jeden izomorfizm między M i K, teoria jest więc kategoryczna.

Dodajmy, że w formalizacjach dokonywanych przez tych autorów, którzy kontynuowali podejście Hilberta, linie proste i płaszczyzny były pojęciami pierwotnymi, *indywiduami* reprezentowanymi przez zmienne pierwszego rzędu, a nie zbiorami swoich punktów; tak więc po ewentualnym dołączeniu do danej teorii również pojęć teorii mnogości, *prosta nie jest tym samym co zbiór jej punktów*, a idea głęboka „linia prosta" ma dwa modele formalne w tej samej teorii.

4.6. Elementarna teoria grup w ujęciu Mostowskiego (1948, s. 234) jest teorią sformalizowaną pierwszego rzędu, w której występują stałe specyficzne: G i σ, z aksjomatami:

$$\forall_{x,y,z,t}\ \sigma(x,z,t) \wedge \sigma(y,x,t) \Rightarrow (x = y); \qquad \forall_{y,z}\exists_x\ \sigma(x,y,z);$$
$$\forall_{x,z}\exists_y\ \sigma(x,y,z); \qquad \forall_{x,y}\exists_z\ \sigma(x,y,z);$$
$$\forall_{x,y,z,t,u,v}\ \sigma(z,u,v) \wedge \sigma(x,t,z) \wedge \sigma(y,t,u) \Rightarrow \sigma(x,y,v).$$

G to nazwa zbioru zwanego *grupą*, a σ to relacja trójczłonowa, przy czym $\sigma(x,y,z)$ czytane jest jako *x jest wynikiem złożenia y i z*. Pierwsze dwa aksjomaty to jednoznaczność i wykonalność działania w zbiorze G, dwa następne to istnienie działania odwrotnego, a ostatni to łączność działania.

Dopóki kwantyfikatory dotyczą — jak w powyższym przykładzie — wyłącznie elementów ustalonego zbioru G, wystarcza teoria pierwszego rzędu. Natomiast jeśli niezbędne są kwantyfikatory typu $\forall_{A \subset G}$ lub $\exists_{A \subset G}$, trzeba użyć teorii drugiego rzędu.

Zgodnie ze zwykłą definicją podawaną w podręcznikach, grupa to dowolny zbiór G z działaniem $G \times G \to G$ spełniającym warunki (G1)–(G3) z 3.4.

W terminologii 4.4–4.6, tak rozumiana grupa — to model semantyczny powyższej teorii sformalizowanej. W podręczniku (Rasiowa, 1968, s. 275) znajduje się definicja grupy jako zbioru A z operacją $A \times A \to A$ spełniającą zwykłe warunki, a w indeksie hasło „aksjomaty grup" odsyła czytelnika do tej definicji; terminy „definicja grupy" i „aksjomaty grupy" potraktowane zostały jako zamienne.

Należy podkreślić istotną różnice między 1° modelem semantycznym teorii sformalizowanej, np. teorii grup (takiej jaka podana jest w 4.6) a 2° modelem formalnym idei głębokiej grupy. Otóż modelem semantycznym sformalizowanej teorii grup jest każda pojedyncza grupa (np. grupa $\mathbf{Z}$ liczb całkowitych), tj. dowolny, ale jeden wybrany zbiór G z działaniem spełniającym warunki (G1)–(G3) z 3.4. Natomiast modelem idei głębokiej „grupa" jest teoria, w której występują: zbiór G z działaniem $G \times G \to G$, spełniającym te warunki, przy czym symbol G nie oznacza tu jakiejś jednej grupy G, lecz zmienna G przebiega wszystkie możliwe grupy.

Innymi przykładami przedstawiania teorii aksjomatycznej w postaci modelu w teorii mnogości są: teoria częściowego uporządkowania i teoria całkowitego uporządkowania (można je wprawdzie sformalizować jako teorie pierwszego rzędu, ale w podręcznikach dominuje prezentacja ich modeli semantycznych), definicja Kuratowskiego przestrzeni topologicznej (cytowana w 4.2) oraz zwykła aksjomatyka teorii prawdopodobieństwa na σ-ciele zbiorów. W takich przypadkach używa się często określenia: *zbiór ze strukturą zdefiniowaną aksjomatycznie.*

4.7. Określiliśmy *model formalny idei głębokiej* tworu matematycznego X jako odpowiednik tego tworu w jakiejś adekwatnej teorii aksjomatycznej. Wywody z 4.4–4.6 pokazują, jak należy interpretować to określenie: ów odpowiednik może być skonstruowany w arytmetyce liczb naturalnych, w arytmetyce liczb rzeczywistych, w systemach zerowo-jedynkowych (szczególnie dla potrzeb informatyki) i w teorii mnogości. Ogólnie biorąc, *ów odpowiednik może być wysłowiony bądź w terminach jakiejś niesformalizowanej teorii aksjomatycznej* (w której można używać intuicyjnych pojęć teorii mnogości), *bądź w terminach jakiejś teorii sformalizowanej, bądź w terminach modelu semantycznego teorii sformalizowanej* (jak już wspominaliśmy, twór X może mieć różne modele).

5. Dodatek: Filozoficzne aspekty koncepcji idei głębokich. Uzupełnimy tu to, co podane było w (Semadeni, 2002a, s. 85). Przypomnijmy, że rozwijając koncepcję idei głębokich staraliśmy się, by była ona możliwie neutralna filozoficznie; w każdym razie nie wymaga ona jakiegoś definitywnego zaangażowania ontologicznego.

5.1. Zaczniemy od stwierdzenia, że *koncepcja idei głębokich jest oparta na założeniu, że są one wynikiem długofalowego procesu konstruowania się ich w umyśle ludzkim.* Proces konstruowania się indywidualnych idei głębokich związanych z przestrzenią rozpoczyna się w niemowlęctwie, a początek konstruowania się pojęcia liczby naturalnej należy cofnąć jeszcze dalej, gdyż jednym z najsilniejszych bodźców percepcyjnych odczuwanych przez dziecko przed urodzeniem jest stały rytm serca matki, dobrze słyszalny w bezpośrednim sąsiedztwie. Ten rytm, zastąpiony później przez rytm towarzyszący odliczaniu: jeden, dwa, trzy, ..., kształtuje schematy umysłowe, na których opiera się konstruowanie pojęcia liczby naturalnej.

W procesie rozwoju pojęć matematycznych u dziecka bardzo istotną rolę odgrywa też oddziaływanie społeczne, edukacja, przekazywanie dorobku poprzednich pokoleń i nastawienia do matematyki, a także to wszystko, co Wilder (1950) określał mianem „kulturalnej bazy matematyki". Bardzo wyraźnie widać to na przykładzie pojęcia liczby ujemnej: kilka wieków temu sprawiało ono ogromne trudności czołowym matematykom Europy, a dziś jest ukształtowaną ideą głęboką już u dobrego licealisty.

Piaget i wielu innych badaczy podkreślało, że struktury umysłowe związane z matematyką wywodzą się z koordynacji odpowiednich czynności manualnych i myślowych. Prowadzą one do wytworzenia się obiektów takich jak liczby i figury geometryczne. Następuje potem wieloletni proces, w którym czynności umysłowe wykonywane są już nie na konkretnych przedmiotach, lecz na obiektach abstrakcyjnych; prowadzi to do obiektów na jeszcze wyższym poziomie hierarchii (Piaget, 1981). *Stare schematy nie zanikają, lecz zostają wbudowane w nowe.* Konstruowane są w ten sposób pewne struktury umysłowe, które mogą być znowu strukturyzowane na następnym szczeblu rozwoju (teoretycznie ten proces iteracji może mieć dowolnie wiele szczebli).

Te obiekty myślowe, które powstają w wyniku takiego procesu i spełniają warunki (α)–(ζ) z 2.7, uważamy za indywidualne idee głębokie. Takie ukształtowane już idee podlegają na ogół dalszym przekształceniom, są restrukturyzowane (potencjalnie proces ten może trwać tak długo, jak długo dana osoba zajmuje się aktywnie matematyką).

Rozmaite zależności między ideami głębokimi, przyjmujące postać twierdzeń, relacji itp. mają charakter *sądów koniecznych*, jakkolwiek nie muszą to być ani sądy a priori, ani sądy analityczne. Są sądami ugruntowanymi jako wynik rozwoju tych idei (w filogenezie i w ontogenezie). Sądy takie, jak choćby $7+5=12$ czy twierdzenie Pitagorasa, są uważane przez ogół matematyków za konieczne (oczywiście z zastrzeżeniem, że jest to wynikanie z przyjętych przesłanek). Twierdzenia bardzo zaawansowanych, współczesnych teorii są też uważane za konieczne.

Nie wyklucza to oczywiście ludzkich błędów, które są zjawiskiem dość częstym; jednakże, jak to podkreślił Thom (1974, s. 118), nigdy nie zdarzyło się, by czyjś błąd skierował naukę na fałszywe tory. Błąd w czymś istotnym zostaje zawsze wykryty i albo jest poprawiony albo też twierdzenie jest odrzucane bądź modyfikowane. Błędy w kwestiach drugorzędnych pozostają na półkach bibliotecznych bez wpływu na rozwój matematyki.

5.2. Omówimy teraz krótko stosunek koncepcji idei głębokich do dyskutowanej od stuleci kwestii platonizmu w matematyce[9]. Nie zakładamy, że idee głębokie epistemiczne mogą być utożsamione z bytami istniejącymi w jakimś idealnym i bezczasowym sensie, ale też nie negujemy tego. *Koncepcja idei głębokich, choć w swej części dotyczącej indywidualnych idei głębokich oparta jest na konstruktywiźmie, da się w pełni pogodzić z pewnymi formami platonizmu*[10], jest jednak zdecydowanie niezgodna z tą wersją platonizmu epistemologicznego, która przyjmuje, że umysł ludzki potrafi poznać owe idealne byty matematyczne dzięki jakiejś specjalnej, wrodzonej intuicji, która daje nam bezpośrednią wiedzę o badanych obiektach.

Jeśli natomiast przyjmie się — zgodnie z platonizmem — jakąś formę istnienia odwiecznych, niezależnych od ludzi bytów matematycznych, to

[9] Termin „platonizm" w sensie używanym obecnie przez matematyków wprowadził Bernays (1935); odpowiadającym temu przymiotnikiem jest „platonistyczny" (Murawski, 1986, s. 310). Filozofowie i logicy używają terminu „realizm", słowo zaś „platonizm" dotyczy zazwyczaj nurtu filozofii wywodzącego się od Platona (lub jakiejś jego części). Istnieje wiele odmian platonizmu matematycznego. Bernays wyróżnił różne stopnie założeń platonistycznych, od najsłabszego: istnienie ogółu liczb naturalnych (skąd wynika zasada wyłączonego środka dla tych liczb), poprzez istnienie pewnych konstrukcji z kursu analizy matematycznej, aż do silnych postaci platonizmu postulujących istnienie wszystkich obiektów występujących w matematyce; odrzuca jedynie *platonizm absolutny*, bo prowadzi do antynomii. Mac Lane (1986, s. 447) wymienia i krótko omawia cztery możliwe postawy matematyka-platonisty, wyróżnione wcześniej przez M. Resnika, nazwane: „platonik metodologiczny" (osoba używająca standardowego aparatu zbiorów nieskończonych i metod niekonstruktywnych), „platonik ontologiczny" (uznający istnienie zbiorów, liczb itp. na równi z istnieniem zwykłych przedmiotów), „platonik epistemologiczny" (utrzymujący, że wiedza o obiektach matematycznych jest częściowo oparta na bezpośrednim ich poznawaniu) i „platonik realistyczny" (który wierzy, że obiekty matematyczne istnieją niezależnie od ludzi i ich umysłów). Mac Lane wspomina też o „mitologicznym platoniźmie" (pewna wersja platonizmu metodologicznego) i o „platoniźmie mnogościowym" (przypisującemu obiektywne istnienie całej hierarchii zbiorów rozpatrywanych w teorii mnogości; jego zdecydowanym zwolennikiem był m. in. Gödel, por. 2.5). Znakomite, poglądowe omówienie rozmaitych aspektów platonizmu i jego słabych punktów można znaleźć w (Davis i Hersh, 1994); są tam też omówione słabe punkty argumentacji negującej platonizm. Syntetyczny przegląd pewnych aspektów postawy platonistycznej daje (Sfard, 1998). Argumenty za platonizmem przedstawia też (Penrose, 2000).

[10] Zwolennikiem poglądu, że konstruktywny styl myślenia nie jest przeciwstawiony platonizmowi, lecz może być traktowany jako jego istotne uzupełnienie, jest Misiek (2004, s. 141).

poznanie ich może jedynie polegać na konstruowaniu (w filogenezie, jako rezultatu wysiłków pokoleń matematyków) systemów pojęciowych, o których możemy zasadnie przypuszczać, że są izomorficznymi (lub być może jakoś homomorficznymi) odpowiednikami owych bytów idealnych. *Jeśli matematyczne byty platońskie jakoś istnieją poza umysłami ludzi, to bezpośredni dostęp mamy jedynie do naszych idei głębokich*, a do idei platońskich mamy dostęp jedynie p o ś r e d n i i to pod warunkiem, że idee głębokie dobrze im odpowiadają.

W każdym razie idea głęboka epistemiczna (rozumiana tak, jak w 2.8) nie może być uznana za ów byt platoński, bezczasowy, odwieczny, niezmienny, absolutny. Może najwyżej temu bytowi jakoś odpowiadać, może go odzwierciedlać (cokolwiek by to słowo miało znaczyć). Idea ta jest produktem kultury ludzkiej, ale z tego faktu n i e w y n i k a a n i istnienie a n i nieistnienie idei platońskich.

5.3. Koncepcja idei głębokich pozwala na pewne wyjaśnienie zjawiska rozpowszechnienia platonistycznych poglądów u matematyków. Otóż idee głębokie wydają się osobom, u których są należycie ukształtowane, tak naturalne i oczywiste, że prowadzą do dwojakiego rodzaju przekonania: 1° poczucie *konieczności* związków wynikania, które zachodzą między rozważanymi obiektami; 2° poczucie jakiejś formy ich *obiektywnego istnienia*.

Euklides pisał o figurach, które dopiero *będzie się konstruować*, o tym, że dwa punkty *można połączyć* prostą. Natomiast dla Hilberta figury o danych własnościach *istnieją od początku*, prosta przechodząca przez dwa dane punkty po prostu istnieje. Obecnie matematyk, a także uczeń czy student mogą nie zauważyć istotnej różnicy obu podejść. Dopóki nie zwróci się im na to wyraźnie uwagi, uważają, że są to dwa w pełni równoważne sposoby wysłowienia tego samego faktu (Bernays, 1935; Krajewski, 2003, s. 18). Innymi słowy, *przyzwyczajenie do platonizmu jest tak silne, że się go w ogóle nie zauważa*.

Liczby naturalne z działaniem dodawania w elementarnej aksjomatyce Peano to dla typowego matematyka „te same" liczby, które się rozważa w teorii mnogości ZF. Podobnie zbiór pusty $\emptyset$ w jednej aksjomatyce teorii mnogości to „ten sam zbiór pusty" w innej aksjomatyce. Jak to zauważa Krajewski (2003, s. 297–298), sformułowanie „te same liczby", „ten sam zbiór" — to *założenia platonizujące*. Tak więc mówienie o jednej idei głębokiej „liczby naturalne z działaniem dodawania" (lub „zbiór pusty") może być traktowane jako wiodące w stronę platonizmu. Nie implikuje to jednak platonizmu bezpośrednio, bowiem zarówno w przypadku indywidualnych jak i epistemicznych idei głębokich można ograniczyć się do tego, co jest w u m y s ł a c h ludzi. Zarazem koncepcja idei głębokich tłumaczy wyraźną, choć nie zawsze uświadomioną i nie zawsze konsekwentną postawę platonistyczną matematyków.

5.4. Drugą kwestią jest stosunek idei głębokich do *konstruktywizmu*. Jak wiadomo, termin ten odnosi się do dwóch istotnie różnych koncepcji. Jedną z nich jest *konstruktywizm psychologiczny* (określany też jako konstruktywizm dydaktyczny), którego najwybitniejszymi przedstawicielami są Piaget i von Glasersfeld; bardzo dobry przegląd tej problematyki można znaleźć w (Steffe, 1991). Drugą jest *konstruktywizm filozoficzny*, który jest kontynuacją i modyfikacją (lub, jak utrzymują niektórzy, synonimem) intuicjonizmu Brouwera.

Głównym założeniem doktryny Brouwera jest to, że jedynie te obiekty matematyczne mają rzeczywiste istnienie i sens, dla których dana jest ich konstrukcja, w skończonej liczbie dobrze określonych kroków, z obiektów pierwotnych (są nimi liczby naturalne). Brouwer odrzucał intuicję przestrzenną[11], zachował zaś intuicję czasową (Beth i Piaget, 1966, s. 20).

W konstruktywiźmie psychologicznym wyróżnić można prądy radykalne i umiarkowane. Te pierwsze kategorycznie negują wszelkie formy platonizmu (konsekwencją tego jest np. pogląd, że liczba 4 nie była obiektywną cechą nóg psa, dopóki ludzkość nie nauczyła się liczyć). Natomiast konstruktywizm umiarkowany ogranicza się do opisu rozwoju pojęć matematycznych w ontogenezie człowieka, nie wypowiadając się na temat istnienia lub nieistnienia obiektów matematycznych poza umysłami ludzi.

Konstruktywizm filozoficzny jest w swoim założeniu radykalny i antyplatonistyczny. Intuicjonizm Brouwera jest interesujący dla filozofów, natomiast matematycy bardzo rzadko są jego zwolennikami. Mostowski (1955, s. 28) napisał[12]: „Niestety odpowiednie definicje były sformułowane przez Brouwera w sposób bardzo skomplikowany i nieprecyzyjny, tak że nie odegrały żadnej istotnej roli poza kręgiem współpracowników Brouwera". To, czego nie akceptują matematycy, to z a k a z pewnych typów wnioskowań. Na przykład w logice intuicjonistycznej można podać e f e k t y w n ą, jednoznaczną konstrukcję liczby rzeczywistej $\widehat{\pi} - \pi$, która nie jest ani dodatnia, ani ujemna, ani równa zeru; szczegóły tej konstrukcji, pochodzącej od Brouwera, można znaleźć w (Davis i Hersh, 1994, s. 322). Matematykowi trudno jest pojąć, dlaczego punkt na osi liczbowej odpowiadający liczbie $\widehat{\pi} - \pi$ wprawdzie istnieje, ale nie leży ani na prawo, ani na lewo od 0, ani nie jest punktem 0; co więcej, pogląd taki ma być jakoby zgodny z intuicją.

[11] Por. (Bernays, 1935). Warto to porównać z opinią Thoma, który twierdził, że siła przekonująca schematów logicznych pochodzi od zawierania przestrzennego, a nie odwrotnie (Thom, 1974, s. 123).

[12] Ta opinia jest o tyle ważna, że Mostowski nie tylko był matematykiem i jednym z najwybitniejszych logików XX wieku, ale — jak to twierdził Łoś — w swej działalności naukowej był filozofem, bardzo dobrze znał intucjonizm i była to nawet jedyna logika (oprócz naszej zwykłej), którą Mostowski potrafił myśleć (Łoś, 1979). Dobre, krótkie, krytyczne omówienie intuicjonizmu daje (Bernays, 1935).

Z drugiej strony, trudno matematykowi pojąć, dlaczego konstrukcja myślowa składająca się z ze skończonej liczby elementarnych, efektywnych kroków, wykorzystujących tylko liczby naturalne, takich, że każdy krok jest akceptowalny przez intuicjonistów, ale składająca się z bardzo dużej liczby, np. 10^{25} takich kroków, a więc konstrukcja, której zapis wymagałby ponad 10^{23} kartek papieru, miałaby być uznawana za intuicyjną. Jeśli by jakiś intuicjonista uznał tak dużą liczbę kroków dowodu za przesadzoną i nie zaakceptowałby tego, to powstałby problem do jakiej liczby kroków dowód byłby akceptowalny i czy dowód o jeden krok dłuższy byłby już poza tą granicą.

Konstruktywizm Brouwera i jego kontynuatorów (A. Heytinga, E. Bishopa i innych) zaowocował licznymi efektywnymi konstrukcjami w zagadnieniach, w których wcześniej zadowalano się niekonstruktywnymi dowodami istnienia. Okazało się to później bardzo ważne dla informatyki, bowiem opieranie się wyłącznie na efektywnych, krok po kroku, konstrukcjach wykorzystujących liczby naturalne jest tym właśnie, czego potrzebują programiści.

Intuicjonizm znalazł uznanie w oczach informatyków. Tak więc, paradoksalnie, to właśnie komputerom, reprezentantom świata mechanicystycznego, przypadła rola wykorzystywania rozumowań, które Brouwer lansował jako intuicyjne. Z takich to zapewne powodów następcy Brouwera wprowadzili nazwę „konstruktywizm".

Powyższy wywód służy wyjaśnieniu, dlaczego *koncepcja idei głębokich*, choć oparta na umiarkowanym konstruktywiźmie psychologicznym, *jest nie do pogodzenia z konstruktywizmem kontynuatorów Brouwera.*

5.5. Podsumowując i uzupełniając powyższe wywody, stwierdzamy, bez rozwijania tego tematu, że koncepcja idei głębokich jest kompatybilna z pewnymi postaciami platonizmu i z pewnymi postaciami konstruktywizmu psychologicznego, a także z umiarkowanym konwencjonalizmem Poincarégo i z umiarkowanym strukturalizmem matematycznym (Parsons, 2002).

Natomiast nie da się pogodzić idei głębokich z logicyzmem, z nominalizmem i formalizmem, z apsychologicznym konceptualizmem, z radykalnym aprioryzmem, z intuicjonizmem, z pozytywizmem logicznym (Koła Wiedeńskiego), z behawioryzmem, z radykalnym konstruktywizmem psychologicznym, z radykalnym konwencjonalizmem, z radykalnym konstruktywizmem społecznym (głoszącym, że wiedza matematyczna ze swej natury nie jest czymś obiektywnym, twierdzenia matematyczne należą do sfery społecznego konsensusu, toteż mogą być negocjowane i zmieniane), ani z poglądami Wittgensteina (wczesnego i późnego), ani z poglądami tych wszystkich, którzy w matematyce widzą tylko coś w rodzaju „gry w szachy" (tzn. głoszą, że liczy się jedynie przestrzeganie dowolnie przyjętych formalnych reguł) lub pewne „gry językowe".

Ogólnie biorąc, koncepcji idei głębokich nie da się pogodzić z radykalizmem tych teorii, których punktem wyjścia jest zanegowanie podstaw teorii konkurencyjnych (Freudenthal, 1991, s. 142–147; Goldin, 2003).

Nawiązując do uwag z 2.11, zwróćmy uwagę na pewien aspekt wielokrotnie opisywanych różnic poglądów między matematykami a osobami o wykształceniu humanistycznym: pedagogami, lingwistami, filozofami, psychologami (Mac Lane, 1986, s. 444, wypowiedź o Wittgensteinie; Freudenthal, 1991, s. 142–147; Sfard, 1998; Krajewski, 2003; Goldin, 2003). Otóż jednym ze źródeł nieporozumień jest to, że osobie, która pewne pojęcia zna jedynie na podstawie tekstu definicji i jakiegoś poglądowego opisu, trudno jest pojąć nastawienie matematyka, dla którego pojęcie to stało się ideą głęboką w wyniku długoletnich doświadczeń zebranych przy studiowaniu własności tego pojęcia, dowodzeniu ich i — co najważniejsze — stosowaniu go jako narzędzia pracy zawodowej. W szczególności publikacje z podstaw matematyki, z natury nastawione formalistycznie, dają jednostronny obraz tego, czym jest matematyka.

W debatach dotyczących filozofii matematyki, w kontekście dydaktyki matematyki, w różnych publikacjach na świecie pojawiały się pewne bezpodstawne stwierdzenia. Zakwestionujemy tu, nie wchodząc w szczegóły, kilka z nich, które mają pewne odniesienie do koncepcji idei głębokich.

1° Z przyjętego tu założenia, że pojęcia matematyczne są konstruowane w umyśle człowieka, nie wynika, że wiedza matematyczna jest niezależna od zewnętrznego świata, ani nie wynika, że wiedza ta nie jest odbiciem pewnych bezczasowych regularności w świecie fizycznym.

2° Z założenia tego nie wynika też niemożliwość obiektywnej wiedzy matematycznej, ani prymat tego, co umysłowe, nad tym, co zewnętrzne.

3° Z platonizmu (rozumianego jako założenie istnienia abstrakcyjnych obiektów niezależnych od ludzkiego umysłu, które matematycy chcą odkryć i opisać) nie wynika, że liczby muszą być identyfikowane z pewnymi zbiorami, tj. identyfikowane z ich modelami formalnymi (por. Mac Lane, 1981, s. 468).

4° Z platonizmu nie wynika też, że 'discovery learning' oraz 'group learning' są niemożliwe, choć i takie opinie były publikowane.

Zwrot „nie wynika" należy interpretować tu tak, jak w logice: nie rozstrzyga to ani prawdziwości, ani fałszywości wniosku, mówi jedynie o braku związku wynikania między zestawianymi sądami.

Literatura*

A r n o l d, W. I.: 2001, O nauczaniu matematyki, *Wiadomości Matematyczne* **37**, 17–26.

B e r n a y s, P.: 1935, Sur le platonisme dans les mathématiques, *L'Enseignement Mathématique*, **34**, 52–59 [tłumaczenie polskie: O platoniźmie w matematyce, w: Murawski, 1986, 309–322].

B e t h, E. W., P i a g e t, J.: 1966 [1961], *Mathematical epistemology and psychology*, Reidel, Dordrecht.

B i a ł y n i c k i – B i r u l a, A.: 1976, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa.

B i a ł y n i c k i – B i r u l a, A.: 1987, *Zarys algebry*, PWN, Warszawa.

B i r k h o f f, G., M a c L a n e S.: (1963) [1954] *Przegląd algebry współczesnej*, wyd. II, PWN, Warszawa.

B o c h e ń s k i, J. M.: 1992 [1954/1989], *Współczesne metody myślenia*, W drodze, Poznań.

C o u r a n t, R., R o b b i n s, H.: 1998 [1941/1962], *Co to jest matematyka?*, wyd. II, PWN, Warszawa 1962; wznowione 1998, Prószyński i S-ka.

D a v i s, P. J., H e r s h, R.: 1994 [1981], *Świat matematyki*, PWN, Warszawa.

D e m b y, A.: 2000, Typy procedur algebraicznych, stosowanych przez uczniów w wieku 13–15 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **22**, 45–74.

D r e y f u s, T.: 1994 [1992], Imaginery and reasoning in mathematics and mathematics education, w: D. F. Robitaille et al. (eds.), Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education, Presses de l'Université Laval, Quebec, 107–122.

D u b i n s k y, E.: 1991, Reflective abstraction, w: D.O.Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 95–123.

D u d a, R.: 1982, Zasada paralelizmu w dydaktyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **1**, 127–138.

F e r r e i r ó s, J.: 1999, *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel.

F r e u d e n t h a l, H.: 1991, *Revisiting Mathematical Education. China lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

G å r d i n g, L.: 1993 [1977], *Spotkanie z matematyką*, PWN, Warszawa.

G l e a s o n, J. B., R a t n e r, N. B. (red.): 2005 [1998], *Psycholingwistyka*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

*W nawiasie [ ] podajemy rok ukazania się oryginalnej wersji.

G ö d e l, K.: 1964 [1947], What is Cantor's continuum problem, *American Mathematical Monthly*, **54** (1947), 515–525 [przedruk, wraz z supplementem, w: P. Benacerraf i H. Putman (red.), 1964, s. 258–273; tłumaczenie polskie w: Murawski, 2002, s. 103–123].

G o l d i n, G. A.: 2003, Developing complex understandings: on the relation of mathematics education research to mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 171–202.

G r a y, E. M., T a l l, D. O.: 1994, Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, no. 2, 115–141.

G r z e g o r c z y k, A.: 1970, O definicjach w nauczaniu matematyki, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 286–287.

G r z e g o r c z y k, A.: 1971, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN, Warszawa.

G r z e g o r c z y k, A.: 1975 [1961], *Zarys logiki matematycznej*, wyd. IV, PWN, Warszawa.

H e j n ý, M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **19**, s. 15–28.

H o s p e r s, J.: 2001, *Wprowadzenie do analizy filozoficznej*, Aletheia, Warszawa.

K r a j e w s k i, S.: 2003, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.

K u r c z, I d a: 1992, *Język a psychologia*, WSiP, Warszawa.

L u b o m i r s k i, A.: 1983, *O uogólnianiu w matematyce*, Ossolineum, Wrocław.

L y o n s, J o h n: 1976 [1968], *Wstęp do językoznawstwa*, PWN, Warszawa.

Ł o ś, J.: 1955, *Arytmetyka liczb podstawowych*, w: W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa, s. 7–64.

Ł o ś, J.: 1979, O Andrzeju Mostowskim, *Wiadomości Matematyczne* **22**, 45–47.

M a c L a n e, S.: 1981, Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics, *American Mathematical Monthly*, **88**, 462–472.

M a c L a n e, S.: 1986, *Mathematics. Form and Function*, Springer-Verlag, New York.

M a l c e w, A. I.: 1970, *Algiebraiczeskije sistemy*, Nauka, Moskwa.

M a r c i s z e w s k i, W. (red.): 1970, *Mała encyklopedia logiki*, Ossolineum, Wrocław.

M a s o n, J.: 1996, Expressing generality and roots of algebra, w: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (red.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer, Dordrecht, s. 65-86.

M i s i e k, J.: 2004, Genetyczna koncepcja matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka matematyki* **27**, 127–149.

M o s t o w s k i, A.: 1948, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa.

M o s t o w s k i, A.: 1955, The present state of investigations on the foundations of mathematics, *Rozprawy Matematyczne*, **9**, 3–48.

M u r a w s k i, R.: 1986, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań.

M u r a w s k i, R.: 2002, *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, PWN, Warszawa.

P a r s o n s, C.: 2002 [1990], Strukturalizm o obiektach matematyki, w: Murawski, 2002, s. 359–376.

P e n r o s e, R.: 2000 [1989], *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, wyd. III, PWN, Warszawa.

P i a g e t, J.: 1981 [1975], *Równoważenie struktur poznawczych. Centralny problem rozwoju*, PWN, Warszawa.

P i a g e t, J., G a r c i a, R.: 1989 [1983], *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.

Q u i n e, W. V. O.: 2000 [1953/1961], *Z punktu widzenia logiki*, Aletheia, Warszawa.

R a s i o w a, H.: 1968, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

R o ż e k, B.: 2005, Strukturyzacja dwuwymiarowego szyku prostokątnego przez dzieci w wieku od 10 do 13 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**,

S e m a d e n i, Z.: 1971, *Banach spaces of continuous functions*, vol. I, PWN, Warszawa.

S e m a d e n i, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41–92.

S e m a d e n i, Z.: 2002b, Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 93–117.

S e m a d e n i, Z.: 2003, Spłaszczanie się hierarchii pojęć, horyzontalne i wertykalne składowe matematyzacji i wieloznaczność terminu „model", *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 111–150.

S e m a d e n i, Z.: 2004a, Aspekty znaczeniowe i aspekty strukturalne pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 151–168.

S e m a d e n i, Z.: 2005, O zasadzie właściwego ukierunkowania (rozwinięcie myśli Zofii Krygowskiej), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 155-184.

S f a r d, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and object as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1–36.

S f a r d, A.: 1998, The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing?' w: A. Sierpińska i J. Kilpatrick (red.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*, vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 491–511.

S k e m p, R.: 1976, Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching* **77**, 22–26; przedruk w: Tall i Thomas (2002), str. 1–10.

S k e m p, R.: 1982, Communicating mathematics: surface structures and deep structures, *Visible Language* **16**, Number 3 (Special issue), 281–288.

S t e f f e, L. P. (red.): 1991, *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*, Springer-Verlag, New York et al.

S z e m i ń s k a, A.: 1991 [1981], Rozwój pojęć matematycznych u dziecka, w: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, tom 1, wydanie II, 1991, WSiP, Warszawa, s. 120–254.

T a r s k i, A.: 1959, What is elementary geometry?, w: L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959, s. 16–29 [przedruk w: J. Hintikka (red.), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 1969, s. 164–175].

T h o m, R.: 1974 [1971], Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, *Wiadomości Matematyczne* **18** (1974), 113–129.

v a n H i e l e, P. M.: 2003 [2002], Podobieństwa i różnice między teorią uczenia się i nauczania Skempa a poziomami myślenia van Hielego, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 183–202.

W i l d e r, R. L: 1950, The cultural basis of mathematics, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Cambridge, Mass., 258–273 [tłumaczenie polskie w: Murawski, 2002, s. 275–292].

Ż e l a z k o, W.: 1968, *Algebry Banacha*, PWN, Warszawa.

Deep ideas of axiomatically defined mathematical structures

Summary

The deep idea of a mathematical object X may be considered as

1° mental objects (the *individual deep ideas of* X) in the minds of various persons, or as

2° a single abstract epistemic object (*the deep idea of* X), an idealized common abstract version.

We may speak of an individual deep idea of X when it is *sufficiently well formed in the mind of a person*, and this presupposes:

(α) the person has a strong feeling of *familiarity* with X and can deal with X freely as part of inner thinking, without the need of referring to surface representations of X;

(β) X is well set in a coherent web of concepts (isolated concepts do not form deep ideas); the person knows and properly understands both X and basic ties between X and other concepts, at an adequate level of generality;

(γ) the person has a sense of *firm certainty* concerning basic, mathematically sound, context-independent statements about X;

(δ) the person is able to *apply* the knowledge concerning X reasonably, in various situations, whether mathematical or not;

(ε) the person considers various meanings of X in pertinent contexts (in real life and/or in mathematics and science) as *natural attributes* of X;

(ζ) in cases of typical cognitive conflicts, *the understanding of* X *is robust* (though it may evolve as a result of new experiences).

Hints of how to interpret these requirements (and how one can judge whether they are satisfied) depend on what is X.

Pertinent examples help to clarify the concept of a *formal model of a deep idea*, understood generally as a counterpart of this idea in an axiomatic theory (typically, expressed in arithmetics or in set theory). This theory may be formalized or non-formalized (with an intuitive concept of a set).

Although the deep ideas of axiomatically defined structures (such as 'group' or 'Boolean algebra') are defined in terms of their formal models, the epistemic deep idea, e.g., 'group' makes sense and is essentially different from the concept of a group that is based on axioms only.

In the appendix, relations of the construct 'deep idea' to various philosophies of mathematics are discussed. It is pointed out that this construct is based on moderate psychological constructivism; nevertheless it is compatible with some forms of Platonism.