ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

Zbigniew Semadeni
Uniwersytet Warszawski

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Koncepcja sieci wzajemnych powiązań idei głębokich i powiązań ich modeli formalnych

1. Wstęp. Punktem wyjścia tej pracy[1] jest koncepcja idei głębokich tworów matematycznych i ich modeli formalnych przedstawiona w (Semadeni, 2002). Poniżej zarysowana koncepcja *więzów*, pomyślana jako kolejny przyczynek do analizy idei głębokich, oparta jest na obserwacji, że podstawowe pojęcia tworzą różnorodne, specyficzne konfiguracje, których obraz bywa zniekształcony przez tradycyjny, euklidesowy wywód dedukcyjny.

1.1. Matematykę można prezentować w rozmaity sposób. Skontrastujemy następujące dwa ujęcia.

(Θ) Matematyka jako kolekcja teorii dedukcyjnych. Istotą dedukcji (globalnej) jest to, że — po dobraniu odpowiednich pojęć pierwotnych i aksjomatów — ustala się jakieś uporządkowanie[2] pojęć i twierdzeń, przy czym podstawowym założeniem metodologicznym jest to, że (w danej teorii) pojęcia późniejsze wolno definiować jedynie za pomocą wcześniejszych, a twierdzenia późniejsze mają być wydedukowane ze wcześniejszych.

(Δ) Matematyka jako sieć różnorodnych powiązań między rozpatrywanymi pojęciami. W sieci tej nie ma jakiejś ustalonej kolejności pojęć, nie ma potrzeby deklarowania, co się przyjmuje za pojęcia pierwotne i za aksjomaty. W tym ujęciu pojęcia i twierdzenia nie muszą być dedukcyjnie uporządkowane. Daje to inny obraz zależności między pojęciami niż tradycyjny układ dedukcyjny. W szczególności dopuszcza się tu zapętlenia definicyjne i pewne układy zależności, które w (Θ) są zakazane jako *circulus vitiosus* lub *petitio*

[1] Praca naukowa wykonana w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003–2006.

[2] Jest to uporządkowanie częściowe, tzn. nie wymaga się, by o każdych dwóch pojęciach (lub dwóch twierdzeniach) rozstrzygać, które z nich ma być wcześniejsze. Jednakże w praktyce autor prezentujący taką teorię w podręczniku musi rozszerzyć ten porządek do całkowitego, bowiem natura książki wymaga jakiejś konkretnej kolejności prezentacji materiału.

principi. Ujęcie (Θ) jest dziś dominujące w świadomości matematyków (choć niekoniecznie w ich codziennej pracy). Istotą ujęcia (Δ) jest to, że ukazuje matematykę jako *sieć pojęć powiązanych najprzeróżniejszymi więzami*[3].

Więzów jest oczywiście wiele, tak wiele, że można powątpiewać w realność programu ich systematycznej analizy. Część z nich to związki takie jak $3+4=7$, wszelkie twierdzenia, izomorfizmy itd. Jednakże takimi więzami nie będziemy się tu zajmować; przedmiotem rozważań będą powiązania innych rodzajów, wymienione w 2.1 poniżej.

Ogólnie biorąc, więzy mają dwie podstawowe cechy: 1) są w jakimś sensie (zależącym od pojęć, których dotyczą) naturalne, kanoniczne; 2) mają charakter sądów koniecznych, niezależnie od ich statusu w teoriach dedukcyjnych[4].

Każde z ujęć (Θ) i (Δ) daje jednostronny obraz matematyki, natomiast ujmowane łącznie, jako dwa oblicza tej samej dziedziny wiedzy, pozwalają na pełniejsze ogarnięcie całości. Ujęcie (Δ) oddaje pewną immanentną cechę matematyki jako takiej, podczas gdy poszczególne realizacje ujęcia (Θ) zależą od doboru aksjomatów oraz od kolejności prezentacji pojęć i twierdzeń teorii, co do pewnego stopnia zależy od decyzji twórców teorii, od trendów danego okresu czy też od koncepcji autora monografii.

Jednym z celów tej pracy jest *zwrócenie uwagi na niebezpieczeństwo złudnego identyfikowania kolejności wybranej w jakimś toku dedukcyjnym jako jedynej poprawnej*, prowadzi to bowiem do usztywnienia myślenia.

Świadomość możliwości wyboru różnych dróg określania pojęć, różnych dróg dedukcji, a w konsekwencji różnych możliwości ustalenia kolejności materiału nauczania, jest ważna dla nauczania matematyki, zwłaszcza na poziomie licealnym i uniwersyteckim. Brak tej świadomości i związany z tym brak elastyczności ujawnił się szczególnie wyraźnie w czasie reform pod hasłami „nowej matematyki", gdy prezentowanie modeli formalnych (nieraz bardzo sztucznych, jak np. w przypadku pary uporządkowanej) zastępowało kształtowanie pojęć.

Również i dzisiaj na wykładach uniwersyteckich nieraz przedstawia się przyszłym nauczycielom daną dziedzinę (np. początki rachunku różniczkowego lub rachunek prawdopodobieństwa) wyłącznie w ujęciu (Θ), co rzutuje na późniejsze nauczanie w liceum.

---

[3] Litera Θ nawiązuje do greckiego słowa ΘΕΩΡΊΑ (theoría), a litera Δ do greckiego słowa ΔΈΩ (znaczącego: wiążę, pętam, krępuję, przywiązuję) oraz do ΔΕΣΜΟΊ (znaczącego: więzy, również w sensie abstrakcyjnym).

[4] Taką *konieczną* własnością jest np. przemienność dodawania liczb rzeczywistych. W ujęciu (Δ) nie trzeba jednak deklarować, czy jest to część definicji (np. ciała liczb rzeczywistych) czy też twierdzenie jakiejś teorii.

Niejednokrotnie zwracano uwagę na to, że *rozważania dotyczące natury matematyki nie są jedynie kwestią filozoficzną.* Wiele osób (m. in. Krygowska, Freudenthal, Thom — cytowani w Semadeni, 2002, s. 42) wyrażało przekonanie, że *obraz matematyki przekazywany nauczycielom ma istotny* (często niestety negatywny) *wpływ na nauczanie szkolne.* Nie pomogą najlepsze programy i materiały metodyczne, jeśli nauczyciele, eksperci i rodzice niewłaściwie, jednostronnie pojmują, czym jest matematyka. *Pogląd na to, czym jest matematyka, ma wpływ na pogląd, jak powinna być prezentowana* (Hersh, 1979, s. 33).

Dobry przykład związku między dedukcyjnym obrazem matematyki a rzeczywistością szkolną widoczny był w 1976 r., gdy część osób odpowiedzialnych za matematykę w programie tzw. dziesięciolatki argumentowało w sposób stanowczy, że skoro zadecydowano, by wprowadzić do klasy V twierdzenie Pitagorasa, to powinny być też jego zastosowania m. in. do obliczania długości przekątnej kwadratu; zatem powinno się wprowadzić $\sqrt{2}$, a skoro tak, to w programie powinno być też pojęcie liczby rzeczywistej i liczby niewymiernej (jeden z profesorów domagał się nawet dowodu niewymierności $\sqrt{2}$). Gdy ukazał się podręcznik do V klasy próbujący dostosować się do zaleceń nowowprowadzanego programu, krytykowano autora za zbyt małą ścisłość.

Decyzję o skróceniu nauczania szkolnego z 12 lat do 10 i skomasowaniu materiału podjęły wprawdzie ówczesne władze partyjne, ale ów dedukcyjny wątek był wyrazem przekonania matematyków, że treści matematyczne muszą być „logicznie uporządkowane". Z hasła „logiczności" wyciągano wniosek, że aby można było mówić o $\sqrt{2}$, trzeba koniecznie wcześniej wprowadzić uczniom liczby niewymierne[5].

Innym skutkiem monopolu (Θ) jako obrazu matematyki było to, że często autorzy podręczników, nauczyciele i ci, co kształcą nauczycieli, za jedyne prawidłowe podejście uznają to, którego sami się kiedyś nauczyli, uważając inne określenia za niewłaściwe lub wręcz błędne (bądź tak to odbierają uczone przez nich osoby).

Co gorsza, zdarzało się, że w imię tak rozumianego ujęcia matematyki nie akceptowano poprawnego rozumowania ucznia lub studenta, jeśli nie mieściło się w sztywnym, wyuczonym schemacie. W publikacjach z dydaktyki matematyki opisanych jest wiele przykładów takich sytuacji. O jednym z charakterystycznych nieporozumień pojęciowych wspominamy w przykładzie 5 w 3.1.

Tak więc tradycyjne ujmowanie matematyki wyłącznie w kategoriach (Θ)

[5] Znacznie radykalniejsza pod tym względem była książka Bourbakiego, w której — aby konsekwentnie zachować ujęcie (Θ) dla całej matematyki — wprowadzanie $\sqrt{2}$ poprzedzono wprowadzeniem pojęcia *przestrzeni jednostajnej* (wspólnego uogólnienia przestrzeni metrycznych i grup topologicznych) i *uzupełnienia przestrzeni jednostajnej.*

prowadziło do rozmaitych niekorzystnych zjawisk, które ogólnie określa się jako nadmierny formalizm[6] w nauczaniu.

1.2. Aby jednak ujęcie (Δ) nie spowodowało zaniedbania należytego przedstawiania materiału nauczania, potrzebna jest świadomość jego możliwości i ograniczeń. Przyczynkiem do badania takich zagadnień jest niniejsza praca. Zajmiemy się następującymi kwestiami.

— Wstępne zarysowanie koncepcji kategoryzacji więzów kilku typów. Szczególnie ważne są dla nas te powiązania, w których pojęcia pojawiają się nie pojedynczo, lecz w pewnych specyficznych *konfiguracjach*. Jeśli dwa człony takiej konfiguracji wyznaczają się kanonicznie, mówimy o *więzach determinujących dwustronnych*. Taką konfiguracją jest para relacji $<$ i $\leqslant$ w zbiorze uporządkowanym (przykład 5). Mogą to być bądź *powiązania między ideami głębokimi* (w lokalnym lub globalnym ujęciu matematyki), bądź *powiązania między ich modelami formalnymi* (por. 2.5).

— Analizowanie innych typów więzów, mających charakter *szeroko rozumianej równoważności* (w różnorodnych sytuacjach) z perspektywy ujęcia (Δ). Chodzi nam o próbę pokazania tego, co może kryć się za często spotykanymi zwrotami typu: „to właściwie znaczy to samo", „różnice między tymi definicjami są czysto formalne, nieistotne", „jest to w zasadzie to samo pojęcie", „można je utożsamić".

Podstawowym celem edukacji matematycznej powinno być utworzenie w umyśle ucznia trwałej, zrozumiałej dla niego sieci wzajemnych powiązań najważniejszych pojęć. Nie chodzi jednak bynajmniej o to, aby na zajęciach z dydaktyki używać wprowadzonej w tej pracy terminologii. Nazwy typów 1°–6° wymienione w 2.1 mają jedynie służyć jako narzędzia, ułatwiające zrozumienie różnej natury więzów poszczególnych typów, co z kolei może pomóc w analizowaniu niezmiernie skomplikowanej sieci zależności matematycznych w ujęciu (Δ).

[6] Termin „formalizm" może oznaczać, zależnie od kontekstu: (I) *formalizm filozoficzny*, będący jednym z głównych prądów filozofii matematyki w XX wieku oraz (II) *formalizm dydaktyczny*, będący opisem pewnych tendencji w nauczaniu; w tym drugim sensie używała go Krygowska. Te negatywne tendencje były (i są) pewnym odbiciem owego stanowiska filozoficznego, na co zwrócili uwagę m. in. Browder i Mac Lane (1983, s. 371). W nauczaniu szkolnym do wyjątków należało jednak głoszenie tak radykalnych postulatów (np. potrzeby całkowitego odrywania symboli od znaczenia) jak w formaliźmie filozoficznym (por. Freudenthal, 1973, s. 149). W nieco innym znaczeniu słowa „formalizm" używa Hejný (1997, s. 19): formalizm pojawia się wtedy, gdy fragmenty wiedzy przenikają do pamięci ucznia bezpośrednio z głowy nauczyciela. Hejný podaje cechy *wiedzy formalnej* ucznia (zwanej również wiedzą bezmyślną, werbalną, okaleczoną).

Przymiotnik „formalistyczny" odnosi się do formalizmu w sensie (I) lub (II); nie należy go odnosić do formalizacji teorii.

Parafrazując powiedzenie Thoma (1974, s. 134), można stwierdzić, że rozpatrywane tu więzy to jedynie „grube wiązania". Bardzo ważne są też subtelniejsze wiązania między pojęciami, wynikające z ich sensu, znaczenia; wymykają się one jednak wyraźniejszym opisom.

1.3. W rozumowaniach matematycznych stale wykorzystuje się sieć idei głębokich i ich wzajemnych powiązań. W umyśle człowieka sieć ta tworzy się stopniowo, w wyniku wieloletniego procesu rozwoju pojęć matematycznych, który był przedmiotem badań Piageta i wielu innych osób. Najistotniejszą rolę w powstawaniu tej sieci odgrywają: świadome aktywności matematyczne i refleksja nad wykonywanymi czynnościami i otrzymanymi wynikami, rozwiązywanie zadań, proces matematyzowania, wykorzystywanie analogii, dedukcja lokalna, a później fragmenty dedukcji globalnej.

Ujęcie (Δ) odpowiada pewnej dojrzałej postaci takiej sieci. Jest ono nie tylko znacznie bliższe — w porównaniu z (Θ) — temu, co kształtuje się w umyśle ucznia, ale też jest bliskie temu, czym w praktyce posługuje się matematyk. Na przykład, niewielu współczesnych matematyków przeszło całą drogę dedukcyjną od aksjomatów geometrii euklidesowej do tych twierdzeń, którymi posługują się na codzień, a jeśli nawet przeszli tę drogę jako studenci, w praktyce nigdy z tego nie korzystają; podobne uwagi dotyczą arytmetyki i algebry na poziomie szkolnym, całki Lebesgue'a względem dowolnej miary itp.

Z drugiej strony ujęcie (Θ) — oprócz tego, że jest jednym z najważniejszych rysów charakterystycznych matematyki — odgrywa istotną, bardzo ważną rolę w jej unifikacji. Przyczynia się do tego, że matematyka stanowi dziś jedną całość i nie rozpada się na jakieś niepowiązane strukturalnie dziedziny.

1.4. Z uwagi na przedstawione powyżej założenie badawcze, nie rozpatrujemy tu wielu innych aspektów matematyki, w szczególności tego, co Freudenthal (1973, s. 114; 1991, s. 14) określał mianem *matematyki jako pewnego typu aktywności*, chociaż jest to niewątpliwie bardzo ważny punkt widzenia. Z drugiej jednak strony, prowadzone tu rozważania mogą przyczynić się do lepszego zrozumienia zarówno potencjału tkwiącego w takich aktywnościach, jak i ich ograniczeń.

Drugim zastrzeżeniem, które należy tu uczynić, jest to, że pewna wieloznaczność oraz rozmycie części terminów użytych w tej pracy są zapewne nieusuwalne. Można mieć jedynie nadzieję, że przez kolejne eksplikacje, oparte na analizie rozmaitych przykładów, ujawniających się w zwykłej praktyce matematyka, zarówno naukowej jak i dydaktycznej, uda się rozważane koncepcje wystarczająco wyjaśnić. W szczególności brak precyzyjnej definicji pojęcia więzów wynika z samej natury prowadzonej analizy, której nie da się wyrazić w ścisłym języku matematyki czy logiki, analiza ta wychodzi bowiem poza

to, co jest wyrażalne w takim języku. Podobne zastrzeżenie czynił Lubomirski (1983) w odniesieniu do szeroko stosowanego terminu „uogólnienie". Nie wiadomo, jaka definicja (nawet jeśli dopuści się opisy wieloczłonowe) mogłaby być wystarczająco precyzyjna i zarazem objąć wszystkie przypadki, w których mówi się o uogólnianiu (pojęcia, twierdzenia itp.), tak bardzo różnorodne są te przypadki, choć każdy z osobna jest dobrze rozumiany przez matematyków.

1.5. W dydaktyce matematyki pierwszej połowy XX wieku (zwłaszcza od czasu reform z kręgu Felixa Kleina) dominowało dążenie do ustrukturyzowania wiedzy szkolnej zgodnie z układem dedukcyjnym odpowiednich teorii aksjomatycznych (na wzór wcześniejszego ustrukturyzowania szkolnego kursu geometrii w duchu Euklidesa). Prowadziło to często do swoistych *inwersji dydaktycznych* (w terminologii Freudenthala), a mianowicie do prezentowania materiału w kolejności odwrotnej do tej, do której doszli twórcy danej dziedziny, a co najważniejsze — odwrotnej do kolejności optymalnej dla nauczania, niezgodnej z naturalnym rozwojem pojęć matematycznych u uczniów.

W latach sześćdziesiątych, w czasach reform w duchu „nowej matematyki" nastąpiła wprawdzie (zwłaszcza we Francji) istotna zmiana teorii dedukcyjnych, według których zamierzano ustrukturyzować nauczanie (usunięto Euklidesa, wprowadzono elementy teorii mnogości), ale istota inwersji dydaktycznej pozostała w zasadzie niezmieniona.

2. Pojęcie więzów. Rozpatrywane w tej pracy powiązania między pojęciami matematycznymi nazywamy *więzami*[7]. Ich sens jest wyjaśniany w dalszych częściach pracy w kontekście odpowiednio dobranych przykładów. Nie dajemy definicji więzów; można nawet wątpić, czy jakaś w miarę precyzyjna definicja, dobrze pasująca do intuicji tych więzów w różnych dziedzinach matematyki, jest w ogóle możliwa.

2.1. Pomimo powyższych zastrzeżeń wyróżnimy kilka typów więzów i wskażemy, na czym polegają różnice między nimi. Nie wyczerpują one wszystkich ważnych typów więzów, bowiem *ograniczamy się tylko do takich sytuacji, które rzucają światło na koncepcję idei głębokich i na trudności z tym związane.*

1° *Więzy determinujące dwustronne.* Chodzi o takie sytuacje, w której pewne obiekty wyznaczają się wzajemnie: obiekt jednego typu kanonicznie wyznacza obiekt drugiego typu i na odwrót (przykłady 1–8 i 10). Chodzi zarówno o pojęcia, które bywają równoważne lub w jakimś sensie bliskie, jak i o takie, które — wręcz przeciwnie — są kontrastujące.

[7] W wielu przypadkach więzy te są pewnymi relacjami n-członowymi między rozpatrywanymi obiektami. Jednakże słowo „relacja" jest w matematyce terminem zdefiniowanym i z tego powodu nie byłoby ono stosowne w przypadku więzów, dla których nie ma takiej jednej definicji i które nie zawsze dają się sprowadzić do jakiejś relacji.

Terminu „kanoniczny" nie definiujemy ogólnie. Jest on określany każdorazowo w sposób specyficzny dla rozpatrywanej klasy zagadnień, z zastrzeżeniem, że takie kanoniczne przyporządkowanie musi być określone w sposób *naturalny i jednolity dla całej klasy rozważanych zagadnień.*

2° *Więzy determinujące jednostronne*, w których obiekt jednego typu kanonicznie determinuje obiekt drugiego typu, ale obiekty te nie wyznaczają się wzajemnie, zależność jest jednostronna (przykłady 9–11).

Następne trzy typy więzów dotyczą pojęć, które można uznać za równoważne w jakimś wyróżnionym sensie.

3° *Więzy synonimiczności ekstensjonalnej*, w których dwa określenia A i B mają identyczny zbiór desygnatów, tę samą ekstensję (Bocheński, 1992, s. 61; Quine, 2000, s. 50–51 i 161–163), tzn. każdy przedmiot, o którym można prawdziwie orzec, że ma własność A, ma też własność B i na odwrót (przykłady 12–13).

4° *Więzy utożsamiania pojęć*, które formalnie są różne, ale w pewnych sytuacjach mogą być używane zamiennie, jedne zamiast drugich, toteż mówimy o możliwości ich utożsamienia (przykłady 15–18).

5° *Więzy odpowiedniości międzymodelowej* (gdy pojęcia z jednej teorii mają swoje odpowiedniki w drugiej, przykłady 19–20).

6° *Więzy przyporządkowania hierarchicznego*; są to rozmaite zależności uogólnienia, będące przedmiotem wnikliwej analizy w (Lubomirski, 1983). Nie omawiamy ich w tej pracy; sygnalizujemy je jedynie dla pełniejszego zarysowania zakresu problematyki więzów.

Trzeba wyraźnie podkreślić, że granice pomiędzy typami 1°–5° są nieostre. Zdarzają się sytuacje, w których dana jest dobrze znana para obiektów P i Q oraz więzy między nimi, a mimo to rozstrzynięcie, czy zaliczyć je do typu 1°, do 3° czy do 5° zależy od naszej interpretacji tej sytuacji. Istotną rolę odgrywa tu język: przejawiamy naturalną tendencję, aby pojęcia, które opisuje się za pomocą identycznych lub podobnych słów, traktować jako semantycznie bliższe. Warto w tym kontekście porównać przykład 21 (trójkąty) z przykładem 1 (okręgi). Z drugiej strony, nie zauważa się czasem bardzo bliskich związków między pojęciami o kontrastujących nazwach.

2.2. Dla uniknięcia nieporozumień warto też podkreślić, że ani związku idei głębokiej obiektu X z jej modelem formalnym, ani odwrotnego związku modelu z ideą głęboką nie zaliczamy do więzów.

Często natomiast *więzy między ideami głębokimi mają swoje oczywiste odpowiedniki na poziomie ich modeli formalnych i na odwrót* (co widać w przypadku pary $<$ i $\leqslant$, przykład 5), toteż w takich sytuacjach nie jest na ogół

potrzebne ani staranne odróżnianie terminologiczne tych dwóch poziomów więzów ani stosowanie odmiennej notacji.

3. Więzy determinujące dwustronne. Więzy te dotyczą wszelkich sytuacji, w których w naturalny sposób mamy do czynienia z parami obiektów A, B wyznaczających się wzajemnie: obiekt A kanonicznie wyznacza obiekt B i na odwrót. Stawiamy przy tym warunek, że *oba obiekty są opisane w języku tej samej teorii.*

3.1. Typowymi przykładami więzów determinujących dwustronnych są: okrąg i odpowiadające mu koło (przykład 1); relacja $<$ i odpowiadająca jej relacja $\leqslant$ (przykład 5). Pokażemy też inne przykłady, w których wyróżnione pojęcia zawsze współistnieją w pewnych typowych *konfiguracjach*: parach, trójkach, czwórkach itp.

PRZYKŁAD 1. Dowolny **okrąg** (na płaszczyźnie) wyznacza cztery inne figury: odpowiadające mu koło domknięte, odpowiadające mu koło otwarte, ponadto otwarte zewnętrze koła i domknięcie tego zewnętrza. Jeśli zapiszemy definicję każdej z tych pięciu figur geometrycznych w postaci warunku, jaki ma spełniać odległość punktów figury od jej środka, to pojawią się tam relacje: $=r$, $\leqslant r$, $<r$, $>r$, $\geqslant r$. Jest to przykład konfiguracji pięciu figur i $\binom{5}{2}$ więzów determinujących dwustronnych, kanonicznych, jednakże każde dwie z tych pięciu figur uważamy za istotnie różne. Podobną konfigurację można podać w przypadku elipsy i — ogólniej — w przypadku dowolnej krzywej zamkniętej bez punktów podwójnych (krzywej Jordana).

PRZYKŁAD 2. **Średnice sprzężone** elipsy — to para średnic (cięciw przechodzących przez środek), z których każda przechodzi przez środki cięciw równoległych do drugiej. Powyższy warunek można interpretować jako więzy dwustronne między średnicami: każda średnica wyznacza jednoznacznie swą średnicę sprzężoną.

PRZYKŁAD 3. Niech n będzie **liczbą naturalną**, $n>0$. Liczbie tej możemy przyporządkować pewne obiekty arytmetyczne:

(a) ciąg $(0,n),(1,n-1),\ldots,(n-1,1),(n,0)$ wszystkich rozkładów liczby n na sumę $m+k$ dwóch składników naturalnych,

(b) rozkład liczby n na czynniki pierwsze: $n = 2^{m_1}3^{m_2}5^{m_3}\ldots \quad (m_j \geqslant 0)$,

(c_q) przedstawienie liczby n w systemie pozycyjnym o podstawie q $(q \geqslant 2)$, tj. w postaci $n = c_0 + c_1 q + \ldots + c_k q^k$ $(0 \leqslant c_j < q)$.

Każdy z wymienionych powyżej obiektów: ciąg $(0,n),\ldots(n,0)$, rozkład $2^{m_1}3^{m_2}5^{m_3}\ldots$, przedstawienie pozycyjne przy podstawie $q=2$, przedstawienie pozycyjne przy podstawie $q=3$ itd. wyznacza liczbę n w sposób wzajemnie jednoznaczny. Mamy tu liczne więzy dwustronne, kanoniczne.

PRZYKŁAD 4. Niech n, m będą liczbami naturalnymi ($n > 0$, $m > 0$). Mówimy, że liczba n jest **podzielna** przez m, gdy iloraz $n:m$ jest liczbą naturalną. Liczba n nazywa się **wielokrotnością** liczby m, gdy istnieje liczba naturalna q taka, że $n=mq$. Między relacją podzielności a relacją wielokrotności zachodzą więzy dwustronne: n jest podzielne przez m wtedy i tylko wtedy, gdy n jest wielokrotnością m. W zasadzie chodzi więc o to samo zagadnienie, widziane z dwóch różnych stron: w jednej wychodzi się od n i od próby dzielenia n przez m, w drugiej wychodzi się od m, po czym sprawdza się, czy wśród liczb m, $2m$, $3m$, ... znajduje się liczba n. W ten sposób dwie idee głębokie: „podzielność", „wielokrotność" tworzą razem jedną ideę, obejmującą te dwie i ich wzajemny związek. Jednakże dla wielu uczniów klasy III są to dwa niepowiązane zagadnienia.

Podobny charakter mają więzy między działaniem arytmetycznym a działaniem do niego odwrotnym (lub dwoma działaniami odwrotnymi, jak w przypadku a^b, $\sqrt[a]{b}$ i $\log_a b$). Celem nauczania powinno być docelowe ukształtowanie idei głębokich nie tylko pojedynczych działań (np. + i −), ale również par działań, takich jak para (+, −). Z tego postulatu bynajmniej jednak nie wynika — wbrew temu, co głoszono w latach siedemdziesiątych — że należy już na początku „wprowadzać odejmowanie jako działanie odwrotne do dodawania" (typowe sformułowanie z programów nauczania). Analogiczne uwagi dotyczą więzów między przekształceniami geometrycznymi (np. przesunięciami) a przekształceniami do nich odwrotnymi.

PRZYKŁAD 5. Idea głęboka ogólnego pojęcia relacji **porządku** (czyli, w nieco innej terminologii, *porządku częściowego*) na zbiorze X kształtuje się (w wyniku różnorodnych, świadomych aktywności matematycznych, od przedszkola po uniwersytet) jako *synteza szczególnych przypadków i uogólniającej definicji aksjomatycznej*. W teorii zbiorów uporządkowanych definiuje się m. in. $\sup(a, b)$ jako element c spełniający warunki: 1° $c \geqslant a$ i $c \geqslant b$ oraz 2° c jest najmniejszym elementem spełniającym obie nierówności w 1° (taki element c nie musi istnieć); dualnie definiuje się $\inf(a, b)$.

Do najważniejszych szczególnych przypadków ogólnego pojęcia relacji porządku należą:

(a) relacja $<$ (a także relacja $>$) dla liczb (np. na zbiorze liczb naturalnych lub zbiorze liczb wymiernych czy rzeczywistych);

(b) dwa naturalne uporządkowania punktów linii prostej na płaszczyźnie;

(c) relacja podzielności dla liczb naturalnych $1, 2, \ldots$ (wówczas $\sup(n, m)$ to najmniejsza wspólna wielokrotna liczb n, m, a $\inf(n, m)$ to największy wspólny podzielnik liczb n, m), a także związana z nią relacja wielokrotności (por. przykład 4);

(d) relacja zawierania się $A \subset B$ podzbiorów ustalonego zbioru X, wówczas $\sup(A, B)$ zbiorów A, B to $A \cup B$, a $\inf(A, B)$ to $A \cap B$.

Do modelu formalnego idei głębokiej „relacja porządku" można dojść dwiema drogami.

Droga I. Określa się najpierw relację $\leqslant$, która ma spełniać następujące warunki:

(1) dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $x \leqslant x$,

(2) dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$, jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, to $x = y$,

(3) dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, jeśli $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, to $x \leqslant z$.

Następnie definiuje się, wtórnie, relację $<$ (zwaną nierównością *ostrą* lub *silną*) warunkiem

(4) $x < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leqslant y$ i $x \neq y$.

Wówczas tak zdefiniowana relacja $<$ na X spełnia warunki

(5) dla dowolnego $x \in X$ nie zachodzi $x < x$,

(6) dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$, jeśli $x < y$, to nie zachodzi $y < x$,

(7) dla dowolnych $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$.

Droga II. Określa się najpierw ogólne pojęcie relacji $<$ warunkami (5)–(7), a następnie, w tym ujęciu wtórnie, relację $\leqslant$ warunkiem

(8) $x \leqslant y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$ lub $x = y$.

Wówczas tak zdefiniowana relacja $\leqslant$ na X spełnia warunki (1)–(3).

Warunki (4) i (8) wiążące parę relacji $<$ i $\leqslant$ na zbiorze X stanowią przykład *więzów determinujących dwustronnych*. Każda z tych relacji wyznacza drugą w sposób jednoznaczny i ponadto *kanoniczny* dla teorii relacji porządku.

Obie te relacje $<$ i $\leqslant$, traktowane jako nieodłączna para, stanowią *strukturę* pewnego porządku na X. *To, którą z tych relacji przyjmiemy za wyjściową, a którą za wtórną, jest matematycznie nieistotne.* Autor podręcznika może wybrać bądź drogę I, bądź drogę II. Innymi słowy, może zdefiniować ogólne pojęcie relacji porządku, wybierając za punkt wyjścia którąkolwiek z relacji $<$ i $\leqslant$, byleby był w tym konsekwentny i nie powodował zbędnych konfliktów z terminologią innych autorów.

Wprowadzając dodatkowy warunek

(9) dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi albo $x < y$, albo $y < z$, albo $x = y$,

określamy strukturę *porządku całkowitego* (zwanego również *liniowym*)[8]. Tutaj również nie jest istotne, od której relacji rozpoczniemy: od $<$ czy od $\leqslant$.

[8] Słowo „całkowity", pozostające w naturalnej opozycji do słowa „częściowy", jest trafniejsze od słowa „liniowy", które wchodzi w kolizję z terminem *struktura częściowego porządku przestrzeni liniowej* (np. przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$).

W dalszym ciągu tych rozważań przyjmujemy, że termin „porządek" bez dodatkowego określenia odnosi się zarówno do porządku częściowego jak i całkowitego.

W pewnych podręcznikach podawano informację, że w matematyce wyróżnia się trzy typy relacji porządkujących: relację porządku $<$, relację porządku $\leqslant$ i relację częściowego porządku $\leqslant$ (z podaniem odpowiednich warunków; kwestia użytych nazw jest tu nieistotna). Niestety, *takie ujęcie jest nietrafne, mylące, powierzchowne*; jego źródłem jest zapewne to, że w popularnych opracowaniach i monografiach dotyczących relacji częściowego porządku operuje się zazwyczaj relacją $\leqslant$, tj. wybiera się drogę I (na poziomie uniwersyteckim znak $\leqslant$ bywa używany częściej niż znak $<$), natomiast w nauczaniu szkolnym wcześniej pojawiają się znaki $<$ i $>$, a dopiero znacznie później znaki $\leqslant$ i $\geqslant$.

W rzeczywistości mamy dwa podstawowe typy struktur matematycznych: porządku częściowego i porządku całkowitego, a każdy z tych dwóch typów określony jest przez parę relacji: $<$ i $\leqslant$. Świadomość tych więzów determinujących dwustronnych jest istotna dla właściwego rozumienia podstawowych pojęć teorii zbiorów uporządkowanych.

Powinno się więc mówić bądź o czterech typach relacji i o związanych z nimi czterema ideami głębokimi, bądź o dwóch istotnie różnych pojęciach (i ideach głębokich): strukturze porządku częściowego i strukturze porządku całkowitego. Każda z tych dwóch struktur może być wprowadzona zarówno poprzez relację $<$ jak i poprzez $\leqslant$. Wybór między nimi jest kwestią drugorzędną. Natomiast mówienie o trzech typach relacji zniekształca obraz całości.

Pouczające jest to, że oprócz powyżej rozważanej pary $<$ i $\leqslant$ można też rozważać zupełnie inne pary wywodzące się z danej relacji porządku $\leqslant$, przy czym również mamy do czynienia z więzami determinującymi dwustronnymi i kanonicznymi. Jedną z nich jest para: porządek $\leqslant$ wraz z *porządkiem odwrotnym* $\leqslant^*$, określonym zależnością: $x \leqslant^* y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \leqslant x$. Innymi słowy, bierzemy wykres relacji, tj. zbiór par $\{(x, y) : x \leqslant y\}$ i zamieniamy wszystkie pary (x, y) na (y, x) (por. Mostowski, 1948, s. 119). Na przykład, jeśli $\leqslant$ jest relacją jednego z dwóch naturalnych porządków punktów prostej na płaszczyźnie euklidesowej, to $\leqslant^*$ jest porządkiem przeciwnym.

Inny charakter ma *negacja* relacji $\leqslant$, a mianowicie relacja $\not\leqslant$. W przypadku porządku całkowitego negacja relacji $<$ daje relację $\geqslant$, jednakże w ogólnym przypadku $\not\leqslant$ jest relacją różną od pozostałych tu omawianych (np. jeśli zdefiniujemy relację porządku na zbiorze $\{1, 2, \dots\}$ jako relację podzielności, to jej negacja będzie relacją „niepodzielności").

Podsumowując ten przykład, stwierdzamy, że w ogólnym przypadku zbioru uporządkowanego mamy osiem relacji: $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$, $\not\leqslant$, $\not\geqslant$, $\not<$, $\not>$, a między

nimi liczne więzy determinujące, dwustronne, kanoniczne[9].

PRZYKŁAD 6. Niech U będzie dowolnym ustalonym *uniwersum* (zależnym od rozpatrywanej teorii). Uniwersum tym może być np. zbiór $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych, a w geometrii — zbiór wszystkich punktów płaszczyzny (lub przestrzeni). Operacja **dopełniania** dowolnemu podzbiorowi A tego uniwersum przyporządkowuje zbiór A' określony jako $U \setminus A$.

Związek między A i A' jest przykładem więzów determinujących dwustronnych, z którego wywodzi się wiele innych więzów, np. koło i jego zewnętrze (przykład 1), relacja $\leqslant$ i jej negacja $\not\leqslant$ (przykład 5) oraz sieć kwadratowa i jej dopełnienie (przykład 22).

PRZYKŁAD 7. Rozpatrujemy ustaloną przestrzeń X i jej podzbiór $A \subset X$. **Funkcja charakterystyczna** zbioru A jest określona wzorem $\chi_A(x) = 1$ dla $x \in A$ i $\chi_A(x) = 0$ dla $x \notin A$. Między podzbiorami przestrzeni X a ich funkcjami charakterystycznymi mamy kanoniczną odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną $A \to \chi_A$; są to więzy determinujące dwustronne. Z uwagi na związki takie jak $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$ oraz $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$, wiele kwestii dotyczących zbiorów da się przełożyć na język ich funkcji charakterystycznych.

Więzy między A i χ_A mają szczególne znaczenie w przypadku, gdy X jest zbiorem skończonym. Wówczas χ_A można interpretować jako *zakodowanie* w postaci ciągu zer i jedynek dowolnego podzbioru A zbioru X. Tego typu kody mają podstawowe znaczenie w informatyce. Są częścią ogólniejszej metody kodowania, którą w poszczególnych przypadkach można interpretować jako tworzenie *formalnych modeli idei głębokich w systemach zer i jedynek.*

3.2. W każdym z rozpatrywanych powyżej przykładów indywidualną ideę głęboką może być z jednej strony każdy osobny człon rozpatrywanej konfiguracji jak i cała konfiguracja z więzami determinującymi dwustronnymi i kanonicznymi. W przykładzie 1 można więc mówić zarówno o pięciu ideach głębokich figur: okrąg, koło domknięte, koło otwarte, otwarte zewnętrze koła, domknięcie tego zewnętrza, ale także o idei głębokiej konfiguracji tych pięciu figur i więzów między nimi. Należy przy tym podkreślić, że te idee głębokie, ukształtowane zapewne u każdego matematyka i u wielu licealistów, nie wy-

[9] Nawiązując do programu erlangeńskiego Kleina, warto postawić kwestię niezmienniczości tych więzów względem odpowiednich grup przekształceń. Rozpatrując dowolną bijekcję $X \to Y$ (wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie z X na Y), z łatwością stwierdzamy, że więzy między $<$ i $\leqslant$ w X transformują się na odpowiadające więzy między relacjami $<$ i $\leqslant$ w Y. Również więzy między $<$ i $\leqslant$ w X indukują odpowiadające więzy w dowolnym podzbiorze X_0 zbioru X. Można także kanonicznie rozszerzyć te więzy z X do dowolnego nadzbioru Z zbioru X, przyjmując, że jeśli $z_1 \in Z \setminus X$ lub $z_2 \in Z \setminus X$, to relacja $z_1 < z_2$ nie zachodzi. Jednakże *taki wymóg niezmienniczości* (jakkolwiek niezbędny) *jest za słaby*; dla kanoniczności więzów konieczne są silniejsze warunki.

magają ani wyróżnienia *explicite* tej konfiguracji, ani wyróżnienia wszystkich więzów, ani tym bardziej jakichkolwiek nazw. Tkwi to głęboko w myśleniu takiej osoby i ujawnia się, gdy jest to do czegoś potrzebne.

Idea głęboką konfiguracji obiektów powiązanych więzami determinującymi dwustronnymi jest *nadrzędna* w stosunku do idei głębokich poszczególnych członów konfiguracji, zawiera je wszystkie.

PRZYKŁAD 8. Idea głęboka **prawdopodobieństwa** kształtuje się jako synteza aspektu aleatorycznego (częstościowego) z poczuciem symetrii i równości szans oraz z doświadczeniami związanymi z sytuacjami losowymi i obliczeniami. Rozpatrzymy szczególny przypadek modelu formalnego tego pojęcia, zakładając, że zbiór $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ jest skończony lub przeliczalny. Prawdopodobieństwo na Ω można określić bądź przez podanie $P(A)$ dla każdego $A \subset \Omega$ tak, by spełnione były zwykłe aksjomaty, bądź przez podanie ciągu liczb

$$(p_1, p_2, \dots), \quad p_j \geqslant 0, \quad \sum p_j = 1, \tag{10}$$

gdzie p_j oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_j. Mamy tu więzy dwustronne, bowiem funkcja P i ciąg (p_j) wyznaczają się kanonicznie: $p_j = P(\{\omega_j\})$, $P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j$. Genetycznie wcześniejsze jest ujęcie (10). Oba są nieodzownymi składnikami idei głębokiej prawdopodobieństwa w przypadku Ω skończonego lub przeliczalnego. Jednakże takiego związku nie ma w przypadku, gdy Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym (np. dla prawdopodobieństw geometrycznych zachodzi $P(\omega)=0$ dla każdego $\omega \in \Omega$). Z tego powodu warunki, które ma spełniać P, nazywane są „aksjomatami", a warunki (10) dotyczące p_j zwane są „założeniami".

4. Więzy determinujące jednostronne. Są to więzy między pojęciami takie, że P wyznacza kanonicznie Q, ale Q nie wyznacza P; zapisujemy to jako $P \hookrightarrow Q$.

PRZYKŁAD 9. Dowolny **łuk okręgu** wyznacza jednoznacznie cały okrąg, w którym się zawiera. Okrąg ten nie wyznacza jednak łuku. Jest to przykład *więzów determinujących jednostronnych.*

PRZYKŁAD 10. **Wielomian** $f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ o współczynnikach zespolonych ($a_n \neq 0$) wyznacza jednoznacznie parę $\{a_n, [z_1, \dots, z_n]\}$, w której symbol $[z_1, \dots, z_n]$ oznacza *układ* pierwiastków $z_1, \dots, z_n$ tego wielomianu i jest zarazem wyznaczony przez tę parę wzorem

$$f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Używamy tu terminu „układ" w sensie nadanym mu w (Mąkowski, 1978). Nie jest to ani zbiór (trzeba bowiem uwzględniać krotność pierwiastków), ani ciąg (bo liczby zespolone $z_1, \dots, z_n$ można wprawdzie ustawić w ciąg i to na wiele sposobów, ale żaden z nich nie jest jakoś specjalnie wyróżniony).

Przyjmijmy dla uproszczenia, że $a_n = 1$. Wówczas odpowiedniość między wielomianem f a układem $[z_1, \ldots, z_n]$ daje więzy dwustronne, kanoniczne. Gdyby zamiast $[z_1, \ldots, z_n]$ wziąć zbiór $\{z_1, \ldots, z_n\}$ lub ciąg $(z_1, \ldots, z_n)$, więzy byłyby jednostronne: $(z_1, \ldots, z_n) \hookrightarrow f$ oraz $f \hookrightarrow \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Myśląc o wzajemnie jednoznacznym związku między wielomianem f a pierwiastkami $z_1, \ldots, z_n$, używamy — na ogół nieświadomie — idei głębokiej „układ" (Semadeni, 2002, s. 78). Co więcej, można wprawdzie łatwo skonstruować jakieś modele formalne tej idei (np. jako klasy abstrakcji ciągów względem relacji równoważności ciągów spermutowanych lub jako funkcję, która każdemu pierwiastkowi przyporządkowuje jego krotność), ale w praktyce z żadnego z nich się nie korzysta, bowiem zaciemniłoby to raczej kwestię zamiast ją wyjaśniać.

PRZYKŁAD 11. Oczywiste więzy determinujące dwustronne łączą trzy figury: **odcinek** otwarty o końcach A, B; odcinek domknięty AB; nieuporządkowana para punktów $\{A, B\}$, gdzie $A \neq B$. Natomiast więzy między parą uporządkowaną (A, B) (identyfikowaną z wektorem umiejscowionym $\overrightarrow{AB}$) a odcinkiem AB są jednostronne.

Innymi przykładami więzów jednostronnych są:
— odcinek na płaszczyźnie wyznacza jednoznacznie prostą;
— okrąg w przestrzeni wyznacza płaszczyznę, w której leży;
— wartości funkcji analitycznej w dowolnie małym otoczeniu jakiejkolwiek liczby zespolonej z_0 wyznaczają całą funkcję (Leja, 1957, VI.§3);
— podzbiór A przestrzeni metrycznej wyznacza swoje domknięcie $\overline{A}$.

Więzy determinujące jednostronne mają zupełnie inny charakter niż więzy determinujące dwustronne. Wymieniamy je tu dla ich skontrastowania.

W charakterze dygresji zwróćmy uwagę na to, że wyżej wspomniane więzy dotyczące funkcji analitycznych mają swoje odbicie w innego rodzaju związkach, a mianowicie w *schemacie hylemorficznym*[10] matematyki, który propagował René Thom (1997). Na schematycznym diagramie rozmieścił on główne dziedziny matematyki nie tylko wzdłuż często rozważanej osi: *dyskretne – ciągłe*, lecz również wzdłuż prostopadłej osi dotyczącej typu *generatywności*, przesuwając się od generatywności *wolnej*, poprzez *związaną* do *wymuszonej*.

[10] Termin „hylemorficzny" odwołuje się do tradycji arystotelesowskiej. Greckie *hyle* to *materia*, a *morphe* to *forma*, razem stanowiące pierwsze składniki bytu (Hartman, 2004, s. 159). Materia nieokreślona (*hyle*), przyjmując formę, staje się *substancją*. Nieco inną pisownię „hylomorficzny" można znaleźć w (Blackburn, 2004), a sama koncepcja przypisana jest św. Tomaszowi z Akwinu, komentującemu Arystotelesa.

Thom był zadeklarowanym zwolennikiem zarówno Arystotelesa, jak i platonizmu w matematyce.

W tym ujęciu funkcje analityczne lokują się po stronie zagadnień *ciągłych* i generatywności *wymuszonych*[11]. Thom (1997, s. 106) porównał wymuszoną generatywność funkcji analitycznych do tego, że szkielet zwierzęcia może być zrekonstruowany z pojedynczej kości, a to z kolei wskazuje na bliski związek tego z rozważaniami dotyczącymi pojęcia struktury (van Hiele, 2003, s. 198).

Zdaniem Thoma, to hylemorficzne podejście jest trafne również w przypadku matematyki (choć wiele osób głosiło odmienną opinię, argumentując, że matematyka to wyłącznie odpowiednik arystotelesowskiej formy). Na przykład, w ujęciu hylemorficznym Thoma zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych za „materię" uważa się liczby naturalne, „formą" zaś jest operacja następnika $n \mapsto n+1$; z kolei przejście od liczb rzeczywistych do zespolonych wymaga *zaangażowania ontologicznego*, „stworzenia nowej materii", a mianowicie liczb i oraz $-i$. Idąc dalej tropem Thoma, można by rozwijać koncepcję, że *materią matematyki są idee głębokie pojęć*, a formą — *więzy między nimi*.

5. Więzy synonimiczności ekstensjonalnej. Są to dobrze znane więzy łączące pojęcia, które określone są wprawdzie przez różne warunki p, q, ale jeśli jakiś obiekt spełnia warunek p, to spełnia też q, i na odwrót. Innymi słowy, chodzi o *równoważne definicje tego samego pojęcia*. Terminu „więzy" używamy tu w celu skontrastowania ich z innymi typami więzów i zwrócenia uwagi na pewne aspekty powiązań sieci pojęciowej matematyki.

PRZYKŁAD 12. Rozpatrzmy dowolny odcinek AB na płaszczyźnie euklidesowej. **Symetralna** tego odcinka może być zdefiniowana na dwa sposoby:

(a) symetralna to zbiór S wszystkich punktów równoodległych od A i od B;

(b) symetralna to prosta T prostopadła do AB, przechodząca przez środek tego odcinka.

Wiadomo, że są to równoważne definicje tego samego obiektu. W takim przypadku mówimy o *więzach synonimiczności ekstensjonalnej*: określenia (a) i (b) mają ten sam *zakres*, czyli tę samą *denotację*, to samo *extensio*, tzn. zbiór S jest równy zbiorowi T (dla dowolnego odcinka AB), a także funkcja $(A, B) \to S$ jest identyczna z funkcją $(A, B) \to T$, chociaż S i T są określone przez różne warunki, a więc, zgodnie z tradycyjnym podejściem logiki klas, mają różną *treść*, różne *intensio* (Bocheński, 1992, s. 61–62). Pamiętać należy — w omawianym tu kontekście — o potrzebie odróżniania *extensio* od *intensio* (lub, w innej terminologii, odróżniania *denotacji* od *konotacji*, Quine, 2000,

[11] W oryginale znajdują się słowa: *free* (wolny), *bound* (związany), *constrained* (wymuszony) oraz słowo *generativity*, pochodne od słowa *generative*, które można tłumaczyć jako „wytwórczy", „twórczy", a w kontekście gramatyki jako „generatywny". Nie należy mylić słowa „bound" (pochodzącego od „bind") ze słowem „bounded"; to drugie znaczy „ograniczony" w zwykłym sensie matematycznym.

s. 51) oraz odróżniania *oznaczania* od *znaczenia* (Quine, 2000, s. 161; Bocheński, 1992, s. 61). Współcześni matematycy mają jednak wyraźną skłonność do sklejania pojęć „zbiór" i „klasa" oraz identyfikowania treści z zakresem (por. Mostowski, 1948, s. 83).

W przykładzie 4 więzy między podzielnością a wielokrotnością zostały zaliczone do typu 1° (więzów determinujących dwustronnych). Gdyby jednak wziąć pod uwagę zbiór par (n, m) liczb naturalnych $(n > 0,\ m > 0)$ takich, że n jest podzielne przez m, i analogiczny zbiór par (n, m) takich, że n jest wielokrotnością liczby m, to zbiory te są równe, pojęcia te mają ten sam zakres. Można by więc mówić tu też o więzach synonimiczności ekstensjonalnej.

PRZYKŁAD 13. Twierdzenie **Talesa** można interpretować jako ekstensjonalną synonimiczność obiektów postaci „para prostych równoległych (ℓ_1, ℓ_2)" (gdzie $\ell_1 \neq \ell_2$), określonych na dwa sposoby: (a) za pomocą standardowego warunku $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$; (b) przez odpowiednie proporcje między odcinkami powstającymi przy przecinaniu ℓ_1 i ℓ_2 ramionami dowolnego kąta. Interpretacji (b) jako alternatywnej definicji równoległości nie podważa fakt, że w praktyce nie podaje się takiej definicji (uważa się to za twierdzenie).

PRZYKŁAD 14. Rozpatrujemy trzy klasy funkcji: 1° funkcje a^x $(a > 0)$, określone w zwykły sposób, tj. przez kolejne rozszerzenia definicji od a^n poprzez a^{-n}, $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$, a^w (w wymierne) do a^x (x rzeczywiste); 2° ciągłe rozwiązania równania funkcyjnego $f(x+y) = f(x)f(y)$; 3° rozwiązania równania różniczkowego $y' = cy$ $(c \neq 0)$ z warunkiem początkowym $f(0) = 1$. Wiadomo, że te trzy definicje wyznaczają tę samą klasę: **funkcji wykładniczych**. Są to więzy synonimiczności ekstensjonalnej.

Można zawęzić tę klasę, przyjmując w 1°, że $a = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$. Wówczas w 2° trzeba dołożyć np. warunek, że wykres funkcji f przecina oś y pod kątem 45°, a w 3° trzeba dodać warunek $c = 1$. Definiowana klasa redukuje się do jednej funkcji e^x. Można też przyjąć określenie: 4° $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Więzy te mają znaczenie dydaktyczne, pokazują bowiem, że tradycyjna droga definiowania a^x i e^x nie jest jedyna. Atrakcyjne jest np. określanie e^x jako jedynej funkcji wykładniczej przecinającej oś y pod kątem 45°, co intuicyjnie daje się motywować tym, że kąt ten jest większy od 45° dla $a = 2$ i mniejszy od 45° dla $a = 3$, a ponadto, gdy a rośnie od 2 do 3, wykres staje się coraz bardziej stromy[12]. Pozwala to uniknąć wikłania się w trudną definicję liczby e

[12] Zwolennik formalizmu w nauczaniu może zakwestionować to podejście jako nieścisłe. W kwestiach dydaktycznych nie to jest jednak najważniejsze, by wykładowca (lub podręcznik) przedstawił ścisłe rozumowanie, lecz to, ile zrozumie student. Przecież klasyczną drogę definiowania funkcji wykładniczej (wymienioną w 1°) i tak z reguły objaśnia się (w podręcznikach i na wykładach) jedynie szkicowo, bowiem precyzyjne udowodnienie wszystkich lematów wymagałoby zbyt wiele miejsca bądź czasu.

jako $\lim(1+\frac{1}{n})^n$ i uwypukla ważną własność funkcji e^x, która wyróżnia ją wśród funkcji wykładniczych.

Takie wielostronne ujęcie jest też dydaktycznie istotne na studiach wyższych: pokazuje, że do pojęcia funkcji e^x wiodą różne drogi (zresztą w dziedzinie zespolonej porzucenie drogi 1° na rzecz 4° i tak jest nieodzowne).

Analizowany tu przykład pozwala na jeszcze jedną, bardzo interesującą obserwację. Otóż gdy mówiliśmy powyżej o wszystkich rozwiązaniach ciągłych równania funkcyjnego $f(x+y)=f(x)f(y)$, narzucała się interpretacja: „otrzymujemy klasę tych rozwiązań", gdy zaś do tego równania funkcyjnego dołożyliśmy jeszcze warunek $f(1)=e$, to spontanicznie narzucała się interpretacja: „otrzymujemy jedną z możliwych definicji pojedynczej funkcji e^x. Gdyby chcieć ująć formalnie oba te stwierdzenia, należałoby uznać, że w tym drugim przypadku interpretacja jest niewłaściwa. Jedne i drugie warunki należy przecież traktować jednakowo, a zatem te drugie warunki nie określają jednej funkcji f, lecz klasę jednoelementową $\{f\}$.

Tę niezgodność między zwykłym rozumowaniem matematyka a ujęciem formalnym można wyjaśnić następująco: *gdy w rozumowaniu opieramy się na ideach głębokich, nie analizujemy precyzyjnie logicznej struktury zdania, lecz nadajemy mu jakąś, najbardziej w danej sytuacji sensowną treść matematyczną*[13]. W omawianym przykładzie sens był wyraźny: jedyną funkcją ciągłą spełniającą warunki $f(x+y)=f(x)f(y)$ i $f(1)=e$ jest funkcja $f(x)=e^x$; w takiej sytuacji nie zwraca się uwagi na to, czy chodzi o pojedynczą funkcję f czy o zbiór jednoelementowy $\{f\}$. Różnica ta staje się istotna dopiero wtedy, gdy przechodzi się do modeli formalnych w teorii mnogości.

Istotne jest to, że *wyboru jednego z możliwych sensów wypowiedzi umysł na ogół dokonuje spontanicznie.* W omawianym przykładzie górę bierze spontaniczna interpretacja, że chodzi o pojedynczą funkcję e^x.

W tym kontekście należy rozróżnić dwa znaczenia słowa „logiczny". Jeśli sens wypowiedzi (usłyszanej lub przeczytanej, zawierającej słowa i/lub symbole) nie jest od razu jasny, umysł dokonuje świadomego poszukiwania matematycznego sensu wypowiedzi, ale bez formalnego analizowania sposobu, w jaki wypowiedź ta została skonstruowana. Tak więc, jeśli zdanie nie zostanie od razu zrozumiane lub sprawia kłopoty interpretacyjne, umysł zaczyna jego logiczne analizowanie. Słowo „logiczne" należy rozumieć tu w sensie potocznym, a także w sensie zwykłej praktyki rozumującego matematyka; nie oznacza to na tym etapie stosowania aparatu logiki matematycznej. Jeśli taka

[13] Dostrzegamy tu wyraźną analogię ze strukturami głębokimi w lingwistyce: zrozumienie zdania dwuznacznego wymaga odszukania i odczytania odpowiadających mu struktur głębokich. Dopóki nie zachodzi specjalna potrzeba, nie myśli się o strukturze gramatycznej zdania, lecz o jego *sensie*.

zwykła analiza okaże się nieskuteczna, matematyk może próbować podejść do wypowiedzi w sposób bardziej formalny, analizując jej reprezentację powierzchniową lub np. używając tautologii logicznych.

6. Więzy utożsamiania pojęć. O więzach tych zakładamy, że (a) dotyczą pojęć X, X' z tej samej teorii, (b) pojęcia X, X' mogą być utożsamione w jakimś wyróżnionym sensie, w odpowiednim kontekście.

PRZYKŁAD 15. **Izometrię figur** F, G na płaszczyźnie można interpretować dwojako: a) jako izometrię $\varphi_0 : F \to G$ figury F na figurę G; b) jako izometrię $\varphi : E^2 \to E^2$ całej płaszczyzny na siebie taką, że $\varphi(F) = G$. Załóżmy, że figura F zawiera trzy punkty nie leżące na jednej prostej. Wówczas przekształcenie φ_0 wyznacza kanonicznie φ i na odwrót. Jakkolwiek formalnie φ_0 i φ są dwoma różnymi obiektami (φ_0 to obcięcie przekształcenia φ do podzbioru F), każde z tych przekształceń może być zastąpione przez drugie i w takim zakresie są równoważne; można nawet w ogóle nie zastanawiać się, którego z nich używamy.

Należy przy tym mieć na uwadze, że dla uczniów izometria φ jest pojęciowo znacznie trudniejsza od φ_0, bowiem w przypadku np. obrotu figury ograniczonej F wystarczy myśleć tylko o punktach figury, podczas gdy φ to zarazem obrót całej płaszczyzny, wszystkich jej punktów, w tym również bardzo odległych od rozważanych figur.

Jakkolwiek mamy tu parę φ_0, φ z więzami dwustronnymi i zasadne byłoby zaliczenie tego do typu 1°, jednakże pojęcia φ_0 i φ są tak bliskie w praktyce matematycznej, że mogą być traktowane zamiennie i dlatego omawiamy je wśród przykładów typu 4°.

PRZYKŁAD 16. **Ciąg** (a_n) liczb rzeczywistych ($n = 0, 1, 2, \dots$) może być reprezentowany przez swój wykres w prostokątnym układzie współrzędnych, a mianowicie przez zbiór punktów $\widehat{a} = \{(n, a_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$. Możemy też ciągowi temu przyporządkować funkcję $\widetilde{a} : [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$, której wykres powstaje przez dołączenie poziomego odcinka $\{(x, a_n) : n < x < n+1\}$ do każdego punktu (n, a_n) zbioru $\widehat{a}$. Otrzymujemy w ten sposób wykres funkcji $\widetilde{a}$ prawostronnie ciągłej, przedziałami stałej, dającej dobrą reprezentację wizualną ciągu (a_n), nieraz lepszą niż zbiór $\widehat{a}$, choć na ogół czyni się z tego niewielki użytek. Dobrze znany jest tylko jeden szczególny przypadek: jeśli tę konstrukcję zastosujemy do ciągu $a_n = n$, otrzymamy wykres funkcji $E(x)$ (*entier*, czyli cecha, część całkowita liczby x).

Wykresy $\widehat{a}$ i $\widetilde{a}$ są dwoma modelami formalnymi idei głębokiej ciągu (a_n). Więzy między nimi są determinujące, dwustronne, kanoniczne; co więcej, $\widehat{a}$ i $\widetilde{a}$ są bardzo bliskie dzięki możliwości zastąpienia $\widehat{a}$ przez $\widetilde{a}$ w rozmaitych kontekstach, w szczególności $\sum_{j=0}^{n} a_j = \int_0^{n+1} \widetilde{a}(x)\, dx$. Właśnie ta równość sprawia, że

funkcja $\widetilde{a}$ bywa bardzo użyteczna, m. in. odgrywa naturalną rolę w dowodzie kryterium całkowego zbieżności szeregu[14].

PRZYKŁAD 17. Pokażemy teraz sytuację utożsamiania lokalnego, które nie jest globalne: **wektor swobodny** często utożsamia się z przesunięciem o ten wektor, a z drugiej strony każdy wektor można w naturalny sposób utożsamić z punktem mającym te same współrzędne (standardowa praktyka w geometrii analitycznej i w mechanice)[15]. Jednakże trudne do zaakceptowania byłoby utożsamienie punktów z przesunięciami. Wynika stąd, że *to utożsamienie nie jest przechodnie* i musi mieć więc charakter lokalny, *musi ograniczać się do pewnego tylko zakresu zagadnień*, do pewnych określonych sytuacji.

PRZYKŁAD 18. Rozpatrzmy pojęcie **funkcji** zmiennej rzeczywistej. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to funkcja sinus, określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. W wielu zagadnieniach można *zidentyfikować* (czyli, w innej terminologii, *utożsamić*) funkcję z jej wykresem. W bardziej radykalnym ujęciu definiuje się pojęcie funkcji jako będące tym samym co zbiór par spełniających znane warunki; problem ten był dyskutowany w wielu publikacjach. Innymi słowy, deklaruje się przejście od typu 4° do typu 3°. W szczególności funkcję sinus można utożsamić z sinusoidą

$$\{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\}. \tag{11}$$

W innych rozważaniach sinusoida (11) bywa traktowana jako figura geometryczna. Zestawiając te dwa fakty, należy stwierdzić, że utożsamienie funkcji z jej wykresem musi być stosowane lokalnie, w ramach jakiegoś ujęcia teorii. W przeciwnym bowiem razie musielibyśmy zaakceptować równoważność pojęć „funkcja" i „figura geometryczna". Słynne zdanie Poincarégo (1911, s. 20) „*Matematyka jest sztuką nadawania tej samej nazwy różnym rzeczom*" nie znaczy, że można dowolnie używać tej samej nazwy w różnych sytuacjach. *Utożsamienia funkcji z ich wykresami nie można traktować globalnie* (tzn. obejmując tym całą matematykę). Nie są to pojęcia w pełni wymienne, bowiem „przyporządkowanie" i „figura geometryczna" mają istotnie różny sens.

7. Więzy odpowiedniości międzymodelowej. Są to więzy między różnymi modelami formalnymi tej samej idei głębokiej.

PRZYKŁAD 19. Jeśli x oznacza dowolną **liczbę rzeczywistą**, niech x_C oznacza jej model formalny w teorii Cantora (odpowiedni zbiór ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych) i niech x_D oznacza jej przekrój Dedekinda (zbioru

[14] Kryterium to brzmi: jeśli funkcja f jest dodatnia i malejąca na przedziale $[1, \infty)$ oraz $a_n = f(n)$, to szereg $\sum_1^\infty a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka $\int_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, np. z tego, że $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ i $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, wynika rozbieżność szeregu $\sum \frac{1}{n}$.

[15] Jest to szczególny przypadek utożsamiania stanów z działaniami (Semadeni, 2004, s. 169).

liczb wymiernych). Przyporządkowania $x_C \mapsto x_D$ i $x_D \mapsto x_C$ między x_C a x_D są przykładem *więzów odpowiedniości międzymodelowej.*

Różnica między obu tymi teoriami liczb rzeczywistych staje się bardziej wyrazista, gdy uwzględnimy więzy przyporządkowania hierarchicznego każdej z nich: teoria Cantora ma ważne uogólnienie metryczne (uzupełnianie przestrzeni metrycznych), a teoria Dedekinda ma mniej znane uogólnienie: uzupełnianie zbioru uporządkowanego, tj. zanurzanie go w zbiór uporządkowany zupełny w sensie porządkowym, tzn. taki, że każdy zbiór ograniczony w sensie porządkowym ma supremum i infimum (Birkhoff, 1948, Chapter IV, §7).

Gdy rozpatrujemy więzy (któregokolwiek z rozpatrywanych tu typów) między obiektem P i obiektem Q, nasuwa się naturalne pytanie: *Czy mamy tu do czynienia z dwiema ideami głębokimi epistemicznymi obiektów P i Q, czy też z jedną ideą głęboką obejmującą zarówno P jak i Q?* Otóż w przypadku wielu matematycznie ważnych pojęć powinniśmy rozpatrywać zarówno dwie o d d z i e l n e idee głębokie P i Q jak i pojedynczą ideę głęboką ich syntezy, odpowiadającą obu obiektom P i Q ujmowanym ł ą c z n i e (por. 3.2).

Szczególnie wyraźnie widać to na przykładzie więzów między x_C a x_D. Z jednej strony mamy jedną ideę głęboką liczby rzeczywistej x, której modelami formalnymi są x_C i x_D. Z drugiej strony, więzy hierarchiczne wiążące x_C z teorią przestrzeni metrycznych i więzy x_D z teorią przestrzeni uporządkowanych ukazują nową sieć związków nie tylko owych modeli z odpowiadającymi im teoriami, ale też idei głębokiej liczby rzeczywistej z ideami głębokimi: przestrzeni metrycznej i zbioru uporządkowanego. Model formalny x_C idei głębokiej pojęcia liczby rzeczywistej x może sam ukształtować się jako indywidualna idea głęboka, jeśli dana osoba dostatecznie długo będzie się nim zajmować w perspektywie uzupełniania przestrzeni metrycznych; analogiczna uwaga dotyczy x_D i przestrzeni uporządkowanych.

PRZYKŁAD 20. *Ciało zbiorów* to dowolna rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów przestrzeni X, spełniająca następujące warunki[16]: (a) suma i część wspólna zbiorów należących do $\mathcal{A}$ należy do $\mathcal{A}$; (b) zbiór pusty i przestrzeń X należą do $\mathcal{A}$; (c) jeśli jakiś zbiór E należy do $\mathcal{A}$, to jego dopełnienie $X \backslash E$ też należy do $\mathcal{A}$. W takim przypadku również różnica $E \backslash F$ i różnica symetryczna $E \div F$ zbiorów z $\mathcal{A}$ należą do $\mathcal{A}$; przypominamy, że *różnicę symetryczną* zbiorów E i F określa się wzorem $E \div F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E) = (E \cup F) \backslash (E \cap F)$.

Różnica symetryczna $\div$ jest oczywiście działaniem przemiennym. Okazuje się, że jest też działaniem łącznym, co najłatwiej można sprawdzić, rozpatrując działanie n-argumentowe *różnicy symetrycznej n zbiorów* $E_1, \ldots, E_n$. Otóż

[16] Dla uniknięcia kłopotów zakładamy, że zbiór X jest niepusty, a algebra Boole'a $\mathcal{A}$ ma conajmniej dwa elementy (tzn. zakładamy poniżej, że $0 \neq 1$).

zbiór $E_1 \div \ldots \div E_n$ może być określony jest jako zbiór tych elementów, które należą do nieparzystej liczby zbiorów $E_1, \ldots, E_n$. W szczególności dla $n=3$ zbiór $E \div F \div G$ składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów E, F, G lub do wszystkich trzech. To, że trzy zbiory: $E \div F \div G$, $(E \div F) \div G$, $E \div (F \div G)$ są identyczne, najłatwiej sprawdzić, używając koniczynki trójlistnej (której uogólnienie analizował Nowicki, 1975).

Ciało zbiorów $\mathcal{A}$ z działaniem różnicy symetrycznej $\div$ stanowi grupę abelową; elementem neutralnym jest zbiór pusty, a elementem przeciwnym do E jest też E, bowiem $E \div E = \emptyset$. Okazuje się również, że rodzina $\mathcal{A}$ z działaniami $\div$ i $\cap$ tworzy pierścień przemienny z jednością, idempotentny, tzn. $E \cap E = E$ dla dowolnego $E \in \mathcal{A}$.

Idea głęboka **algebra Boole'a** powstaje jako *wspólne aksjomatyczne uogólnienie dwóch podstawowych przykładów takich algebr*. Tymi nieodzownymi przykładami są: 1° ciała zbiorów oraz 2° pewne *algebry związane z rachunkiem zdań i rachunkiem kwantyfikatorów*, w których działaniami są: koniunkcja $\wedge$, alternatywa $\vee$ i negacja $\neg$. Ważnym przykładem algebry Boole'a, który jednak może nie być składnikiem omawianej idei głębokiej, jest klasa wszystkich wyrażeń p dowolnej teorii sformalizowanej T (opartej na logice dwuwartościowej); wyrażenia p i q uważa się za równoważne, jeśli formuła „p wtedy i tylko wtedy gdy q" jest twierdzeniem tej teorii (działaniami są $\wedge$, $\vee$ i $\neg$ w algebrze ilorazowej). Bardziej zaawansowane przykłady podaje (Birkhoff, 1948, Chapter X §2). Innym przykładem jest algebra ilorazowa podzbiorów borelowskich (np. odcinka $[0,1]$), gdy utożsamimy zbiory miary Lebesgue'a zero. W początkowym okresie produkowania komputerów głośnym przykładem była algebra K sieci elektrycznych E złożonych z przewodów i wyłączników, z dwoma otwartymi końcami, z działaniami: operacją połączenia szeregowego i operacją połączenia równoległego[17]. Jest ona opisana w (Mostowski, 1948, s. 104).

Modele formalne algebr Boole'a można definiować w ramach różnych teorii. W każdym ujęciu przez abstrakcyjną *algebrę Boole'a* (która nie musi być rodziną podzbiorów jakiejś przestrzeni) rozumiemy dowolny zbiór $\mathcal{A}$ z dodatkową strukturą, zdefiniowaną aksjomatycznie. Otóż — i to jest celem tego przykładu — ową strukturę można wyrazić w językach trzech różnych teorii.

W pierwszym z możliwych ujęć (Rasiowa, 1968, s. 278; Białynicki-Birula, 1987, s. 19) algebra Boole'a to zbiór $\mathcal{A}$ ze strukturą S_1 dwóch działań dwu-

[17] W połowie lat sześćdziesiątych zorganizowano kurs algebr Boole'a dla pracowników Instytutu Elektrotechniki. Wykładowca (matematyk) posługiwał się diagramami Venna (zwanymi wówczas *kołami Eulera*) jako standardowym środkiem poglądowym, mającym ułatwić objaśnianie sensu operacji $\cap, \cup$. Jeden ze słuchaczy powiedział potem, że rozumiał działania Boole'a na sieciach elektrycznych, ale nie widział związku sieci z owymi kołami, które były dlań tylko utrudnieniem.

argumentowych $a \cup b$ i $a \cap b$, jednoargumentowego działania dopełnienia a' i z dwoma wyróżnionymi elementami 0 i 1. Spełniona ma być pewna liczba aksjomatów, takich jak przemienność i łączność, obie rozdzielności:

(12) $\qquad (a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c), \qquad (a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c),$

a ponadto $a \cup a' = 1$ oraz $a \cap a' = 0$. W takiej algebrze definiuje się relację $a \leqslant b$ warunkiem $a \cap b' = 0$.

Drugie, równoważne ujęcie to zbiór $\mathcal{A}$ z aksjomatycznie określoną relacją S_2 porządku $\leqslant$ (por. przykład 5). Definiuje się wtedy $a \cup b$ jako supremum zbioru $\{a, b\}$ oraz $a \cap b$ jako jego infimum. Definiuje się też 1 jako supremum wszystkich elementów zbioru $\mathcal{A}$ oraz 0 jako ich infimum. Zakłada się obie rozdzielności (12) oraz istnienie dopełnień. Rozwinięte to jest w (Birkhoff, 1948).

Trzecie możliwe ujęcie algebry Boole'a to zbiór $\mathcal{A}$ ze strukturą S_3 pierścienia przemiennego z jednością 1, idempotentnego, tzn. takiego, że $a^2 = a$ dla każdego $a \in \mathcal{A}$. Wówczas musi też zachodzić $a + a = 0$, a także $2a = 0$ oraz $a + b = a - b$ dla każdego $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{A}$. Jeśli określi się $a \cap b = ab$ oraz $a \cup b = a + b - ab$, to otrzymuje się algebrę Boole'a w sensie pierwszym (Białynicki-Birula, 1987, s. 48).

Mamy więc trzy ważne ujęcia algebr Boole'a: $(\mathcal{A}, S_1)$ w teorii algebr ogólnych, $(\mathcal{A}, S_2)$ w teorii zbiorów uporządkowanych i $(\mathcal{A}, S_3)$ w teorii pierścieni. Są one równoważne w tym sensie, że z każdego do każdego przechodzi się w sposób kanoniczny. Są to zarazem trzy modele formalne tej samej idei głębokiej: *abstrakcyjnej algebry Boole'a*. Każdy z nich można przyjąć za punkt wyjścia teorii tych algebr. Teorie: oparta na $(\mathcal{A}, S_1)$, na $(\mathcal{A}, S_2)$ i na $(\mathcal{A}, S_3)$ są dla matematyków w zasadzie tą samą teorią, opisaną w różnych językach. Co więcej, każde z tych trzech ujęć ma tę zaletę, że wiąże się z innym uogólnieniem: $(\mathcal{A}, S_1)$ z teorią algebr uniwersalnych, $(\mathcal{A}, S_2)$ z teorią zbiorów uporządkowanych, $(\mathcal{A}, S_3)$ z teorią pierścieni przemiennych. Ponadto, na mocy twierdzenia Stone'a, dla każdej abstrakcyjnej algebry Boole'a $\mathcal{A}$ istnieje ciało zbiorów izomorficzne z $\mathcal{A}$ (Rasiowa, 1968, s. 284 i 290; Traczyk, 1970).

Na ogół matematykowi jest wszystko jedno, którego z tych trzech ujęć użyje, gdy mówi krótko „algebra Boole'a"; wybór jednego z nich podyktowany bywa np. chęcią nawiązania do innych rozważań. Choć mamy tu formalnie trzy różne definicje i można by mówić o trzech różnych pojęciach, w gruncie rzeczy chodzi o to samo. Są to trzy modele formalne tej samej idei głębokiej. Między obiektami $(\mathcal{A}, S_1)$, $(\mathcal{A}, S_2)$ i $(\mathcal{A}, S_2)$ mamy więzy dwustronne, kanoniczne.

8. Dalsze przykłady więzów. Powyższe rozważania uzupełnimy o kilka przykładów, które nie podpadają pod powyżej rozważane typy więzów i zarazem ilustrują trudności związane z problemem klasyfikacji więzów. Mogą one też służyć jako kontrprzykłady do pewnych hipotez dotyczących więzów.

PRZYKŁAD 21. **Trójkąt** (na płaszczyźnie) bywa definiowany na różne sposoby, w szczególności jako trójka P (nieuporządkowana) *punktów* A, B, C (nie leżących na jednej prostej), lub trójka Q *odcinków* AB, BC, CA (nie leżących na jednej prostej), lub też *część wspólna* R *trzech półpłaszczyzn* domkniętych (jeśli ta część wspólna ma pole dodatnie). Definicja trójkąta jako R jest dziś standardowa; definicja P była wprowadzona w aksjomatycznym ujęciu geometrii przez Borsuka i Szmielew; Q pochodzi z aksjomatyki Hilberta.

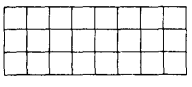
Używając pojęć wprowadzonych w tej pracy, można stwierdzić, że idea głęboka trójkąta zawiera konfigurację trzech powyższych pojęć P, Q, R oraz $\binom{3}{2}$ więzów determinujących dwustronnych i kanonicznych między nimi. Porównując to z poprzednimi przykładami takich więzów, można postawić następujące pytanie: Dlaczego — skoro P, Q, R są istotnie różnymi pojęciami — każde z nich zasługiwało na nazwę „trójkąt" w naukowo zaawansowanych książkach, jak gdyby chodziło o to samo lub synonimiczne pojęcie?

Można odwołać się do aspektów percepcyjnych obrazu pojęciowego trójkąta, a także do języka potocznego, w którym każde z P, Q, R może być uznane za trójkąt. Jednakże różnice między P, Q, R są analogiczne do różnic między figurami w przykładzie 1 (okrąg, koło), a tam wyraźnie odróżniało się owe figury. Ponadto zazwyczaj terminologię matematyczną ustala się precyzyjnie, eliminując dwuznaczności słownictwa potocznego.

Zapewne klucza do odpowiedzi należy szukać w tym, że zarówno Hilbert jak i Borsuk ze Szmielew wprowadzali swe definicje w teoriach aksjomatycznych. W każdej z takich teorii muszą wprawdzie pojawić się wszystkie trzy pojęcia P, Q, R, ale kolejność ich wprowadzania (a tym samym i nazwa użyta jako pierwsza) mogą być różne ze względów praktycznych. Budując taką teorię, dąży się do tego, by dowody były możliwie proste.

W teorii aksjomatycznej najważniejsza jest dedukcja; zgodność definicji z intuicyjnym sensem pojęć jest usuwana na drugi plan. Teorie te nie są więc dobrym wzorcem do badań dotyczących sensu i sposobu użycia terminów matematycznych, a tym bardziej dla celów nauczania (choć 40 lat temu lansowano je w Europie jako pewien ideał dydaktyczny).

PRZYKŁAD 22. W nauczaniu szkolnym **sieć kwadratową** interpretuje się rozmaicie, najczęściej jako układ kratek lub jako układ punktów (teoretycznie pokrywający całą płaszczyznę), którego typowe fragmenty pokazane są na poniższych rysunkach (por. Rożek, 2005).

(13)  

Dla matematyka jest oczywiste, że w (13) mamy dwa równoważne podejścia do pojęcia sieci kwadratowej, jakkolwiek mamy tu dwie różne figury geometrycz-

ne. W tej równoważności istotne jest nie tylko to, że mamy tu oczywiste więzy determinujące dwustronne, kanoniczne, ale przede wszystkim to, że różnica między tymi dwoma schematami sieci kwadratowej jest nieistotna w typowych sytuacjach szkolnych, a o wyborze jednej z nich decydują względy praktyczne.

W przykładzie tym ujawnia się inne, dydaktycznie interesujące zjawisko. Mianowicie wyobraźmy sobie, że lewy rysunek w (13) reprezentuje fragment sieci pokrywającej całą płaszczyznę. Sieć ta (suma mnogościowa dwóch rodzin prostych równoległych) — to pewien podzbiór S płaszczyzny E^2. Rozważmy dopełnienie zbioru S, tj. zbiór $S' = E^2 \setminus S$, wizualnie reprezentowany przez układ typu , w wyobraźni pokrywający całą płaszczyznę. To też spełnia wymagania stawiane sieciom kwadratowym, odpowiada wizualnie sieci narysowanej białymi liniami na czarnej tablicy.

Zestawmy to z przykładami 1 i 5. Ujawniają się trudności, jakie napotkalibyśmy, gdybyśmy próbowali — wiedzieni intuicją — wyróżnić pewne więzy determinujące dwustronne jako „współzmienne" (np. okrąg i koło; relacje $<$ i $\leqslant$), a inne jako w jakimś sensie „dualne" (np. wnętrze i zewnętrze koła; relacje $<$ i $>$). Można oczekiwać, że więzy typu: zbiór i jego dopełnienie (tzn. X i $U \setminus X$, przykład 6), a także więzy typu: „warunek i jego negacja" powinny być tego drugiego typu. Jednakże przykład czarnych kwadratów na białym tle (odbieranych percepcyjnie jako białe linie na czarnym tle), które wydają się odpowiadać sytuacji „współzmienne", podważa takie uproszczone mniemanie, bowiem w definicji figury S' mamy dopełnienie zbioru, negację warunku. Sieć kwadratowa — stosowana jako środek dydaktyczny — nie jest więc traktowana jako figura geometryczna, lecz jako t ł o, na którym umieszczone są inne figury.

Kontrastując czarno-białe obrazy graficzne koła i jego zewnętrza, stwierdzamy sytuację podobną do poprzedniej: rysunek koła różni się od rysunku jego zewnętrza jedynie kolorami. Gdybyśmy dobór kolorów uznali za nieistotny, moglibyśmy jakoś utożsamić koło z jego dopełnieniem, chociaż geometrycznie są to zupełnie różne obiekty. Ujawnia się tu pewien konflikt między skonwencjonalizowaną percepcją a rozumowaniem.

PRZYKŁAD 23. Freudenthal (1991, s. 20) zwrócił uwagę na pewien paradoks: pojęcia „**czworościan**" i „ostrosłup o podstawie trójkątnej" nie są w pełni tożsame, choć w obu przypadkach chodzi o taką samą bryłę. Otóż w pojęciu ostrosłupa mieści się wyróżniona ściana, zwana *podstawą*, natomiast w czworościanie żadna z czterech ścian nie jest wyróżniona. Innymi słowy, ostrosłup o podstawie trójkątnej ma s t r u k t u r ę b o g a t s z ą niż czworościan. Definiując model formalny struktury ostrosłupa, można jako punkt wyjścia wziąć np. parę: (bryła, jej podstawa). Wymaga to odpowiedniego i n t e r p r e t o w a n i a takiej pary, inaczej cel jej wprowadzenia byłby niezrozumiały.

Rozważmy teraz trójkąt równoramienny nierównoboczny $\triangle ABC$; załóżmy, że np. $AC = BC$. Gdy mówimy o **podstawie** t e g o **trójkąta**, mamy na myśli jednoznacznie wyznaczony bok, a mianowicie AB. Natomiast w przypadku d o w o l n e g o trójkąta (a także w przypadku trójkąta równobocznego), każdy z trzech boków może być uznany za podstawę (np. we wzorze na pole trójkąta). Jedynie na wczesnym etapie nauczania przez podstawę rozumie się „dolny" bok, ułożony poziomo, a zmiana podstawy wiąże się z przekręceniem trójkąta. Na poziomie liceum w wielu rozumowaniach konieczne jest równoczesne myślenie o trzech parach (podstawa, wysokość), w których podstawa może być dowolnym z trzech boków, niezależnie od położenia trójkąta.

Parafrazując rozumowanie Freudenthala, można powiedzieć, że w przypadku dowolnego trójkąta wyróżnienie jego podstawy zmienia strukturę rozpatrywanej figury geometrycznej, jest wzbogaceniem tej struktury; gdyby chcieć formalizować to wzbogacenie struktury zbioru $\triangle ABC$, można by rozpatrywać np. parę uporządkowaną $(\triangle ABC, AC)$. Natomiast w przypadku trójkąta równoramiennego ze zwykłą podstawą nie ma takiego wzbogacenia struktury.

Używając terminologii tej pracy, można rzec, że w przypadku trójkąta równoramiennego między zbiorem $\triangle ABC$ a bokiem AB są więzy determinujące jednostronne, a w przypadku trójkąta „dowolnego" takich więzów nie ma. Nie wynika to jednak z immanentnych własności tych figur, lecz z naszych (uzasadnionych względami praktycznymi) zwyczajów terminologicznych.

PRZYKŁAD 24. Kartezjańska metoda **geometrii analitycznej** polega na tym, że każdemu punktowi płaszczyzny (lub przestrzeni) przyporządkowujemy parę (lub trójkę) jego współrzędnych, tworząc w ten sposób model geometrii euklidesowej w arytmetyce liczb rzeczywistych. Na przykład, geometrycznemu pojęciu *linia prosta* odpowiada analityczne pojęcie *zbiór punktów spełniających równanie postaci* $ax + by + c = 0$, gdzie $a^2 + b^2 \neq 0$. Można pójść krok dalej i stwierdzić, że pojęciu *linia prosta* odpowiada *równanie* $ax + by + c = 0$ (jako element odpowiedniej przestrzeni równań). Podobnie pojęciu *okrąg* odpowiada równanie typu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$. Figurę geometryczną można utożsamić bądź z jej równaniem, bądź ze zbiorem punktów spełniających to równanie. To też są pewnego rodzaju więzy. Mamy tu syntezę idei głębokich: „linia prosta", „równanie liniowe", „zbiór par (x, y) spełniających równanie liniowe" oraz „więzy między tymi trzema obiektami".

Przykład ten różni sie od przykładu 19 (modele x_C i x_D liczby rzeczywistej) i od przykładu 20 (algebra Boole'a), w których więzy łączyły różne modele formalne tej samej idei głębokiej. Ważniejsza różnica polega jednak na tym, że x_C i x_D (a także różne modele idei głębokiej algebry Boole'a czy grupy) są bardzo bliskie semantycznie, podczas gdy odległość semantyczna między pojęciami: „linia prosta" a „równanie liniowe" jest znacznie większa.

9. Podsumowanie. Omówiliśmy kilka wybranych typów więzów, nie wyczerpując bynajmniej wszystkich typów ważnych dla koncepcji idei głębokich i ich modeli formalnych. Nietrudno wymienić dalsze, lepiej znane typy (np. wszelkie izomorfizmy, związki między działaniami odwrotnymi, czy też tożsamości prezentowane w postaci wzorów). Celem tych analiz jest usystematyzowanie ujęcia (Δ), naszkicowanego w 1.1. Nie postulujemy, by badać wszystkie możliwe związki w matematyce i próbować je kategoryzować zgodnie z podanymi powyżej kryteriami. Chodzi przede wszystkim o uświadomienie sobie różnorodności typów więzów, *z których stale się korzysta w praktyce matematycznej jako z czegoś oczywistego, choć może niezwerbalizowanego.*

Uczeń, student czy nawet nauczyciel nieraz w ogóle nie zdaje sobie sprawy z takich zależności, gdyż nie są one wyraźnie formułowane w podręcznikach. Źródłem wiedzy o nich nie jest wykładana teoria, lecz praktyka matematyczna: rozwiązywanie zadań, refleksja, dowodzenie twierdzeń. Dla kogoś, kto owe związki należycie rozumie, wiele kwestii wydaje się łatwych, może nawet banalnych. Jeśli jednak ktoś nauczył się tylko podręcznikowych definicji i twierdzeń, a nie zdaje sobie sprawy z ważnych więzów, to może mieć znaczne, czasem nieoczekiwane trudności tam, gdzie ktoś inny uważa te więzy za powszechnie znane i łatwe. Braki takie mogą być przyczyną tego, że dana osoba nie potrafi swej wiedzy wykorzystawać elastycznie i skutecznie.

Wyróżnionym typom 1°–6° nadaliśmy nazwy (wymienione w 2.1). Nazwy te mają wprawdzie charakter pomocniczy, jednak ułatwiają analizowanie więzów, mówienie o nich, porównywanie ich ze sobą. W niektórych sytuacjach wprowadzenie nazw umożliwia lepsze zrozumienie związanych z nimi pojęć.

Jednym z celów nauczania powinno być ukształtowanie w umyśle uczącego się trwałej sieci więzów, pozwalających na elastyczne stosowanie poznanej wiedzy. Proces ten zaczyna się już w klasie I, gdy uczeń coraz bardziej jest świadom tego, że np. 7 to 4+3, a także 6+1, 2+5 itd. (por. przykład 3). Powinno to być kontynuowane przez całą szkołę i później na studiach wyższych.

Literatura*

B i a ł y n i c k i – B i r u l a, A.: 1987, *Zarys algebry*, PWN, Warszawa.

B i r k h o f f, G.: 1948 *Lattice Theory*, New York [przekład rosyjski: *Tieorija struktur*, Moskwa, 1952].

B l a c k b u r n, S.: 2004 [1994] *Oksfordski słownik filozoficzny* (przekład pod redakcją J. Woleńskiego), Wyd. II, Książka i Wiedza, Warszawa.

B o c h e ń s k i, J. M.: 1992 [1954/1989], *Współczesne metody myślenia*,

*W nawiasie [ ] podajemy rok ukazania się oryginalnej wersji.

W drodze, Poznań.

B r o w d e r, F. E., M a c L a n e, S.: 1983 [1978], Doniosłość matematyki, w: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów* pod redakcją L. A. Steena, WNT, Warszawa, s. 346–375.

F r e u d e n t h a l, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht.

F r e u d e n t h a l, H.: 1991, *Revisiting Mathematical Education. China lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

H a r t m a n, J. (red.): 2004, *Słownik filozofii*, Wydawnictwo Zielona Sowa, Kraków.

H e j n ý, M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **19**, s. 15–28.

H e r s h, R.: 1979, Some proposals for reviving the philosophy of mathematics, *Advances in Mathematics* **31**, 31–50.

L e j a, F.: 1957, *Teoria funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa.

L u b o m i r s k i, A.: 1983, *O uogólnianiu w matematyce*, Ossolineum, Wrocław.

M ą k o w s k i, A.: 1978, O pojęciu układu, *Wiadomości Matematyczne* **21**, 13–14.

M o s t o w s k i, A.: 1948, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa.

N o w i c k i, P.: 1975, Koniczynka n-listna, *Wiadomości Matematyczne* **19**, 11–18.

P o i n c a r é, H.: 1911 [1908], *Nauka i Metoda*, Warszawa.

Q u i n e, W. V. O.: 2000 [1953/1961], *Z punktu widzenia logiki*, Aletheia, Warszawa.

R a s i o w a, H.: 1968, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

R o ż e k, B.: 2005, Strukturyzacja dwuwymiarowego szyku prostokątnego przez dzieci w wieku od 10 do 13 lat, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 219–272.

S e m a d e n i, Z.: 2002, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41–92.

S e m a d e n i, Z.: 2004, Stany i działania na stanach jako aspekty znaczeniowe pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 169–192.

T h o m, R.: 1974, Czy istnieje matematyka nowoczesna?, *Wiadomości Matematyczne* **18** (1974), 130–142.

T h o m, R.: 1997, The hylemorphic schema in mathematics, w: E. Agazzi i

G. Darvas (red.), *Philosophy of Mathematics Today*, Kluwer, Dordrecht–Boston–London, s. 101–113.
T r a c z y k, T.: 1970, *Wstęp do teorii algebr Boole'a*. PWN, Warszawa.
v a n H i e l e, P. M.: 2003 [2002], Podobieństwa i różnice między teorią uczenia się i nauczania Skempa a poziomami myślenia van Hielego, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 183–202.

A conception of a web of ties between deep ideas and ties between their formal models

S u m m a r y

The starting point of the paper is the contrast between two ways mathematics is presented: (Θ) mathematics as a collection of deductive theories; (Δ) mathematics as a web of various ties between concepts, theorems, etc.

The following types of ties have been distinguished and explained in the context of pertinent examples.

1° *Bilateral determining ties* — each object of one type canonically and uniquely determines the corresponding object of the other type, and vice versa. Example: each relation $\leqslant$ of (partial) order on any set X determines, and is determined by, the corresponding relation $<$ on X.

2° *Unilateral determining ties* — each object of one type determines the corresponding object of the other type uniquely, but the converse is not true. Example: a complex polynomial f determines the set of its roots, but this set does not determine f; a sequence of all roots of f (with repetitions according to multiplicities) determines f, but f does not determine the order of roots.

3° *Ties of extensional synonymy* — situations where different conditions describe the same class of objects.

4° *Ties of identifying concepts* — they concern concepts X, X' from the same theory which can be identified in certain situations. Examples: (i) If F, G are bounded subsets of a plane and F contains three points which do not belong to a single straight line, then an isometry $\varphi_0 : F \to G$ from F onto G may be identified with the corresponding isometry $\varphi : E^2 \to E^2$ of the whole plane such that $\varphi(F) = G$. (ii) In certain situations, a point (x, y, z) in 3D-space may be identified with the vector $[x, y, z]$; the vector may be identified with a translation; however, such identification is hardly transitive, as the semantic distance between 'point' and 'translation' is too big.

5° *Ties of inter-model correspondences* — ties between formal models of the same deep idea.

Additionally the following type is mentioned:

6° *Hierarchical ties* — ties between concepts and their generalizations.