ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

DOKTORATY

Bożena Pawlik
Akademia Pedagogiczna w Krakowie

Fałszywe przekonania dotyczące przekształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki[1]

Problematyka rozprawy skupiona jest wokół błędów dostrzeżonych w rozumowaniach początkujących studentów matematyki. Zwróciłam na nie uwagę w ramach swojej działalności dydaktycznej — praktyki nauczyciela prowadzącego ćwiczenia. Błędy te zaniepokoiły mnie i zaintrygowały; skłoniły do refleksji, której rezultatem jest ta rozprawa.

Inspiracją do podjęcia opisanych w niej badań było rozwiązanie zadania egzaminacyjnego przedstawione przez jednego ze studentów. Ujawniło ono niestandardowe (inne od omawianego w ramach zajęć), nieoczekiwane, a co najważniejsze, błędne podejście jego autora do postawionego problemu.

> Czasem jeden fakt, jeden przykład, pozornie izolowany, nawet pozornie dziwaczny, odbija się nagłym błyskiem w naszej pedagogicznej intuicji i może nas skierować w stronę problemów istotnie ważnych (Krygowska 1989, s. 141)[2].

Poszukując odpowiedzi na pytanie: „Czy zaobserwowane niepoprawne rozumowanie jest pojedynczym przypadkiem, czy może symptomem pewnych

[1]Tekst jest zmodyfikowaną wersją autoreferatu rozprawy doktorskiej obronionej 14 lipca 2005 roku na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Promotorem pracy był prof. nadz. Uniwersytetu Rzeszowskiego dr hab. Stefan Turnau, a jej recenzentami — prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak z Uniwersytetu Łódzkiego i prof. dr hab. Helena Siwek z Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

[2]Krygowska, Z.: 1989, Zrozumieć błąd w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V: Dydaktyka Matematyki* **10**, 141-147.

trudności, które dotyczą większej liczby studentów?" zaczęłam analizować i różnorodne błędne rozwiązania. W rezultacie wyodrębniłam wiele rozmaity fałszywych koncepcji odnoszących się zarówno do pojęć, jak i metody matem tycznej, a moje działania dydaktyczno-badawcze ukierunkowane zostały prz pojawiające się pytania.

- Z jakiego powodu początkujący studenci popełniają tego rodzaju błęd
- Jak rodzą się te niespodziewane, dziwne a zarazem błędne pomysły i alizowane w przedstawianych przez nich rozwiązaniach?
- Jak na tego typu błędy reagować?
- W jaki sposób je eliminować?
- Czy w ogóle trzeba interweniować, a jeśli tak, to kiedy i jak?
- Skoro nie wszystkie błędne rozwiązania jestem w stanie „usprawiedliwi niewiedzą studentów — czym je wytłumaczyć?

Analiza niepoprawnych rozumowań przeprowadzona pod kątem wskazar istoty błędu, a także hipotetycznych przyczyn jego powstania pozwoliła ok ślić domniemane fundamenty tych rozumowań — fałszywe koncepcje, błęd schematy myślowe, niepoprawne reguły wnioskowania — nazwane przeze mi *fałszywymi przekonaniami*, w skrócie *FP*. Warto podkreślić, że choć naz wam schematy tego rodzaju przekonaniami, nie sugeruję, że są one uśw domione. Są stosowane przez studentów jakby automatycznie. Studenci p stępując według tych schematów działają w dobrej intencji i wydają się b przekonani, że ich rozumowania i działania są poprawne. *Fałszywe przek nania* studenta, który nie zetknął się z wywołującym zaniepokojenie konfli tem zmuszającym go do weryfikacji swojego (błędnego) rozumowania, poz stają nieuświadomione. Wysnułam przypuszczenie (hipotezę badawczą), iż błędne poglądy — *fałszywe przekonania* — sterują myśleniem wielu student w trakcie rozwiązywania zadań, stając się przyczyną popełnionych, w rezult cie takich rozumowań, błędów. Powyższą hipotezę weryfikowałam w dalszy badaniach, organizowanych w ramach prowadzonych przeze mnie ćwiczeń geometrii elementarnej, aż stała się tezą rozprawy. Do pracy badawczej m tywowały mnie — prócz ciekawości — chęć niesienia pomocy początkujący studentom, a także świadomość, iż nauczyciel nie powinien ignorować dostrz żonych błędów i trudności uczących się.

Prezentacja *fałszywych przekonań*

Problematykę pracy zaprezentowałam w rozdziale II. W oparciu o wybra błędne rozwiązania studentów przedstawiłam przedmiot badań — *fałszy*

przekonania. Omówiłam wszystkie przykłady (dwadzieścia sześć) *fałszywych przekonań*, jakie udało mi się zarejestrować, nazwałam je i tak oznaczyłam, by stworzyć język przydatny w dalszej części rozprawy. Oprócz tego, scharakteryzowałam *fałszywe przekonania* i przedstawiłam ich typologię. Chcę jednak wyraźnie zaznaczyć, że zarówno charakterystyka poszczególnych *fałszywych przekonań*, będąca rezultatem syntetycznego spojrzenia na omawiane zagadnienie, jak i ich typologia powstawały w toku analiz prac badanych studentów; są one zatem produktem tych analiz, stanowiącym rezultat pracy badawczej. Ujawnione *fałszywe przekonania* podzieliłam na cztery następujące typy:

- Typ I — *FP „logiczno-pojęciowe"*
- Typ II — *FP „połączenia"*
- Typ III — *FP „analogia"*
- Typ IV — *FP „metodologiczne"*

Dla ilustracji problematyki badawczej przedstawię kilka przykładów.

Przykład 1

Zadanie 1

Dane są dwie proste a i b, punkt A oraz wektor $\vec{u}$ tak, że:
$a \perp b \wedge A \in a \wedge A \notin b \wedge \vec{u} \| b$.
Przekształcenie P określone jest następująco:

$P = S_a$ dla punktów półpłaszczyzny $bA^{\rightarrow}$ ($bA^{\rightarrow}$ to półpłaszczyzna wyznaczona przez prostą b i punkt A)[3],

$P = T_{\vec{u}}$ dla pozostałych punktów płaszczyzny.

a) Zbadać, czy P zachowuje współliniowość punktów.
b) Zbadać, czy P jest izometrią.

Przekształcenie P jest przykładem przekształcenia, które w rozprawie nazywam s k l e j e n i e m. Sklejenia przekształceń to przekształcenia zadane dwu- lub wielonormowo. Mimo że odwzorowania tego typu nie mają dla teorii przekształceń większego znaczenia, dla celów dydaktycznych (chodzi o to, by skontrastować pojęcie złożenia przekształceń) są uwzględniane na ćwiczeniach z geometrii elementarnej.

[3]Zgodnie z symboliką używaną w (Krygowska, Z.: 1979, *Geometria dla klas 1 i 2 liceum ogólnokształcącego, 1, 2 i 3 technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa).

Rozwiązanie studentki dotyczące punktu a)

Ponieważ przekształcenie to nie jest podobieństwem, wnioskujemy stąd, iż nie zachowuje współliniowości punktów, gdyż z twierdzenia podobieństwo zachowuje współliniowość punktów.

Zaprezentowane rozwiązanie jest przykładem błędnego rozumowania kończącego się prawdziwym wnioskiem (*przekształcenie P nie zachowuje współliniowości punktów*). Zauważmy, że studentka nie badała danego przekształcenia. Odwołała się jedynie do wcześniejszego fragmentu swojej pracy, w którym wykazała, że przekształcenie P nie jest podobieństwem. W dalszej części rozwiązania wnioskowała tak, jak gdyby opierała się na następującej błędnej regule:

Jeżeli A nie jest B i B jest C, to A nie jest C.

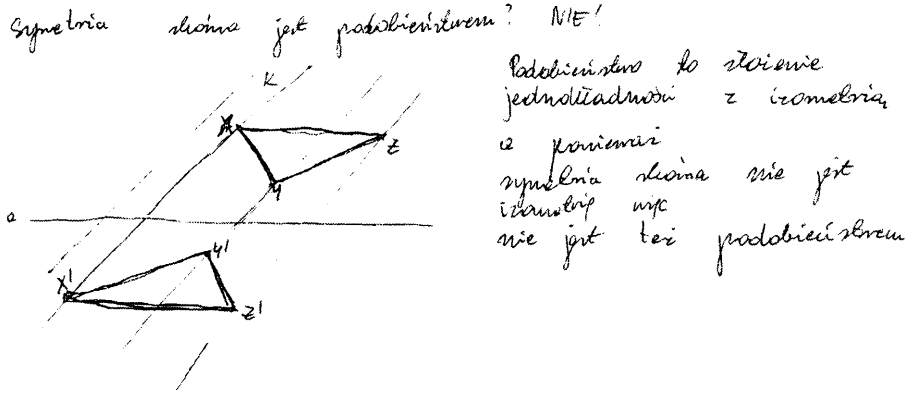
W innym ujęciu reguła ta przedstawia się następująco:

FP „CPN"
fałszywe przekonanie — „częściowa przechodniość nieinkluzji"[4]

Błędna reguła wnioskowania

$$\frac{A \not\subset B, B \subset C}{A \not\subset C}$$

Oto podobne rozumowanie przedstawione przez studentkę IV roku matematyki.



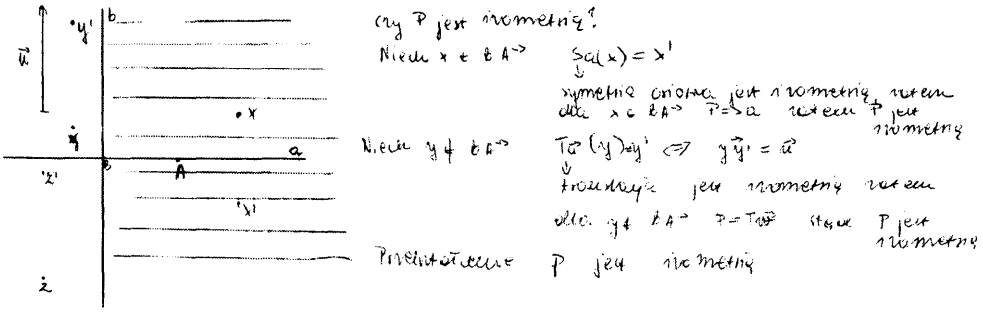
Rysunek 1.

[4]Jest to przykład *fałszywego przekonania* I typu.

Fałszywe przekonania II typu związane są z przenoszeniem przez studentów własności pewnych obiektów matematycznych na „nowy" obiekt — „połączenie" — powstały z danych według domyślnej zasady. *Fałszywe przekonania* typu II dotyczą zatem wspomnianych już sklejeń i złożeń („połączeń") przekształceń geometrycznych.

Przykład 2

Rozwiązanie studentki dotyczące punktu b) w zadaniu 1



Rysunek 2.

Przekształcenie P nie jest oczywiście izometrią. Interesujące jest to, że osoba rozwiązująca zadanie nie wykorzystała definicji izometrii — nie próbowała nawet jej przywołać, ani do niej nawiązać. Autorka omawianego rozwiązania o przekształceniu, które jest sklejeniem dwu izometrii, rozumowała tak, jak rozumuje się w badaniu złożenia dwu izometrii. Przebieg jej rozumowania można opisać następująco:

Jeżeli A jest C i B jest C, to „połączenie" A i B jest C.

Oto domniemana, ogólna postać tej reguły (w innym ujęciu):

FP „IP"

fałszywe przekonanie — „inkluzja połączenia"[5]

Błędna reguła wnioskowania

$$\frac{A \subset C, B \subset C}{\text{„połączenie" } A \text{ i } B \subset C}$$

Warto zaznaczyć, iż rozumowanie takie nie jest absurdalne. Na przykład prawdziwe jest twierdzenie dotyczące związku między inkluzją a działaniem

[5]Jest to przykład *fałszywego przekonania* typu II.

dodawania (rodzaj łączenia) zbiorów:

Dla dowolnych zbiorów A, B, C :
jeśli $A \subset C$ i $B \subset C$, to $A \cup B \subset C$.

Istnieją również inne twierdzenia, których struktura przypomina powyższą regułę.

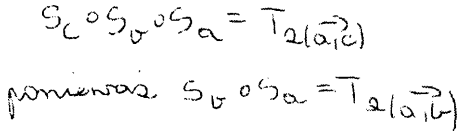
Podstawą przedstawionego dalej rozwiązania jest *fałszywe przekonanie* typu *„analogia"*. Za przyczynę błędów popełnionych w rozwiązaniach należących do tej grupy można uznać nieostrożne wykorzystanie przez ich autorów przyswojonych kiedyś wiadomości.

Przykład 3

Zadanie 2

Dane są trzy równoległe proste a, b i c.
Jaką izometrią jest złożenie $S_c \circ S_b \circ S_a$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie studentki



Rysunek 3.

Studentka przystąpiła do pracy nad zadaniem jakby z gotową odpowiedzią. Nie rysowała, nie wyznaczała obrazów punktów, itp. Opierając się na poznanym wcześniej twierdzeniu podała jedynie odpowiedź, która dodatkowo nie wzbudziła w niej żadnej wątpliwości. Autorka pracy uznała, że skoro złożenie dwu symetrii osiowych o osiach równoległych jest translacją, to złożenie trzech takich symetrii innym przekształceniem być nie może[6]. Rozumowała zatem tak, jakby nie wątpiła, że:

> Jeśli do danego „połączenia" pewnych (określonego typu) obiektów, „dołączymy" kolejny taki obiekt, to rodzaj danego „połączenia" nie ulegnie zmianie.

Schemat jej rozumowania można ująć w następujący sposób:

[6]Warto zwrócić uwagę na sposób w jaki studentka utworzyła wektor translacji, którą utożsamiła z rozważanym złożeniem.

FP „IRP"
fałszywe przekonanie — „inkluzja rozszerzonego połączenia"[7]

Błędna reguła wnioskowania

$$\frac{A \subset W, B \subset W, C \subset W, \text{ „połączenie" } A \text{ i } B \subset D}{\text{„połączenie" } A, B \text{ i } C \subset D}$$

Opis badań

Opis przeprowadzonych badań zawiera rozdział III. Podzielony został na kilka podrozdziałów tematycznych poświęconych *fałszywym przekonaniom*, które prowadzą do błędów, np. przy wyznaczaniu obrazów figur w przekształceniach geometrycznych. W rozdziale tym znajduje się również próba odpowiedzi na pytanie: „Czy zmiana[8] *fałszywych przekonań* jest w ogóle możliwa?".

Cele badań

Prowadząc badania dążyłam przede wszystkim do:

- zweryfikowania hipotezy badawczej o istnieniu *fałszywych przekonań*,
- scharakteryzowania dostrzeżonego zjawiska,
- znalezienia efektywnych środków i zabiegów dydaktycznych umożliwiających ujawnianie i eliminowanie *fałszywych przekonań*,
- sprawdzenia skuteczności podejmowanych przeze mnie prób zmiany *fałszywych przekonań*.

Metodologia badań

Metodologia moich badań określana jest jako *action research* — „badanie w działaniu". Koncepcja ta stwarzając możliwość połączenia aktywności nauczyciela z aktywnością badacza pozwala jednocześnie na uczenie oraz badania naukowe. Umożliwia prowadzenie badań w nauczaniu i (co się z tym wiąże) zmienianie tego nauczania pod wpływem rezultatów pracy badawczej.

Badania prowadziłam w warunkach naturalnych — w trakcie zajęć z geometrii elementarnej oraz związanych z zajęciami konsultacji. Nie wytwarzałam

[7] Jest to przykład *fałszywego przekonania* typu III.

[8] **Zmiana** *fałszywego przekonania* rozumiana jest tu jako zmiana myślenia kierowanego przez to *fałszywe przekonanie*, polegająca na dostrzeżeniu błędu w takim myśleniu, jego zrozumieniu i w konsekwencji „naprawieniu" tego myślenia.

na ćwiczeniach atmosfery „doświadczalnej", bo taka mogłaby wywołać niepotrzebny niepokój i obawy uczestników zajęć, a tym samym zablokować ich otwartość niezbędną do ujawniania błędnych koncepcji.

Taki sposób prowadzenia badań umożliwił systematyczną obserwację, jakie efekty przynoszą stosowane w pracy dydaktycznej środki i zabiegi, pozwolił na ciągłą ich weryfikację, ocenę i modyfikację. Skomplikował jednak ukazanie całościowego, klarownego obrazu przebiegu badań — nie przebiegały one według przygotowanego wcześniej schematu. Organizacja badań, narzędzia badawcze, zabiegi dydaktyczne były zależne od wielu różnych czynników, np. od wyników wcześniejszych obserwacji, reakcji studentów na rozważany problem, materiału, który miał być na ćwiczeniach realizowany, czy wiadomości, które studenci zdobyli na wykładzie. W rezultacie przedstawiony w rozprawie opis badań jest selektywny — skoncentrowałam się na opisaniu tych obserwacji, których rezultaty — w moim odczuciu — najsilniej potwierdzają tezę badawczą.

Narzędzia badawcze

Narzędziami badawczymi były różnorodne zadania odpowiednio dobierane, specjalnie konstruowane oraz zestawiane tak, by z jednej strony umożliwić studentom poznanie i opanowanie materiału z geometrii objętego programem, z drugiej zaś prowokować błędy ujawniające ich *fałszywe przekonania* i kształtować ich matematyczną postawę. Na szczególną uwagę zasługują wykorzystywane na zajęciach zadania nietypowe — oparte na autentycznych (często błędnych) rozwiązaniach studentów, ujawniające ich rzeczywiste trudności w rozumieniu i uczeniu się matematyki.

Materiał badawczy

Badania opierają się przede wszystkim na analizie różnorodnych rozwiązań zadań badawczych pochodzących z egzaminów końcowych i ćwiczeń (kolokwia, kartkówki i indywidualne prace pisemne organizowane w ramach zajęć). Te ostatnie, polegające na samodzielnym (czasami anonimowym) rozwiązywaniu zadań, dawały możliwość, uzyskania odpowiedzi, w tym samym czasie, od każdego studenta. Nieocenianie takich prac miało na celu zminimalizowanie u studentów „strachu przed błędem" i zachęcenie ich do dzielenia się swoimi pomysłami.

W badaniach wykorzystałam także indywidualne rozmowy ze studentami oraz ankietę. Rozmowy indywidualne prowadziłam głównie z tymi osobami, u których (w ramach zajęć) zidentyfikowałam konkretne *fałszywe przekona-*

nie. Odbywały się one po to, by zdobyć jak najwięcej informacji o przyczynach popełnionych błędów, a także umożliwić rozmówcom dostrzeżenie błędu i zrozumienie jego istoty.

Grupa badawcza

Trwającymi kilka lat badaniami objętych zostało ponad 200 studentów uczęszczających na prowadzone przeze mnie ćwiczenia z geometrii elementarnej. Przeprowadziłam także pojedyncze obserwacje osób z innych grup (studiujących na I oraz IV roku). Łącznie około 250 studentów wzięło udział w przeprowadzonych badaniach. Trudno precyzyjniej określić ich łączną liczbę. Liczebność grup badawczych zależała od liczby studentów uczestniczących w zajęciach, a ta była zmienna, i zależała od bardzo wielu, niezależnych ode mnie, czynników (reorganizacja grup, nieobecności itd.). Dokładnie potrafię stwierdzić, ile osób wzięło udział w określonej próbie badawczej, czy też ile prac pisemnych wtedy przeanalizowałam, co zrobiłam w poszczególnych opisach we wspomnianych wcześniej podrozdziałach.

Teza badawcza

W wyniku przeprowadzonych badań uzyskałam odpowiedź na pytanie: „W czym tkwi przyczyna różnego rodzaju zaskakujących błędów popełnianych przez początkujących studentów?". Analiza zgromadzonego materiału badawczego wykazała, że:

> **W rozumowaniach studentów funkcjonują *fałszywe przekonania*, które sterując ich myśleniem podczas pracy nad różnego rodzaju zadaniami utrudniają, albo wręcz uniemożliwiają ich poprawne rozwiązanie.**

Dowód tej tezy polega w mojej rozprawie na:

- wskazaniu i przedstawieniu rozwiązań tych studentów, którzy niejednokrotnie popełnili określonego typu błąd (co najmniej dwukrotnie, w różnych sytuacjach, w pewnym odstępie czasowym), albo też powrócili do tego samego błędu po jego uprzednim omówieniu;
- na przedstawieniu różnego typu wypowiedzi studentów (z rozmaitych dodatkowych prac czy ankiety), w których studenci wprost poświadczają istnienie *fałszywych przekonań*. Dalej podaję jedną z nich, związaną z *FP „odcinek"*.

FP „odcinek"
Obrazem odcinka AB w przekształceniu P jest odcinek $A'B'$ taki, że $P(A) = A'$, $P(B) = B'$
(niezależnie od określenia przekształcenia P)

Wypowiedź studentki
W szkole podstawowej, później średniej, zawsze myślałam, uczono mnie, że obrazem odcinka w przekształceniach jest odcinek. Jednak na studiach okazało się, że nie we wszystkich przekształceniach obrazem odcinka jest też odcinek.

Wnioski

Jakie są *fałszywe przekonania*?

Fałszywe przekonania powodują, że studenci popełniają błędy i dają się uwikłać w wiele matematycznych pułapek, z których — nierzadko — bez pomocy nauczyciela trudno im się wydostać.

- Bywają bowiem „silniejsze" od dowodu.
- „Zwyciężają" w konfrontacji z posiadaną wiedzą.
- Bywają bardziej przekonujące od empirycznej weryfikacji.
- Nie zawsze udaje się zdiagnozować je w pierwszej próbie, czasami uaktywniają się dopiero w „odpowiednich" sytuacjach problemowych.

W rozprawie przedstawiłam dowody na to, że choć *fałszywe przekonania* są trwałe i utrzymują się z dużą siłą, można je zmienić, co nie jest jednak łatwe.

Jakie trudności towarzyszą zmianie *fałszywych przekonań*?

- Zmiana nie jest zwykle rezultatem jednorazowego zabiegu dydaktycznego.
- Zmiana nie polega na eliminowaniu błędów poprzez ostrzeżenia, zakazy i nakazy.
- Nie można sądzić, że niepoprawnie rozumujący student nie popełni kolejny raz określonego błędu, gdy mu się jedynie błąd ten wskaże i umożliwi poznanie poprawnego rozwiązania.
- Ze zmianą nie można utożsamić uzyskania poprawnej odpowiedzi od studenta, u którego wcześniej dostrzeżono pewne *fałszywe przekonanie*.

Właściwa odpowiedź nie daje gwarancji usunięcia *fałszywego przekonania*. Może być oznaką jedynie pozornego wyeliminowania trudności studenta (może on odpowiedzieć poprawnie, nie rozumiejąc, na czym polega popełniony wcześniej błąd). Zakotwiczone w jego umyśle *fałszywe przekonanie*, nieusunięte, pozostanie i ujawni się w jego rozumowaniu w kolejnej, nieco innej sytuacji.

- Rozpoznanie u studenta jednego z *fałszywych przekonań* jest (nierzadko) sygnałem istnienia w jego umyśle większej liczby tego rodzaju (błędnych) koncepcji.

Jak można zmieniać *fałszywe przekonania*?

Skutecznym sposobem zmiany *fałszywego przekonania* jest postawienie studenta w sytuacji konfliktu. Dążenie do pozbycia się dyskomfortu wywołanego uzyskaniem sprzecznych ze sobą rozwiązań (chodzi tu o stan emocjonalny zwany d y s o n a n s e m p o z n a w c z y m) motywuje studenta do poszukiwania poprawnej odpowiedzi, a samodzielne odnalezienie błędu we własnym rozumowaniu i zrozumienie jego przyczyny pozwala z dużą dozą pewności stwierdzić, że podobnego błędu student ten już nie popełni.

Zmiana *fałszywych przekonań* związana jest ze zmianą postawy studentów — ze zmianą ich myślenia i działania. Postawę matematyczną charakteryzuje — między innymi — krytycyzm i ostrożność, których początkującym studentom często brakuje.

- Stawiając ich przed nietypowymi problemami, prowokując błędy, zachęcając do analizy niepoprawnych rozumowań rozwijamy w nich te cechy.
- Wyrobienie nawyku weryfikacji uzyskanego rozwiązania i podejmowania nad nim refleksji daje szansę na samodzielne dostrzeżenie popełnionego błędu, przeanalizowanie i zrozumienia jego przyczyn.
- Bardzo ważne jest uzmysłowienie studentom, że od szybkiego podania (często nieprzemyślanej) odpowiedzi znacznie cenniejsza jest analiza problemów, nie wykluczając tej, która doprowadziła do podania błędnego wyniku — uczenie się to nie wyścig, w którym premiuje się najszybciej odpowiadających.

Wnioski dla nauczania

Mimo że zaprezentowany w rozprawie materiał badawczy odnosi się do zagadnień geometrycznych, a grupę badawczą stanowili studenci matematyki (głównie I roku), problem *fałszywych przekonań* związany z postawą wobec

matematyki kształtowaną w tradycyjnym jej nauczaniu, jest uniwersalny. Dotyczy on wszystkich szczebli nauczania i na każdym z nich powinny być podejmowane stosowne działania, z jednej strony zmierzające do kształtowania właściwej postawy uczących się, z drugiej zaś zapobiegające powstawaniu w ich umysłach *fałszywych przekonań*. W tak prowadzonym nauczaniu należałoby zatem m.in:

- znaleźć „miejsce" na poruszanie zagadnień metodologicznych (dotyczących np. roli przykładu i kontrprzykładu, znaczenia rysunku, czy argumentacji matematycznej) i kwestii autokontroli,
- zwracać uwagę na logikę w prostych wnioskowaniach,
- uczyć korzystania z analogii,
- proponować uczniom zadania nietypowe, pobudzające ich do aktywności,
- eliminować zabiegi dydaktyczne prowadzące do szybkiego ustalania i utrwalania schematów, tworzenia procedur; nie unikać tych sytuacji, w których już funkcjonujące schematy „psują się",
- pozwalać uczącym się popełniać błędy, prowokować je w każdej sytuacji, w której z dużym prawdopodobieństwem mogą się pojawić, i tak organizować nauczanie, by uczniowie mogli się na tych błędach uczyć.

Zdiagnozowane zjawisko nie dotyczy jedynie osób o niskich kompetencjach matematycznych — wśród studentów, którzy ujawniali *fałszywe przekonania* byli studenci dobrzy i bardzo dobrzy. *Fałszywe przekonania* oczywiście nie występują u wszystkich studentów, jedne z nich pojawiają się częściej, inne rzadziej, trudności jednak, jakie wywołują, nie pozwalają na to, by zjawisko to zbagatelizować. Wniosek ten dodatkowo potwierdzają błędne rozwiązania zadań uzyskane od studentów IV roku. Bez usunięcia *fałszywych przekonań* nie jest możliwe wyeliminowanie pewnych typów błędów, np. logicznych, a student, który się ich nie pozbędzie uczy się matematyki jedynie werbalnie, powierzchownie, bez rozumienia jej istoty.

Zagadnienie *fałszywych przekonań* ma szczególne znaczenie w kształceniu przyszłych nauczycieli. Nauczyciel używający matematyki w specyficzny sposób musi z jednej strony być sam wolny od *fałszywych przekonań*, by nie „przekazywać" ich swoim uczniom, z drugiej zaś powinien mieć świadomość ich występowania, by móc im przeciwdziałać i skutecznie je usuwać. Konieczne jest zatem zwracanie uwagi na to zjawisko przez wszystkich, którzy uczą matematyki przyszłych nauczycieli. Jest to szczególnie ważne na I roku, kiedy absolwenci szkół średnich rozpoczynają studia z różnej wielkości „bagażem" *fałszywych przekonań*.