dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 19(1997)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Milan Hejný
Wydział Pedagogiczny
Uniwersytetu Karola
w Pradze

Rozwój wiedzy matematycznej[1]

W tym artykule zajmuję się dwiema ideami. Obydwie związane są z rozwojem **matematycznej części struktury poznawczej (MPCS[2])**. Pierwsza z nich opisuje ogólny mechanizm procesu rozwoju wiedzy matematycznej i jest wykorzystana do analizy wiedzy formalnej. Druga koncentruje się na jednym szczegółowym zagadnieniu MPCS — rozwoju pojęć geometrycznych.

Do tworzenia modelu struktur poznawczych wykorzystałem wiele źródeł, które zamieściłem w spisie literatury. Inspirowany byłem głównie ideami J. Piageta, L.C. Wygotskiego, P. Vopěnki, a przede wszystkim mego ojca, Vita Hejný'ego. Bogaty materiał eksperymentalny, który stanowił bazę dla teoretycznych konstrukcji, pochodzi częściowo od moich współpracowników — głównie nauczycieli szkół podstawowych i średnich, częściowo zaś z moich własnych obserwacji zbieranych w czasie, gdy pracowałem eksperymentalnie jako nauczyciel w Bratysławie w latach 1976–1980 (ucząc w klasach od piątej do ósmej) i w latach 1984–1989 (w klasach od trzeciej do siódmej).

1 Mechanizm rozwoju wiedzy (matematycznej)

1.1 Co podlega rozwojowi

To, co stanowi treść MPCS, źródło naszych matematycznych działań, rozłożymy na cztery części: pojęcia, fakty, umiejętność stosowania i schematy.

1. **Pojęcia** (liczba, ułamek, mnożenie, granica, prostopadłość, pole, funkcja, miara, kształt, zależność, wypukłość, liniowość, nieskończoność, dowód,

[1]Artykuł stanowi część projektu GAČR 406/96/1186: Edukacja matematyczna uczniów 6–15–letnich.

[2]mathematical part of the cognitive structure

algorytm, ...). Pojęcia są później klasyfikowane zgodnie ze spektrum matematycznej dyscypliny (geometria, algebra, arytmetyka, kombinatoryka, logika, ...) oraz głównie ze względu na kryterium „stopnia abstrakcji".

2. **Fakt** jest to singel, twierdzenie, wzór lub reguła.

Singel[3] jest jednostkową informacją gromadzoną w pamięci jako jedna całość, dostępną natychmiast, gdy jest potrzebna ($7+8=15; 2\times 3=6; sin 90^0 = 1; (x^2)' = 2x; \sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną).

Twierdzenie jest zależnością implikacyjną między obiektami lub danymi (twierdzenie Pitagorasa).

Wzór jest symbolicznie zapisanym związkiem, często rozumianym jako instrukcja typu „wejście → wyjście" ($S = a\frac{h}{2}$ dla pola trójkąta; (a, h) – wejście, S – wyjście).

Reguła jest zaleceniem mówiącym, co wolno, a czego nie wolno (nie dzieli się przez zero, $a(b+c) = ac + bc$; przy rozwiązywaniu równania niewiadome przenosimy na lewą stronę).

3. **Umiejętność stosowania**[4] jest to zbiór umysłowych narzędzi wykonawczych, za pomocą których uczeń wykorzystuje fakty podczas rozwiązywania zadań. Za niezawodne kryterium stratyfikacji umiejętności stosowania wiedzy można przyjąć miarę **sztywności** (czy też **swobody**) danej procedury. Bardzo ogólne zastosowanie tego kryterium prowadzi do wyróżnienia następujących trzech poziomów (w bardziej szczegółowej klasyfikacji można rozpatrywać dwanaście poziomów):

Algorytm jest to proces rozwiązywania zadania, w którym jednoznacznie określono kolejne kroki postępowania (znajdź 27×48; znajdź pochodną funkcji $f(x) = log(sin(x))$, skonstruuj środek danego odcinka).

Procedura[5] jest to proces rozwiązywania zadania, posiadający jedną standardową strategię oraz inne różnorodne drogi wiodące od wejścia do wyjścia (rozwiąż równanie $\frac{x}{3} - 1 = \frac{4}{3} - x$; mając dany odcinek AB skonstruuj kwadrat $ABCD$).

Metoda jest to proces rozwiązywania zadania, w którym rozwiązujący próbuje, a przynajmniej myśli, o dwóch lub więcej różnych strategiach (znajdź pole trójkąta ABC, jeżeli $A(0,0), B(4,1), C(1,3)$ — możliwe strategie: wykorzystanie papieru kratkowanego; wykorzystanie wzoru Herona; wykorzystanie wyznaczników).

4. **Schemat** jest złożonym obrazem pewnej części rzeczywistości, w którym zawarto mnóstwo nieuświadomionych informacji, które to informacje mogą być

[3] W angielskim oryginale: singletone (przyp. Redakcji; tak samo należy rozumieć inne analogiczne przypisy).

[4] know-how

[5] course

w miarę potrzeby przeniesione do świadomej wiedzy. Na przykład nie znam dokładnej liczby kolegów pracujących na naszym wydziale. Jednak gdy zajdzie potrzeba, mogę taką wiedzę zdobyć, gdyż w swej pamięci mam zachowane obrazy wszystkich pomieszczeń wydziału oraz wiem, kto pracuje w poszczególnych pomieszczeniach. Podobnie piątoklasista zapytany o liczbę wierzchołków sześcianu będzie w myśli manipulował sześcianem (schematem sześcianu) zanim poda odpowiedź.

Uwaga 1. To samo wyobrażenie wiedzy często może być zachowywane w pamięci w dwóch albo i więcej miejscach. Na przykład twierdzenie Pitagorasa może być traktowane przez uczniów jako fakt lub jako zbiór dwóch algorytmów, albo też jako schemat. Im więcej ma uczeń możliwości różnej interpretacji fragmentów wiedzy, tym wyższa jest u niego jakość tego fragmentu wiedzy.

1.2 Jak fragmenty wiedzy rodzą się i rozwijają

Proces poznawczy, w wyniku którego powstaje nowa wiedza ucznia, zaczyna się od zainteresowania, wiedzie poprzez zdobywanie doświadczeń, by zakończyć się narodzinami nowego fragmentu abstrakcyjnej wiedzy. Ten proces, zgodnie z moim rozumieniem, można opisać jako mechanizm składający się z pięciu etapów.

1. **Motywacja** — napięcie, które powstaje w umyśle ucznia jako konsekwencja niezgodności pomiędzy *Nie wiem* oraz *Chciałbym wiedzieć*. Owo napięcie ukierunkowuje uczniowskie zainteresowanie w stronę matematycznych problemów, sytuacji, pomysłów, pojęć, faktów, umiejętności stosowania wiedzy czy schematów.

2. **Etap izolowanych modeli**. Zdobywanie pierwszych doświadczeń. Te wstępne doświadczenia gromadzone są najpierw jako izolowane zdarzenia czy wyobrażenia, później zaczynają się pojawiać pomiędzy nimi powiązania.

3. **Etap uniwersalnych modeli**. Zdobyte izolowane modele są porównywane między sobą, organizowane i hierarchizowane. Uczeń zaczyna być świadomy możliwości **przenoszenia** z jednego modelu na inny i odkrywa schemat uogólniający wszystkie izolowane modele. Często rolę takiego ogólnego schematu odgrywa jeden z izolowanych modeli.

4. **Podniesienie abstrakcji**. Odkrycie nowego, głębszego wglądu w dany fragment wiedzy. Rozumienie tej wiedzy na wyższym, abstrakcyjnym poziomie. Czasami dzieje się to w pewnym przedziale czasowym, czasami ma formę nagłego olśnienia „Aha!", które B. Russel charakteryzuje jako „oszałamiającą radość nagłego zrozumienia"[6]. Często konsekwencją tak silnej emocji bywa doprecyzowanie nowego fragmentu wiedzy.

[6] intoxicating delight of sudden understanding

5. **Etap krystalizacji**. Nowy fragment wiedzy jest umiejscawiany w istniejącej już sieci powiązań poznawczych, lub też inicjuje nowe powiązania.

Z punktu widzenia nauczyciela (czy też nauczania) istnieje jeszcze jeden etap, mianowicie **Etap automatyzacji**: Nowy fragment wiedzy jest automatyzowany przez wielokrotne powtarzanie. Jednak w moim rozumieniu, ten etap nie należy do mechanizmu **rozwojowego**. Jest jedynie częścią szkolnej praktyki. Automatyzm ma na celu zachowanie energii intelektualnej dla bardziej interesujących przedsięwzięć. Na przykład kierowca powinien skupić swoją uwagę na obserwacji wszystkiego, co dzieje się na drodze, zaś jego ręce i nogi powinny pracować automatycznie. Podobnie uczeń wykonujący dzielenie 54831 : 71 powinien znać na pamięć tabliczkę mnożenia. W przeciwnym razie włoży wiele intelektualnego wysiłku w znalezienie wyniku mnożenia 7×7, a w takiej sytuacji wykonanie dzielenia pisemnego stanie się zadaniem nie do pokonania.

Uwaga 2. Czasami jest bardzo trudno określić różnicę pomiędzy etapem izolowanych modeli a uniwersalnym modelem. W takim przypadku mówimy o **etapie modeli**. Czasami różnica pomiędzy tymi poziomami jest głęboka i ostra. Wtedy przejście od pierwszego do drugiego etapu również będzie nazwane **podniesieniem abstrakcji**.

1.3 Ilustracja

Mechanizm poznawczy można zilustrować, rozważając „rozumienie małych liczb", tj. choćby takich fragmentów wiedzy, jak rozumienie, że $5 < 7$, oraz $2 + 3 = 5$.

Przykład 1. Ania (5 lat) pomaga mamie przy pieczeniu słodkich bułeczek. Układa swoje bułeczki na blaszkę do pieczenia i liczy: „jeden, dwa, trzy, cztery, pięć". Gotową blaszkę mama przenosi na balkon. Na następnej blaszce Ania układa siedem bułeczek. Mama pyta: „Aniu, tutaj mamy siedem, a na balkonie jest pięć bułeczek. Gdzie jest więcej?" Ania waha się przez chwilę, a potem odpowiada: „Powiem ci, gdy obydwie blaszki będą tutaj".

Komentarz 1. Ania rozumie liczby na etapie izolowanych modeli. Nie wie jeszcze, że takie zadanie można rozwiązać licząc na paluszkach, łyżeczkach, czy wykorzystując jakikolwiek zbiór przedmiotów. Mama Ani miała okazję poszerzyć jej rozumienie liczb, rysując obrazki pięciu bułeczek i siedmiu bułeczek, ukierunkowując myślenie na wytworzenie uniwersalnego modelu. Zwróćmy teraz uwagę na zadanie $2 + 3 =?$. Na etapie izolowanych modeli dziecko takiego zadania nie rozumie, o ile nie jest ono związane z jakąś rzeczywistą sytuacją, jak: „Ile to lalek — dwie lalki i jeszcze trzy lalki; Ile to piłek — dwie piłki i jeszcze trzy piłki?". Proces rozwiązywania zadania w takim przypadku

koncentruje się raczej na manipulacji piłkami i lalkami, niż na liczbach 2 i 3. Dopiero w momencie, gdy dziecko odkryje, że można policzyć cukierki nie mając ich w ręku (licząc w zamian własne palce), dojrzewa w nim głębsza idea dodawania. Palce zaczynają pełnić rolę uniwersalnego modelu — dziecko osiąga etap uniwersalnego modelu. Dopiero po jakimś czasie dziecko przeżywa następne ważne odkrycie: nie są potrzebne ani cukierki ani palce do stwierdzenia, że „2 cukierki + 3 cukierki = 5 cukierków". To jest prawda, gdyż zawsze $2 + 3 = 5$, dla wszystkich rzeczy, dla wszystkich palców, bez żadnych wyjątków. Od tego ważnego momentu liczby przestają być „na służbie" u palców, zaczynają być **indywiduami**[7] kreującymi swoją własną wspólnotę, swój własny świat, świat Arytmetyki. W tym świecie Arytmetyki pojawia się wiele danych, procedur, reguł, praw: dane, że $5 < 7$, $2+3 = 5$, procedura dzielenia, prawo przemienności ... . Jest też wiele ekscytujących zjawisk; prawdopodobnie jednym z najpiękniejszych jest odkrycie, że sekwencja 1, 2, 3, 4, ... nie ma ograniczenia. Ciągnie się dalej i dalej w nieskończoność. Tak więc podczas odkrywania Arytmetyki podniesienie abstrakcji jest raczej procesem rozciągłym w czasie niż nagłym zrozumieniem rzeczy. Jest to okres, podczas którego świat Arytmetyki wynurza się z codziennego życia, w którym dziecko żyje.

1.4 Wiedza formalna

Najbardziej niebezpieczną chorobą MSCP jest **formalizm**. Pojawia się wtedy, gdy fragmenty wiedzy przenikają do pamięci ucznia nie poprzez mechanizm opisany w 1.2, ale bezpośrednio z głowy nauczyciela, jako ukształtowany już produkt finalny. Wiedza formalna (nazywana również wiedzą bezmyślną, lub werbalną, czy też wiedzą okaleczoną, czasami po prostu „wiedzą"), może być niezawodnie rozpoznana po trzech następujących symptomach.

Wiedza cierpi na formalizm jeżeli:

1. sprowadza się do izolowanych danych (faktów) zachowywanych w pamięci. Nie jest ona **zespolona z MSCP**; jeżeli więc pamięć zawiedzie, nie ma sposobu na odtworzenie brakującego fragmentu wiedzy;

2. **nie jest związana z realnym światem**, nie jest różnicowana poprzez uczniowskie doświadczenia, uczeń nie jest w stanie zilustrować fragmentów wiedzy odpowiednimi przykładami pochodzącymi ze świata, w którym żyje;

3. jest rozumiana jako odpowiedź na pytanie JAK?, a **nie odpowiada na pytania CO? ani DLACZEGO?**.

Przykład 2. Boguś (13 lat, 7 klasa) liczy: $2,63 + 4,58 = 6,121$. Jego kolega, Bolek, stara się mu pomóc: „Wyobraź sobie, że to są metry. Wtedy 2,63 m = 2 m i 63 cm oraz ..." ; Boguś przerywa mu, mówiąc: „Ja wiem, jak

[7] personalities

to się robi z metrami, ale to jest za długo. Wiem, że jest reguła dla przecinków przy ułamkach dziesiętnych, ale ją zapomniałem. Przypomnij mi tę regułę".

Komentarz 2. Wszystkie trzy symptomy można znaleźć w tym przykładzie.

Pierwszy. Boguś zapomniał reguły: „ podpisz przecinek pod przecinkiem, opuść przecinek, potem dodaj jak dwie liczby naturalne, a na końcu wstaw przecinek w to samo miejsce, gdzie był przedtem". Chłopiec wie, że jeżeli coś umknie z jego pamięci — nie ma szans na odtworzenie tego fragmentu wiedzy. Dlatego prosi o pomoc.

Drugi. Najistotniejszy dla tego przykładu jest fakt, że Boguś zna powiązania pomiędzy rzeczywistością a ułamkami dziesiętnymi, ale unika ich wykorzystania przy szukaniu strategii rozwiązującej zadanie. Dlaczego? Ponieważ sądzi, że to zabierze mu zbyt wiele czasu. Męcząca procedura mogłaby mu pomóc w tym określonym zadaniu, ale nie przyniosłaby mu reguły, która, zgodnie z oceną nauczycieli, jest sednem wiedzy dla takiego zadania. Taka strategia uczenia się docelowego dowodzi, że Bogusiowe możliwości tworzenia modeli dla matematycznych obiektów będą zanikały, zaś choroba formalna jest głęboko zakorzeniona w jego rozumieniu matematyki, jak i zapewne w możliwościach krytycznego myślenia.

Trzeci. Trzeci symptom jest bardzo widoczny i nie wymaga komentarza.

1.5 Postęp w chorobie formalizmu

Do tej pory opisywałem chorobę formalizmu w sposób „statyczny". Teraz zastanówmy się nad dynamizmem tego zjawiska. Chcielibyśmy wiedzieć, **kiedy**, **dlaczego** i **jak** bakcyl formalizmu dostaje się do dziecięcego umysłu.

Najpierw rozpatrzmy zagadnienie KIEDY? Bardzo długo tkwiłem w przekonaniu, że bakcyl formalizmu zaczyna penetrować umysł dziecka, gdy pierwsze fragmenty wiedzy docierają do jego umysłu nie poprzez mechanizm opisany w 1.2, lecz są bezpośrednio przekazywane z głowy nauczyciela. Jednak doszedłem do wniosku, że to nie jest tak. Bardzo wielu błyskotliwych matematycznie uczniów stwierdzało, że ich początkowa wiedza o mnożeniu i dzieleniu pisemnym obywała się bez żadnego zrozumienia, a później odczuwali dyskomfort psychiczny z powodu takiej wiedzy. Bardziej kompleksowa analiza pierwszych etapów formalizmu pokazuje, że ten wirus pojawia się wtedy, gdy zapamiętanie wiedzy jest traktowane jako finalny etap zdobycia tej wiedzy.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie JAK? Jest to dziwne, ale główne źródło formalizmu tkwi w dobrych chęciach nauczycieli nauczania początkowego (przynajmniej w moim kraju). Doświadczony nauczyciel wie, że liczenie na palcach jest pożądane i trwałe. Wymaga jednak poświęcenia czasu i energii, zarówno od nauczyciela, jak i od ucznia. Bardziej wydajną w tym względzie techniką

uczenia się – nauczania jest skorzystanie z dużej pojemności dziecięcej pamięci. W ten sposób nauczyciel może przyspieszyć proces nauczania, pomóc uczniowi wcześniej osiągnąć zdolność posługiwania się liczbami, zacząć wymagać rezygnacji z używania palców do liczenia i zapamiętania takich rzeczy, jak $5 < 7$ oraz $2 + 3 = 5$. Dla dziecka nie jest zbyt trudno sprostać takim wymaganiom, dopóki liczenie odbywa się w obrębie 20. Później uczeń wykonuje dodawanie i odejmowanie pisemne, w którym również bazuje na pamięci. Osiągnięcia uczniów są budujące: uczniowie są bardzo dobrzy w liczeniu i nauczyciel jest przekonany, że jego metoda jest najlepsza. Rzeczywiste rezultaty takiego uczenia pojawią się dopiero później, za jakieś 4 do 5 lat. Dziecko nie będzie w stanie uchwycić idei ułamka, ułamków dziesiętnych, liczb ujemnych, gdyż nie potrafi utworzyć swego własnego świata Arytmetyki bez tych najistotniejszych pojęć, które niestety nie mogą się narodzić. Dla takich dzieci raz na zawsze szkolne liczenie zostanie zredukowane do zapamiętania zbioru faktów i reguł. Żaden nowy kawałek wiedzy nie połączy się z już istniejącą. Co więcej, większość takich dzieci będzie odrzucać wszelkie rodzaje wyjaśnień w matematyce. Ich strategia docelowa uczenia się będzie oparta na przeświadczeniu, że uczenie się arytmetyki polega na zapamiętaniu nowych danych i reguł. Wszystko inne jest stratą czasu.

2 Rozwój pojęć geometrycznych

W części 1 pokazałem mechanizm zdobywania wiedzy matematycznej: od gromadzenia pojedynczych doświadczeń po nowe jakościowo, abstrakcyjne rozumienie. Rozwój MPCS nie polega na gromadzeniu i łączeniu nowych fragmentów wiedzy, ale jest ciągiem jakościowych zmian — **podnoszeniem abstrakcji** w naszej terminologii. Takie podejście do rozumienia rozwoju intelektualnego pochodzi od J. Piageta (1941), a jego geometryczny nurt od Van Hiele (1955 i 1986). Biorąc pod uwagę ten sam kierunek myślenia, zanalizujemy rozwój pojęć matematycznych u uczniów 4–15-letnich. Będziemy rozpatrywać trzy poziomy rozwojowe: poziom **przedpojęciowy**, poziom **pojęć uosobowionych** i poziom **pojęć społecznych**.

2.1 Poziom przedpojęciowy

Świat geometrii jest ukryty w świecie realnym. Krok za krokiem wynurza się z niego za pomocą narzędzia, które nazywamy intuicją geometryczną. Ten poziom można scharakteryzować pięcioma kryteriami:

dziecko

1. rozpoznaje specjalną klasę własności: **kształty**, równoległe do klas: **kolory, smaki** czy **liczby**;

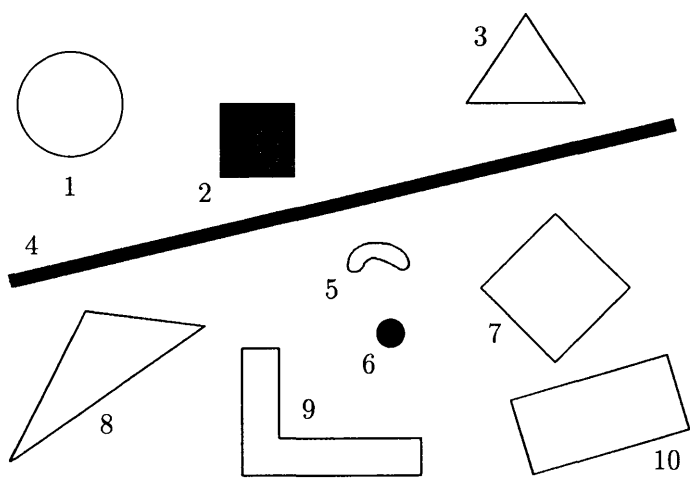
2. zna dobrze opisujące kształty słowa: kwadrat, koło, trójkąt (pojmowane zwykle jako trójkąt równoboczny), klocek (sześcienny), kula, piramida, okrągły, prosty, ... ;

3. wiąże każdy kształt ze zbiorem obiektów ze świata realnego (modeli dla tych kształtów)

4. rozumie stopniowanie przymiotników: długi, wysoki, krótki, niski;

5. żaden z kształtów nie jest traktowany jako indywiduum.

Przykład 3. Cecylia (9 lat) dostała obrazek z następującymi kształtami: 1. okrąg, 2. kwadrat, 3. trójkąt równoboczny, 4. „długi" prostokąt (4 mm × 95 mm), 5. kształt banana, 6. małe koło, 7. kwadrat 8. trójkąt rozwartokątny, 9. kątownik, 10. prostokąt (17 mm × 31 mm) (rys. 1).



rys. 1

Figury 2, 4 i 6 były wypełnione, pozostałe były narysowane linią. Wszystkie były czarne oprócz 1 (czerwona), 4 (zielona), 7 (brązowa). Dziewczynka miała opisać obrazki. Powiedziała: „To jest czerwone kółko, okrąg. Ten, ten kwadrat może być oknem, albo, tak, kostką. To jest ostry dziób ... ."

Komentarz 3. Ten etap najlepiej ilustruje drugie zdanie wypowiedziane przez dziewczynkę. Zawiera ono dwie różne interpretacje kształtu 2. Pierwsza („to **może być** okno") mówi, że obrazek 2 nie został jeszcze ukończony. Kwadrat jest własnością (atrybutem) okna, podobnie jak 5 jest własnością zbioru obiektów dla Ani (Przykład 1). Dla Ani **pięć** nie istnieje, podobnie jak **kwadrat** nie istnieje dla Cecylii.

Druga część tego zdania ma poprawić część pierwszą. Jest w niej stwierdzenie, że w figurze widzi **kostkę**. Powinniśmy być jednak ostrożni w interpretowaniu tego słowa. Odnosi się ono raczej do klocka niż do sześcianu. **Kostka** jest bliższa **lalce** czy **piłce** niż **kuli** czy **ostrosłupowi**.

2.2 Poziom obiektów uosobowionych

Jeżeli obiekt geometryczny (umiejscowiony w sieci poznawczej dziecka) zachowa po werbalnej i wizualnej izolacji swoją tożsamość oraz jedność, a przy tym dziecko przyzna temu obiektowi status indywidualności, będziemy — zgodnie z terminologią P. Vopěnki (1986) — nazywać ten obiekt **indywiduum**[8] lub bardziej precyzyjnie — **obiektem uosobowionym**[9]. Dla dzieci 10–letnich indywiduami są: kwadrat, sześcian (kostka), okrąg lub koło. Kształty są pierwszymi indywiduami, pierwszymi mieszkańcami tworzącego się geometrycznego świata.

Idea **okręgu** jest obecna w monecie, lecz **moneta** oznacza przede wszystkim obiekt ze świata realnego, a dopiero później model dla okręgu. Jeżeli pokażemy dziecku rysunek okręgu i będzie ono w stanie rozpoznać tam finalny geometryczny obiekt, okrąg albo koło (w tej sytuacji różnice w terminologii nie są istotne), wtedy powiemy, że dziecięcy rozwój pojęcia okręgu osiągnął drugi poziom w naszej klasyfikacji rozumienia pojęć geometrycznych.

Ten finalny obiekt nazywany jest **modelem uniwersalnym**. Przejście od pierwszego do drugiego poziomu jest podniesieniem abstrakcji (patrz: Uwaga 2) z etapu modeli izolowanych na etap modeli uniwersalnych. Pojęcie koła jest rozumiane jako **portret** koła (lub okręgu). Uczeń wie, że odpowiedniość:

MONETA, TALERZ, TARCZA ZEGARA, SŁOŃCE ↔ PORTRET OKRĘGU (i)

tworzy powiązania pomiędzy mieszkańcami realnego świata oraz jednym indywiduum z właśnie tworzącego się świata Geometrii. Obiekty moneta, ..., słońce tłumaczą znaczenie koła, zaś idea koła jest obecna w każdym z tych obiektów „od lewej do prawej" (słowa „moneta" itd. są realnymi modelami dla obiektu okrąg).

[8] personality
[9] personality object

Poziom obiektów uosobowionych można scharakteryzować dziewięcioma kryteriami:

dziecko

1. nadaje status obiektów uosobowionych niektórym pojęciom, jak kwadrat, okrąg, prostokąt, sześcian (kostka), kula, ostrosłup (piramida),
2. każde takie pojęcie uważa za uniwersalny model, uogólniający kolekcję realnych obiektów, izolowanych modeli,
3. identyfikuje każdy obiekt uosobowiony z jego uniwersalnym modelem, tj. jego portretem (modelem fizycznym lub rysunkiem),
4. przypisuje różne stopnie **typowości** [10] różnym indywiduom,
5. zna niektóre widoczne, a później także niektóre niewidoczne **atendenty**[11,12] znanych mu indywiduów,
6. wie, jak się mierzy długość,
7. zna niektóre relacje, jak równoległość, prostopadłość, przesunięcie,...
8. intuicyjnie zaczyna analizować indywidua oraz ustalać strukturę ich „społeczności",
9. nie analizuje indywiduów ani nie ustala struktury ich „społeczności" na poziomie myślenia krytycznego.

2.3 Poziom obiektów społecznych

Doświadczenia zdobyte przez intuicyjną analizę Świata Geometrii prowadzą na trzeci poziom rozumienia pojęć geometrycznych. Pobieżne spojrzenie na pojęcie punktu (*semeion*) w Euklidesowych *Stoicheia* pomoże nam oświetlić to abstrakcyjne przejście. Zgodnie z Arystotelesem, punkt posiada dwa atrybuty: nie ma miary ani położenia. Jednak zgodnie z Euklidesem: *semeion estin hu*

[10]Fenomen typowości (zob. Smith, 1991) może być wyjaśniony przez przykład: trójkąt równoboczny jest bardziej typowym modelem trójkąta niż trójkąt rozwartokątny; prostokąt w pozycji horyzontalnej jest bardziej typowy niż prostokąt w pozycji wertykalnej, a ten znowu jest bardziej typowy niż prostokąt w pozycji pochyłej.

[11]Neologizm. W oryginale: attendants; z łacińskiego *attendere* = napinać uwagę - przyp. Redakcji.

[12]Atendenty to „obsługa" dla indywiduów. Wierzchołek, bok czy ściana sześcianu są widocznymi atendentami tego indywiduum. Przekątna czy środek sześcianu — to jego niewidoczne atendenty. Atendenty pomagają nam rozróżniać indywidua oraz rozumieć je (zob. Vopěnka 1989).

meros uthen — punktem jest, co nie ma żadnej części. Nic nie ma o położeniu punktu w tej „definicji". Dlaczego? Zgodnie z platońskim duchem rozumienia geometrii, punkt jest tym, co należy do świata idei. Określony punkt, powiedzmy wierzchołek A kwadratu $ABCD$, albo środek S tegoż kwadratu należą do świata portretów, będącego pomostem pomiędzy światem realnym, w którym żyjemy, oraz czystym światem idei. W świecie geometrycznych idei istnieje tylko jedna idea kwadratu, jedna idea sfery, jedna idea punktu, jedna idea linii prostej. Każda z nich ma mnóstwo portretów, ale istnieje głęboka różnica pomiędzy ideą–indywiduum a jej portretem. Zobaczyć tę różnicę, znaczy osiągnąć trzeci poziom rozwoju pojęć. Odpowiedniość (i) powiększa się w ten sposób do odpowiedniości

$$\begin{array}{c} \text{MONETA, TALERZ, TARCZA ZEGARA, SŁOŃCE} \\ \updownarrow \\ \text{PORTRET OKRĘGU} \\ \updownarrow \\ \text{IDEA OKRĘGU} \end{array} \qquad \text{(ii)}$$

Podniesieniu abstrakcji przy przejściu z etapu uniwersalnych modeli na etap abstrakcyjnego rozumienia pojęć geometrycznych towarzyszy szereg zmian. Trzeci poziom rozwoju pojęć geometrycznych może być scharakteryzowany siedmioma następującymi kryteriami:

dziecko

1. zna osiem kategorii pojęć geometrycznych,

   Rozpatrujemy następujące kategorie pojęć geometrycznych dla uczniów szkół podstawowych i średnich:

   - obiekty pojedyncze (*individual objects*): kwadrat, okrąg, sześcian, sfera
   - obiekty rodzinne (*family objects*): trójkąt, czworokąt, stożek
   - obiekty społeczne (*society objects*): figura wypukła, wielokąt,
   - atendenty widoczne (*visible attendants*): wierzchołek kwadratu, ściana sześcianu
   - atendenty niewidoczne (*invisible attendants*): wysokość ostrosłupa, środek kuli
   - relacje: równoległość, prostopadłość, symetria, przystawanie, podobieństwo
   - miary: długość, obwód, pole, objętość, kąt
   - przekształcenia: przesunięcia, obroty

2. jest w stanie manipulować modelami brył, mierzyć odcinki i kąty, znajdować pola skomplikowanych figur narysowanych na papierze kratkowanym, wykonać proste konstrukcje za pomocą cyrkla i linijki oraz dyskutować na temat obiektów, które obserwuje lub tworzy,

3. wykorzystać te działania do zebrania niektórych ogólnych faktów typu: „przekątne w kwadracie są prostopadłe i mają tę samą długość",

4. wykorzystać (widoczne, a później również niewidoczne) atendenty do opisywania i badania obiektów uosobowionych,

5. rozpocząć tworzenie idealnych pojęć abstrakcyjnych, takich jak punkt, odcinek, linia prosta, płaszczyzna, figura płaska, kąt,

6. jest w stanie wzbogacić swój geometryczny świat o nowe potrzebne pojęcia, takie jak styczna, obrót, podobieństwo, wypukłość,

7. jest w stanie zdefiniować obiekty geometryczne i uzasadnić geometryczne relacje na poziomie intuicyjnym; nie jest w stanie tego zrobić na poziomie aksjomatycznym.

2.4 Aktywności geometryczne

Równolegle, i w mocnym związku z rozwojem pojęć geometrycznych, rozwija się zakres dziecięcych umiejętności geometrycznych. Sześć z nich rozpatrzymy jako specjalnie ważne z punktu widzenia nauczycieli („jakie umiejętności moich uczniów powinienem wzmocnić?") oraz z punktu widzenia dydaktyków („jak diagnozować geometryczne kompetencje uczniów?").

Każda z tych umiejętności jest opisywana przez swoją funkcję, tzn. przez działania, które są ujawniane przez dziecko będące w kontakcie z geometrycznym obiektem lub sytuacją. Dodatkowo podaję przykłady zadań diagnostycznych.

Obserwować znaczy percepować, zauważać (dzięki skoncentrowaniu uwagi), jeżeli zachodzi taka potrzeba — gromadzić w pamięci trwałej. Zadanie: Opisz ten obrazek (składający się z kształtów geometrycznych).

Manipulować znaczy działać rękami na fizycznym modelu (lub kilku modelach) obiektów geometrycznych (np. zbiorze plastykowych lub drewnianych klocków sześciennych). Zadanie: Dziecko dostaje zestaw 10 jednakowych plastykowych klocków sześciennych oraz obrazek budowli, którą ma z tych klocków zbudować.

Badać (analizować, wnikać) znaczy zidentyfikować wszystkie indywidua, ich atendenty, relacje i strukturę w danej sytuacji geometrycznej; zwykle badanie ukierunkowane jest na jakiś cel. Zadanie: Dziecko dostaje rysunek kwadratu z przekątnymi. Ma za zadanie policzyć wszystkie znajdujące się tam trójkąty.

Werbalizować znaczy opisywać słowami obiekt geometryczny (sytuację geometryczną) oraz wszystko, co jest przedmiotem badania. Zadanie–gra dla dwóch osób (malarz i instruktor): Instruktor dostaje rysunek i ma tak poinstruować malarza, aby ten odtworzył rysunek.

Konstruować znaczy narysować lub zrobić czy złożyć w logicznym porządku model obiektu geometrycznego lub sytuacji geometrycznej, z użyciem odpowiednich narzędzi. Zadanie: Dane są punkty węzłowe A, B na sieci kwadratowej. Znajdź wierzchołki C, D kwadratu $ABCD$.

Kreować znaczy stworzyć nie znany obiekt (sytuację). Zadanie: na papierze kratkowanym znajdź trójkąt (o wierzchołkach w węzłach sieci), którego pole wynosi a) 3/2, b) 2/3.

Literatura

B a l a c h e f f, N.: 1990, Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics Education. W: Nesher, P., Kilpatrik, J.: *Mathematics and Cognition*, Cambridge University Press, Cambridge, 14–30.

B e l l, A.: 1976, *The learning of general mathematical strategies*, PhD Thesis, Shell Centre for Mathematical Education, Universisty of Nottingham.

F i s c h e r, R., M a l l e, G.: 1984, *Mensch und Mathematik. Studienbrief zur Lehrerfortbildung.* Interuniversitäres Forschungsinstitut für Fernstudien, Klagenfurt.

H e j n ý, M. et al.: 1991, *Teória vyučovania matematiky 2*, Slovenské Pedagogické Nakladatelstvo, Bratislava.

H e j n ý, M.: 1993, The Understanding of Geometrical Concepts. W: *Proceedings of BISME–3*, Bratislava, 52–64.

K u ř i n a, F.: 1995, Didactical Structure of Geometry. W: *ICME Study, Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Catania, 130 – 133.

P i a g e t J.: 1992, *Mowa i myślenie u dziecka*, PWN, Warszawa.

S c h o e n f e l d, A. H.: 1985, *Mathematical problem solving*, New York, Academic Press.

S i e r p i n s k a, A.: 1990, Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24–36, 41.

S m i t h, E. E.: 1989, Concepts and thought. W: Sternberg, R. J., Smith, E. E: *The psychology of human Thought*, CambridgeUniversity Press, Cambridge.

S t e h l í k o v á, N.: 1995, The solving scheme as a tool for understanding pupil's solutions. W: Hejný, M., Novotná, J. (red.): *Proceedings of the International Symposium, Elementary Maths Teaching*, Charles University, Faculty of Education, Prague, 117–120.
S w o b o d a, E.: 1995, The development of understanding of similarity of figures. W: Hejný, M., Novotná, J. (red.): *Proceedings of the International Symposium, Elementary Maths Teaching*, Charles University, Faculty of Education, Prague, 57–60.
T u r n a u, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.
V a n H i e l e, P. M.: 1985, *Structre and Insight, A Theory of Mathematics Education*, New York.
V e r g n a u d, G.: 1990, Epistemology and Psychology of Mathematics Education. W: Nesher, P., Kilpatrik, J.: *Mathematics and Cognition*, Cambridge University Press, Cambridge, 14–30.
V o p ě n k a, P.: 1989, *Rozpravy s geometrií*. Praha, Pyramida.
W y g o t s k i, L. S.: 1989, *Myślenie i mowa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Development of mathematical knowledge

S u m m a r y

The paper presents two ideas concerning the development of the mathematical part of the cognitive structure (MPCS). The first one describes the general mechanism of the process of mathematical knowledge development, and is applied to the analysis of the formal knowledge. The second one is focused to one particular issue of MPCS: the development of geometrical concepts. Three levels of the latter are identified: the pre–concept level, the personality–object level, and the society–concept level.

Z angielskiego tłumaczyła Ewa Swoboda.