dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 19(1997)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Helena Siwek
WSP Kraków

Rola aktywności matematycznych w procesie kształtowania pojęć u uczniów ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki

1 Wstęp

Wyniki wcześniejszych badań empirycznych (Siwek, 1995) pozwoliły określić zakres treści matematycznych i metodykę pracy z uczniami o specyficznych trudnościach w uczeniu się matematyki. Uczniowie ci uczęszczają do szkół specjalnych (dla umysłowo upośledzonych w stopniu lekkim), do klas specjalnych w szkołach powszechnych, a także coraz częściej są uczniami z indywidualnym programem nauczania w klasach „normalnych" szkół podstawowych. Tak więc znajomość zakresu dostępności materiału oraz metodyki pracy z takimi dziećmi jest potrzebna każdemu nauczycielowi w różnych typach szkół. Praca z takimi dziećmi jest również interesująca dla dydaktyka matematyki, który obserwując kształtowanie się pojęć w zwolnionym tempie może dokładniej zanalizować ten proces i projektować jego udoskonalenia. Niektóre wyniki tych badań i wypływające z nich wnioski omawiam krótko w paragrafach 2–4.

Paragraf 5 jest poświęcony sformułowaniu pięciu postulatów wobec nauczania dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki i próbie ich praktycznej weryfikacji. Zaproponowana tu metodyka pracy z tymi uczniami jest oparta na koncepcji czynnościowego nauczania matematyki Z. Krygowskiej (1977, s. 81–127), a jednocześnie wykorzystuje autentyczne sytuacje z bliskiej, realnej, otaczającej dziecko rzeczywistości (Siwek, 1995). Do scenariusza czynnościowego nauczania dostosowane zostały podręczniki, którym nadano formę tekstów sterujących (Siwek, 1996, 1997). Podręczniki te są zbiorami kart do samodzielnej pracy ucznia pod kierunkiem nauczyciela, które tworzą swoiste ze-

szyty zastępujące podręcznik. Każdy podręcznik składa się z dwóch zeszytów. Dobór zadań i sytuacji na kartach zeszytów ma na celu zapewnienie dziecku wszechstronnego rozwoju, a nie tylko dostarczenie wąskich ćwiczeń rachunkowych. Trudne dla dziecka znajdującego się na poziomie operacji konkretnych pojęcia motywuje się tu obrazowo. Pomysły metodyczne wykorzystujące obrazowe wprowadzanie pojęć zastępują symboliczne i językowe reprezentacje, które przeważają w wielu innych podręcznikach, a także często w nauczaniu. Również zadania tekstowe zawarte w tych podręcznikach – zeszytach ćwiczeń, mają bezpośrednie odniesienie do praktyki, toteż powinny przyczyniać się do zainteresowania dziecka problemami z otaczającej rzeczywistości oraz poszerzać jego wiedzę ogólną.

2 Dwa typy badań

Badania empiryczne dzieci z lekkim upośledzeniem umysłowym miały na celu charakterystykę możliwości, a także przeszkód i ograniczeń w kształtowaniu się pojęć matematycznych. Prowadziłam je w dwóch następujących aspektach:

1) aktywności matematycznych (skrótowo A),

2) wiadomości uzyskanych w szkole (skrótowo W).

Badania typu A dotyczyły aktywności, jakimi dziecko dysponuje i które może wykorzystać przy uczeniu się matematyki.

Chodziło mi przy tym o bardzo proste aktywności — kopiowanie, naśladowanie rozumne, dostrzeganie prawidłowości i analogii, odwracanie operacji związanych z elementarnymi pojęciami. Aby je rozpoznać, stosowałam metodę obserwacji indywidualnej w oparciu o specjalnie zaplanowane sytuacje i zadania[1].

Oto przykład jednego z takich zadań:

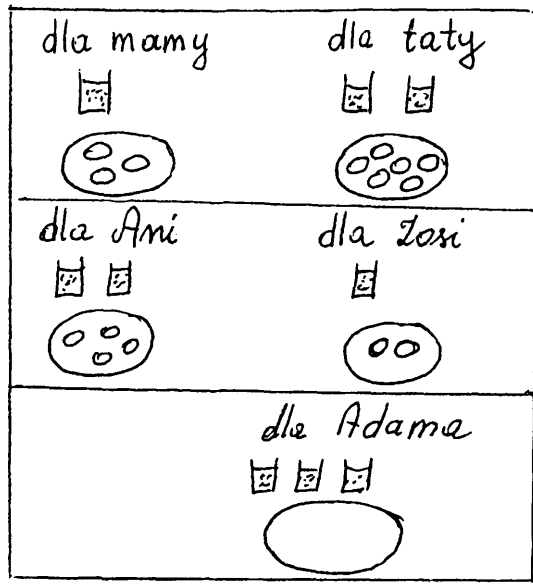
Zosia przygotowuje na kolację serek z cukrem.

Dla mamy zrobi serek z trzech łyżek sera i jednego kubeczka cukru, dla taty zaś z sześciu łyżek sera i dwóch kubeczków cukru. Który serek będzie słodszy — mamy czy taty, a może będą jednakowo słodkie? (Zadanie rozwiązywane z pomocą dorosłego.)

Jakie będą serki Ani i Zosi, czy tak samo słodkie, czy któryś z nich będzie słodszy? (Zadanie rozwiązywane samodzielnie, przez analogię do pierwszego przypadku.)

[1]Dokładne scenariusze pięciu serii zadań (łącznie 42 przypadki) opisałam w artykule (Siwek, 1989), natomiast niektóre typy zadań zostały zilustrowane w artykule (Siwek, 1996a).

Adam lubi ser tak samo słodki jak Zosia. Ile łyżek serka dasz na talerzyk Adama, żeby był tak samo słodki jak serek Zosi? (Zadanie rozwiązywane samodzielnie, odwrotne do zadania poprzedniego.)
Tekst zadania, w formie przystosowanej dla ucznia, przekazywał obserwator odsłaniając kolejne rysunki.



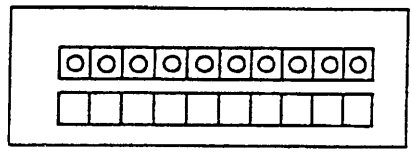
rys. 1

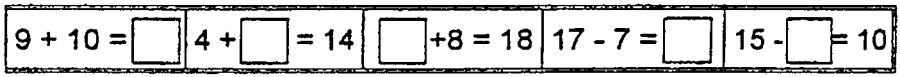
Badania typu W dotyczyły efektywności nauczania matematyki w szkole, określania poziomu wiadomości osiągniętych przez uczniów w procesie nauczania, oceny poziomu umiejętności operowania elementarnymi pojęciami i prawami matematycznymi i wykorzystania ich do rozwiązywania zadań praktycznych.

W tych badaniach stosowano analizę pisemnych sprawdzianów, które uczniowie rozwiązywali samodzielnie po objaśnieniach nauczyciela[2]. Oto przykłady zadań ze sprawdzianu:

Policz, ile jest kwadratów z kółeczkami. Na drugim pasku zaznacz kółeczkami tyle kwadratów, aby razem było 17.

[2]Tematy zadań (38 przypadków dla klasy III i 51 dla klasy VI) oraz analizę i wyniki badań przedstawiłam w książce (Siwek, 1995).



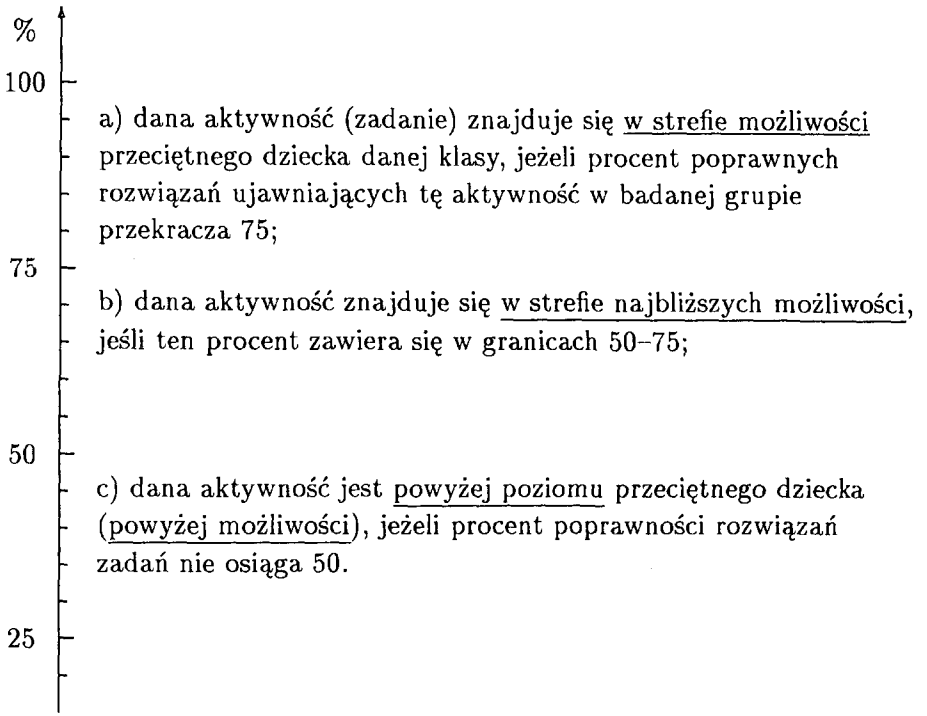


rys. 2

Badania indywidualne (A) były prowadzone w klasach I–V, a więc wśród uczniów przeciętnie w wieku 8–13 lat. Przebadano grupy liczące od 35 do 60 uczniów danego poziomu, tzn. uczęszczających do tej samej klasy. Badania drugiego typu (W) były prowadzone w klasach III (uczniowie przeciętnie 11–letni) i w klasach VI (14–letni). Uczestniczyło w nich 411 uczniów z klasy III oraz 591 uczniów z klasy VI. Badania były prowadzone wśród uczniów szkół specjalnych (typ A i W) oraz wśród uczniów klas specjalnych i ośrodków szkolno–wychowawczych (typ W).

Wyniki badań ujmuję w kategoriach stref możliwości. Zgodnie z teorią L. Wygotskiego (1971) zadanie zalicza się do strefy możliwości, jeśli uczeń potrafi je wykonać samodzielnie. Zadanie zalicza się do strefy najbliższych możliwości — gdy uczeń potrafi je rozwiązać przy pomocy i współpracy z dorosłym. Jeśli zaś nie potrafi zadania rozwiązać nawet przy pomocy, oznacza to, że wykracza ono poza jego możliwości.

Opracowując wyniki badań odnosiłam je do klasy, czyli do grupy uczniów badanych a nie do pojedynczego dziecka. Zastosowałam więc modyfikację pojęcia strefy możliwości Wygotskiego przyjmując umowy wzorowane na ocenianiu prac pisemnych uczniów w praktyce szkolnej. Często stosuje się ocenę niedostateczną za klasówkę, w której uczeń rozwiązał mniej niż 50% zadań. Podobnie przyjęłam tutaj, że zadania są trudne, wykraczają poza możliwości ucznia, gdy były rozwiązywane przez mniej niż 50% badanych. Przyjęte umowy przedstawiam na schemacie obok osi liczbowej.



3 Synteza wyników badań typu A i W

W tym opracowaniu przedstawiam tylko niektóre wyniki badań. Wybrałam mianowicie te, które odnoszą się do pojęcia liczby i pojęcia wielkości proporcjonalnych. Zestawiając bowiem te badania, można dodatkowo pokazać, że pojęcie liczby kształtuje się wcześniej niż intuicyjne rozumienie wielkości proporcjonalnych. Na problem ten zwróciłam uwagę w związku z poglądem H. Freudenthala, który w artykule (1987, s. 32) twierdzi, że jest odwrotnie.

W zestawieniu wyników badań typu A (tab. 1) podaję aktywności matematyczne w kolejności od najbardziej prostej, łatwej, do coraz bardziej złożonej. Natomiast w zestawieniu badań typu W (tab. 2) kieruję się kolejnością tematów w programie nauczania matematyki dla szkoły specjalnej[3].

[3]Częściowe wyniki związane z tym problemem przedstawiłam w artykule (Siwek, 1990).

Aktywność matematyczna (pkt 1–6) lub temat zadania (pkt 7–11)	powyżej możliwości	w strefie najbliższych możliwości	w strefie możliwości
1. Naśladowanie bezpośrednie, kopiowanie			I–V
2. Naśladowanie rozumne, w prostej sytuacji analogicznej		I	II–V
3. Naśladowanie rozumne — dostrzeżenie prostych prawidłowości i ich zastosowanie w prostym zadaniu analogicznym i odwrotnym	I	II–IV	V
4. Naśladowanie rozumne sposobu postępowania w sytuacji odwrotnej (wymagające dwóch – trzech czynności)	I–IV	V	
5. Naśladowanie rozumne oparte na wnioskowaniu w sytuacji odwrotnej	I–V		
6. Naśladowanie rozumne sposobu postępowania z oceną stosunku wielkości nieproporcjonalnych	I–V		
7. Liczby pierwszej dziesiątki	I, II	III	IV, V
8. Liczby drugiej dziesiątki	I, II	III	IV, V
9. Wielkości proporcjonalne (serki)	I, II, III	IV	V
10. Wielkości proporcjonalne (rys. domków)	I–V		
11. Wielkości nieproporcjonalne (mieszanka soku z wodą)	I–V		

Tabela 1: Zestawienie wyników badań typu A

W powyższej tabeli cyfry rzymskie oznaczają numery klas szkoły specjalnej, do których uczęszczają badani uczniowie. W pierwszej kolumnie zawarte są aktywności, które były potrzebne do rozwiązania zadań w badaniach A lub typy zadań wymagające innych rodzajów aktywności, coraz bardziej skomplikowanych, występujących w tych badaniach.

Zestawienia zawarte w tabeli 2 obrazują rozwój pojęcia liczby u dzieci umysłowo upośledzonych w stopniu lekkim i rzucają światło na ich możliwości w tym zakresie. Ponadto wyniki te wskazują na fakt, że odczucie wielkości proporcjonalnych kształtuje się później niż pojęcie liczby naturalnej. Zauważmy bowiem, że zadania 9, 10 i 11 z pierwszego zestawienia i zadanie 10 z drugiego zestawienia wypadły gorzej, mimo że wymagały tylko liczb pierwszej dziesiątki. A więc jeśli uczniowie mają posłużyć się stosunkiem liczb, jest to trudniejsze niż posługiwanie się samymi liczbami w aspekcie kardynalnym, porządkowym czy miarowym.

Temat zadania	powyżej możliwości	w strefie najbliższych możliwości	w strefie możliwości
1. Mierzenie odcinka o długości do 10 cm			III
2. Dodawanie w zakresie 20 na konkretach (typu 10+□)			III
3. Nazywanie liczb drugiej dziesiątki		III	
4. Działania typu 10+□, 15−□ na osi i w zadaniach z treścią		III	
5. Numerowanie ciągu przedmiotów do 100		III	
6. Matematyzacja zadania praktycznego o zakresie liczbowym do 100	III		
7. Proste ułamki — aspekt miarowy			VI
8. Obliczanie ułamka danej wielkości, zamiana ułamka zwykłego na dziesiętny		VI	
9. Określanie jedności, dziesiątek i setek, pisemne działania do 1000	VI		
10. Skala 1 : 3, obwód prostokąta	VI		
11. Matematyzacja zadania praktycznego o zakresie liczbowym do 100 lub zawierającego ułamki	VI		

Tabela 2: Zestawienie wyników badań typu W dla klasy III i VI

4 Obserwacje i wnioski z badań

Podobnie jak w przypadku prezentowania wyników, przedstawiam tylko niektóre wnioski z badań. Cytuję mianowicie te, które charakteryzują aktywności i zachowania uczniów wobec zadań matematycznych. Przedstawiają się one następująco:

1. Uczniowie wykazują brak swobody w pracy, powolność i niepewność, potrzebują aprobaty i potwierdzenia, że dobrze postępują, wykazują tendencję do zgadywania wyników i do automatyzmów.

2. Opisywanie zauważonych prawidłowości jest utrudnione. Zauważoną zasadę, czy regułę, uczniowie (od klasy III począwszy) potrafią stosować do pewnego momentu, potem gubią myśl, jakby zapominali, co trzeba robić dalej.

3. Rozwiązanie jednego zadania w większości przypadków nie ma żadnego wpływu na rozwiązanie innego, podobnego. Każde zadanie jest izolowaną trudnością.

4. Uwzględnianie jednego warunku zadania zamiast wszystkich, występujących w danej sytuacji, jest bardzo częste. Uczeń nie potrafi zadośćuczynić dwóm czy trzem warunkom równocześnie, uwzględniając tylko jeden wybrany przez siebie.

5. Operacje odwrotne są w większości przypadków trudniejsze niż operacje proste, ich interioryzacja następuje w znacznie wolniejszym tempie niż u dzieci normalnych.

6. W przypadku zadań wykraczających poza strefę najbliższego rozwoju dziecka pojawiają się nieudolne, bezkrytyczne i niedorzeczne błędy. Dziecko woli dać byle jaką odpowiedź, zamiast się przyznać, że tego nie rozumie.

7. Uczniowie wykazują brak różnych pomysłów, różnych sposobów rozwiązań danego zadania. W szczególności widoczna jest dążność do zamkniętego, ograniczonego, skończonego i jednoznacznego sposobu rozwiązania zadania, bez intuicji nieskończoności i kontynuacji.

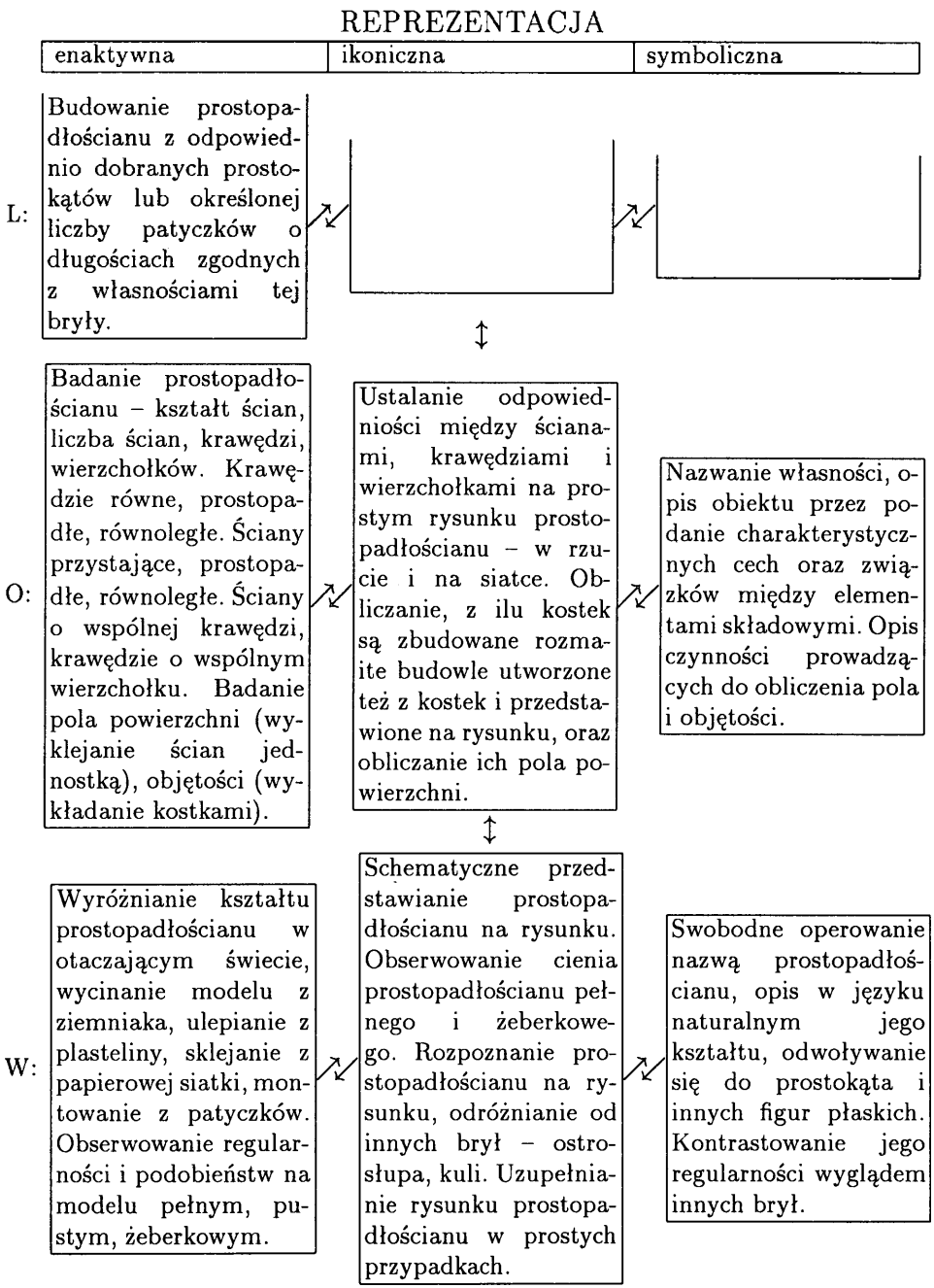
5 Postulaty dydaktyczne i projekty organizowania procesu kształtowania elementarnych pojęć uwzględniające wyniki badań

Wyniki badań implikują szereg postulatów dydaktycznych, które omówię w tym paragrafie i zilustruję przykładami.

Postulat 1. Program nauczania matematyki powinien uwzględniać te wiadomości z matematyki, których opanowanie wymaga aktywności znajdujących się w strefie aktualnych możliwości dziecka oraz w strefie najbliższego jego rozwoju. Nauczanie można opierać na aktywnościach, do których dziecko dojrzewa, które są na tyle rozwinięte, aby mogły być wyzwalane w działalności dziecka kierowanej przez nauczyciela.

W tym celu konstruujemy projekty dydaktyczne według heurystycznego planu postępowania wiążącego poziomy rozumienia pojęć van Hiele'a z reprezentacjami Brunera. Schemat takiego planu postępowania przy opracowaniu pojęcia prostopadłościanu (odgrywający rolę paradygmatu) przedstawia tabela 3.

W tej tabeli strzałki wzajemnie odwrotne wskazują na wzajemne powiązania kolejnych poziomów rozumienia pojęć oraz (w ramach tych poziomów) na wzajemne zależności między reprezentacją enaktywną, ikoniczną i symboliczną. Schemat ten, jak każdy schemat, ujmuje pewną sytuację w skrócie, uwypuklając jej zmiany i istotne poziomy. W „żywym" nauczaniu będziemy z niego korzystać dokonując modyfikacji, uzupełnień, powrotów, przeskoków itp.



L: poziom logiczny, O: poziom opisowy, W: poziom wzrokowy.

Tabela 3

Analizując schemat począwszy od poziomu wzrokowego, zauważamy że w wyniku **konkretnych czynności** powinien powstać zbiór reguł odzwierciedlających to, co dziecko doświadczy podczas „robienia" prostopadłościanu. Tak wytworzona reprezentacja enaktywna będzie pierwszym źródłem wiedzy na temat tej bryły. W wyniku manipulacji i seryjnego budowania różnych modeli prostopadłościanów powinno dojść do wytworzenia się całościowego, sumarycznego obrazu tego pojęcia. Dziecko zaczyna wykonywać **czynności wyobrażeniowe** na obrazowym przedstawieniu prostopadłościanu, na rysunkach w rzucie, co powinno doprowadzić do systemu reguł charakterystycznych dla reprezentacji ikonicznej. Z kolei ta reprezentacja ma umożliwić opisanie prostopadłościanu i jego własności za pomocą języka spontanicznego, naturalnego, co jest charakterystyczne dla reprezentacji symbolicznej.

Te trzy rodzaje reprezentacji są ściśle ze sobą związane i stanowią podstawę dla tworzenia się reprezentacji na poziomie opisowym. Wyjście poza ten poziom jest dla większości uczniów ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki niedostępne.

Postulat 2. Naukę o liczbie należy poprzedzić ćwiczeniami jakościowymi, stanowiącymi bazę doświadczeń dla uwzględnienia różnych aspektów pojęcia liczby, nie ograniczając się do „musztry rachunkowej", która utrwala werbalizm, nie rozwija, tylko kładzie nacisk na zapamiętywanie np. tabliczki dodawania, czy na naśladowanie bezpośrednie w ujemnym znaczeniu. Konieczne jest zwrócenie baczniejszej uwagi na wykorzystanie sytuacji z życia i otaczającej rzeczywistości, zwiększenie nacisku na korzystanie ze środków poglądowych przed wprowadzeniem nazw i symboli liczb i działań, a więc przed przejściem do reprezentacji symbolicznej.

W aktualnie przygotowywanych podręcznikach dla szkoły specjalnej starania idą w tym kierunku, aby spełnić ten postulat.

Załączone strony podręcznika dla klasy 5 szkoły specjalnej (Siwek, 1996) ilustrują wykorzystanie sytuacji realnych, łączenie arytmetyki z geometrią, uczenie porządkowania danych — w miejsce słupków rachunkowych w dawnych podręcznikach (aneks 1, 2, 3 i 4).

Na przykład strona z liściem klonu (aneks 1) organizuje czynności dziecka związane z rysunkiem prawdziwego liścia; kolejne pytania wymagają mierzenia zapisania i wykonania działań. Ostatnie trzy zadania wymagają wyobrażenia sobie liścia w naturalnej wielkości, porównania go z kartką i w końcu wykonania działań i porządkowania danych w określonym celu, mianowicie po to, aby sprawdzić, czy uczeń dobrze odgadł nazwę liścia. Równocześnie to zadanie może być inspiracją do przedłużenia tego typu czynności i działań w odniesieniu do liści zebranych na wycieczce przez uczniów.

Na następnej stronie (aneks 2) uczeń ma najpierw wykonać działania, ale równolegle z tematami dany jest rysunek, który w razie potrzeby może wykorzystać jako wygodny środek poglądowy. Uczeń pokazując, zasłaniając lub odsłaniając potrzebne ilości koralików ma wykonać żądane działania, a nie zgadywać i dawać błędne odpowiedzi. Zadania 2, 3 i 4 dotyczą tak popularnego ziela, jakim jest szałwia. Uczeń ma okazję do zadań arytmetycznych, ale także rozmowy na temat ziół, ciężaru ziół czy herbat w torebkach ekspresowych, ich zastosowania itp. Kolejne karty organizują pracę wokół informacji na temat temperatur w dzień i w nocy w niektórych miastach Polski (aneks 3) oraz wokół rysunku pięknego zwierzęcia, jakim jest żyrafa (aneks 4). Wszystkie zadania na tych kartach wykorzystują realne sytuacje i stwarzają okazję do działań matematycznych, dyskusji i przedłużania zadań.

Postulat 3. Pojęcia matematyczne należy opracowywać operatywnie, a nie formalnie. Rozumienie operatywne pojęć może zapewnić metoda czynnościowa, według której powinno się uwzględniać następujące ćwiczenia w procesie nauczania – uczenia się, zgodnie z zasadami sformułowanymi dla tej metody przez Krygowską (1977):

1° „ćwiczenia wprost", w których uczeń ma wykonać prostą czynność,

2° „ćwiczenia odwrotne" do poprzednich, a więc wymagające wykonania czynności odwrotnej do poprzednio wykonanej, tak aby móc nadać tym czynnościom kształt operacji,

3° ćwiczenie tej samej operacji myślowej na różnych materiałach,

4° zadania prowadzące do różnych ciągów operacji o tym samym rezultacie,

5° zadanie prowokujące konflikt myślowy takiego poziomu, że dziecko chce i może go pokonać,

6° ćwiczenia w słownym opisie czynności prowadzących do konstrukcji pojęcia,

7° ćwiczenia różnych form zapisu tego samego zadania.

Ten postulat zilustruję zadaniami na temat dziesiątkowego systemu pozycyjnego również z podręcznika dla klasy 5, zawartymi w aneksach 5, 6, 7 i 8.

Zadania 1 i 2 aneksu 5 są zadaniami wzajemnie odwrotnymi. Uczeń ma najpierw zilustrować liczbę rysunkiem, a później zapisać liczbę do podanego rysunku. Podobnie zadanie 2 aneksu 7 jest zadaniem „wprost", tylko już na innym materiale (typ 3). Dziecko ma określić jaką liczbę klocków przewozi

pociąg i zapisać ją. Zadaniem odwrotnym do tej sytuacji jest polecenie naklejania odpowiedniej ilości klocków, zgodnej z zapisem liczby. Imitacje klocków znajdują się w podręczniku w załączonej wyprawce.

Do ćwiczeń w słownym opisie czynności prowadzących do rozwiązania zadania dają okazję np.: zadanie 3 aneks 5 i zadanie 1 aneks 8. To ostatnie ma dostarczyć dziecku obrazowego skojarzenia „przenoszenia" dziesiątek przez Robota i później w słupkach przy pisemnych algorytmach. Różne ciągi operacji (typ 4) wystąpią w zadaniu 1 aneksu 6, a różne formy zapisu — w zadaniach 2 i 3 tego samego aneksu. Zadanie 1 aneksu 7 zawiera skrajny przypadek, żąda bowiem rozłożenia na dziesiątki i jedności (obok liczb 24 i 17) również liczby 10.

Oczywiście każde z tych zadań można by jeszcze wiązać z innym typem ćwiczeń, spośród wymienionych siedmiu pożądanych w metodzie czynnościowej. Tutaj przypisano je do typu najbardziej wyrazistego.

Postulat 4. Aby zapewnić prawidłowe i pełne opracowanie pojęcia, należy uwzględniać wszystkie jego aspekty w odpowiedniej kolejności. Przed projektowaniem dydaktycznym trzeba dokonać analizy teoretycznej pojęcia i operacji w nim tkwiących. Nie poprzestawać na opracowaniu pojęcia tylko w jednym aspekcie.

Na przykład analiza teoretyczna pojęcia liczby naturalnej wskazuje, że konieczne jest uwzględnienie aspektu kardynalnego, porządkowego, miarowego, algebraicznego. Nasuwa się pytanie, czy trzeba wszystkie aspekty uwzględniać w jednakowym stopniu, czy też je różnicować. Porównując monografię liczby 6 w podręcznikach do matematyki dla klasy I szkoły powszechnej (podstawowej dla dzieci normalnych) i klasy I szkoły specjalnej (podstawowej dla dzieci umysłowo upośledzonych w stopniu lekkim) okazało się, że liczby zamieszczonych w nich zadań są następujące:

	Liczba zadań w aspekcie			
	kardynalnym	porządkowym	miarowym	algebraicznym
Kl. I powszechna (Z. Cydzik)	—	4	—	102
Kl. I specjalna (H. Siwek, J. Wyczesany)	28	24	—	75
Kl. I powszechna Błękitna Matematyka	14	11	9	20

Tabela 4

Powyższe zestawienie prowokuje do zastanowienia się, czy konieczne jest uwzględnianie i uzupełnianie zadań w formie ćwiczeń konkretnych, wyobrażeniowych lub formalnych w aspektach, które nie wystąpiły w podręczniku. Czy

zadania te zostały pominięte z powodów uzasadnionych teorią dydaktyczną, praktyką nauczania, a może poziomem rozwoju intelektualnego dziecka?

Postulat 5. Pierwsze zapoznawanie ucznia z prostymi figurami geometrycznymi i ich własnościami powinno być oparte na różnorodnych ćwiczeniach paramatematycznych — zabawach, układankach, ornamentach. Zabawy te powinny zmierzać do rozwijania intuicji geometrycznych związanych z odczuciem kształtu, miary, związków i zależności między figurami. Szczególną rolę należy tutaj przypisać czynnościom i obrazom (Jagodzińska, 1991). Droga od czynności konkretnych poprzez wyobrażone do abstrakcyjnych służy prawidłowemu wprowadzaniu pojęć, zgodnych z podstawami psychologicznymi metody czynnościowej A. Z. Krygowskiej.

Ilustracją tego postulatu będzie krótkie sprawozdanie z zajęć z uczniami klasy VI i VII szkoły specjalnej, na temat stosunku pól figur podobnych. Oto kolejne tematy zadań rozwiązywanych z uczniami w czasie obserwacji indywidualnej:

1. Działka ma wymiary 8 m × 7 m. Ile siatki musisz kupić na jej ogrodzenie? Na jednym m^2 można posadzić jeden krzak porzeczki. Ile krzaków posadzisz na działce?

2. Sąsiad ma działkę o bokach dwa razy dłuższych. Ile on potrzebuje siatki i ile krzaków porzeczek może posadzić?

Przykładowe rozwiązanie Mariusza z klasy VI przedstawia aneks 9.

Oto notatka z obserwacji pracy Mariusza:

Mariusz sporządza rysunek, oblicza obwód. Obliczając pole najpierw dodaje jednakowe składniki. Po naprowadzeniu zapisuje iloczyn. Obserwator podpowiada mu wynik, bo uczeń nie pamięta tabliczki mnożenia.

W zadaniu 2 najpierw szkicuje rysunek, podwajając „na oko" długości boków. Zgaduje wynik, mówiąc, że na powiększonej działce można posadzić 1000 krzaków. Obserwator stwierdza, że za dużo i że najpierw rozwiążemy inne zadanie, aby mógł sam dobrze odpowiedziedzieć. Przechodzimy do zadania z liściem i figurami na sieci. Tematy tych zadań wraz z rozwiązaniem Mariusza zawiera aneks 10 i 11. Po tych zadaniach bez trudu stwierdza, że to będzie $4 \cdot 56$. *Rachunek ten wykonuje w myśli, stosując w sposób naturalny rozdzielność. Zapisuje tylko wynik 224.*

Przykładowe odpowiedzi innych uczniów tych klas były następujące: 2 razy więcej, 112, 1000, 224. Sytuacja konfliktowa, która tutaj wystąpiła, stała się punktem wyjścia do ustalenia zależności pola w figurach podobnych. Przystąpiono do pracy nad stroną z liśćmi (czynności konkretne), z figurami geo-

metrycznymi (czynności wyobrażeniowe), tekstem uogólnienia i jeszcze raz zadaniem o działce powiększonej (czynności abstrakcyjne).

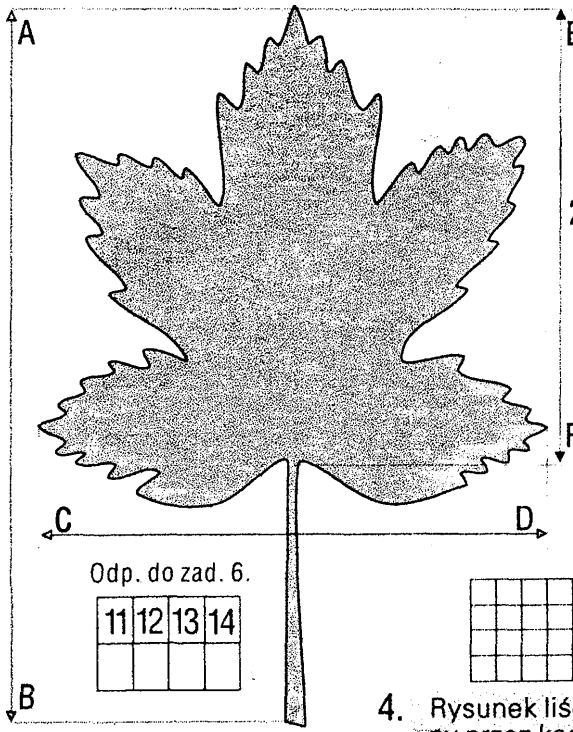
U niektórych uczniów ($\frac{1}{3}$ grupy) wystąpiło dostrzeżenie prawidłowości po zadaniu konkretnym z biedronkami. Następna $\frac{1}{3}$ grupy potrafiła operować stosunkiem pól figur podobnych po zadaniu z figurami geometrycznymi. Można by stwierdzić, że wystąpił u tych uczniów etap „posiadania obrazu" (Pirie, 1994) i wytworzenia się strategii rozwiązania takiego zadania. Zadania te zaliczyłam do strefy najbliższych możliwości tym bardziej, że uczniowie potrafili również orzec w sytuacji odwrotnej, że jeśli duży liść można zakryć 120 biedronkami, to mały — 30. Niektórzy stosowali dzielenie, chociaż częściej występowało czterokrotne mnożenie.

W strefie najbliższych możliwości znalazło się zadanie wymagające uzupełnienia ogólnego wniosku. Wniosek ten uczniowie formułowali używając dużych liczb, albo słownie (wzrasta jeszcze raz tyle, drugie tyle), albo nawet przy użyciu litery x. Zapewne było to wynikiem przeżycia przez uczniów sytuacji problemowej zaczynającej się od czynności konkretnych oraz stosowania analogii do zapisów $2 \times 2, 3 \times 3$, które wystąpiły przy porównywaniu pól i obwodów.

Badanie indywidualne i obserwacje pracy uczniów z próbnymi kartami podręcznika są podstawą tworzenia i doskonalenia ostatecznej ich wersji. Chodzi o podręcznik, który byłby dostosowany do możliwości matematycznych uczniów, zaciekawiał ich i dawał wiedzę użyteczną.

Aneks 1

1. Długość liścia z ogonkiem wynosi trochę więcej niż 14 cm, sprawdź to mierząc odcinek AB.



O ile jest większa długość AB od szerokości CD ?

2. Zmierz długość liścia bez ogonka, czyli odcinek EF.

O ile odcinek EF jest krótszy od odcinka CD ?

O ile jest krótszy od odcinka AB ?

Odp. do zad. 6.

11	12	13	14

3. Jak długi jest ogonek? Oblicz bez mierzenia.

4. Rysunek liścia jest pomniejszony przez kserograf dwa razy. Ile wynosi długość i szerokość liścia w rzeczywistości ?

---

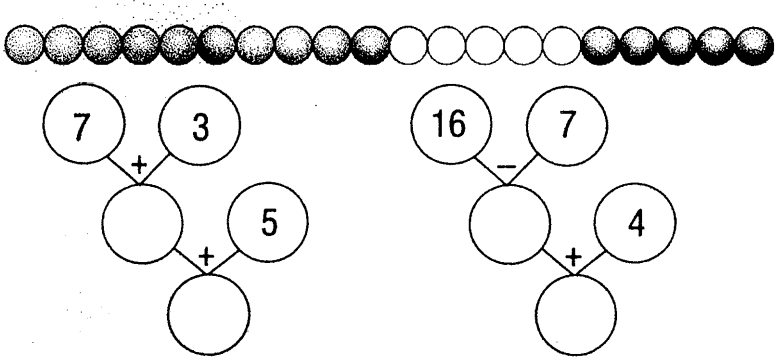
5. Czy naturalny liść zmieściłby się na tej stronie ? Zmierz długość i szerokość kartki i porównaj.

6. Jak nazywa się drzewo, z którego zerwano ten liść? Wykonaj działania. Litery wstaw pod wynikami, w tabelce pod rysunkiem, to dostaniesz odpowiedź.

13 + 1 = ☐ N 13 + 0 = ☐ O 10 + 2 = ☐ L 8 + 3 = ☐ K

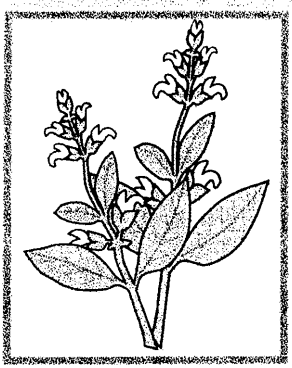
Aneks 2

1. Wykonaj działania. Pomagaj sobie koralikami.



17 – 9 = ☐	7 + 6 = ☐	5 + 7 = ☐
9 + 8 = ☐	13 – 6 = ☐	12 – 5 = ☐
17 – ☐ = 8	13 – ☐ = 6	☐ – 7 = 5

2. Jak nazywa się to ziele? Wpisz odpowiednie litery pod kolejnymi numerami w tabelce, to otrzymasz nazwę.

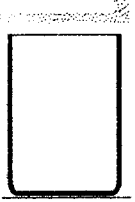


20 – 6 = ☐ Ł	8 + 7 = ☐ W
4 + 7 = ☐ S	19 – 3 = ☐ I
15 – 3 = ☐ Z	
9 + 8 = ☐ A	
7 + 6 = ☐ A	

11	12	13	14	15	16	17

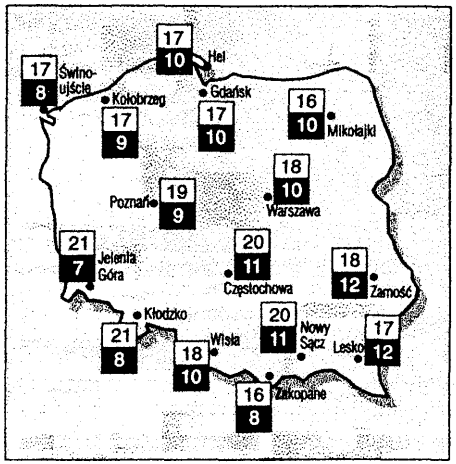
3. Torebka ekspresowa ziela waży 2 g.
Ile waży 8 takich torebek?

4. Torebkę ekspresową ziela zaparza mama w $\frac{3}{4}$ szklanki wrzącej wody.
Zaznacz na rysunku, do którego miejsca będzie sięgać woda w szklance.



Aneks 3

1. W których miastach Polski była taka sama temperatura w dzień, a w których w nocy?



2. Jaka jest najniższa temperatura w dzień, a jaka i gdzie w nocy?

. . . . . .

3. Ile stopni wynosi różnica temperatur w dzień między najcieplejszym, a najzimniejszym miastem? Ile wynosi ta różnica w nocy?

. . . . . .

4. Oblicz różnice między temperaturą w dzień i w nocy dla wszystkich zaznaczonych na mapie miast Polski.

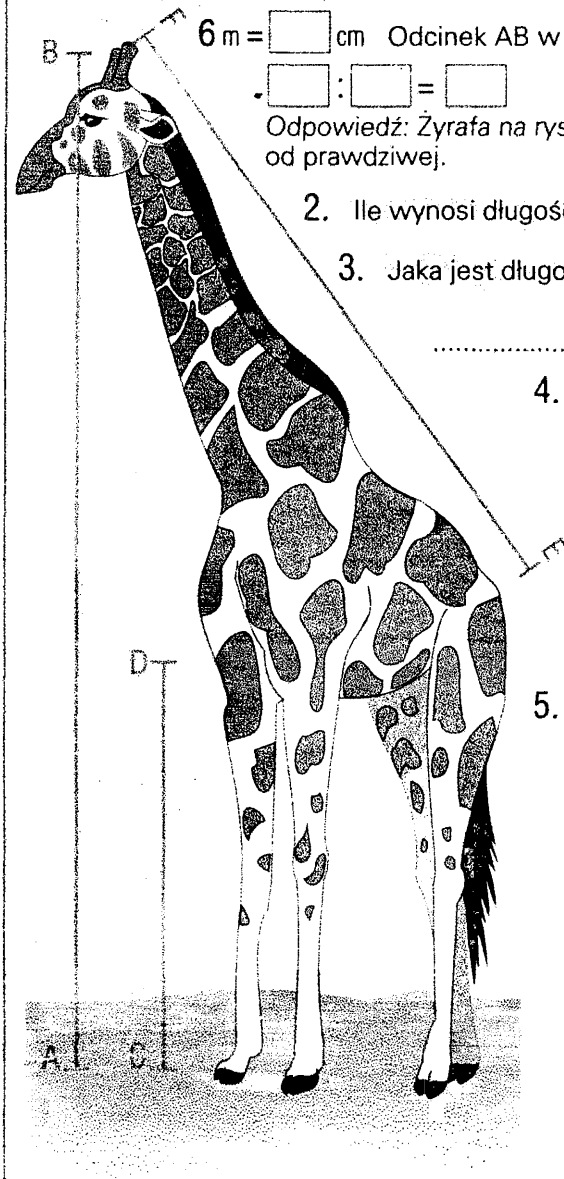
17 – 12 =		
20 – 11 =		

5. Napisz, ile liter mają nazwy poszczególnych miast. Rozwiąż podobne zadania jak o temperaturach.

Zakopane	8	Warszawa		Świnoujście	
Nowy Sącz		Poznań		Kołobrzeg	
Częstochowa		Jelenia Góra		Gdańsk	

Aneks 4

1. Wysokość żyrafy w rzeczywistości wynosi 6 metrów. Ile razy jest ona pomniejszona? Uzupełnij rozwiązanie.



6 m = ☐ cm Odcinek AB w zaokrągleniu ma ☐ cm.

☐ : ☐ = ☐

Odpowiedź: Żyrafa na rysunku jest .... razy mniejsza od prawdziwej.

2. Ile wynosi długość nogi? .....

3. Jaka jest długość szyi i tułowia?

.....

4. Na które piętro bloku mieszkalnego może zajrzeć żyrafa?

.....

.....

.....

5. Żyrafa jest najwyższym współczesnym ssakiem. Porównaj jej wysokość z wysokością znanych ssaków domowych.

.....

.....

.....

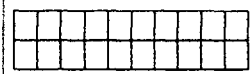
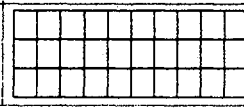
.....

.....

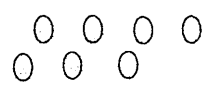
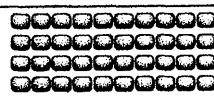
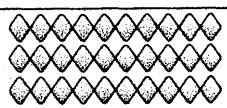
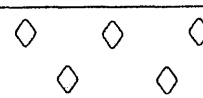
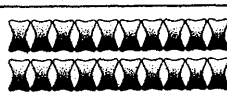
.....

Aneks 5

1. Narysuj w tabeli tyle koralików, ile wskazuje liczba.

Liczba	D	J	D - Dziesiątki	J - Jedności
17	1	7		
22				
38				

2. Uzupełnij tabelkę. Zapisz słownie liczby.

D - Dziesiątki	J - Jedności	D	J	Liczba
		2	7	27 dwadzieścia siedem
				
				
				

3. Ustaw liczby z tabelki od najmniejszej do największej.

.....

O ile jest większa druga liczba od pierwszej? .....

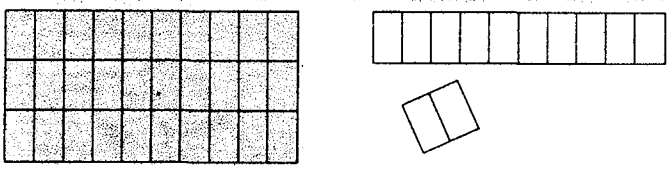
O ile jest większa liczba trzecia od drugiej? .....

O co jeszcze można zapytać? .....

.....

Aneks 6

1. Wojtek powiedział, że jego liczba składa się z trzech dziesiątek i dwunastu jedności. Co to za liczba ?



Popatrz na rysunek i odpowiedz na pytania :

Ile widzisz dziesiątek ? ☐ Ile jedności ? ☐

Liczba Wojtka to ☐

Uzupełnij rachunki : $30 + 12 = 30 + 10 + \square = \square + 2 = 42$

Jaka to liczba ?

D	3			
J	17			

.....

2. Rozmień jedną dziesiątkę na jedności. Zapisz sumy podobnie jak w pierwszym przykładzie.

$37 = 30 + 7 = 20 + \underline{10 + 7} = 20 + \underline{17}$

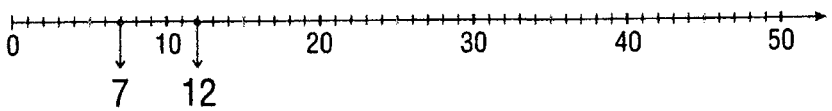
$35 =$ .....

$24 =$ .....

$47 =$ .....

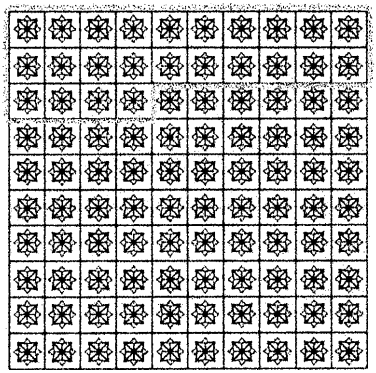
$32 =$ .....

3. Zaznacz na osi liczbowej i podpisz: 17, 23, 28, 32, 47.



Aneks 7

1. Rozłóż liczby na dziesiątki i jedności (jak w pierwszym przykładzie). Otocz kolorową linią tyle kafelków, ile wskazuje liczba. Jedną liczbę zilustruj na górze, a drugą na dole tabliczki.

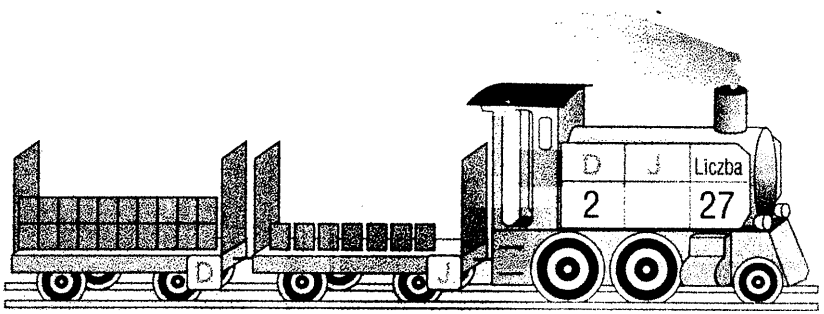


24 = 2 dziesiątki + 4 jedności
24 = 2 D + 4 J
24 = 2 · 10 + 4
17 =
17 =
17 =

10 =
10 =
10 =

2. Pociąg wiezie liczby. W wagonie klasy PIERWSZEJ - (J) mogą jechać tylko Jedności, a w wagonie klasy DRUGIEJ - (D) mogą jechać tylko Dziesiątki.

Powiedz, jakie liczby przewozi każdy z pociągów. Zapisz je w ramkach na lokomotywach.



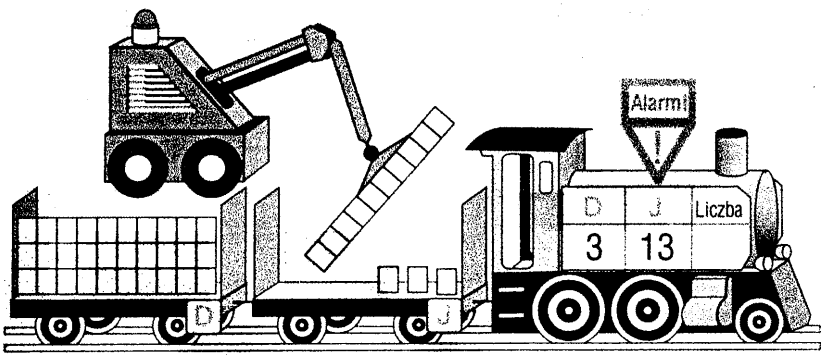
Aneks 8

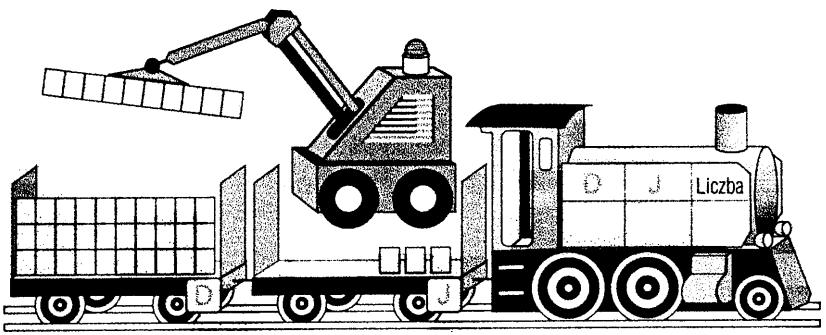
1. Wagon J może przewozić tylko jedności danej liczby, a więc najwięcej 9 klocków. Wypisz wszystkie możliwości.

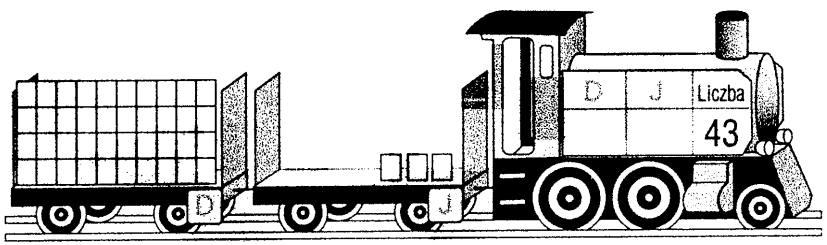
9, 8, 7, , , , 3, , , 0.

Jeśli w wagonie J znajduje się 10 klocków (albo więcej), włącza się alarm sygnalizujący przeciążenie i zjawia się dźwig Robot, który szybko układa klocki w dziesiątki i przenosi automatycznie te dziesiątki do wagonu D.

Opowiedz, co pokazują kolejne rysunki. Uzupełnij zapisy.

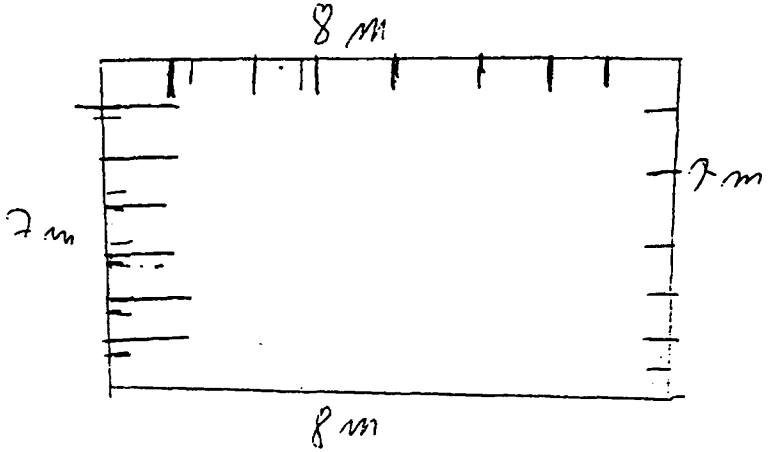






Aneks 9

długość działki 8 m
szerokość
na 1 m^2 — 1 krzak
jakie duże ogrodzenie

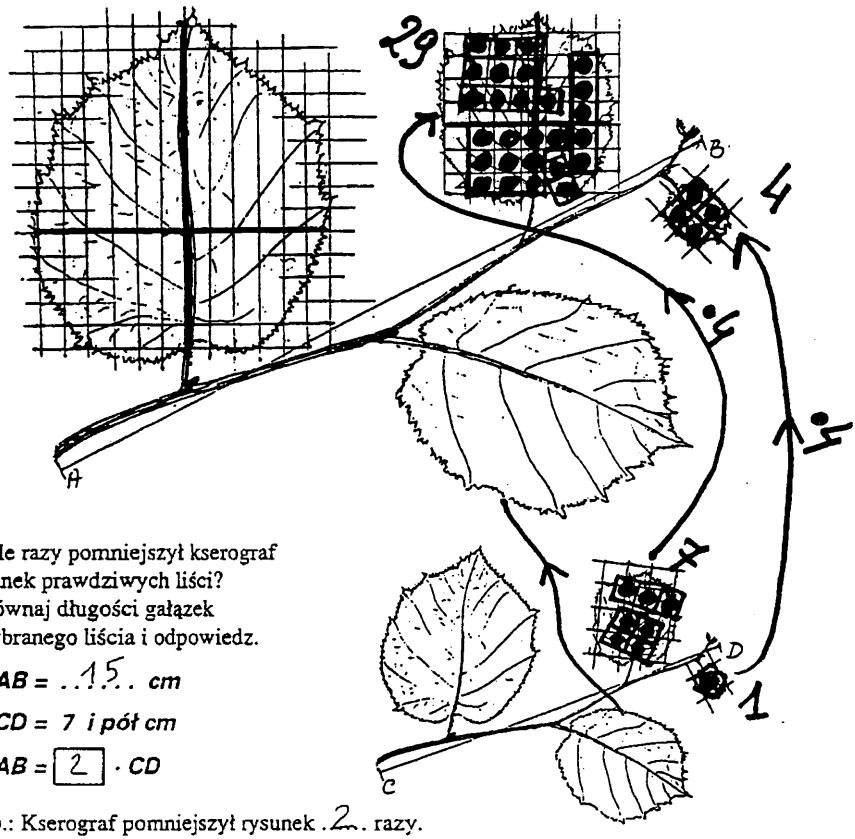


7 + 7 = 14
8 + 8 = 16

Pole = 7 · 8 = 56

Aneks 10

1. Ten rysunek przedstawia liście w naturalnej wielkości. Zmierz długość gałązki. Porównaj z małym liściu



2. Ile razy pomniejszył kserograf rysunek prawdziwych liści? Porównaj długości gałązek i wybranego liścia i odpowiedz.

$AB =$ ..15.. cm

$CD =$ 7 i pół cm

$AB =$ [2] $\cdot CD$

Odp.: Kserograf pomniejszył rysunek .2.. razy.

3. Naklej biedronki z wyprawki na najmniejsze liście tak, aby biedronka nie spadła z liścia. Policz, ile biedronek zmieściło się na prawdziwym liściu, a ile na pomniejszonym. Czy można powiedzieć, że jest ich dwa razy mniej? A ile razy mniej? .....4 razy.....

4. Oszacuj, ile biedronek zmieściłoby się na największym liściu prawdziwym i pomniejszonym. ....

Aneks 11

Napisz w kółku, ile razy zwiększa się obwód figury.
Napisz w okienku, ile razy zwiększa się pole figury.

Uzupełnij ogólne wnioski:

Jeśli bok zwiększamy dwa razy, to obwód zwiększa się ... 2 ..... razy.
Jeśli bok zwiększamy trzy razy, to obwód zwiększa się ... 3 ... razy.
Jeśli bok zwiększamy 2 razy, to pole zwiększa się ... 4 ... razy (czyli $2 \cdot 2$).
Jeśli bok zwiększamy 3 razy, to pole zwiększa się ... 9 ... razy (czyli $3 \cdot 3$).
Jeśli bok zwiększamy ☐ razy, to obwód zwiększa się ..... razy, a pole zwiększa się ..... razy.

Ilustracja

2
3 $4 = 2 \cdot 2$
$9 = 3 \cdot 3$

Literatura

F r e u d e n t h a l H.: 1987, Co znaczą struktury naukowe i struktura nauki w rozwoju poznawczym i w nauczaniu, *Dydaktyka Matematyki* 7, 27–42.
J a g o d z i ń s k a M.: 1991, *Obraz w procesach poznania i uczenia się*, WSiP, Warszawa
K r y g o w s k a A Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki* t. 1, WSiP, Warszawa.
P i r i e S. and K i e r e n T.: 1994, Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*, Volume 26.
S i w e k H.: 1989, Rapport d'un fragment de recherche sur le développement de simples activités mathématiques chez des enfants légèrement handicapés de l'école, *Recherche en didactique de mathématiques* 10.1, 61–110.
S i w e k H.: 1990, Pojęcie wielkości proporcjonalnych a pojęcie liczby u dzieci ze szkoły specjalnej w porównaniu z dziećmi ze szkoły masowej, *Dydaktyka Matematyki* 12.
S i w e k H.: 1995, *Możliwości matematyczne uczniów szkoły specjalnej)*, WSiP, Warszawa.
S i w e k H.: 1996, *Matematyka dla kl. 5, (Podręcznik dla szkoły specjalnej)*, WSiP, Warszawa.
S i w e k H.: 1996a, Strefa możliwości i najbliższych możliwości matematycznych dzieci umysłowo upośledzonych w stopniu lekkim w porównaniu z dziećmi normalnymi, *Problemy Studiów Nauczycielskich 6, Dydaktyka Matematyki; O badaniach nad nauczaniem i uczeniem się matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 56–80.
S i w e k H.: 1997, *Matematyka dla kl. 6, (Podręcznik dla szkoły specjalnej)*, WSiP, Warszawa.
W y g o t s k i L. S.: 1971, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa, 1971.

Concept development of students with specific difficulties in the learning of mathematics

S u m m a r y

The empirical research described here shows the range of mathematical content and work methods in the education of students with special needs. The methodology used is based upon the so called activity approach. Cards are prepared with problems for

the students to work on by themselves, under the control of the teacher, which are based on the rules of this activity approach. Problems and situations are chosen so as to ensure the development of children's skills in many directions, not only in narrow counting exercises. Notions difficult for children who are on the level of concrete thinking are motivated by visualization. Concrete representations of this knowledge are used, instead of rather symbolic and linguistic ones, too often seen in both textbooks and teaching. Word problems include, in most cases, simple, natural applications to practice and problems from children's surrounding, and should be helpful in awakening real interest of children, and in enlarging their knowledge of the world around them.