ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 19(1997)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Ewa Swoboda
WSP Rzeszów

Między intuicją a definicją, czyli próba określenia kompetencji uczniów 11–12-letnich w definiowaniu figur podobnych

1 Wstęp

W latach 1989–1992 prowadziłam badania dydaktyczne w celu określenia, jakie intuicje związane z podobieństwem geometrycznym mają uczniowie klas I–IV szkoły podstawowej (Swoboda, 1994). Jednym z wyników badań był wniosek, że większość uczniów potrafi zadawalająco posługiwać się pojęciami „powiększony", „pomniejszony" w stosunku do różnych kształtów, oraz że istnieje możliwość wykorzystania posiadanych przez dzieci umiejętności do ukierunkowania ich na przyszłą naukę o podobieństwie.

W intuicyjnych działaniach dziecka jedynie badacz dostrzega zachowania istotne dla prawidłowego rozumienia pojęcia matematycznego. Definiowanie pojęcia, czy też stosowanie definicji — to działania wymagające świadomych zachowań. Regularne uczenie o figurach podobnych występuje w szkole podstawowej w klasie VII. Aby móc sterować procesem definiowania, należy rozpoznać obszar zawarty pomiędzy działaniem spontanicznym, a świadomym stosowaniem pojęcia określonego jakąś definicją. Warto więc zastanawiać się, jak pracować w klasie V i VI, aby wchodzenie w proces definiowania podobieństwa było konsekwentnym ciągiem działań dziecka. Wymaga to znalezienia odpowiedzi na szereg pytań. Oto niektóre z nich:

Jakie związki zachodzące pomiędzy figurami podobnymi zauważają i określają uczniowie klas V i VI oraz w kierunku której definicji figur podobnych te określenia zmierzają?

Jak uczniowie potrafią opisywać swoje działania związane z powiększaniem lub pomniejszaniem figur?

Jaka jest zgodność pomiędzy tym, co uczeń robi (wybiera figury podobne, rysuje figury podobne), a tym, jak opisuje podobieństwo?

Lepsze rozpoznanie takich problemów pomogłoby wybrać drogę, która podczas nauki o figurach podobnych uwzględniałaby naturalne zachowania uczniów. Byłaby to więc droga dostosowana do dziecięcego rozumowania, a nie droga ukierunkowana strukturą matematyki jako nauki. Równocześnie jednak stanowiłaby przejście od ujęcia lokalnego do bardziej globalnego, tworząc cykl działań o wzrastającym stopniu trudności.

W tym artykule przedstawię badania nad opisanymi powyżej zagadnieniami. Ich opis podzielę na pięć części.

1. Przegląd rozwiązań zadania, polegającego na ustalaniu podobieństwa pomiędzy przedstawionymi dziecku figurami, i próba odszukania regularności.

2. Analiza, jak rozwiązanie takiego zadania może wprowadzać ucznia w definiowanie figur podobnych.

3. Próba wniknięcia w sposób rozumienia i stosowania przez uczniów czynnika powiększania (tzw. skali) podczas wybierania figur podobnych, rysowania figur w powiększeniu i przy próbach opisów definicyjnych.

4. Przedstawienie koncepcji pewnej hierarchii sposobów rysowania figur podobnych, opartej na analizie obserwowanych zachowań dzieci. Dotyczy ona związków spontanicznych działań dziecka z rozumowaniami, jakie by przeprowadzał matematyk w analogicznej sytuacji.

5. Próba uzasadnienia, że istnieje specyficzny etap rozumienia podobieństwa, mający swe teoretyczne wyjaśnienie w teorii M. Hejný'ego poziomów rozumienia pojęć geometrycznych (zob. Hejný, 1997).

2 Scenariusz i narzędzia badań. Opis grupy badawczej

Badanie zostało tak pomyślane, aby jego scenariusz oraz narzędzia dopasowane były do teorii kształtowania pojęć geometrycznych M. Hejný'ego. Składało się ono z trzech etapów:

Jak uczniowie potrafią opisywać swoje działania związane z powiększaniem lub pomniejszaniem figur?

Jaka jest zgodność pomiędzy tym, co uczeń robi (wybiera figury podobne, rysuje figury podobne), a tym, jak opisuje podobieństwo?

Lepsze rozpoznanie takich problemów pomogłoby wybrać drogę, która podczas nauki o figurach podobnych uwzględniałaby naturalne zachowania uczniów. Byłaby to więc droga dostosowana do dziecięcego rozumowania, a nie droga ukierunkowana strukturą matematyki jako nauki. Równocześnie jednak stanowiłaby przejście od ujęcia lokalnego do bardziej globalnego, tworząc cykl działań o wzrastającym stopniu trudności.

W tym artykule przedstawię badania nad opisanymi powyżej zagadnieniami. Ich opis podzielę na pięć części.

1. Przegląd rozwiązań zadania, polegającego na ustalaniu podobieństwa pomiędzy przedstawionymi dziecku figurami, i próba odszukania regularności.

2. Analiza, jak rozwiązanie takiego zadania może wprowadzać ucznia w definiowanie figur podobnych.

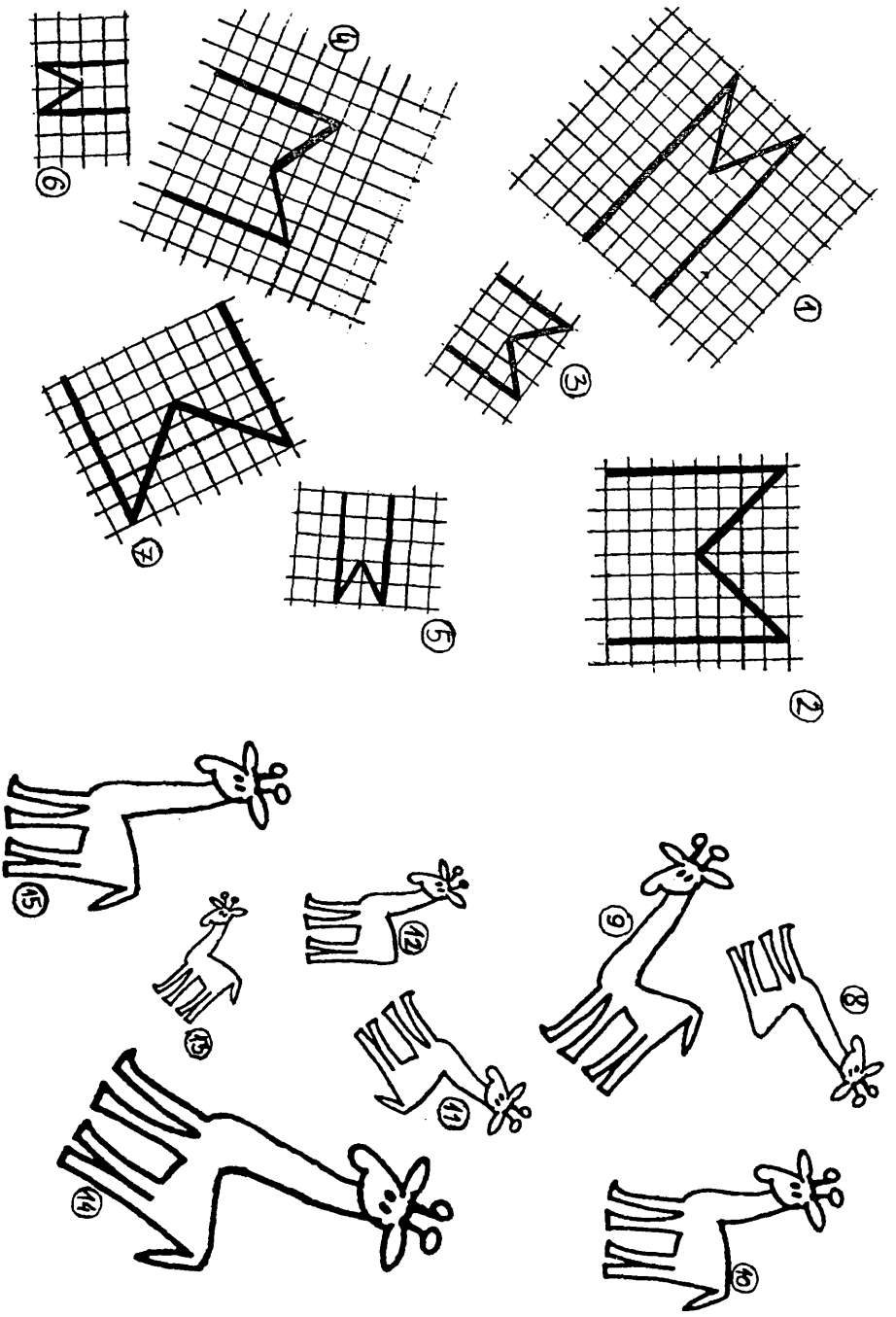
3. Próba wniknięcia w sposób rozumienia i stosowania przez uczniów czynnika powiększania (tzw. skali) podczas wybierania figur podobnych, rysowania figur w powiększeniu i przy próbach opisów definicyjnych.

4. Przedstawienie koncepcji pewnej hierarchii sposobów rysowania figur podobnych, opartej na analizie obserwowanych zachowań dzieci. Dotyczy ona związków spontanicznych działań dziecka z rozumowaniami, jakie by przeprowadzał matematyk w analogicznej sytuacji.

5. Próba uzasadnienia, że istnieje specyficzny etap rozumienia podobieństwa, mający swe teoretyczne wyjaśnienie w teorii M. Hejný'ego poziomów rozumienia pojęć geometrycznych (zob. Hejný, 1997).

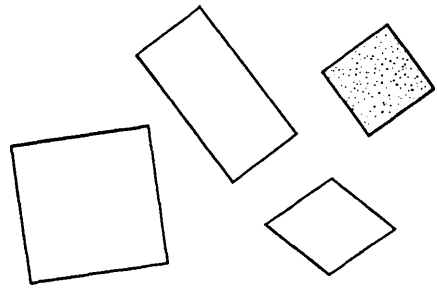
2 Scenariusz i narzędzia badań. Opis grupy badawczej

Badanie zostało tak pomyślane, aby jego scenariusz oraz narzędzia dopasowane były do teorii kształtowania pojęć geometrycznych M. Hejný'ego. Składało się ono z trzech etapów:



PLANSZA I

Potem pokazywałam Planszę II i mówiłam: *Wybierz figurę, która twoim zdaniem jest figurą podobną do wzorca. Wzór masz zacieniowany. Jeżeli chcesz, możesz pomagać sobie wszystkimi przedmiotami znajdującymi się na stole, możesz poprosić też o inne rzeczy, jeżeli ci będą potrzebne. Może być kilka dobrych odpowiedzi.*

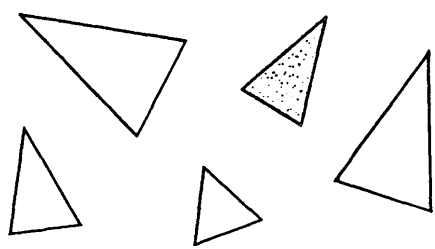


PLANSZA II

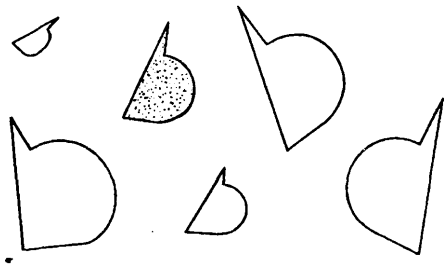
Pytałam: *dlaczego twoim zdaniem jest to figura podobna?*

Gdy już dziecko wybrało figurę jego zdaniem podobną i jakoś uzasadniło swój wybór, prosiłam: *a teraz sam narysuj figurę podobną do wzorca.* Nie określałam przy tym skali powiększenia, czekałam, by dziecko samo o nią spytało. Na koniec pytałam znów: *Dlaczego twoim zdaniem figura, którą narysowałeś, jest figurą podobną do wzorca?*

Taki sam scenariusz jak dla Planszy II obowiązywał potem dla Plansz III i IV.



PLANSZA III



PLANSZA IV

III etap — uogólnianie

Rozkładałam przed dzieckiem wszystkie plansze (I, II, III i IV) oraz wszystkie jego rysunki wykonane podczas badania. Mówiłam: *Zastanów się nad takim problemem: Musisz przekonać swego kolegę, że wszystkie twoje figury są podobne do wzorca. Co twoim zdaniem decyduje o tym, że dwie figury są podobne? Czy potrafisz znaleźć wspólny warunek dla figur na planszach, który decyduje o tym, że są one podobne?*

W przebadanej grupie uczniów klasy V nie znalazłam ani jednego dziecka, które w I etapie dokonałoby wszystkich oczekiwanych przeze mnie wyborów i tylko takich. Spośród wszystkich 26 dzieci do dalszych etapów wybrałam 12 dzieci, których wybory były najbliższe oczekiwanym. Po zakończeniu badań od nauczycielki uczącej matematyki w tej klasie dowiedziałam się, że była to grupa bardzo zróżnicowana. Oto krótka charakterystyka tych uczniów (imiona zostały częściowo zmienione):

L.p.	Imię	Charakterystyka ucznia	Ocena[1]
a	b	c	d
1.	Magdalena	bardzo zdolna, pracowita	6
2.	Iwona	bardzo zdolna, dokładna w obliczeniach, I miejsce w szkolnym konkursie mat.	6
3.	Dominika	zdolna, ale chaotyczna	5
4.	Krzysztof	słaby, mało aktywny	3
5.	Tereska	bardzo starająca się, ale nie wierząca w siebie, wstydzi się własnych błędów, bardzo uzdolniona plastycznie	3

[1]Oceny z matematyki na koniec roku szkolnego.

a	b	c	d
6.	Marcin	bardzo dużo pracuje, ale nie jest błyskotliwy	5
7.	Barbara	dobra uczennica, ogólnie zdolna, wypracowane dobre oceny ze wszystkich przedmiotów	5
8.	Ania	nierówna, nieraz nic nie potrafi, innym razem swobodnie porusza się w zakresie minimum programowego	3
9.	Agata	w minionych latach bardzo dobra uczennica, po przebytej chorobie (wstrząs mózgu) rozdrażniona, trudno jej się skupić	4
10.	Paulina	bardzo zdolna, błyskotliwa, cicha i skryta	5
11.	Ewa	uczennica raczej czwórkowa, bardzo pracowała na wyższą ocenę końcową	5
12.	Monika	bardzo zdolna, systematycznie pracuje przez cały rok szkolny	5

Tabela 1: Charakterystyka uczniów biorących udział w II i III etapie badań

Ich rozwiązania pokazuje tabela 2.

Nr	Imię	Literki M	Żyrafy
1.	Magdalena	1 – 5, 2 – 3	9 – 14
2.	Iwona	1 – 5, 2 – 3 – 4	9 – 14, 10 – 11
3.	Dominika	1 – 5, 2 – 3 – 4	9 – 14, 10 – 11, 13 – 15
4.	Krzysztof	6 – 5, 2 – 3	9 – 14, 10 – 15
5.	Tereska	1 – 5, 3 – 4, 2 – 7	9 – 14, 10 – 11
6.	Marcin	1 – 5, 2 – 3	9 – 14, 8 – 12
7.	Barbara	1 – 5, 2 – 3, 4 – 7	9 – 14, 10 – 11, 13 – 15
8.	Ania	1 – 5, 2 – 3	9 – 14, 10 – 11, 13 – 15
9.	Agata	1 – 5, 2 – 3	9 – 14, 10 – 11 – 13
10.	Paulina	1 – 5, 2 – 3	9 – 14, 10 – 11 – 15
11.	Ewa	1 – 5, 2 – 3	8 – 14, 10 – 13
12.	Monika	1 – 5, 2 – 3	9 – 14, 11 – 15

Tabela 2: Połączenia figur dokonane w I etapie przez uczniów wybranych do dalszych badań

Wyniki, wnioski i hipotezy dotyczące etapu II i III będę relacjonowała w oparciu o pracę tej grupy dzieci.

3 Wyniki badań

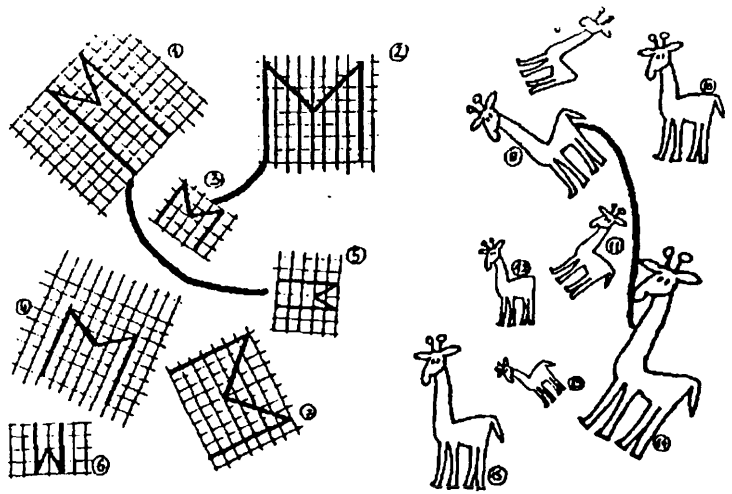
3.1 Przegląd rozwiązań zadania z I etapu

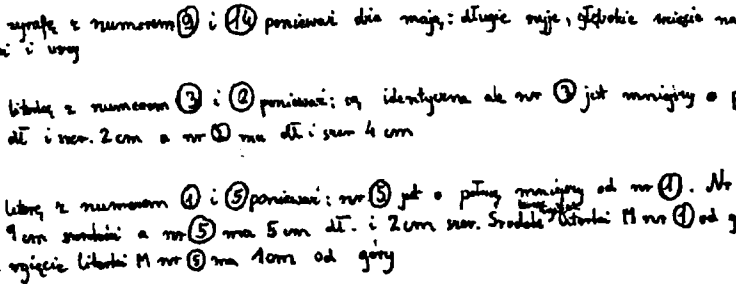
Proponowane przez dzieci rozwiązania okazały się bardziej złożone, niż się spodziewałam. Przy ich segregowaniu nie wystarczył już prosty podział na dwie grupy: rozwiązań zgodnych z ideą zachowania kształtu oraz tych, które tego kryterium nie spełniają. Niejednoznaczność związana była też z samym zadaniem. Składało się ono bowiem z dwóch części, których rozwiązanie wymagało jakby innych aktywności:

- Litery umieszczone były na pokratkowanym tle, co mogło sugerować wyliczanie i porównywanie długości. W opisie kształtów w naturalny sposób mogło się dziecko posłużyć nazwą „odcinek" lub „kąt".
- Żyrafy były bez tła, miały kształty nieregularne, trudne do opisu językiem używanym na lekcjach matematyki. Oprócz wielkości, poszczególne figury różniły się między sobą następującymi czterema cechami: kształtem grzbietu, długością szyi (w stosunku do wielkości), ułożeniem uszu w stosunku do szyi, posiadaniem (lub nie) ogonka.

W uzyskanych 26 pracach dzieci próbowałam wyróżnić typy rozwiązań wspólne dla obu części zadania. Znalazłam cztery takie typy, które tu przedstawię i zobrazuję przykładami prac. Przyjęłam, że jedynie rozwiązania typu I odzwierciedlają takie rozumienie sformułowania „figury tego samego kształtu", które jest dobrą podstawą do dalszej matematyzacji.

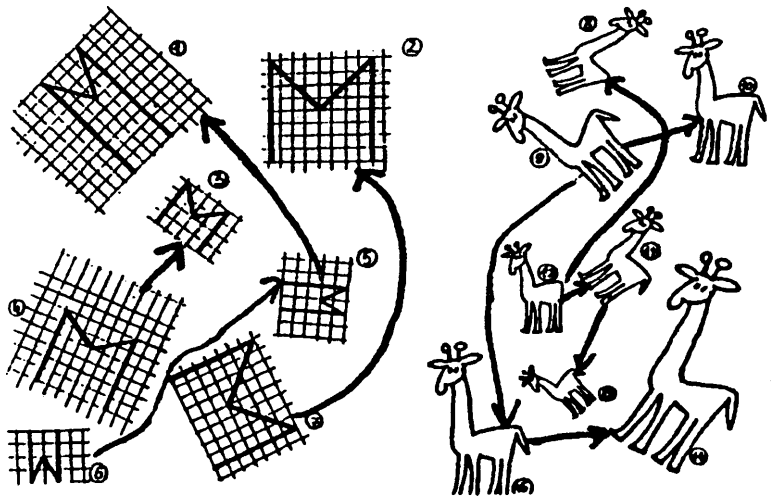
Typ I: Uczeń łączy w pary te obrazki, które przedstawiają figury podobne. Czasami nie wyszukuje on wszystkich możliwych rozwiązań, czasami pomyłki są bardzo trudno zauważalne. Widać jednak, że dokonuje świadomych wyborów i jest konsekwentny w swojej pracy (rys. 5).





rys. 5

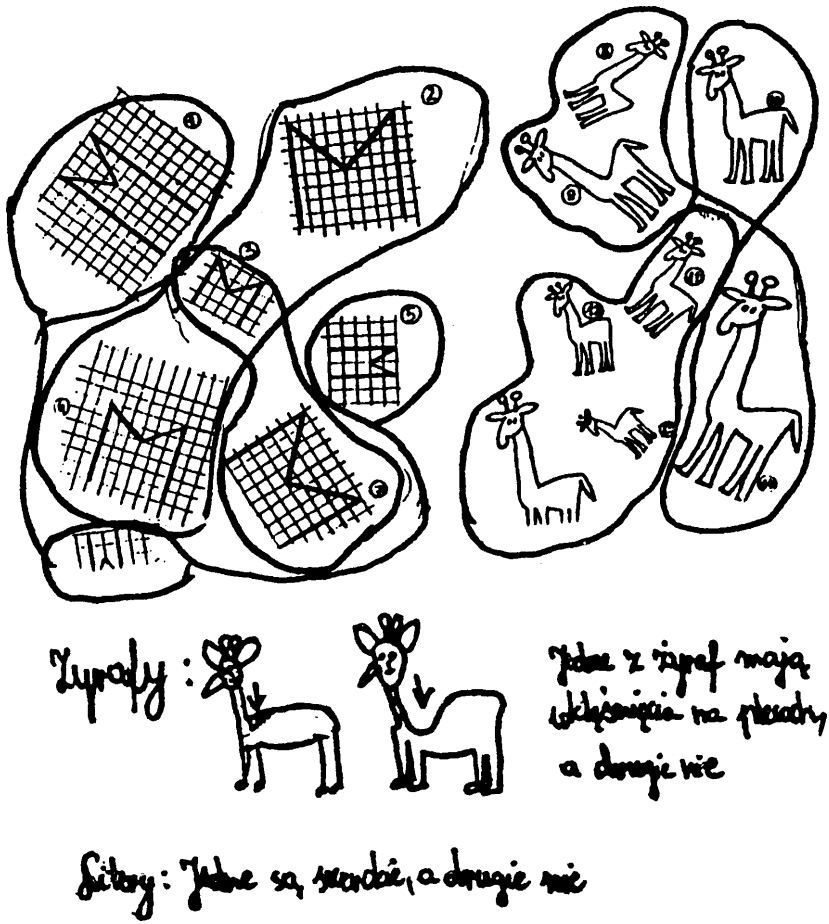
Typ II: Uczeń szuka możliwie wielu połączeń w zbiorze figur, przy czym kryterium połączenia dwóch figur może być różne dla różnych par (rys. 6).



3,4 ponieważ mają takie same wgłębienia
1,5 ponieważ są tak samo wbarwane
2,7 ponieważ są take same
8,12 ponieważ ~~są~~ nie mają ogonka
9,10 ponieważ są take same
14,15 ponieważ uszki są bardzo podobne
11,13 ponieważ są take same w miejscach

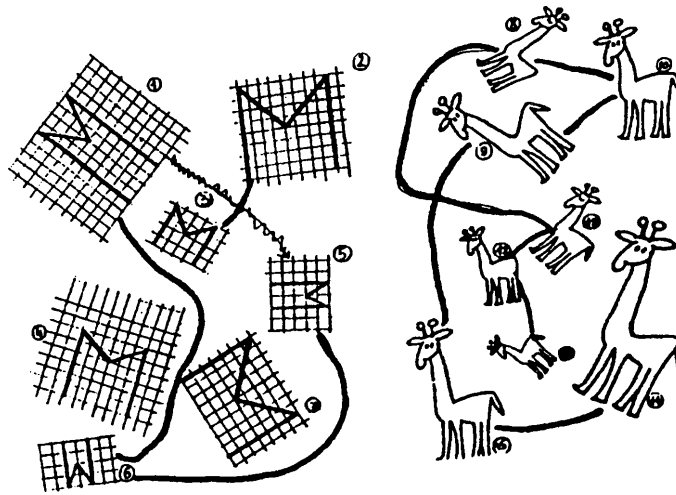
rys. 6

Typ III: Uczeń dzieli wszystkie figury na dwa zbiory, kierując się na ogół jedną różniącą je cechą. Może ona być subiektywna (np. figury duże — małe) lub obiektywna (np. żyrafy z ogonkiem — żyrafy bez ogonka; rys. 7).



rys. 7

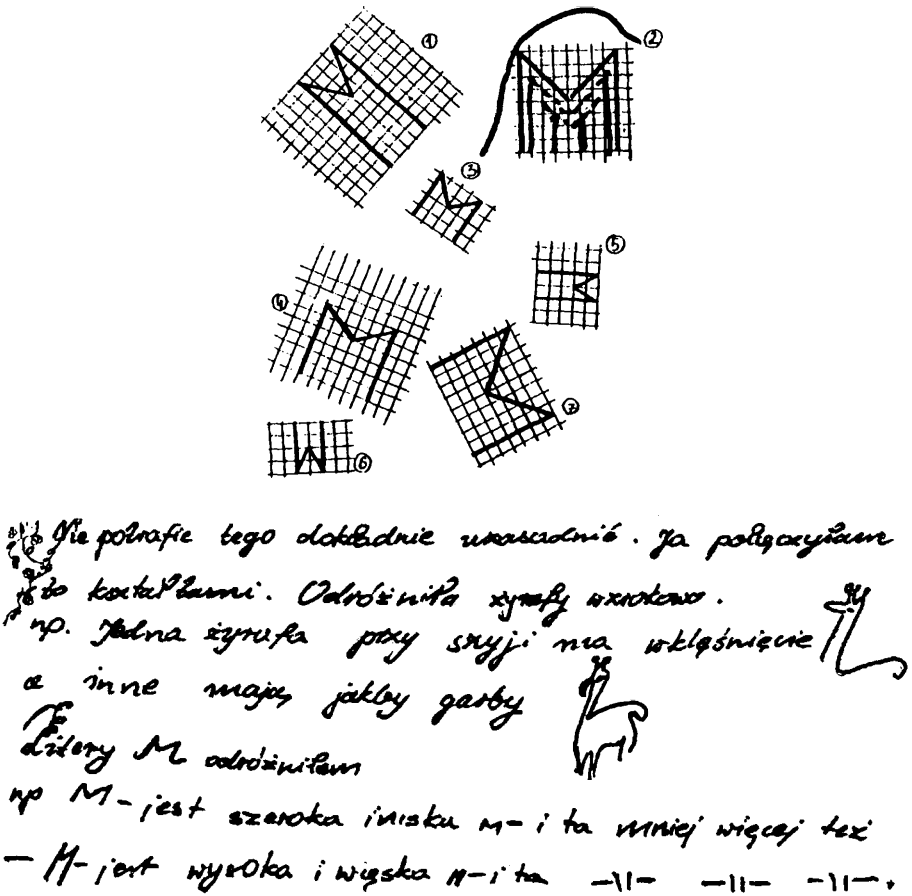
Typ IV: Uczeń tworzy „łańcuszek" z wszystkich figur. Czasami robi to kierując się jakąś jedną cechą (np. wielkością — od największej do najmniejszej), czasami na zasadzie kolejnych skojarzeń jak w kompleksie pojęciowym (rys. 8).



rys. 8

Przykłady te pokazują, że uczniowie w różny sposób realizują polecenie: „Połącz linią te wszystkie figury, o których można powiedzieć, że jedna jest dokładnym pomniejszeniem drugiej". Zebrany przeze mnie materiał nie daje jednak podstaw do wnioskowania, jak uczniowie rzeczywiście rozumieją to polecenie. Scenariusz badania nie przewidywał prowadzenia indywidualnej rozmowy z uczniami, którzy na planszy dokonali połączeń innego typu niż typ I. Jest całkiem możliwe, że część uczniów po prostu nie zrozumiała treści zadania. Rozwiązywała wiec całkiem inne, „swoje" zadanie. W takiej sytuacji byłby to problem wzajemnego komunikowania się, odpowiedniego dotarcia do ucznia z poleceniem. Równie możliwe jednak jest, że niektórzy uczniowie mają swoje własne rozumienie powiększania i pomniejszania figur z zachowaniem ich kształtu.

Na marginesie tych obserwacji pojawia się jeszcze jedna uwaga. Niemal wszystkie dzieci starały się w jakiś sposób uzasadnić swoje wybory, chociaż scenariusz badania dawał swobodę w tym względzie („jeżeli potrafisz, napisz ..."). Pozostawiony zapis jednak nie odzwierciedla pracy dziecka. Były plansze z dorysowywanymi elementami, jakby dziecko dokonywało dalszych przekształceń. Jednak w opisie stwierdzało: „nie potrafię tego dokładnie uzasadnić; połączyłam to kształtami ..." (rys. 9). Tak czy inaczej, tylko rozmowa z uczniem mogłaby wyjaśnić, jak uczeń rozumie to, co robi.



rys. 9

3.2 Wprowadzanie w definiowanie figur podobnych na podstawie wyników zadań I etapu

Zrobiłam zestawienie rozwiązań proponowanych przez uczniów. Przedstawiam je w tabelach 3 i 4. Pojęcie „liczba cech różniących" odnosi się do tych cech obrazków, które zakłócają podobieństwo. W odniesieniu do żyraf może to być od 1 do 4 różnych cech, opisanych we wcześniejszym rozdziale. W przypadku literek mogą być dwie różne cechy: proporcje między odcinkami lub wielkość kątów.

L.p.	Nr figury	Liczba rozwiązań	Liczba cech różniących kolejne figury
1	1– 5	17	0
2	1 – 5 – 6	7	0, 1
3	5 – 6	2	1
4	2 – 3	12	0
5	2 – 7	5	1
6	3 – 7	4	1
7	3 – 4	3	1
8	2 – 3 – 7	1	0, 1
9	2 – 3 – 4	2	0, 1
10	2 – 3 – 4 – 7	2	0, 1, 2
11	4 – 7	2	2

Tabela 3: Połączenia w grupie figur „litera M"

L.p.	Nr figury	Liczba rozwiązań	Liczba cech różniących kolejne figury
1	9 – 14	15	0
2	10 – 11	5	0
3	10 – 11 – 15	3	0, 1
4	10 – 11 – 13	1	0, 1
5	14 – 15	4	1
6	8 – 14	2	1
7	8 – 9 – 14	1	1, 0
8	8 – 9 – 14 – 15	1	1, 0, 1
9	10 – 13	2	1
10	11 – 15	2	1
11	11 – 13	1	1
12	10 – 11 – 13 – 15	1	0, 1, 2
13	10 – 11 – 12 – 13 – 15	1	0, 1, 2, 1, 2
14	9 – 10 – 11	1	2, 0
15	9 – 10 – 13	1	2, 1
16	9 – 10	4	2
17	13 – 15	3	2
18	8 – 9 – 10 – 11 – 14 – 15	1	1, 2, 0 ,2, 1
19	9 – 10 – 11 – 13 – 14 – 15	1	2, 0, 1, 2, 1
20	8 – 11 – 12 – 13	1	3, 2, 1
21	9 – 13	1	3
22	8 – 12	6	4

Tabela 4: Połączenia w grupie „żyrafy"

Jak z tego zestawienia widać, uczniowie podali 11 rozwiązań dla „literki M" i aż 22 różne rozwiązania zadania „żyrafy". Oczywisty wydaje się więc wniosek, że na takich przykładach jak „literki M" łatwiej wprowadzać dzieci w definiowanie podobieństwa figur, gdyż można posługiwać się jasnymi kryteriami. Wśród rozwiązań podawanych dla „literek M" przeważały rozwiązania matematycznie poprawne. Proporcjonalnie było ich więcej w grupie „literek M" (w tabeli 3 pozycja 1 i 4) niż „żyraf" (w tabeli 4 pozycja 1 i 2), gdyż w stosunku do liczby wszystkich rozwiązań stanowią one odpowiednio 53% oraz 34%). Jakby dodatkowym argumentem za taką interpretacją wyników jest rezultat, pokazany w tabeli 4, pozycja 22: aż 6 dzieci zdecydowało się zestawić ze sobą żyrafy nr 8 i 12. Prawdopodobną cechą łączącą te obrazki był brak ogonka u żyraf; jest to cecha całkiem „niematematyczna". Jednak dalsza analiza odpowiedzi podawanych przez uczniów podważa powyższy wniosek. Oto kilka obserwacji:

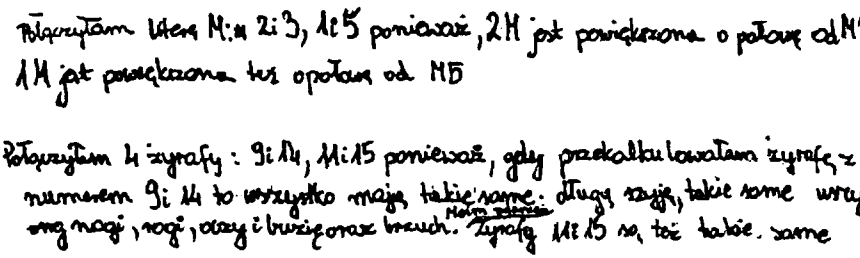
1. Literki M były zmatematyzowane. Uczniowie do opisu swej pracy wykorzystywali te sformułowania, które prawdopodobnie pojawiały się na lekcjach matematyki przy opisach figur geometrycznych. Na ogół porównywali jedynie wysokości figur. Opisy biegły gładko wyuczonymi formułkami, które w niektórych przypadkach wcale nie zdradzały rozumienia innego od przyjętego wśród matematyków. Dopiero dalsza część wypowiedzi odkrywała te różnice (rys. 10).

Ja uważam że te literki M połączyłam dlatego że się np. ~~pan~~ literka M duża ma 5 cm a mniejsza 2,5 cm dlatego bo 2,5 cm powiększa się o 2,5 cm i wychodzi 5 cm. Nie połączyłam literki M szerokiej a wiskiej z M dwóch na górze a wysoki dlatego że niewyszło by nic z tego tylko łączyłam M szerokie z szeroką

rys. 10

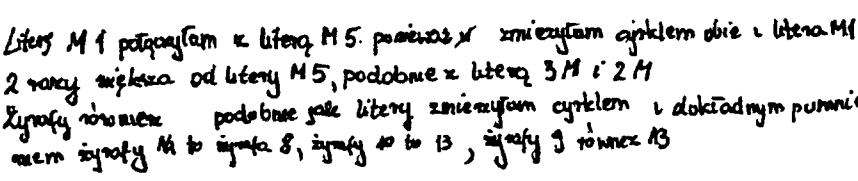
2. Wydaje się, że praca na kształtach „niematematycznych" psychicznie bardziej odpowiadała dzieciom, a na dodatek była dla nich bardziej inspirująca. Mimo, że plansza sugerowała kolejność odpowiedzi (najpierw literki, potem żyrafy), aż 12 uczniów (na 26 przebadanych) zmieniało tę kolejność, zaczynając swój opis od żyraf, jakby opowiadanie o żyrafach było dla nich łatwiejsze lub przyjemniejsze. Dzieci, które osiągnęły sukces (połączyły prawidłowo), w swoim uzasadnieniu dla literek nie zawsze były wyczerpujące, często porównywały tylko jedną długość. Natomiast przy opisie pracy z żyrafami podawały bardzo wiele cech wspólnych, idąc w kierunku bogatego opisu zauważonych własności podobieństwa. Dzieci, które nie rozwiązały zadania prawi-

dłowo, często wnikliwiej opisywały podobieństwo między żyrafami niż między literkami. Te obserwacje potwierdza zestawienie z tabeli 4. Widać tam, że wiele dzieci nie rozwiązało zadania zgodnie z oczekiwanymi intuicjami, gdyż nie zauważyło tylko jednej cechy „nieprawidłowej" u żyraf. Można ten wynik zinterpretować inaczej: większość dzieci zauważyła aż 3 cechy, które wpływały na podobieństwo figur! Czasami były takie sytuacje, że dzieci łączyły nie dwie, ale trzy figury, konsekwentnie utrzymując dla nich trzy wyróżnione cechy wspólne (rys. 11).



rys. 11

3. Znalezienie metrycznych zależności w literkach (odkrycie, że długości odpowiednich boków są dwukrotnie pomniejszone) nieraz bardzo ukierunkowywało dalszą pracę dziecka. Doprowadzało do szukania wśród żyraf „zależności w wymiarach", bez kierowania się ideą zachowania kształtu. Można wiec sądzić, że „regularne" zależności metryczne, a „ten sam kształt" — to dla takiego dziecka dwie różne rzeczy (rys. 12).



rys. 12

3.3 Stosowanie skali podobieństwa przez uczniów

Skala podobieństwa jest definiowana w podręcznikach szkolnych jako liczba, która określa stały stosunek długości odcinków (odległości punktów) jednej figury do długości odpowiednich odcinków (odległości punktów) figury do niej podobnej. W jednym z podręczników do klasy VII jest to sformułowane następująco: *Stosunek długości odpowiednich boków wyznacza liczbę, którą nazywamy skalą podobieństwa* (Chodnicki, 1996). Tak wiec skala podobieństwa

wykorzystuje stosunek zewnętrzny, wymagający przenoszenia uwagi z pewnego fragmentu jednej figury na odpowiedni fragment drugiej figury. Teoretyczna analiza procesów myślowych, które musi realizować dziecko posługujące się takim pojęciem, pokazuje, że jest to proces skomplikowany. Uczeń musi tutaj „rozłożyć" figurę na pojedyncze odcinki tj. — w terminologii M. Hejný'ego (zob. Hejný, 1997) — wyróżnić **atendenty**, tj. atrybuty widoczne i niewidoczne litery M, poszukać odpowiedniego odcinka w drugiej figurze (znaczy to również, że uczeń musi mieć jakąś świadomość tej odpowiedniości) i stworzyć stosunek ich długości (mierząc oba tą samą jednostką i dzieląc otrzymane miary). Tak otrzymaną liczbę musi potem porównać z innym stosunkiem długości odpowiednich odcinków i stwierdzić, że jest taki sam. To wciąż jeszcze mało: uczeń musi mieć jakieś wewnętrzne przekonanie (bo przecież tego nie udowodni), że taka stałość stosunku zachowuje się dla wszystkich możliwych par odpowiednich odcinków.

Rozkładanie figury na atendenty to umiejętność charakteryzująca II poziom rozumienia pojęć geometrycznych. Aby móc taką procedurę stosować jako narzędzie, uczeń musi posiadać bardzo wysoki stopień świadomości matematycznej. Wydaje się, że możliwe są rozumowania mniej skomplikowane, które również doprowadzają uczniów do sukcesu podczas pracy nad zagadnieniami związanymi z figurami podobnymi. Pewne przykłady wykazują np., że stosunki wewnętrzne (wewnętrzne proporcje figury) można „widzieć" niezależnie od umiejętności wyrażania ich liczbą. Takie stosunki wewnętrzne byłyby bliższe ujęciu całościowemu, tworzonemu na bazie wizualnego odbioru kształtu — czyli bliższe I poziomowi rozumienia pojęć geometrycznych.

Chciałam się dowiedzieć, jak uczniowie mojej grupy badawczej podchodzą do tego zagadnienia. Szczególnie w II i III etapie badań (gdy miałam bezpośredni kontakt z uczniem) mogłam śledzić, czy uczniowie preferują stosunki wewnętrzne czy zewnętrzne. Ale również ciekawe wyniki dała analiza prac pisemnych uczniów uczestniczących w I etapie. Pokazuje ona, że:

— uzasadnianie podobieństwa za pomocą jakiegokolwiek stosunku jest raczej rzadkie (wystąpiło 7 razy przy 50 napisanych odpowiedziach),

— metodę tę częściej wykorzystywano do uzasadniania podobieństwa literek (6razy),

— nawet w tak nielicznych przypadkach widać różnorodność podejść.

Oto przykłady tej różnorodności:

1. Matematyczny dowód był tylko próbą szkolnej argumentacji, podpierającej intuicyjne odczucie zachowania wewnętrznego stosunku figur. Ania parę

2–3 tłumaczy: *łączyłam szerokie z szeroką, nie łączyłam literki M szerokiej a niskiej z M chudą na górze z wysoką dlatego, że nie wyszło by nic z tego.* Dla pary 1–5 jednak znajduje „matematyczne" uzasadnienie, w którym odwołuje się do metrycznej zależności tylko jednej pary odpowiednich odcinków: *literka M duża ma 5 cm a mniejsza 2,5 cm, 2,5 cm powiększa się o 2,5 cm i wychodzi 5 cm.*

2. Trójka dzieci porównywała odpowiednie długości i odpowiednie szerokości literek, odkrywając stałość stosunku ich długości. Było to wiec wykorzystanie stałości stosunków zewnętrznych. Nigdzie jednak nie wystąpiło porównywanie stosunków długości innych odcinków figury (np.„szczebelków" wewnątrz literki M). Nie można wiec stwierdzić, że dzieci dobrze rozumiały tutaj metryczne zależności zachodzące między figurami podobnymi.

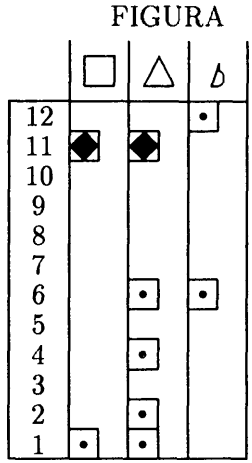
3. Jedna dziewczynka w odniesieniu do różnych par figur stosowała różne stosunki. Chyba pomyliła się w przeliczaniu krateczek z tła (dla figur 2–3–4), gdyż swój wybór uzasadnia: *długości i szerokości są sobie równe* (co jest zrozumiałe, gdyby figury miały wymiary: $4 \times 4, 6 \times 6, 8 \times 8$). Posługuje się więc tutaj stosunkiem wewnętrznym figur. Inaczej jednak uzasadnia połączenie figur 1–5, gdyż tam pisze: *szerokość i wysokość dwa razy mniejsza* (co w tym przypadku oznacza stałość stosunku zewnętrznego).

Pozostali uczniowie tej grupy, którzy swego wyboru nie uzasadniali w oparciu o zależności metryczne, mówili ogólnie o „takim samym kształcie", albo wyróżniali figury „chude" i „szerokie" w sensie wewnętrznych proporcji figury. Odwoływali się więc do intuicji stosunku wewnętrznego.

Najwyraźniej jednak różnorodność rozumienia skali, jak i jej stosowanie, widoczne było w II etapie. Uczniowie dokonywali tutaj wyboru figury podobnej do wzoru i rysowali figury podobne. Plansze do tego etapu zostały tak przygotowane, aby wymierzanie odcinków podczas wyboru figur nie sugerowało prawidłowej odpowiedzi. Figury podobne w sensie matematycznym były tam narysowane w skali $1 : \sqrt{2}$, za to długości niektórych odcinków figur „niepodobnych" były całkowitymi wielokrotnościami pewnych odcinków modelu. Te utrudnienia miały mi pomóc w zinterpretowaniu zachowań dziecka podczas wyboru figur. Chciałam wiedzieć, czy klasyfikuje ono figury według intuicji tego samego kształtu, traktując zależności metryczne jako matematyczny instrument opisujący jakoś tę zależność, czy też „stosunek długości" i „ten sam kształt" funkcjonują niezależnie od siebie.

W tym etapie badań u uczniów w różny sposób zaznaczyła się świadomość istnienia skali powiększenia, w różny sposób również ta świadomość ukierunkowywała działania uczniów. Było tak zarówno w trakcie wyboru, jak i rysowania figur podobnych. Wykres 1 pokazuje, jak poszczególne dzieci (oznaczone numerami 1 – 12) wykorzystywały porównywanie długości boków figury podczas

wyborów „figur podobnych" w II etapie badania.

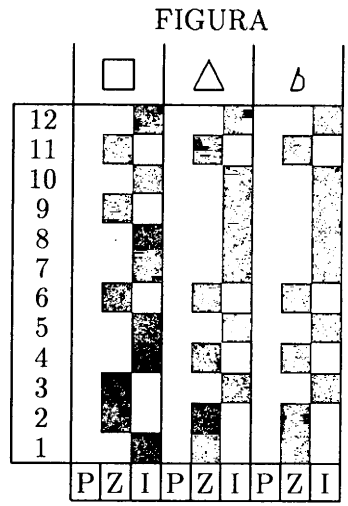


Legenda:
[•] — próbuje porównywać długości i rezygnuje,
[◆] — porównuje długości i wykorzystuje związki miarowe.

Wykres 1: Wykorzystanie skali podczas wyboru figur podobnych

Takie wyniki świadczą o tym, że w zdecydowanej większości przypadków wybór figury podobnej dokonywany był bez analizowania długości odcinków, na ogół tylko poprzez porównywanie wzrokowe. Jedynie przy trójkątach uczniowie próbowali wymierzać boki, ale nawet wtedy niepowodzenia w znalezieniu sensownego związku między długościami nie przeszkadzały w prawidłowym posłużeniu się intuicją. Tylko w jednym przypadku uczennica (Ewa nr 11) była niezwykle konsekwentna i ukierunkowana na skalę równą 2 : 1. W ten sposób uzasadniała swój wybór w I etapie (zarówno dla literek M, jak i dla żyraf). W drugim etapie, podczas pracy z kwadratem i trójkątem stwierdziła, że nie ma na planszy figur podobnych, bo: *widzi pani, tutaj w tym dużym kwadracie powinien się ten mały zmieścić przy jednym boku całe dwa razy i przy drugim tak samo.* Dopiero „przełamała" się przy figurach z planszy IV, i zaczerwieniona z emocji i bliska płaczu spytała: *a jeżeli wszystko się zgadza, i kształt, i dziobki, i brzuszki, i tylko liczby się nie zgadzają, to czy wtedy można te figury połączyć?* Widać było, że to odkrycie ją tak fascynuje, że sama stwierdziła: *ja przy tamtych figurach wszystko źle mówiłam.*

Następny wykres zawiera informacje o pracy dzieci podczas rysowania figur podobnych.

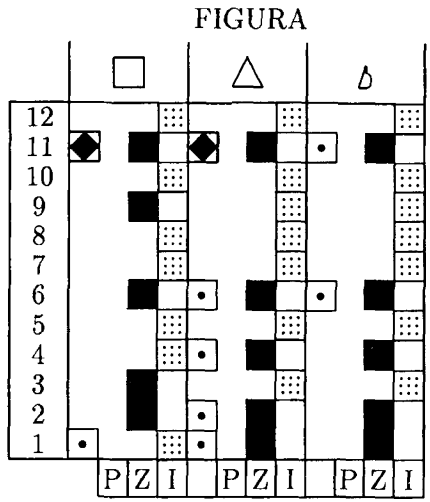


Legenda:
P — pyta (dziecko pyta o zadaną wielkość powiększenia),
Z — zadaje (dziecko samorzutnie decyduje się na zastosowanie określonej skali),
I — ignoruje (praca dziecka nie wskazuje na to, że bierze ono pod uwagę zależności między długościami odcinków),
■ — stosuje (jedną ze strategii P, Z, I w rysowaniu).

Wykres 2: Wykorzystanie skali podczas rysowania figur podobnych

Żadne dziecko nie spytało, jak duża ma być powiększana figura. Tym bardziej nie pytało *Ile razy mam figurę powiększyć?* Za to (jak widać na wykresie), przystępując do rysowania figur podobnych dzieci często same narzucały sobie rysowanie w skali (na ogół 2 : 1). Nie zawsze ci sami uczniowie postępowali tak samo w stosunku do wszystkich figur, ale ilościowo nie zaznaczyła się w tym względzie żadna różnica w rysowaniu kwadratu, trójkąta, czy „czapki". Całkiem więc możliwe, że stosowali tutaj tylko pewną wyuczoną technikę powiększania figur; przecież rysowanie w skali „przerabiali" w klasie IV. Równie często jednak dzieci powiększały figury w sposób intuicyjny: „długie" odcinki modelu rysowały jako „całkiem długie", a te, które były w modelu krótsze — stawały się „tylko trochę dłuższe". Nie sądzę więc, by na tym poziomie działania czynnik powiększania był elementem spontanicznej wiedzy uczniów powiększających figurę.

Z drugiej jednak strony można się obawiać, że taki wniosek zbytnio upraszcza sprawę. Niemal wszystkie dzieci, które pracę z którąś planszą II etapu rozpoczynały od wymierzania, rysowały potem figury w narzuconej przez siebie skali. Obrazuje to zestawienie na wykresie 3.



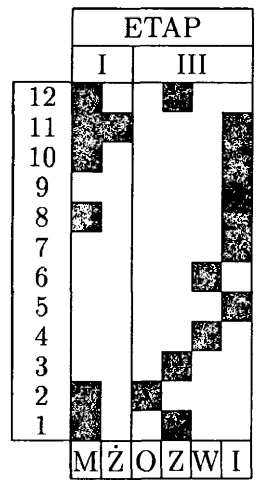
Legenda:
• — próbuje porównywać długości i rezygnuje,
◆ — porównuje długości i wykorzystuje związki miarowe,
■ — stosuje strategię Z w rysowaniu,
⁝ — stosuje inną strategię w rysowaniu,
P — pyta (dziecko pyta o zadaną wielkość powiększenia),
Z — zadaje (dziecko samorzutnie decyduje się na zastosowanie skali),
I — ignoruje (praca dziecka nie wskazuje na to, że bierze ono pod uwagę zależności między długościami odcinków).

Wykres 3: Zależność pomiędzy wymierzaniem odcinków podczas wybierania figur i rysowania figur

Wymierzanie było chaotyczne, trudno rozgraniczyć, czy wiązało się z wyczuciem stosunku zewnętrznego, czy wewnętrznego. Poza tym nie mogło ono prowadzić do wykrycia „łatwej" skali podobieństwa: stosunek długości odpowiednich odcinków nie był liczbą naturalną. Wybór figury podobnej odbywał się w ostateczności bez uwzględnienia czynnika liczbowego, intuicyjnie. A jednak podczas rysowania dzieci wracały do zaniechanej techniki i wyliczały „nowe" długości, mnożąc „stare" przez dwa. Być może jest to przykład zachowania, którego interpretacja w świetle teorii M. Hejný'ego jest następująca: Te dzieci mogły już posiadać jakieś umiejętności powiększania określonego skalą. Widać to w ich chęci wymierzania i przeliczania długości odcinków, zarówno podczas wyboru, jak i rysowania figur podobnych. Pojęcie skali powiększenia może być jeszcze bardzo prymitywne. Gdy znalazły się w sytuacji wykraczającej poza ich możliwości (skala niewymierna) cofnęły się do działania na poziomie wcześniejszym. Tym poziomem był poziom I, na którym figura geometryczna funkcjonuje „całościowo", odbierana jest wizualnie. Na

ogół dydaktycy są zdania, że osiąganie pewnego poziomu kompetencji i cofanie się na niższe poziomy — to stały element procesu uczenia się. Jednak uczeń, który znalazł się już na swoim poziomie rozwoju wiedzy o danym obiekcie, wiedzy funkcjonującej w systemie zależności i relacji do innych obiektów, rzadko cofa się do poziomu wcześniejszego (van Hiele, 1986). W obserwowanej więc sytuacji, zachowania dzieci związane z wymierzaniem odcinków byłyby tylko sygnałem mówiącym o tym, w jakim kierunku ten rozwój zmierza.

Uzupełnię jeszcze wykres informacjami o wykorzystaniu czynnika powiększenia (skali) w III etapie badania. Dzieci miały tutaj próbować opisać, na czym polega podobieństwo między figurami. Przewidywałam, że mogą wystąpić różne sytuacje: od takiej, gdzie dziecko uogólni zależności miarowe (np. powie, że odpowiednie odcinki powiększają się stałą liczbę razy), do takiej, gdzie nie będzie w ogóle mowy o zmianie długości odcinków.



Legenda:
I etap
M — w opisie literek M wykorzystuje zależności miarowe,
Ż — w opisie żyraf wykorzystuje zależności miarowe,
III etap
O — potrafi uogólnić zależności miarowe, nie mówi o konkretnym powiększeniu,
Z — zadaje konkretną liczbę,
W — stwierdza tylko, że cała figura ma być większa,
I — ignoruje, nic nie mówi o wielkości figur ani długościach odcinków,
■ — stosuje (jeden z wymienionych sposobów),

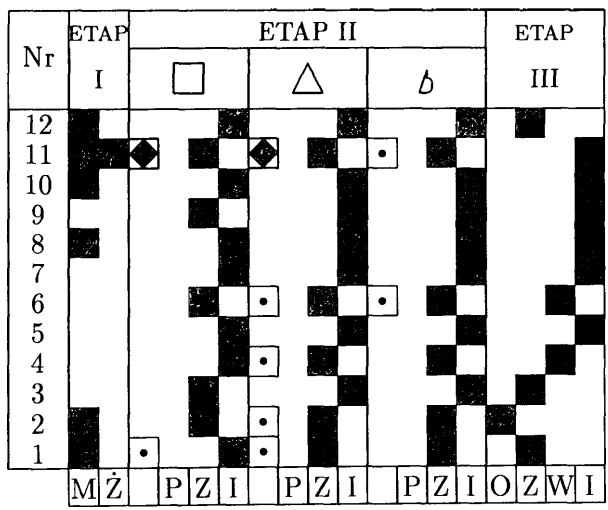
Wykres 4: Wykorzystanie skali podczas I i III etapu badań

Jak widać, w trzecim etapie, tj. uogólnieniu, na czynnik liczbowy jako na element istotnie decydujący o podobieństwie wskazało tylko czworo dzieci.

Tylko Iwona (nr 2) próbowała uogólnić ten wynik mówiąc, że figury podobne *mają wymiary pomnożone ileś tam razy*, ale szybko podparła się przykładem: *np. dwa razy większe, jak to robiłam w trójkącie.* Troje mówiło o dwukrotnym powiększeniu. Generalnie, dzieci nie podkreślały, że figura zmienia wielkość (I – 6 razy); jeżeli już ten fakt zauważały, to nie dociekały przyczyn, czym ten fakt został spowodowany (W – 2 razy).

Nie da się również powiedzieć, że wyniki etapu III są lepsze niż wyniki etapu I. Praca dzieci w etapie II miała (w założeniu) wzmocnić posiadane intuicje i ułatwić określenie cech definiujących podobieństwo. Być może tych założeń nie spełniła, gdyż w I etapie aż sześcioro dzieci wskazywało skalę podobieństwa, a w etapie III tylko troje z nich i tylko jedno dodatkowo (Dominika, 3). Wydaje mi się jednak, że to wyniki etapu III są bliższe rzeczywistym kompetencjom dzieci.

Na wykresie 5 pokazuję cały przebieg pracy dzieci związany ze stosowaniem skali podczas rysowania figur podobnych i tworzenia ich opisu definicyjnego.



Legenda:
■ — stosuje (jeden z wymienionych sposobów),
• — próbuje porównywać długości i rezygnuje podczas wyboru,
◆ — porównuje długości i wykorzystuje związki miarowe,
I etap
M — w opisie literek M wykorzystuje zależności miarowe,
Ż — w opisie żyraf wykorzystuje zależności miarowe,
II etap
P — pyta (o żądaną wielkość powiększenia),
Z — zadaje (samorzutnie decyduje się na zastosowanie skali),

I — ignoruje (praca ucznia nie wskazuje na to, że bierze pod uwagę wymierzane zależności długości),
III etap
O — potrafi uogólnić zależności miarowe, nie mówi o konkretnym powiększeniu,
Z — zadaje konkretną liczbę,
W — stwierdza tylko, że cała figura ma być większa,
I — ignoruje, nic nie mówi o wielkości figur ani długościach odcinków.

Wykres 5: Wykorzystanie skali podczas I, II i III etapu badań

To zestawienie jeszcze raz pokazuje, że dzieci bardzo różnie wykorzystywały skalę. Czasami (jak u Moniki, 12) ten czynnik nie objawił się w ogóle w trakcie rysowania figur, tylko podczas uzasadniania podobieństwa. W takim przypadku w ogóle nie wiadomo, jaki to ma związek z czynnościmi dziecka. Innym razem (Ewa, 11) dwukrotne powiększenie było tak silną przeszkodą w posłużeniu się intuicją, że doprowadzało do błędnych argumentacji i w ostateczności do odrzucenia (III etap) czynnika powiększenia.

Generalnie można jednak przypuszczać, że istnienie liczbowo określonego czynnika powiększenia nie jest dla dziecka w tym wieku elementem definiującym podobieństwo.

3.4 Sposoby rysowania figur podobnych

Rysowanie figury w powiększeniu — to konstruowanie figury podobnej do danej. W związku z tym stosowane techniki powiększania często dadzą się interpretować w świetle różnych definicji podobieństwa. Można pójść jeszcze dalej i opierając się na jakiejś ogólnej teorii kształtowania pojęć można próbować ustalić hierarchię tych technik, analizując procesy myślowe. Przedstawię tutaj swoją próbę takiej analizy.

Wykorzystując zaobserwowane podczas tych badań sposoby powiększania figur, skonstruowałam hierarchię sposobów rysowania figur podobnych (na etapie przeddefinicyjnym). Interpretowałam te sposoby przez pryzmat intuicyjnego stosowania euklidesowej definicji figur podobnych. Mój wkład w skonstruowanie tej tabeli (Tabela 5) ogranicza się do skatalogowania tych technik, próby ujednolicenia podejść do różnych figur oraz usystematyzowania ich zgodnie z teorią Hejný'ego kształtowania pojęć geometrycznych. Przyjęłam, że kryterium rozróżniającym poziom wyższy od niższego jest sposób odbioru figury:
a) z wykorzystaniem atendentów (zarówno widocznych — boki, jak i niewidocznych — przekątne, wysokości)
b) przez ujęcie całościowe.

W ujęciu całościowym nie jest możliwe tworzenie stosunku zewnętrznego. Można intuicyjnie stosować stosunek wewnętrzny, określany zależnościami: dłuższy — krótszy. Dlatego przyjęłam, że gdy uczeń w świadomy sposób stosował czynnik liczbowy, to stosował technikę stojącą na wyższym poziomie w tej hierarchii. Takie ujęcie jest też w zgodzie z teorią głoszoną między innymi przez E. Gray'a (Gray, 1995), że pojęcia geometryczne zaczynają się kształtować bez świadomości stosunków miarowych określanych liczbą. Również wcześniejsze moje badania (Swoboda, 1994; 1996) wskazują, że podczas posługiwania się intuicyjnym pojęciem figur podobnych liczba jest czynnikiem utrudniającym. Świadomość wielkości kątów zakwalifikowałam niżej niż świadomość istnienia czynnika powiększenia. Jest to również zgodne z teorią Hejný'ego, u którego kąt (na pewnym poziomie rozumienia) nie jest figurą geometryczną, ale miarą lub relacją między dwoma bokami figury. Tę relację (miarę) można określać bez użycia jednostki, a stwierdzając jedynie, że dwa kąty są albo takie same, albo jeden jest większy a drugi mniejszy.

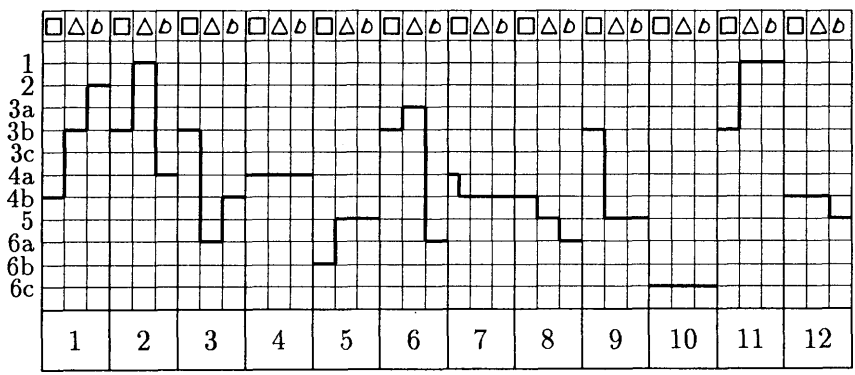
W wyniku tych zabiegów w tabeli pojawiły się również niektóre hipotetyczne kategorie zachowań, nie obserwowane przeze mnie w trakcie badań.

KWADRAT	TRÓJKĄT	„CZAPKA"
1. Wykorzystanie niewidocznych cech (atendentów) do skonstruowania figury podobnej w określonej skali		
Wymierzanie boku i przekątnej z uwzględnieniem skali, kreślenie przekątnej kwadratu jako pomocniczego atrybutu	Wymierzanie boków, podstawy i wysokości z uwzględnieniem skali	Rozkładanie figur na trójkąt i półokrąg, rysowanie trójkąta wg. jednej z cech podobieństwa, zaś okręgu ze znajdowaniem środka
2. Konstruowanie figury powiększonej w danej skali		
Wymierzanie wszystkich boków z uwzględnieniem skali, uwzględnianie wielkości kątów	Wymierzanie wszystkich boków z uwzględnieniem skali, uwzględnianie wielkości kątów	Wymierzanie wszystkich boków z uwzględnieniem skali, uwzględnianie długości promienia i wielkości kątów
3. Postępowanie „uproszczone", z uwzględnieniem skali powiększenia		
a) wymierzanie 2 boków i kątów prostych (np.: kratka, folia), reszta — idea kwadratu **bkbk** b) wymierzanie wszystkich boków, kąt intuicyjnie dobry **bbbb**	a) wymierzanie 2 boków i kąta między nimi (np.: kratka, folia), reszta — idea trójkąta **bkb** b) wymierzanie wszystkich boków, **bbb**	a) wymierzanie 2 odcinków i przynajmniej jednego kąta (np.: kratka, folia) reszta — idea „czapki" **bkb** b) wymierzanie przynajmniej 2 odcinków, kąt intuicyjnie dobry **bb**

KWADRAT	TRÓJKĄT	„CZAPKA”
4. Rysowanie z ignorowaniem skali, zachowaniem pewnych matematycznych cech		
a) rysowanie wybranej z planszy figury w skali 1 : 1 b) rysowanie dowolnego kwadratu, zachowanie kątów **kkk**	a) rysowanie wybranej z planszy figury w skali 1 : 1 b) zadawanie dowolnej podstawy, uwzględnianie 2 kątów **kk** c) intuicyjne zachowanie stosunku $p : h$	a) rysowanie wybranej z planszy figury w skali 1 : 1 a) zadawanie dowolnej podstawy, uwzględnianie przynajmniej jednego z kątów **k**
5. Rysowanie z pominięciem elementów matematyzacji		
Intuicyjne zachowanie kształtu	Intuicyjne zachowanie kształtu	Intuicyjne zachowanie kształtu
6. Rysowanie odbiegające od oczekiwanych intuicji		
a) zmiana kształtu b) uwzględnienie położenia na planszy c) położenie na planszy i rysowanie „kropek”	a)zmiana kształtu b)uwzględnienie położenia na planszy c) położenie na planszy i rysowanie „kropek”	a) zmiana kształtu b)uwzględnienie położenia na planszy c) położenie na planszy i rysowanie „kropek”

Tabela 5: Hierarchizacja sposobów rysowania figur w powiększeniu

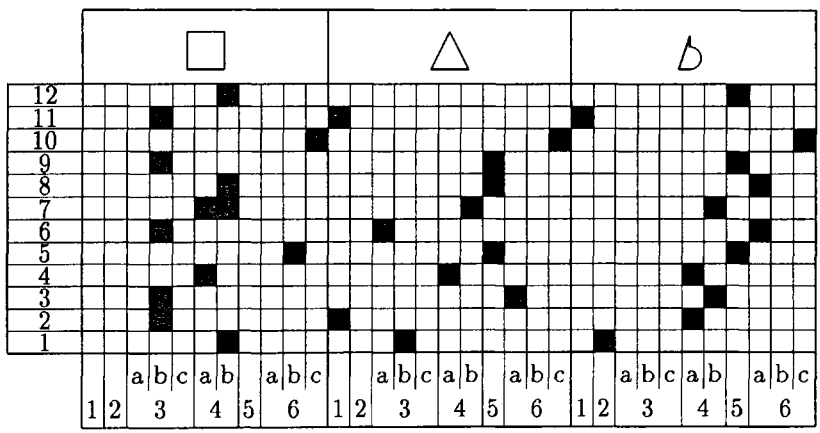
Tak przyjęta hierarchizacja była podstawą do stworzenia następnego wykresu. Pokazuje on, w jaki sposób poszczególni uczniowie (oznaczeni numerkami 1 — 12) rysowali figury podobne.



Wykres 6 — Rysowanie figur wg. kategorii z tabeli 5

Jak te wyniki interpretować w kontekście wprowadzania uczniów w definiowanie figur podobnych? Z wykresu wynika, że uczniowie bardzo zmieniali sposoby rysowania figur. Trudno tutaj zauważyć jakieś prawidłowości, którymi

się kierowali. Na ogół każda sytuacja powiększania konkretnej figury wyzwalała u dziecka inne techniki. Uczniowie „przeskakiwali" od techniki matematycznej do intuicyjnej, i na odwrót. Tylko dwójka dzieci przy każdej figurze postępowała tak samo (Krzysztof, nr 4, Paulina, nr 10). Ale ich zachowanie było bardziej „malarskie" niż matematyczne — te dzieci po prostu kopiowały wybrany obrazek. U pozostałych dzieci można jedynie sugerować pewne zgrupowanie technik wokół określonego kształtu. Dlatego wydaje się, że warto dodatkowo omówić wyniki pracy dzieci z kolejnymi planszami. Pokazuję to na wykresie 7.



Wykres 7: Rysowanie poszczególnych figur przez dzieci uczestniczące w badaniach

Interpretuję te wyniki następująco.

Plansza II — kwadrat

Dominujące w rysowaniu były sposoby zaliczone do sposobów 3b, 4a i 4b. Dzieci więc bardzo podobnie podchodziły do tego zadania. Skupiły się głównie na tym, by otrzymana w wyniku rysowania figura w dalszym ciągu przedstawiała kwadrat. Dbały głównie o to, by długości wszystkich boków nowej figury były takie same. Ale proponowane nowe długości nie zawsze wynikały z zastosowania czynnika powiększania. Tak było jedynie w kategorii 3b. W pozostałych sytuacjach było to np. dodanie kilku centymetrów do „starej" długości. Wprawdzie wizualnie wszystko się zgadzało, ale taka procedura nie da się uogólnić na inne figury.

Plansza III — trójkąt

Wykres 7 pokazuje ogromną różnorodność podejść uczniów do rysowania figury powiększonej. Ta figura wyzwalała różne techniki powiększania. Niektóre

dzieci niemalże stosowały twierdzenia o podobieństwie trójkątów (kategoria 1). Wiele dzieci stosowało „częściową matematyzację", wyliczając niektóre wielkości, resztę dorysowując „na oko" (kategoria 3, 4). Ale były i takie, które kopiowały kropeczki ze wzoru i ułożenie figury w stosunku do brzegów kartki; ujawniały więc działania bardzo daleko odbiegające od tych, które są istotne w nauce o podobieństwie.

Plansza IV — „czapka"

Konieczność narysowania figury podobnej, u dwójki dzieci (Magda nr 1, Ewa nr 11) wyzwoliła działania bardzo zmatematyzowane. Dziewczynki rozkładały figurę na części, szukały punktów charakterystycznych, przeliczały odległości między punktami, przenosiły wielkości kątów. Takiego skondensowania wysiłków, inwencji w poszukiwaniu rozwiązań, wielości prób zakończonych sukcesem, nie obserwowałam przy pracy z żadną inną figurą. Większość dzieci jednak rysowała „na oko".

Po takim zestawieniu — zarówno technik rysowania figur przez poszczególne dzieci, jak i wyników rysowania różnych kształtów – można postawić wspólny wniosek: dzieci zachowywały się bardzo rozmaicie, kierowały się różnymi kryteriami, a każdą sytuację traktowały jako osobne zadanie, wymagające indywidualnego podejścia. Nie mam więc podstaw do twierdzenia, że uczniowie konstruując figury podobne mają jakiś wspólny schemat postępowania, który wskazywałby drogę do określonej definicji. Wprost przeciwnie, każda próba analizowania tych wyników doprowadza do konkluzji, że uczniowie takiego schematu nie mają.

3.5 Matematyzowanie

Po każdej czynności wykonanej w II etapie (wybór figury, rysowanie) uczeń był proszony, by opowiedział o tym, co robił i dlaczego. Była to z jednej strony weryfikacja dla obserwatora (czy dobrze odczytał intencje ucznia wyrażone w jego działaniu), z drugiej strony — przygotowanie do etapu III, w którym uczeń miał uogólniać warunki definiujące figury podobne. Przedstawię moje obserwacje w etapie II, przy pracy z kolejnymi planszami.

Plansza II — kwadrat

Tutaj nie było problemu z wyborem figury podobnej: 11 uczniów bardzo szybko zdecydowało się na wskazanie właściwej. Wybór był niemal zawsze intuicyjny, bez badania figur z planszy, co widać na wykresie 1. Uzasadniając wybór większość uczniów (ośmiu) stwierdziło po prostu: bo to jest kwadrat. Często (10 osób) mówiono też, dlaczego inne figury nie są podobne; stwier-

dzano wtedy: bo tamte to prostokąt, romb. Były to więc odpowiedzi nie odnoszące się do własności figur, ale do całościowego odbioru kształtu, określanego nazwą. Rozróżnianie figur odbywało się bowiem na zasadzie tworzenia dwóch klas: kwadraty — niekwadraty. Dziecko wcale nie wchodziło tutaj w analizowanie związków między elementami figur. Narysowanie figury podobnej nie zmieniło rozumienia podobieństwa. W dalszym ciągu mówili jedynie, że rysowali kwadrat (7 uczniów). Ponieważ w spontaniczny sposób zadawali skalę powiększenia, więc wspominali, że powiększali długości boków dwa razy. Żaden uczeń nie zwrócił uwagi na wielkość kątów.

Plansza III — trójkąt

Na ogół uczniowie nie mieli kłopotu z rozpoznaniem figur podobnych. Wprawdzie tutaj wybór też był często intuicyjny, ale uczniowie czuli potrzebę badania innych figur. Dzieci wymierzały długości boków, po raz pierwszy zaczęły badać kąty; co więcej — uczniowie zaczęli w swoich uzasadnieniach powoływać się na długości boków i wielkości kątów. W ich opowiadaniu pojawił się też nowy element: zwracano uwagę na wewnętrzne proporcje figury (zależność między długością ramienia i podstawy). W wyniku rysowania uzasadnianie rysunku skupiło się głównie na mówieniu o długości boków, zachowaniu odpowiednich proporcji pomiędzy długością podstawy i wysokością (stosunek wewnętrzny). Dzieci często podkreślały, że narysowana figura podobna musi być trójkątem równoramiennym. Świadomość zachowania wielkości kątów w tych wypowiedziach zeszła jakby na plan dalszy.

Plansza IV — „czapka"

To kolejna sytuacja, gdzie uczniowie nie mieli kłopotu z wyborem figury i gdzie ten wybór był w zasadzie całkiem intuicyjny. Uzasadnienie niemal generalnie odbywało się na zasadzie eliminacji (odrzucania figur „nie pasujących"); jednak uczniowie zwracali tutaj uwagę na kilka cech: krzywizna łuku (9 uczniów), wewnętrzne proporcje (9 uczniów). Narysowanie figury powiększonej nie spowodowało wzrostu umiejętności mówienia o takich figurach, chyba wręcz przeciwnie, dzieci były bardziej skąpe w udzielaniu odpowiedzi. Mimo tego, przy tej planszy najczęściej zwracano uwagę na konieczność zachowania wielkości kąta w figurach podobnych, zarówno podczas rysowania, jak i opowiadania o figurach podobnych.

Znów więc wydaje się, że przy każdej figurze dzieci pracowały inaczej. Kwadrat nie stwarzał możliwości wprowadzania ucznia w definicje figur podobnych. Jako figura bardzo regularna, był przede wszystkim rozpoznawany wizualnie, całościowo. Tworzenie powiększonego obrazu to tylko rysowanie innego kwadratu, gdyż wszystkie kwadraty są do siebie podobne w sensie ma-

tematycznym. Wydaje się, że działania uczniów były tak głęboko intuicyjne i nieuświadomione (choć poprawne z matematycznego punktu widzenia), że nie dały motywacji do poszukiwań warunków definiujących podobieństwo. Tutaj po prostu wszystko „samo wychodzi".

Trójkąt równoramienny jakby bardziej inspirował do mówienia. Zwracano uwagę na długości boków, wielkości kątów, nawet na proporcje między długością wysokości i podstawy. Wciąż jednak bardzo mocno był podkreślany fakt, że obrazem trójkąta równoramiennego ma być trójkąt równoramienny. Można to z jednej strony tłumaczyć dążeniem do werbalnej izolacji obiektu (u Hejný'ego jest to jedna z podstawowych cech wskazujących na wchodzenie w II poziom rozumienia pojęć geometrycznych). Można też odczytać to jako pewną formę rozumienia wewnętrznych proporcji figury. I w jednym i drugim przypadku są to wypowiedzi opisujące jedną figurę, jeden kształt, a nie relację między dwiema figurami podobnymi.

Ostatnia figura — „czapka" — zainspirowała uczniów do mówienia o jeszcze innych cechach, takich jak np. wypukłość figury. Ale wyzwalane podczas rysowania działania okazały się dla dziecka za trudne do opisania.

Etap III — uogólnienie — pozornie zakończył się totalnym fiaskiem badawczym. Najczęstsza była sytuacja, gdy uczniowie powtarzali po kolei te swoje uwagi, które czynili przy kolejnych rysunkach. Określali kolejno, kiedy dwa kwadraty, dwa trójkąty, dwie czapki są podobne. Pytane, czym się charakteryzują figury podobne, odpowiadały jedynie, że muszą mieć ten sam kształt. Postępowali w ten sposób nawet ci uczniowie, którzy w opinii nauczycieli są bardzo uzdolnieni matematycznie, osiągają sukcesy w zawodach matematycznych o randze pozaregionalnej. Takie wyniki mogą być podstawą do postawienia hipotezy, że **na tym etapie nie funkcjonuje jeszcze ogólne pojęcie figur podobnych**; musi istnieć konkretna figura (kwadrat, czapka...) i w stosunku do niej dziecko określa figurę podobną. Hipoteza ta pozwala odnieść teorię Hejný'ego genezy pojęć matematycznych do tworzenia się uczniowskiej wiedzy o przekształceniach geometrycznych. Chodzi mi o istnienie etapu rozumienia podobieństwa, który M. Hejný w swej ogólnej teorii nazywa **etapem izolowanych modeli** (tak jak w dodawaniu dla niektórych dzieci $2 + 3$ nic nie znaczy, dopóki nie ustali się, że chodzi np. o 2 jabłka i 3 jabłka). Zacytuję dwa fragmenty protokołów z przebiegu III etapu badań, które ilustrują zasygnalizowany problem.

Fragment I

JA (Rozkładam przed uczennicą wszystkie plansze, rysunki wykonane podczas II etapu): Spróbuj powiedzieć koleżance, której nie było w szkole, kiedy mówimy, że figury są podobne.

ANIA (nr 6, uczennica słabo uzdolniona matematycznie): Mówimy, gdy mają wszystko takie same jak dana figura.
JA: To znaczy — co?
ANIA: Na przykład: kwadrat i kwadrat — mają wszystko takie same, a nie może być kwadrat i prostokąt. Dla kwadratu nie może być innej figury od tej [pokazuje kwadrat — model z planszy].
JA: Jakiej — innej?
ANIA: No, nie musi być w takim samym położeniu, ale musi być taka sama.
JA: A popatrz na wszystkie przykłady z plansz.
ANIA: Na przykład w trójkącie — gdy jest chudy i wysoki, to do niego nie może być mały i gruby albo jakiś strasznie chudy.
JA: Strasznie chudy?
ANIA: No, do trójkąta (1) nie może być strasznie chudy.
JA: A powiedz coś o innych figurach.
ANIA: Tu [pokazuje na plansze z „czapkami"] musi być podobnie — bo dziób musi być taki sam, i brzuch, tak jakby ten mniejszy przypatrywał się do lusterka.

Mimo moich prób, Ania nie potrafi oderwać się od rysunków na planszach. Dla każdej figury oddzielnie opisuje, jak potrafi, figurę do niej podobną. Korzysta albo z własności figur (kwadrat), albo odwołuje się do wewnętrznych proporcji. Tam, gdzie brakuje jej słów na opisanie związków zachodzących w figurach podobnych, posługuje się analogią: figura przypatruje się w lusterku. Nie ma więc mowy o ujmowaniu całościowym; każdy indywidualny model ma swój obraz; i to jest całe rozumienie podobieństwa.

Fragment II

JA (Rozkładam przed uczennicą wszystkie plansze, rysunki wykonane podczas II etapu): Spróbuj powiedzieć koleżance, której nie było w szkole, co to są figury podobne.
IWONA (nr 2, uczennica błyskotliwa, uzdolniona): To jest powiększenie lub pomniejszenie jakiegoś przedmiotu.
JA: Powiedz to dokładniej.
IWONA: Bo ja też narysowałam kwadrat, tylko większy. Każdy kwadrat będzie powiększeniem, jak każdy bok jest taki sam, wszystko jedno jaką długość narysuję, będzie kwadrat. W trójkącie też jest dobrze, bo też narysowałam trójkąt równoramienny, jego wysokość jest dwa razy większa niż we wzorze, bo to zmierzyłam i przez to mają [wzór i rysunek — przyp. mój] taki sam kształt, są wysokie i cienkie. W czapce mi się pomyliło [Iwona narysowała wzór powiększony i odbity symetrycznie], ale to chyba też powiększone tylko jest lustrzane odbicie.
JA: A czy można opowiadać ogólnie o wszystkich tych figurach podobnych?

IWONA: Kiedy ma wymiary pomnożone ileś tam razy, np. wymiary dwa razy większe, jak to robiłam w trójkącie; ale w czapce patrzyłam na kratki, bo niedobrze rysuję cyrklem [chodzi o sposób rysowania półokręgu], ale resztę rysowałam na taki sam wymiar [rozwartość kątów], ale tam, gdzie były linie proste, to liczyłam kratki. Ogólnie — decydują ich wymiary: wysokość i szerokość, ale w czapce także wypukłość.

Iwona próbuje mówić ogólnie, znajduje i uogólnia zależności metryczne, ale przez jej wypowiedzi cały czas przewijają się odniesienia do konkretnych figur. Ostatnie fragmenty wyraźnie wskazują na to, że w jej świadomości nie funkcjonuje ogólne pojęcie figur podobnych. Inne kryteria stosuje w relacji podobieństwa dla tej figury, dla której potrafi określić wymiary (szerokość i wysokość), inne dla figury wyznaczonej liniami krzywymi.

Interpretacje takich zachowań można dalej rozwijać. Prawdopodobnie nie zaistniała jeszcze u uczniów potrzeba sformułowania ogólnego pojęcia. Działanie ucznia ukierunkowane jest na razie na konkretny cel: powiększanie lub pomniejszanie konkretnego obiektu. Przedmiot myślowy, który dziecko chce badać, o którym myśli i mówi, nie jest jeszcze matematycznym pojęciem figur podobnych. Na razie jest ono postrzegane i opisywane przez pryzmat działania. Jest to „pojęcie w działaniu" odniesione do całego kontekstu wiadomości ucznia, a nie pojęcie odnoszone do wiedzy matematycznej. W matematyce podobieństwo jest przekształceniem lub relacją. Ale tak jak od badania zależności funkcyjnych zachodzących pomiędzy konkretnymi zmiennymi daleko jeszcze do ogólnego pojęcia funkcji, tak i poprzez pierwsze próby badania i opisywania związków zachodzących między figurą daną a figurą powiększoną dziecko nie dostrzega jeszcze matematycznego tworu, jakim jest ogólne pojęcie podobieństwa.

4 Zakończenie

Przedstawione przeze mnie obserwacje i ich interpretacja pokazują, jak złożonym zagadnieniem jest rozumienie podobieństwa figur przez uczniów szkoły podstawowej. Wyniki wielu innych badań, prowadzonych również wśród uczniów starszych i studentów, potwierdzają, że jest to pojęcie trudne (Ciosek, Krygowska, Turnau, 1974; Zamorska, 1982; Nowik, 1990; Samon, 1988; Hart, 1980 i inni).

Hipotezy, będące wynikiem przeprowadzonego badania, są jeszcze bardzo słabe, dla mnie jednak wyznaczają kierunek dalszych badań. Oto one:

Dziecko, pracujące na etapie przeddefinicyjnym, może stosować różne kryteria, aby ustalić podobieństwo pomiędzy zaprezentowa-

nymi figurami. Odwoływanie się do „tego samego kształtu" jest zabiegiem niewystarczającym. Takie słowne sformułowanie może być różnie odczytane przez dziecko. W rezultacie zadanie, w którym poleca się wybrać lub narysować figurę „tego samego kształtu", może być interpretowane w różny sposób, często niezgodny z intencją osoby kierującej polecenie do dziecka.

Jednym z etapów rozumienia podobieństwa figur jest ten, w którym uczniowie podobieństwo traktują jako relację między dwoma konkretnymi obiektami: figurą i jej obrazem. Nie ma tu jeszcze mowy o ogólnej relacji podobieństwa, określanej ogólnymi warunkami definicyjnymi; każda figura zbudowana jest inaczej, w związku z tym konstruowanie figury do niej podobnej przebiega za każdym razem inaczej.

Wydaje mi się, że ten okres nauki jest odpowiedni nie tyle do definiowania podobieństwa, co do gromadzenia przez dzieci doświadczeń, które w przyszłości mogą ułatwić definiowanie. Te doświadczenia to np. zadania na powiększanie i pomniejszanie odpowiednio dobranych figur (oczywiście, bez narzucania gotowych rozwiązań). Warto przy tym różnicować zadania tak, aby praca nad nimi wymagała od ucznia zauważenia wielu różnych własności figur podobnych. Dziecko jest w stanie samo ocenić, czy poprawnie rozwiązało zadanie (np. przez wizualną ocenę kształtu). Odwołuje się ono wtedy do wiedzy swojej, a nie do wiedzy nauczyciela.

Obserwowana różnorodność zachowań uczniów spontanicznie dokonujących powiększania figur jest bardzo korzystna dydaktycznie. Dziecko, pracując na różnych kształtach, w naturalny sposób wyczulane jest na własności figur podobnych, poznaje pojęcie podobieństwa od razu wszechstronnie i wieloaspektowo. Z drugiej strony, jest to budowanie wiedzy ucznia opartej na jego własnych działaniach. W rezultacie łatwiej zaakceptuje on w przyszłości różnorodność definicji podobieństwa.

Wykształcenie u uczniów tego poziomu pojęcia podobieństwa i skali wymaga od nauczyciela bardzo dobrego przygotowania dydaktycznego. Trzeba bardzo powoli i starannie wprowadzać w nie ucznia, bazując na posiadanych przez niego intuicjach zachowania kształtu figury. Intuicje te odnoszą się do stosunków wewnętrznych danej figury (proporcje figury), odbieranych wizualnie, na ogół bez użycia liczb.

Przyjęcie takich hipotez może zmienić dotychczasowe poglądy na nauczanie podobieństwa. Oznaczałoby to bowiem, że jednym z ważniejszych pojęć w nauce o figurach podobnych powinien być wewnętrzny stosunek, gdyż to on określa wewnętrzne proporcje figury, ujmowanej całościowo. Na dodatek, w jednej figurze taki stosunek byłby opisywany różnymi liczbami, a więc zmieniałby się w zależności od tego, jakie odcinki byłyby brane pod uwagę. Niegdyś pojęcie stosunku wewnętrznego funkcjonowało w szkolnym nauczaniu o figurach podobnych, ale na ogół miało tylko funkcję pomocniczą. Było podstawą do zdefiniowania odcinków proporcjonalnych (Straszewicz, Kulczycki, 1935, s. 67), służyło jako wstęp do wprowadzenia miary odcinka, (Hadamard, s. 109), pomagało w określeniu proporcjonalności odcinków metodą geometryczną (Łomnicki, 1929, s. 206). Bardzo szybko przechodzono potem do stosunków zewnętrznych, potrzebnych do zdefiniowania skali podobieństwa.

W proponowanym przeze mnie ujęciu wykorzystanie stosunku wewnętrznego mogłoby służyć wzmocnieniu takiego rozumienia figur podobnych, jakie jest uczniom dostępne. Posługiwanie się bowiem stosunkiem wewnętrznym na najniższym etapie rozumienia jest możliwe bez użycia liczb, czy też miar. Ten stosunek po prostu widać. Być może dydaktycznie łatwe byłyby próby wprowadzenia opisu tego stosunku za pomocą liczb jako etapu pośredniego, przed wprowadzeniem skali podobieństwa. Nie ma zresztą potrzeby decydowania, który ze stosunków powinien pojawić się pierwszy podczas zorganizowanego nauczania o podobieństwie. Jak bowiem podkreślał Freudenthal (1983), „[...] perspektywa od struktur uboższych do bogatszych jest też fałszywa. Jest to perspektywa dedukcyjna na matematykę jako na gotowy produkt, nie jest ona natomiast ani perspektywą historyczną, ani rozwojową matematyki. I nie jest ona dobra dydaktycznie." Na pewno trzeba akcentować zachowanie stosunku wewnętrznego jako własności figur podobnych, niezależnie od przyjętego toku nauki o podobieństwie. Zwracał na to uwagę S. Kulczycki, który jeszcze w 1953 r. pisał:

> Lekcje o jednokładności w dużym stopniu przygotowały ucznia do nauki o figurach podobnych i dały mu możność wielokrotnego obserwowania takich figur. Jednakowoż rzecz wymaga dalszych ćwiczeń, ponieważ młodzież temat ten przyswaja sobie powoli i popełnia nawet w najwyższych klasach rażące omyłki w ocenie podobieństwa oglądanych figur. [...] Źródłem [...] jest niedostateczne uświadomienie sobie podstawowych własności figur podobnych: Stosunek dwóch dowolnych odcinków jednej figury jest równy stosunkowi odpowiednich odcinków drugiej figury (Kulczycki, 1953, s. 125).

Autorzy jednego z podręczników dla klasy VII wychodzą naprzeciw takim oczekiwaniom, podając twierdzenie:

> W figurach podobnych: stosunek dwóch dowolnie wybranych odcinków jednej figury równa się stosunkowi odpowiednich im odcinków drugiej figury, odpowiednie kąty mają równe miary (Treliński, Wachnicki, 1995, s. 178).

Nasuwa się jeszcze jedna uwaga, związana z wprowadzaniem skali podobieństwa. Przykłady rysowania kwadratu w powiększeniu pokazują, że nie jest wcale oczywiste dla uczniów, czy jest to powiększanie addytywne czy multyplikatywne. Kwadrat nie daje szansy stwierdzenia, że powiększenie długości boku przez dodanie 2 cm nie prowadzi do ogólnej strategii sukcesu w powiększaniu. To samo można zresztą powiedzieć o powiększaniu trójkąta równobocznego czy okręgu. Praca na takich kształtach może być dla uczniów bardzo pożyteczna: własności tych figur są bowiem dla dziecka na tyle znane, że w łatwy sposób może ono doświadczyć sukcesu w powiększaniu figury, co samo może „naocznie" stwierdzić. Ale może warto ten sukces wykorzystać głębiej i sprowokować, by w innych figurach dziecko zastosowało „powiększanie o ... " zamiast „powiększania razy ... ". Powstała sytuacja konfliktowa może być wykorzystana do sprecyzowania przez dziecko sposobu powiększania figur.

Umiejętność rysowania figur podobnych wcale nie oznacza umiejętności ich definiowania. Jest to oczywiste. Z drugiej strony, rysowanie figur podobnych może przybliżać odkrycie definicji. Intuicyjne posługiwanie się pojęciem podobieństwa wyzwala u uczniów bardzo różne sposoby postępowania. Wytwory pracy uczniów mogą być różne i mogą powstawać na różnej drodze. Pokazuje to chociażby wykres 6 — rysowanie figur. Taka sytuacja może być bardzo korzystna w nauczaniu. Odkrywanie przez ucznia odmiennych strategii prowokuje do dyskusji, do szukania powiązań pomiędzy nimi, do sprawdzania, czy prawidłowości odkryte w jakiejś jednej sytuacji zachowują się też i przy innych figurach. Ale o tych faktach trzeba z uczniami rozmawiać. Na dodatek, aby przekształcić odpowiedzi i wiadomości uczniów w wiedzę, uczniowie powinni przy pomocy nauczyciela dokonać ponownego oderwania wytworzonych wiadomości od kontekstu i pozbawienia ich cech subiektywnych po to, aby mogli dostrzec w tym, co zrobili, coś, co ma charakter uniwersalny, wiedzę będącą elementem kultury, dającą się wielokrotnie użyć (Bessot, 1996).

Nie ma tutaj potrzeby zacieśniania nauczania do jednej definicji. Myślę, że nie ma nawet potrzeby ukierunkowania go na jakąś jedną definicję w sytuacjach otwartych — rozwiązywania realistycznego, konkretnego dla dziecka problemu organizowanego wokół „figur o takim samym kształcie". Ważne jest

jedynie, aby znać możliwości dziecka na danym etapie jego rozwoju i nie tworzyć barier w przyszłym procesie matematyzacji przez narzucanie sztywnych reguł postępowania.

Gdy przyjmiemy jako zasadę, że **problematyka dotycząca elementarnego pojęcia matematycznego zależy w przeważającej mierze od genezy tego pojęcia, genezy historycznej, fenomenologicznej i psychologicznej, a ostateczny formalny kształt pojęcia odgrywa tu rolę drugorzędną** (Turnau, 1990, s. 206), szukanie dróg, na których praktyka szkolna przystaje do tej genezy to jedno z zadań dydaktyki, rozumianej jako nauka projektująca. Taki cel ogólny mają też te badania. Jednak odpowiedź na pytanie, jak taka ogólna problematyka dotycząca podobieństwa ma być w szkole realizowana, wymaga dalszych studiów.

Literatura

Bessot A.: 1996, Ramy teoretyczne dydaktyki matematyki we Francji, *Dydaktyka matematyki* 18, s. 31–56.

Ciosek M., Krygowska Z., Turnau S.: 1974, Strategie rozwiązywania zadań jako problem dydaktyki matematyki, Prace z Dydaktyki Matematyki,*Rocznik Naukowo-Dydaktyczny*, Wydawnictwo Naukowe WSP Kraków.

Chodnicki J. i in.: 1996, *Matematyka 2001. Podręcznik dla klasy 7 szkoły podstawowej*, WSiP, Warszawa.

Freudenthal H.: 1983, Nowa matematyka czy nowe jej nauczanie, *Wiadomości Matematyczne* 25.

Gray E.: 1995, Tackling the Problems: An Explanation for Success and Failure, *Proceedings of the International Symposium on Elementary Math Teaching, SEMT 1995*, Prague.

Hadamard J., *Wykład geometrii elementarnej*, t. 1, Warszawa.

Hart K. M.: 1980, *Secondary School Children's Understanding of Mathematics,* A Report of Mathematics Component of the Concepts in Secondary Mathematics and Science Programme, Mathematics Education, Centre for Science Education, Chelsea College, University of London, edit. D. C. Johnson.

Hejný M.: 1993, Understanding of Geometrical Concept, *Proceedings of the 3rh Bratislava International Symposium on Mathematical Education*, BISME-3, Bratislava.

Hejný M.: 1995, Development of Geometrical Concept, *Proceedings of the International Symposium on Elementary Math Teaching, SEMT 1995*, Prague.

H e j n ý M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Dydaktyka Matematyki* 19, 15–28.

V a n H i e l e P. M.: 1986, *Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, INC London.

K u l c z y c k i S.: 1953, *Nauczanie geometrii w klasach VI i VII szkoły ogólnokształcącej*, PZWS, Warszawa.

K u l c z y c k i S., S t r a s z e w i c z S.: 1949, *Geometria, Podręcznik dla kl. VII*, PZWS Warszawa.

Ł o m n i c k i A.: 1929, *Geometrja elementarna. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich 10 – 12*, Książnica–Atlas, Lwów – Warszawa.

N o w i k J.: 1990, *Wyniki ogólnopolskich badań osiągnięć uczniów, nauczycieli i szkół 1981–1988, t. XI*, Centrum Doskonalenia Nauczycieli im. W. Spasowskiego w Warszawie, Warszawa

S a m o n B.: 1988, *Osiągnięcia matematyczne uczniów klas VIII. Badania testem sprawdzającym wielostopniowym*, Centrum Doskonalenia Nauczycieli im. W. Spasowskiego w Warszawie, Warszawa.

S e r k i s E., S w o b o d a E.: 1997, *Próby udoskonalania narzędzia badawczego stosowanego do badania intuicyjnego rozumienia podobieństwa*, Wydawnictwo Uczelniane WSP Rzeszów.

S t r a s z e w i c z S., K u l c z y c k i S.: 1935, *Geometrija dla klasy III gimnazjalnej*, Książnica–Atlas, Lwów – Warszawa.

S w o b o d a E.: 1994, *Rozumienie podobieństwa figur przez uczniów młodszych klas szkoły podstawowej*, nieopublikowana praca doktorska, WSP Kraków.

S w o b o d a E.: 1996, Trudności w rozumieniu metrycznych zależności zachodzących w figurach podobnych u uczniów klas I–IV. W: „Matematyczne kształcenie studentów kierunków pedagogicznych", *Rocznik Naukowo–Dydaktyczny, Dydaktyka Matematyki*, pod redakcją H. Siwek, WSP Kraków.

T r e l i ń s k i G., W a c h n i c k i E.: 1995, *Matematyka, podręcznik dla klasy siódmej szkoły podstawowej*, Wydawnictwo „Kleks", Bielsko–Biała.

T u r n a u S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Z a m o r s k a Z.: 1982, *Pewne problemy percepcji definicji matematycznej przez uczniów szkoły średniej*, Wydawnictwo Uczelniane WSP Rzeszów.

Between intuition and definition: an attempt of identifying 11–12 years old students' competences in defining similar figures

Summary

In May I conducted research amongst 11–12 year old pupils to determine their ability to define similar figures. At this age in Polish schools the students have not yet started to learn about similarity. A group of 12 pupils who perceive the idea of the retention of shape in the same way that a mathematician understands similarity was selected. One of the tasks of the research cycle that students were given was to enlarge 3 different figures.

Drawing the figure in enlargement means constructing a figure similar to the given figure, without the child realizing the mathematical concept. Due to this the applied techniques of enlargement can be often interpreted in light of different definitions of similarity. From the observation of the children's ways of enlarging figures I constructed a hierarchy of drawing similar figures (at the predefinition stage). I interpreted them through the intuitive application of the Euclidean distance definition of similar figures.

As can be seen from the diagrams, the pupils changed their ways of drawing figures. It is difficult to notice a guiding rule. In general, each situation where the child was to enlarge a given figure stimulated the use of a different technique. The students jumped from the mathematical to intuitive technique and vice versa.

The children acted according to different criteria treating each situation as an individual task requiring a separate approach. Nothing suggests that those students possessed a common scheme of solving the problem, which would indicate a certain definition of similarity. On the contrary, each trail at analysing these results leads to the conclusion that the students do not posses such a scheme.

However, the different ways of students' behaviour while spontaneously enlarging the figures is valuable didactically. The child, working with the different shapes in a natural way, is sensitive to properties of similar figures, learns the idea of similarity comprehensively and in a multi–aspect approach. As a result, in the future the child will accept many different definitions of similarity more easily.