ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 19(1997)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

KONFERENCJE

Ewa Swoboda (WSP Rzeszów),
Stefan Turnau (WSP Rzeszów),
Elżbieta Urbańska (WSP Kraków)

Interakcje na lekcji matematyki (Sprawozdanie z konferencji)

Tytuł tego sprawozdania to temat konferencji, która odbyła się w Setúbalu (Portugalia) w dniach 24–31 lipca 1997 roku, jako 49. Spotkanie Międzynarodowej Komisji do Badania i Ulepszania Nauczania Matematyki (CIEAEM). Gospodarzem była *Escola Superior de Educacão* (Wyższa Szkoła Pedagogiczna) będąca częścią *Instituto Politécnico* w Setúbalu.

1 Problematyka

Poniższe **Wprowadzenie do dyskusji** (*Discussion Document*) zostało przygotowane przez Międzynarodowy Komitet Programowy konferencji w składzie: Paulo Abrantes (Portugalia), Francoise Cerquetti–Aberkane (Francja), Leonor Cunha Leal (Portugalia), Rijkje Dekker (Holandia), Catherine Inchley (W. Brytania), Maria de Jesus Luelmo (Hiszpania) i Joana Porfírio (Portugalia).

Działania podejmowane w zakresie nauczania matematyki — nowe programy w wielu krajach, nowe podejścia inicjowane przez nauczycieli, projekty dydaktyczne tworzone przez naukowców — zdają się coraz więcej uwagi poświęcać interakcjom na lekcjach. Aby ocenić program, nie wystarcza zbadać osiągnięcia uczniów; trzeba też analizować to, co dzieje się w procesie jego wdrażania. Ponadto aktualna troska o integrację bardzo różnych celów kształcenia — jak sprawności poznawcze

wyższego poziomu, aspekty emocjonalne, przekonania i oczekiwania — zmusza do zajęcia się zjawiskami, których nie da się zrozumieć bez głębszego spojrzenia na to, co dzieje się na lekcji. Z drugiej zaś strony, spojrzenie na uczenie się jako tworzenie przez ucznia jego własnych znaczeń oraz uznanie, że ten proces tworzenia znaczeń wymaga dzielenia się ideami i myślami, prowadzi do uwypuklenia interakcyjnej natury uczenia się matematyki.

Zagadnienie interakcji na lekcjach matematyki obejmuje szereg różnych kwestii. Najbardziej oczywiste to tworzące się tu schematy komunikacji, zarówno między uczniami, jak i między nauczycielem i uczniami, wartościowe typy dyskursu matematycznego, wpływ atmosfery w klasie oraz rola działań nauczyciela. Są też inne aspekty, które chcielibyśmy uwzględnić, takie jak organizacja klasy oraz rola zadań i materiałów użytych do pobudzenia aktywności uczniów. Rozważenia wymagają także jawne i niejawne wyobrażenia i poglądy dotyczące matematyki, gdyż silnie wpływają na aktywność matematyczną, a także podlegają jej wpływowi. Podjęcie tych wszystkich kwestii wymaga adekwatnych metod obserwacji lekcji matematyki oraz gromadzenia i analizowania odpowiednich danych, co jest przedmiotem zainteresowania zarówno nauczycieli, jak i naukowców.

1.1 Interakcje wśród uczniów

Jeśli uczenie się matematyki polega w dużej mierze na budowaniu indywidualnych znaczeń dla idei matematycznych, a ten proces obejmuje autentyczne dzielenie się poglądami i myślami, to tworzenie w klasie atmosfery, która raczej stymuluje niż krępuje interakcje między uczniami staje się rzeczą bardzo istotną.

Interakcje w klasie nie stanowią celu dla siebie; są one związane z celami kształcenia. Trzeba przedyskutować te związki, a mianowicie to, jak interakcje mają się do różnych celów uczenia się matematyki. Trzeba też zastanowić się nad tym, jak wywołać zamierzone interakcje.

Na przykład odpowiednie sytuacje problemowe lub materiały manipulacyjne mogą być bardzo pomocne do zachęcenia uczniów, by komunikowali sobie pomysły i dyskutowali o nich z kolegami. Jest jednak konieczne, by uczniowie chcieli wypowiadać swoje idee i myśli i uważali to za rzecz naturalną. Jest to uwarunkowane aktualną atmosferą w klasie; taką, w której wyjaśnianie czegoś innym i słuchanie innych jest zachowaniem naturalnym; gdzie nie autorytet nauczyciela lub podręcznika, ale raczej rozumowanie, argumentacja i fakty są podstawą dyskursu matematycznego. Pewne cechy atmosfery w klasie mogą mieć silny wpływ na tworzące się i aprobowane rodzaje interakcji; np. atmosfera współpracy lub przeciwnie, konkurencji; albo też tłumiący swobodne wyrażanie idei wpływ oceniania.

Pożądane interakcje wśród uczniów pojawiają się zarówno w małych grupach roboczych, jak i w pracy z całym zespołem klasowym. Wydaje się, że warto za-

stanowić się nad rolą różnych form pracy z klasą.

- **Jakie rodzaje interakcji wśród uczniów są owocne dla osiągania różnych celów uczenia się matematyki? Jak je można pobudzić?**
- **Jakie warunki mają pozytywny (lub negatywny) wpływ na te interakcje — atmosfera sprzyjająca uczeniu się, atmosfera współpracy czy konkurencji, ocena... ?**
- **Jaka jest rola pracy w małych grupach i pracy z całą klasą?**

1.2 Rola nauczyciela

Powstanie w klasie odpowiedniej atmosfery sprzyjającej uczeniu się zależy w dużej mierze od nauczyciela. Jeśli nauczyciel nie pobudza do komunikowania się, pomysły i myśli uczniów pozostaną w ukryciu. Rola nauczyciela może się tu przejawiać rozmaicie: w wyjaśnianiu i badaniu związku nowych idei z uprzednią wiedzą i doświadczeniem, w interpretowaniu oraz pomocy w interpretowaniu przez uczniów różnych dyskutowanych znaczeń, w negocjowaniu sensu matematycznego z uczniami.

Na aktywność uczniów w klasie w znacznym stopniu wpływają nie tylko stawiane zadania, ale też sposób organizowania lekcji przez nauczyciela. Wspólna praca wydaje się potencjalnie generować interakcje między uczniami, ale rola nauczyciela w organizowaniu pracy małych zespołów i kierowaniu nią, a także przenoszeniu wyników tej pracy na forum całej klasy bynajmniej nie jest trywialna.

Te poglądy stawiają raczej duże wymagania nauczycielowi i mają liczne implikacje dla procesu kształcenia nauczycieli. Określenie potrzebnych kompetencji, a także perspektywy rozwoju zawodowego nauczyciela staje się więc jeszcze jednym zagadnieniem do dyskusji.

- **Jakie działania i kompetencje nauczyciela są potrzebne do pobudzenia komunikacji i poprawy jakości interakcji w klasie?**
- **Jaka jest rola nauczyciela w wyjaśnianiu, interpretowaniu i negocjowaniu idei i znaczeń matematycznych na lekcji?**
- **Jaka jest rola nauczyciela w organizowaniu pracy małych zespołów i kierowaniu nią?**

1.3 Zadania, wymagania programowe, problemy

Stworzenie warunków, w których często pracuje się w małych zespołach, a dyskusje z całą klasą są naturalne, jest korzystne dla pobudzenia interakcji na lekcjach.

Jednak dla charakteru tych interakcji nie są obojętne stawiane uczniom zadania i używane materiały. Jeśli silnie uprzywilejowane są zadania typowe dla każdego działu programu nauczania, uczniowie będą prawdopodobnie skłonni akceptować bądź odrzucać proponowane procedury, nie będą jednak mieli ochoty dzielić się swoim rozumieniem pojęć czy dyskutować o pomysłach. Inna sytuacja może się pojawić wówczas, gdy uczniowie będą osobiście zaangażowani w aktywność poszukiwania, badania i rozwiązywania problemów.

Interesujące problemy matematyczne są potrzebne, lecz nie wystarczają do wywołania takiej aktywności w klasie. Jest rzeczą ważną, tak dla nauczycieli jak i dla naukowców, by mogli poznać przypadki, w których proponowane zadania i materiały sprawdziły się lub nie (w sensie promowania autentycznych poszukiwań, badań i dyskusji wśród uczniów), i zrozumieć, dlaczego tak było.

Szczególnym i ważnym aspektem tego zagadnienia są potencjalne możliwości stymulowania interakcji wśród uczniów przez środki techniczne (kalkulatory, kalkulatory graficzne, komputery, Internet...), a także inne materiały dydaktyczne.

- **Jakie typy zadań zdają się stymulować interakcję?**
- **Jaki charakter ma interakcja wśród uczniów w zależności od różnych dawanych im zadań i wymagań programu nauczania?**
- **Jaka jest rola środków technicznych (komputerów, kalkulatorów...) i innych materiałów dydaktycznych?**

1.4 Wyobrażenia i poglądy na temat matematyki

Wyobrażenia i poglądy na temat matematyki są — jawnie czy niejawnie — obecne na lekcji tego przedmiotu. Są one związane z uprzednimi doświadczeniami szkolnymi, a także mają istotną składową o charakterze kulturowym i społecznym.

Te wyobrażenia i poglądy silnie wpływają na schematy interakcji i komunikacji tworzące się na lekcji, i to w sposób nie zawsze całkiem jasny, co wymaga przedyskutowania.

Wyobrażenia na temat matematyki, a także przekonania i oczekiwania, są w szkolnej aktywności matematycznej najczęściej niejawne. Czy powinny one stać się przedmiotem refleksji i otwartej dyskusji nauczyciela z uczniami? A jeżeli tak, jak to robić?

- **Jakie wyobrażenia i poglądy na temat matematyki są jawnie lub niejawnie obecne w lekcyjnych schematach interakcji? Jak wpływają one na interakcje?**
- **W jaki sposób wyobrażenia i poglądy na temat matematyki mogą być ujawnione i stać się przedmiotem refleksji?**

1.5 Obserwacja i analiza interakcji na lekcjach

Nauczyciele i dydaktycy podzielają zainteresowanie interakcjami na lekcjach. Przy tym nauczyciele troszczą się głównie o jakość dyskusji między uczniami. Wielu nauczycieli z doświadczeniem w organizowaniu pracy w małych grupach cieszy to, że uczniowie pobudzają się wzajemnie i mogą rozwinąć interesujące dyskusje. Jednak wielu z nich ma wątpliwości, czy jakość tych dyskusji jest dostatecznie wysoka, i dopomina się o „instrumenty" do oceny tej jakości, by móc ją podnosić. W czasie pracy w małych grupach mają oni możliwość obserwacji interakcji wśród uczniów, jednak z drugiej strony „wkładanie nosa" między dyskutujących może zakłócić ich otwartość w wyrażaniu swych idei.

Zainteresowanie dydaktyków skupia się tradycyjnie na analizie dyskusji między uczniami i nauczycielem. Opublikowano na ten temat wiele prac badawczych. Ostatnio więcej uwagi poświęca się jakości dyskusji między samymi uczniami. Jednak badania tego rodzaju są niełatwe. Analiza taśm wideo i magnetofonowych jest bardzo czasochłonna, a postępy uczniów w uczeniu się matematyki w czasie pracy w małych grupach trudne do uchwycenia.

- **Jak obserwować i analizować interakcje na lekcjach matematyki?**

- **Jakimi dysponujemy środkami oceny jakości interakcji ze względu na uczenie się matematyki?**

2 Organizacja

Schemat organizacyjny „Spotkań" ustalił się od szeregu lat i jest dobrze znany ich bywalcom. Każdy dzień otwiera sesja plenarna z referatem. Resztę czasu wypełnia praca w grupach roboczych (każdy uczestnik pracuje cały czas w wybranej grupie) lub warsztatach (tylko jeden seans), udział w „forum pomysłów" (prezentacje niekoniecznie związane z tematem konferencji) i krótkie referaty (wygłaszane równolegle w tym samym czasie). Jeden dzień zajmuje wycieczka krajoznawcza, będąca okazją do bliższych osobistych kontaktów i dłuższych rozmów. Wciąż trzeba z czegoś rezygnować, żeby być gdzie indziej, co innego usłyszeć lub zobaczyć; na przykład obejrzeć liczne bogate wystawy książek i materiałów dydaktycznych. A potem wypada żałować, gdy wybór okazał się chybiony...

Dlatego to sprawozdanie jest relacją z **naszych** obserwacji i wrażeń i nie pretenduje do kompletności czy obiektywizmu.

3 Obserwacje, refleksje, wrażenia

3.1 Dlaczego jest źle?

Lektura „Wprowadzenia do dyskusji" dobitnie uświadamia głęboki rozziew między koncepcją nauczania matematyki postulowaną przez dydaktyków — a praktyką; rozziew, który od lat nie maleje, a ostatnio zdaje się poszerzać. Fakt ten tłumaczył w plenarnym referacie Terry Wood:

> Powszechnie uważa się, że na to, by uczniowie uczyli się matematyki ze zrozumieniem, muszą znaleźć się w sytuacjach zachęcających do myślenia i rozumowania. A tymczasem sytuacje takie stwarzają konteksty dydaktyczne silnie różniące się od tradycyjnej lekcji matematyki. Cechuje je duża interaktywność i dyskursywność. Lecz żeby stworzyć te interaktywne i dyskursywne konteksty, potrzebne są metody nauczania fundamentalnie różne od tych, które występują powszechnie na większości lekcji matematyki. [...] A co najważniejsze, konteksty te wymagają od nauczyciela profesjonalnych działań, często sprzeciwiających się intuicji „naturalnego nauczania". (Na podstawie streszczeniá referatu)

Nie oczekując więc jednoznacznych odpowiedzi na te trudne pytania, mieliśmy jednak nadzieję dowiedzieć się, gdzie, co i jak udało się mimo wszystko zmienić na lepsze. Czy spotkał nas zawód?

3.2 W Wielkiej Brytanii...

Referat plenarny Afzala Ahmeda i Honor Williams z Wielkiej Brytanii ilustrowany był fragmentami nagranych na video lekcji matematyki. Autorzy starali się podkreślić wagę i celowość tego typu nagrań w kształceniu nauczycieli. Wszechstronna analiza 120 godzin nagranych lekcji (w 29 szkołach, u 30 nauczycieli), dokonywana wspólnie z prowadzącymi te lekcje nauczycielami, doprowadzała do zmiany spojrzenia tych nauczycieli na nauczanie matematyki w szkole. Uświadomili oni sobie, że ich głównym zadaniem nie jest „realizacja programu", ale nauczanie będące konsekwencją zrozumienia zachowań dziecka, jego sposobu formułowania myśli i odbioru matematycznej rzeczywistości.

We wnioskach z przeprowadzonych badań autorzy akcentowali, że uczeń uczy się matematyki ze zrozumieniem, gdy matematyczne pojęcia tworzą się:

- w oparciu o własne doświadczenia życiowe,
- w wyniku manipulacji konkretem,
- w wyniku negocjacji i rozmów z rówieśnikami i nauczycielem,

- ze świadomością związku tych pojęć z codziennym życiem,

a zdobyta wiedza jest trwała, gdy uczeń ma wiele okazji do:

- wyrażania swoich myśli w formie zarówno słownej jak i pisemnej,
- samodzielnego rozwiązywania i konstruowania zadań,
- ćwiczenia koniecznych sprawności i umiejętności w formie ciekawych gier i zabaw.

Zdaniem referujących, takie spojrzenie na nauczanie stanowi dla nauczycieli dobry punkt wyjścia do właściwego planowania lekcji, do nauczania sprzyjającego tworzeniu pożądanych interakcji.

3.3 ...i w Holandii

Wydaje się, że gdzie jak gdzie, ale w Holandii, gdzie działał Freudenthal i gdzie od ćwierćwiecza rozwijana jest idea realistycznego nauczania matematyki, postęp jest widoczny. Programy matematyki dla 16–18–latków koncentrują się na tematach, środkach i sposobach inspirowania samodzielnego uczenia się oraz interakcji między uczniami. Tradycyjnie już wykorzystuje się tu do tego celu geometrię. Wykład plenarny Rijkje Dekker, Marianne Elshout–Mohr i Monique Pijls pt. „Interakcja, samodzielnie sterowane uczenie się i proces podnoszenia poziomu"[1] pokazywał, jak to może wyglądać w praktyce. Zobaczyliśmy materiały (m. in. grafika Eschera, ornamenty, płytki z historycznych budowli), pozwalające na pracę z uczniami na coraz wyższym poziomie abstrakcji:

- wizualnym (np. wyróżnienie powtarzającego się w ornamencie motywu)
- opisowym (określenie rodzajów przekształceń nakładających ornament na siebie)
- teoretycznym (badanie grup symetrii ornamentu)

Dobór materiału dydaktycznego nie determinuje roli nauczyciela. Nawet gdy przyjmiemy, że rezygnuje on z pozycji dominującej (tj. nie stoi przed zespołem klasowym i nie steruje wszystkim, co się w klasie dzieje), jego rola jest wciąż kwestią otwartą. Czy ma dystansować się wobec wszystkich zachowań uczniów; może powinien tylko podsuwać uczniom pomysły; a może ingerować w ich pracę i pomagać w prawidłowym jej przebiegu? Autorki szczerze przyznają, że nie umieją na takie pytania odpowiedzieć.

[1] *Interaction, self-regulated learning and the process of level raising*

3.4 Przykłady interakcji i jej analizy

Autorki omawianego wyżej referatu pokazały na przykładzie sposób analizowania interakcji między uczniami pracującymi nad problemem. Ten przykład zacytujemy dosłownie.

SYTUACJA

Uczniowie A i B otrzymują po dwa kartonowe lusterka złożone na pół oraz wycięty z kartonu trójkąt.

> Zadanie: Połóż na ławce trójkąt i ustaw lusterko tak, by trójkąt był wewnątrz. Zmieniaj kąt między dwiema częściami lusterka. Jaki jest związek między tym kątem a liczbą trójkątów, które widzisz w lusterku? Porównaj swoje obserwacje z obserwacjami kolegi.

A	B
pracuje (patrzy skoncentrowany w lusterko)	pracuje (zmienia kąty, patrzy na A): Co robisz?
Cóż, kiedy rozłożę lusterko na 90^0, widzę cztery trójkąty	I co z tego?
No, 4 razy 90 jest 360. A ty co znalazłeś?	Patrz, kiedy robię kąty coraz mniejsze, widzę coraz więcej trójkątów, a kiedy robię coraz większe kąty — widzę mniej;... a teraz (tworzy kąt powyżej 180^0) — nic nie widać.
Mniejsze ... spróbujmy 45^0 — ile trójkątów widzisz?	Osiem.
Osiem..., a 8 razy 45 jest 360, moja teoria się sprawdza! Liczba trójkątów razy kąt jest 360.	(tworzy kąt 180^0, a potem mniejszy): Teraz widzę 3.
Czyli musi być 120^0.	

	Ale nie jest.
Rzeczywiście, jest więcej. Wyraźnie więcej, 170. Nasza teoria upadła.	
	Nie, nie upadła. To są tylko okoliczności praktyczne.
Tak myślisz?	

ANALIZA DYDAKTYCZNA I MODEL PROCESU

A i B pracują nad tym samym problemem, jednak każdy z nich inaczej.

A pracuje		B pracuje
A prosi B o pokazanie swej pracy	*co robisz? co znalazłeś?*	*B prosi A o pokazanie swej pracy*
A staje się świadomy wyniku swej pracy		B staje się świadomy wyniku swej pracy
A pokazuje swoją pracę	**robię to:.... znalazłem to:....**	**B pokazuje swoją pracę**
A staje się świadomy wyniku pracy B		B staje się świadomy wyniku pracy A
A prosi o wytłumaczenie swej pracy	*dlaczego tak to robisz? jak to znalazłeś?*	*B prosi o wytłumaczenie swej pracy*
A myśli o swej pracy		B myśli o swej pracy
A tłumaczy swoją pracę	**robię to, ponieważ...**	**B tłumaczy swoją pracę**
A myśli o pracy B		B myśli o pracy A
A krytykuje pracę B	*ale to jest źle, ponieważ....*	*B krytykuje pracę A*
A myśli o pracy B krytycznie		B myśli o pracy A krytycznie

A ocenia swoją pracę	**myślałem, że jest dobrze, ponieważ...**	**B ocenia swoją pracę**
A myśli o swojej ocenie		B myśli o swojej ocenie
A krytykuje swoją pracę		B krytykuje swoją pracę
A rekonstruuje swoją pracę	**lepiej będzie, gdy zrobię to tak:...**	**B rekonstruuje swoją pracę**

Uwaga:

tłusty druk to czynności kluczowe,

kursywa to czynności sterujące

Według tego modelu, samodzielnie sterowany proces prowadzący do podnoszenia poziomu myślenia przebiega w czterech etapach:

- pokazanie swojej pracy
- wytłumaczenie swojej pracy
- ocena swojej pracy
- rekonstrukcja swojej pracy

Być może taka analiza to propozycja do naśladowania, a przynajmniej sugestia, dla osób prowadzących badania, kształcących nauczycieli, studentów, czynnych nauczycieli...?

Brigit Brandt z Niemiec omówiła badania związane z formami uczestnictwa uczniów klas początkowych w sytuacjach interakcyjnych. Autorka podkreśliła, że proces poznawczy jest wyznaczony przez klasową interakcję, którą na lekcjach tworzą wspólnie nauczyciel i uczniowie. Muszą oni być tymi, którzy umieją słuchać, ale też umieją argumentować, negocjować, dzielić się wrażeniami. Brandt zwróciła jednak uwagę na to, że oddziaływania interakcyjne, które mogą inicjować i wspierać proces indywidualnego uczenia się, mogą też ten proces hamować. Oto zaprezentowany przez nią fragment lekcji.

Nauczyciel prosi Jasmina, żeby ten pokazał, jak oblicza, ile to jest 7 odjąć 0. Jasmin liczy na koralach nawleczonych na nitkę (10 korali czarnych, 10 białych).

JASMIN: Jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem (wskazuje kolejno korale), odjąć zero (przytrzymuje sznurek między siódmym a ósmym koralikiem), jest równe (przelicza koraliki od ósmego do dwudziestego) 13. Siedem odjąć zero jest trzynaście.
NAUCZYCIEL: Popatrzcie, jak Jasmin policzył (Jasmin siada na swoim miejscu, nauczyciel powtarza to, co chłopiec zrobił). Powiedzcie, dlaczego to jest niedobrze, jeżeli jest niedobrze, albo dlaczego jest dobrze, jeżeli tak uważacie.
VIOLA: Hmm, hmm, trzeba wziąć z, z siedmiu, wtedy zostanie siedem.
NAUCZYCIEL: Tak, ale od której liczby Jasmin zabrał siedem, żeby dostać trzynaście?
VIOLA (siadając na miejsce): Ja ci to pokażę (odlicza siedem korali) i jeszcze trzynaście... (dosuwa do tych siedmiu trzynaście, reszta uczniów przerywa jej, sygnalizując brak zrozumienia).
MONIKA: On zabrał od siedmiu.
NAUCZYCIEL: On zabrał siedem, ale od której liczby?
RICHARD (wykrzykuje): Ah!
NAUCZYCIEL: Tylko jeden z was patrzy uważnie. Richard!
RICHARD: Siedem od dwudziestu.
(Richard wraz z nauczycielem ilustrują odejmowanie $20-7$ na sznurku korali).

Podobne epizody obserwujemy na wielu lekcjach. Mamy tu niewątpliwie sytuację, w której tworzy się pewna sytuacja interakcyjna. Można się jednak zastanawiać, czy o takie wzajemne oddziaływanie na lekcji chodzi. Czy taka dyskusja uczy uczniów formułowania własnych spostrzeżeń, czy uczy argumentacji, negocjacji? Czego uczy? Czy nie jest tu promowany uczeń, który potrafi szybko domyślić się, co nauczyciel miał na myśli? Zasadne wydają się więc pytania autorki: Jaki rodzaj interakcji na lekcji matematyki jest pożądany? Jak wywołać takie interakcje?

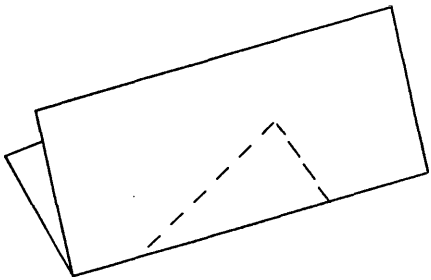
3.5 Sytuacje problemowe

Prowadzący warsztaty starali się zazwyczaj tak organizować swoje zajęcia, by wywołać interakcje wśród uczestników. W tym celu przygotowywali różnorodne materiały i ciekawe zadania. Opiszemy te, które nam spodobały się najbardziej.

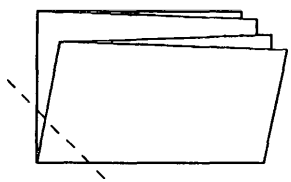
WYCINANKI

Na zajęciach Heleny Isabel i Paula Abrantesa z Portugalii dysponowaliśmy papierem i nożyczkami, z pomocą których można było badać, jakie figury da się wyciąć ze złożonej kartki papieru. Rozważane były takie przypadki:

• kartka złożona na pół i dwa cięcia



• kartka kilkakrotnie złożona i jedno cięcie

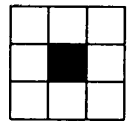


Niektórzy uczestnicy wykonywali wiele cięć i prób, inni precyzowali pytania i odpowiadali na nie bez uprzedniego wycinania, czasem tylko sprawdzając swoje przewidywania na konkrecie. Omawiano też, jakie własności muszą mieć wycięte figury, a jakich na pewno nie da się w opisany sposób otrzymać i dlaczego. W dyskusji po zajęciach zastanawiano się nad znaczeniem tego typu zajęć dla uczniów. Widać było, że są ciekawe i potrafią absorbować. Trudno jednak było dać jednoznaczną odpowiedź na pytania: Jak dużo takich ćwiczeń powinno być na lekcjach matematyki? Jak powinny być organizowane, by wzbogacały wiedzę ucznia? Co zrobić, by nauczyciel był świadomy, jaki jest cel takich zadań: kształcenie umiejętności badawczych, a może coś innego; co?

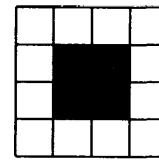
Opiszemy te, które nam spodobały się najbardziej.

KWADRATOWE BASENY

Tat Ming projektuje kwadratowe baseny. Każdy basen ma część środkową, która też jest kwadratowa i wypełniona wodą. Wokół każdego basenu jest brzeg ułożony z białych kwadratów. Oto dwa pierwsze baseny zaprojektowane przez Tat Minga.



BASEN 1



BASEN 2

Część I

1. Skonstruuj trzy pierwsze baseny, używając niebieskich kwadratów jako wody i białych jako brzegu.

2. Oddziel białe i niebieskie kwadraty (osobno dla każdego basenu). Policz, ile jest kwadratów każdego koloru, i zapisz wyniki w tabeli 1. Opisz użytą metodę liczenia.

Numer basenu	Liczba białych kwadratów	Liczba niebieskich kwadratów	Ogólna liczba białych i niebieskich kwadratów

Tabela 1

3. Ile kwadratów będzie miał czwarty basen? A piąty?
   Zapisz to w tabeli 1.

4. Jakie regularności można zaobserwować?

5. Jeżeli będziemy mieli 32 białe kwadraty na brzegu, ile będzie niebieskich?

Część II

1. Jaki ułamek powierzchni każdego z pierwszych trzech basenów jest niebieski (woda), a jaki ułamek powierzchni jest biały (brzeg)? Zapisz te liczby w tabeli 2.

Numer basenu	Ogólna liczba białych i niebieskich	Ułamek niebieskich (woda)	Ułamek białych (brzeg)

Tabela 2

2. Jakie ułamki pojawią się w dwóch następnych wierszach tabeli? Skąd wiesz, że to jest dobra odpowiedź?

3. Jakie regularności można zaobserwować?

Część III

1. Uzupełnij tabelę 1 wpisując liczbę niebieskich (woda) i białych (brzeg) kwadratów dla szóstego basenu.

2. Jakie zmienne występują w tym problemie? Jakie są związki między tymi zmiennymi? Jak opisać słowami te różne związki?

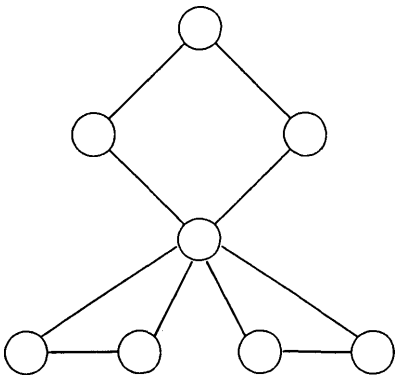
3. Narysuj wykres przedstawiający związek między numerem basenu i liczbą niebieskich kwadratów użytych do jego konstrukcji.

4. Jak zmienia się liczba białych kwadratów? A niebieskich? Posługując się wykresem objaśnij wnioski.

5. Odgadnij liczbę niebieskich kwadratów dla 10., 25. i 100. basenu.

LICZBY I KÓŁKA

1. Narysuj wzór składający się z kółek umieszczonych tak, jak na tym rysunku — w wierzchołkach czworokąta na górze, a w wierzchołkach trójkątów na dole.



2. Zaczynając od góry, przesuwaj się w dół, wypełniając kółka kolejnymi liczbami naturalnymi. Na przykład, jeżeli zaczniesz od liczby 2, następnymi liczbami będą 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

3. Dodaj cztery pierwsze liczby z czworokąta i sumę wpisz wewnątrz czworokąta. Potem dodaj każde trzy liczby z trójkątów i sumy wpisz wewnątrz tych trójkątów. Na koniec dodaj wszystkie trzy sumy. Otrzymana liczba to **suma ogólna**.

4. Powtórz wszystko, zaczynając od innej liczby. Staraj się znaleźć związek zachodzący pomiędzy liczbą z centralnego kółka i odpowiednią sumą ogólną.

5. Czy związek, który odkryłeś, zachodzi także dla liczb ujemnych? Jeżeli nie, znajdź taki, który obejmowałby także liczby ujemne.
Postaraj się znaleźć taką liczbę całkowitą, która nie spełnia twojego związku. Jaki wyciągasz wniosek?

6. Do tej pory wpisywałeś w kółka albo kolejne liczby naturalne, albo liczby całkowite. Użyj teraz innych liczb, na przykład ułamków. Czy w dalszym ciągu funkcjonuje zależność, którą odkryłeś w poprzednim punkcie? Jeżeli nie, postaraj się znaleźć nowy związek, obowiązujący dla liczb, których teraz użyłeś. Jaki wyciągasz wniosek?

Nad tymi problemami pracowali uczestnicy warsztatów na temat „Regularności, myślenie algebraiczne i interakcje na lekcji", prowadzonych przez Anę Marię Boavida i Fátimę Guimarães z Portugalii. Na koniec sformułowały one „Kilka kwestii do pomyślenia":

1. Gdzie tu jest algebra?

2. Jak można rozwijać myślenie algebraiczne na poziomie elementarnym? W szczególności

   - co to jest myślenie algebraiczne?
   - jaka jest tu rola nauczyciela?
   - jaka jest charakterystyka dobrych zadań?
   - czym jest natura dyskursu matematycznego?
   - jak przebiegają interakcje na lekcji?

Dwa ostatnie problemy nadają się bardzo dobrze do analizy tych kwestii. Uczniowie mają tu okazję do odkrywania i konstruowania wzorów algebraicznych, docierania do sensu tych wzorów, odkrywania rekurencji, odkrywania tożsamości, wreszcie opisywania, przedstawiania wykresem i porównywania zależności funkcyjnych.

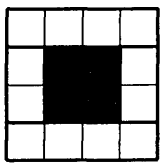
W „kwadratowych basenach", zależnie od sposobu liczenia kwadratów, można otrzymać na ułamek niebieskich wzór $\frac{n^2}{n^2+4n+4}$ lub $\frac{n^2}{(n+2)^2}$, a drugi mówi więcej niż pierwszy. A później — czym innym jest napisać następne ułamki $\frac{16}{36}$ i $\frac{20}{36}$ przez formalne przedłużenie zaobserwowanej regularności, a czym innym

powiedzieć, dlaczego są to dobre liczby. Wszystko to mogłoby wyzwolić żywą dyskusję uczniów (podobną do tej, jaka toczyła się w czasie warsztatów). Co robić, żeby uczniowie zaangażowali się w nią, zamiast czekać na gotowe odpowiedzi, które zapiszą w zeszycie? Nikt na to nie umiał odpowiedzieć.

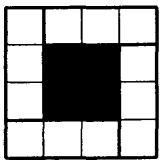
Już po powrocie z Setúbalu dwa ostatnie zadania daliśmy polskim studentom. Licząc białe kwadraty w różny sposób otrzymali różne wzory ogólne:

$(n+2)^2 - n^2$ (różnica pól całego basenu i wody)

$2(n+2) + 2n$ (obudowa „prostokątna")



$4(n+1)$ (obudowa „kwadratowa")



Czy wszystkie są dobre? W jakim sensie są one równe?

„Liczby i kółka" można wykorzystać do wprowadzenia uczniów w szerokie rozumienie zapisu algebraicznego. Kilka pierwszych wyników dla sumy ogólnej to 64, 74, 94... Czyli liczba postaci $10n+4$. Ale co taki zapis znaczy dla dziecka? Najczęściej ma on sens liczby dwucyfrowej, gdzie cyfra dziesiątek równa się n, czyli tyle, ile liczba w kółku centralnym, zaś cyfra jedności jest równa 4. Ale odszukanie sumy ogólnej dla liczby centralnej 1572 daje wielkość 15.724. W tym przypadku n w $10n+4$ już nie jest cyfrą; wzór ten jest teraz programem rachunku: mnożymy liczbę centralną przez 10 i do wyniku dodajemy 4. Jak jednak taka sytuacja jest rozumiana przez uczniów, gdy obliczają sumę ogólną dla liczb ujemnych? Nawet studenci przeżyli tu moment zaskoczenia. Na pierwszy rzut oka wzór nie pasuje, gdyż dla liczby centralnej -7 odpowiednia suma ogólna to -66; dla -9 — -86. Liczba ta nie ma przecież czwórki na końcu... Prowokuje to do poszukiwania nowego wzoru ogólnego. Próby studentów kończyły się zwykle propozycją $10(n+1)-6$. Jako program rachunku jest to zupełnie coś innego niż $10n+4$. Jednak już w trakcie budowania tego zapisu, rozważając propozycje:

$$10(n-1)+6$$

$$10(n+1)-6$$

$$10(n-1)-6$$

studenci dochodzili do wniosku, że $10n+4$ jest również dobrym zapisem sumy ogólnej dla liczb ujemnych. U uczniów może to sprowokować pytanie: Czy $10n+4$ to to samo co $10(n+1)-6$; jeżeli tak, to dla jakich n: tylko naturalnych, czy może też całkowitych? A w ogóle: na ile wzór na sumę ogólną jest **ogólny** i dlaczego jest **prawdziwy**, jeżeli jest prawdziwy?

Jak więc widać, podobne problemy mogą w klasie sprowokować dyskusję. Skoro więc dostrzegamy w nich algebrę, to należałoby się zgodzić z opinią, że algebra w szkole nie powinna sprowadzać się tylko do działań na abstrakcyjnych symbolach. Jest to bowiem również sposób myślenia, metoda na zobaczenie i wyrażenie relacji, droga prowadząca w kierunku uogólnienia prawidłowości.

3.6 Jak uzyskać motywację?

Jednym ze znanych sposobów inicjowania współdziałania uczniów podczas rozwiązywania problemów matematycznych jest organizowanie pracy w grupach. Wiadomo, że uczniowie w różny sposób angażują się we wspólną pracę. Jakie są tego przyczyny? Ciekawy przypadek zaobserwowany w szkole przedstawiły Leonor Moreira i Susana Carreira z Portugalii.

W pewnej klasie (16-latków) bardzo częstą formą pracy na lekcji matematyki była praca w grupach. Jeden z uczniów nigdy nie uczestniczył w dyskusjach swoich kolegów, zdawał się być niezbyt zainteresowany tym, co się dzieje, trochę jakby nieobecny. Koledzy nie zwracali na niego uwagi, zresztą w życiu klasy chłopiec też w zasadzie nie uczestniczył. Nauczyciel uważał go za przeciętnego ucznia, raczej mało zdolnego. Tak było do momentu, gdy odważył się, po nieudanej próbie rozwiązania jakiegoś trudnego zadania przez kolegów, pokazać im swoje bardzo oryginalne rozwiązanie. To zwróciło na niego uwagę wszystkich. Jakby dopiero teraz go zauważyli, nawet przypomnieli sobie jego imię. Ten jeden przypadek wystarczył, by z klasowego figuranta „stał się" Zenonem. Odtąd koledzy pytali go o zdanie, chcieli, by dzielił się z nimi swoimi pomysłami. Jego sytuacja towarzyska w klasie też uległa wyraźnej poprawie.

Autorki zapytały na koniec: Czego uczy nas przypadek Zenona? Ilu w naszych klasach jest takich Zenonów? Jak ich odkryć? Jeden z uczestników w dyskusji po referacie opowiedział o przypadku w swojej klasie. U niego też był taki chłopiec, który ani w lekcji, ani w pracy w grupach nie brał udziału. Sprawdziany pisał dobrze. Dlaczego był taki nieobecny? Po pewnym czasie okazało się, że uczeń ten zajmuje się matematyką w znacznym stopniu

zaawansowaną, a problemy rozważane na lekcji nudziły go. Jak to więc jest z takimi Zenonami w naszych klasach?

Często w czasie konferencji powtarzało się pytanie: Jak spowodować zainteresowanie uczniów zadaniami matematycznymi tak, by rozwiązywali je z przyjemnością, by chcieli o nich dyskutować? Przyczynkiem do kuluarowych dyskusji na ten temat był wykład specjalny „Matematyka i magia" portugalskiego nauczyciela José Paulo Vienna. Właściwie nie był to wykład, a porywająca prezentacja sztuk na wpół magicznych. Vienna sugerował słuchaczom, że jest w stanie wpływać na ich sposób myślenia, na ich decyzje. Prawie każdy z obecnych miał okazję brać udział w zabawie, a prezenter, w miarę upływu czasu, zyskiwał uznanie za swoją erudycję, dowcip i umiejętność „wpływania" na wybór koloru karty, figury geometrycznej czy liczby. Pokaz zakończył się efektownym żartem. Wykładowca zapowiedział, że z drugiej strony odwróconej karty do gry każdy z obecnych znajdzie rysunek tej, którą wybrał. Uczestnicy zastanawiali się, jak to możliwe. Karta była jedna, a z pewnością nie wszyscy wybrali tę samą. Okazało się, że była to specjalna karta, na której widniały w pomniejszeniu rysunki 52 kart z talii. Każdy więc znalazł tam swoją.

Jedna z prezentowanych sztuczek sprowokowała uczestników do dyskusji już po zakończeniu wykładu. Na tablicy pojawiła się tabela liczb:

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Jeden z uczestników wybierał liczby, a Vienna zapewniał, iż spowoduje wybór takich, które po zsumowaniu dadzą liczbę zapisaną przez niego wcześniej na kartce. Prowadzący zapisywał wybrane liczby, za każdym razem wykreślając w tabeli te, które były w tej samej kolumnie i tym samym wierszu, co wybrana. Kolejno wybierane liczby to: 13, 0, 14, 22, 8. Suma tych liczb to 57, taka, jaka była zapisana na kartce.

Już po wykładzie zabawa została przez uczestników przetworzona na zadania: Jak skonstruować taką tabelę liczbową, w której suma liczb wybranych po jednej z każdej kolumny i każdego rzędu będzie stała? Czy ta tabela liczb musi mieć wymiar 5×5, czy musi być kwadratem? Czy można skonstruować taką tabelę przyjmując za sumę z góry zadaną liczbę? Zaczęły też powstawać różne tabele:

7	4			o sumie 15
1	8			
3	0	2		
5	2	4		o sumie 8
4	1	3		
3	0	1	5	
5	2	1	7	o sumie 32
9	6	1	1	
8	5	1	1	

W końcu rozszyfrowano zabawę:

x	x+a	x+b	x+c	x+d	
y	y+a	y+b	y+c	y+d	
z	z+a	z+b	z+c	z+d	o sumie $a+b+c+d+x+y+z+t+k$
t	t+a	t+b	t+c	t+d	
k	k+a	k+b	k+c	k+d	

Zainteresowanie zadaniem skłoniło uczestników konferencji do refleksji: Dlaczego zajęli się tym zadaniem? Czy było ono szczególnie zajmujące, czy też sprawił to sposób podania zadania; a może osobowość i aktorstwo prezentera?

Sytuacja przypomniała nam zajęcia prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej w warszawskim przedszkolu. Tu zaciekawienie pięcio– i sześciolatków rozkładem liczby 10 na składniki wywołane było przez zabawę, w której prowadząca „nie wiadomo skąd wiedziała", ile kulek dziecko schowało ze swoich 10, skoro nie widziała tych schowanych, tylko te, co zostały. Ile radości przeżywały dzieci, gdy zaczynały rozszyfrowywać, „jak to pani robi", i gdy starały się o tym opowiedzieć innym.

Można się więc zastanawiać, czy nie jest to jakiś sposób na rozbudzenie zainteresowania zadaniami, na wywołanie pożądanych interakcji. Które matematyczne problemy da się w taki sposób ująć?