dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 17(1995)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Marianna Ciosek
Kraków

O roli przykładów w badaniu matematycznym

Wstęp

W badaniu matematycznym, z jakim niewątpliwie mamy do czynienia w trakcie rozwiązywania zadania-problemu czy inaczej zadania otwartego (Krygowska, 1977b; Ciosek, 1988), przykład bywa wykorzystywany w różnych fazach procesu rozwiązywania zadania, i to do różnych celów. Wśród tych ostatnich można wymienić:

1. zrozumienie problemu,
2. odkrycie ogólnego rozwiązania problemu,
3. weryfikację hipotezy odnoszącej się do rozwiązania ogólnego,
4. sprawdzenie poprawności rachunku algebraicznego.

Rozważenie przykładu w celu (lepszego) zrozumienia zadania ilustruje poniższa sytuacja.

Anna — studentka piątego roku matematyki — rozwiązuje następujące zadanie:

> **A jest zbiorem liczb trzycyfrowych zapisanych ustalonymi cyframi a, b, c, różnymi między sobą i różnymi od zera. Wykazać, że w zbiorze A istnieją dwie liczby (różne), których różnica jest podzielna przez 4.**

Po zapisaniu liczb zbioru A za pomocą a, b, c[1] (patrz arkusz pracy) studentka rozważa przykład. Tworzy zbiór liczb trzycyfrowych zapisanych cyframi 1, 2,

[1] Studentka (a także dwie inne osoby, których rozumowania przedstawione będą w dalszej części artykułu jako rozumowania 4, 5) zapisała liczbę trzycyfrową o cyfrach a, b, c niezgodnie z konwencją przyjętą w arytmetyce; nie spowodowało to jednak błędów.

3 i wskazuje w nim dwie liczby spełniające zadany warunek: 312 – 132 = 180. Następnie zadaje sobie pytanie: *Czy w zbiorze A istnieją dokładnie dwie takie liczby, czy też może być kilka takich par?* Zapowiada, że sprawdzi to, o co zapytała, na przykładzie. Tworzy wszystkie takie różnice liczb należące do wybranego zbioru, że odjemną jest dowolna liczba tego zbioru, a odjemnikami są liczby po niej następujące. Zauważywszy, że są dwa wyniki „pozytywne", Anna stwierdza: *Na tym przykładzie widać, że takich par może być więcej. Należy udowodnić, że istnieje przynajmniej jedna taka para.* Dalej studentka nie odwołuje się już do przykładu — rozwiązuje zadanie w tzw. przypadku ogólnym, prowadząc rachunek algebraiczny.

Przykład był tu wykorzystany tylko dla zilustrowania i zrozumienia zadania: rozwiazująca je studentka odczuwała potrzebę uściślenia jego treści.

Użycie przykładu w celu odkrycia ogólnego rozwiązania zadania jest przedmiotem niniejszego opracowania. Jego głównym celem jest wyróżnienie, scharakteryzowanie i zilustrowanie przykładami rozumowań (osób rozwiązujących zadania) sposobów takiego wykorzystania przykładu. Wybrane rozumowania będą także ilustrować użycie przykładu do weryfikacji hipotezy oraz do sprawdzenia rachunku algebraicznego.

Wykorzystanie przykładu do wspomnianego powyżej celu (2) wiąże się ze strategią rozwiązywania zadań jaką jest „rozważanie przypadków szczególnych" (*examining special cases*), którą krótko będziemy nazywać strategią S. A. Schoenfeld ujmuje tę strategię w formę polyowskiej dyrektywy heurystycznej: „Dla lepszego zrozumienia nieznanego ci problemu, spróbuj go zegzemplifikować przez rozważenie różnych przypadków szczególnych. Może ci to zasugerować kierunek poszukiwania lub wskazać prawdopodobne rozwiązanie". (Schoenfeld, 1985, s. 76)

Wyniki moich badań potwierdzają opinię Schoenfelda, że strategia heurystyczna nie jest — jak można by sądzić — konsekwentnym podejściem, wykorzystywanym w ten sam sposób do różnych zadań. Jest raczej tak, że ogólna strategia (heurystyka) to pewna (luźna) kompozycja związanych ze sobą podstrategii, każda ze swoją własną specyfiką. Autor książki *Mathematical problem solving* (Schoenfeld, 1985) wyróżnia 5 związanych ze sobą strategii — podstrategii strategii S.

Oto one:

Strategia S_1 — Jeśli w treści zadania występuje parametr n, to użyteczne mogłoby być rozważenie szczególnych przypadków dla $n = 1, 2, 3, 4$ (lub więcej). To może zasugerować odpowiedź, indukcyjnie dającą się weryfikować.

Strategia S_2 — Wgląd w problem, w którym chodzi o pierwiastki skomplikowanego wyrażenia algebraicznego, może ułatwić wybranie takich szczególnych przypadków tych wyrażeń, których pierwiastki dają się obliczyć w prosty sposób (np. wielomiany o współczynnikach całkowitych, ustalonego stopnia, o całkowitych pierwiastkach).

Strategia S_3 — W rachunku dotyczącym iteracji lub rekurencji, zastąpienie wartości danych w zadaniu przez liczbę 0 i (lub) 1 (o ile nie powoduje to utraty ogólności) często umożliwia zaobserwowanie wzoru. Takie szczególne przypadki pozwalają na dostrzeżenie regularności, które są czasem zaciemnione przez nagromadzenie symboli.

Strategia S_4 — W zadaniu dotyczącym figur geometrycznych można by zacząć badanie od szczególnych przypadków, takich, które minimalizują stopień trudności, np. rozważyć wielokąt foremny, gdy w zadaniu dany jest dowolny wielokąt lub badać trójkąt równoboczny (równoramienny lub prostokątny) gdy dany jest dowolny trójkąt.

Strategia S_{5a} — Rozważania geometryczne można prowadzić często dla wybranych wartości szczególnych bez utraty ogólności (np. ustalenie promienia dowolnego okręgu jako 1). Takie szczególne przypadki powodują znaczne ułatwienie rachunku.

Strategia S_{5b} — Obliczanie (lub szacowanie) wartości ekstremalnych często bywa ułatwione przez rozpatrzenie — jako przypadków szczególnych — obiektów, które są symetryczne ze względu na pewną własność.

Skuteczność powyższych strategii ilustruje autor na wybranych zadaniach. Opis tych strategii można zinterpretować jako specyfikacje terminu „szczególny przypadek". Traktowane oddzielnie, wskazują te strategie na zależność — w pewnym sensie — od kontekstu zadania; rozpatrywane równocześnie — ukazują szeroki zasięg stosowalności strategii S.

Analiza materiału zebranego w wyniku moich badań pokazała, że stosowanie strategii „rozważ przypadki szczególne" jest jedną z cech wspólnych procesu rozwiązywania otwartego zadania matematycznego przez osoby na różnym poziomie doświadczenia matematycznego (od ucznia kończącego szkołę podstawową zaczynając, poprzez ucznia szkoły średniej, studenta matematyki i na doświadczonym matematyku kończąc). W szczególności, w odniesieniu do wymienionej powyżej strategii S_1 (rozważ przypadki szczególne dla $n = 1,2,3,4$ (lub więcej)), możliwe są sytuacje, w których rozważa się nie kilka, a jeden tylko przykład spełniający warunki zadania. I zdarza się, że

choć różne osoby zaczynają od rozważenia tego samego przykładu, to w bardzo różny sposób wykorzystują go do rozwiązania zadania w tzw. przypadku ogólnym. W odniesieniu do sytuacji, w których „szczególny przypadek" znaczy przykład, wyróżniałam następujące podstrategie strategii S_1:

1. **odgadywanie własności generycznej przykładu,**

2. **poszukiwanie transformacji zachowującej własność przykładu,**

3. **dedukcyjnie ukierunkowane badanie przykładu.**

Każdy z tych sposobów zobaczymy w kilku rozumowaniach osób rozwiązujących zadania. Pochodzą one z obserwacji klinicznych rozwiązywania otwartego zadania matematycznego przez osoby znajdujące się na różnym poziomie wiedzy i doświadczenia matematycznego (Ciosek, 1988). Prezentacja każdego rozumowania będzie obejmować: arkusz pracy autora rozwiązania (dołączony w aneksie), opis jego postępowania w trakcie rozwiązywania zadania i komentarz. Opisy rozumowań będą na tyle dokładne, na ile pozwoliła stosowana metoda badań (obserwcja kliniczna). Często będą one szczegółowe. (Czytelnikowi mogą się wydawać nawet zbyt szczegółowe). Jest to celowe, bowiem materiał ten służyć będzie nie tylko ilustracji stosowanych strategii, ale będzie stanowił również podstawę do analizy rozumowań z innego punktu widzenia — np. typów rozumowania (wnioskowanie empiryczne, formalne), poziomu rozumienia metody matematycznej czy rodzajów uogólnienia twierdzenia (typu indukcyjnego, przez uogólnienie rozumowania, przez unifikację).

Odgadywanie własności generycznej przykładu

W artykule (Arpaia, 1972) znajdujemy opis oryginalnego rozumowania prowadzącego do odkrycia nieskończonego zbioru trójek liczb naturalnych spełniających równanie $x^2 + y^2 = z^2$ (zob. Sierpiński, 1969). P. J. Arpaia ujawnia kulisy własnego odkrycia uzyskanego przy użyciu skromnych środków matematycznych, a nie zaawansowanego aparatu arytmetyki teoretycznej. Ta elementarność środków matematycznych czyni opisaną drogę na tyle prostą, że w pewnych fragmentach może być ona zrozumiała dla ucznia VII lub VIII klasy szkoły podstawowej, a w całości dla ucznia szkoły średniej, mającego już pewne doświadczenie w stosowaniu twierdzenia o indukcji matematycznej.

Poniżej przedstawię fragment prezentowanego w artykule rozumowania i

omówię jego związek z zapowiedzianą strategią.

Rozumowanie 1 (osoba P – matematyk)

Startujemy od trójki (3, 4, 5) jako znanej nam trójki liczb naturalnych spełniającej równanie

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (*)$$

Czy istnieją inne trójki liczb naturalnych spełniające to równanie?
Przyjrzyjmy się dokładnie trójce liczb 3, 4, 5.

Co jest interesujące w tym układzie liczb?

Są to trzy kolejne liczby naturalne. Sprawdźmy, czy jakaś inna trójka liczb o tej własności spełnia równanie (*). Weźmy np. (9, 10, 11). Ta trójka nie spełnia rozważanego równania. Czy istnieją inne trójki kolejnych liczb naturalnych, spełniające równanie Pitagorasa? Rachunek algebraiczny pokazuje, że nie ma. Powróćmy do układu: 3, 4, 5. **Co jeszcze interesującego można tu dostrzec?**

Liczby te spełniają następującą własność: Kwadrat pierwszej z nich jest sumą dwu pozostałych, którymi są kolejne liczby naturalne.

Czy jest prawdą, że jeśli wyjdziemy od liczby naturalnej a, utworzymy jej kwadrat, i następnie liczbę a^2 przedstawimy jako sumę dwu kolejnych liczb naturalnych b, c $(b < c)$, to trójka (a, b, c) spełnia równanie (*)?

Oczywiście, to może być prawdą tylko wtedy, gdy a jest liczbą nieparzystą. Sprawdźmy nasze przypuszczenie na przykładach.

Weźmy liczbę 5; jej kwadrat można przedstawić jako sumę $12 + 13$. Czy $(5, 12, 13)$ spełnia równanie (*)? Tak!

Rozważmy inny przykład. Startując od 7 otrzymujemy $7^2 = 49 = 24 + 25$. Również jest prawdą, że $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Podobnie otrzymujemy trójkę $(9, 40, 41)$; i ona spełnia równanie (*).

Na koniec P przeprowadza rachunek algebraiczny, który pokazuje, że hipoteza sformułowana przez niego jako druga jest twierdzeniem.

Komentarz do rozumowania 1

1. Opisana powyżej sytuacja jest następująca:
Osoba P zna przykład obiektu spełniającego pewien warunek. Chce znaleźć, jeśli nie zbiór Z wszystkich obiektów spełniających ten warunek, to przynajmniej pewien właściwy podzbiór zbioru Z, tak liczny, jak to dla niej możliwe. Specyfika zadania polega na tym, że nie można w łatwy sposób (np.

przez bezpośrednie podstawienie za zmienne) wyznaczyć wielu obiektów spełniających zadany warunek. (Oczywiście, pomijamy trywialne wielokrotności znanej trójki.) W takiej sytuacji P zaczyna od postawienia sobie pytania: jaką specyficzną własność ma znany mi przykład? — poza tym, że spełnia warunek zadania. W wyniku obserwacji tego przykładu formułuje pewną własność W, spełnioną przez wyjściowy obiekt, w nadziei, że prawdziwa może okazać się implikacja: jeśli obiekt rozważanego typu spełnia własność W, to spełnia on żądany w zadaniu warunek. P traktuje tę implikację jako hipotezę, którą następnie weryfikuje. Po uzyskaniu negatywnego wyniku tej weryfikacji, P powraca do danego obiektu, obserwuje go, stara się dostrzec jakąś inną jego specyficzną własność, formułuje na jej tle następną hipotezę i znów ją weryfikuje.

2. W powyżej opisanej sytuacji matematyk dostrzegł jako pierwszą następującą własność pitagorejskiej trójki (3,4,5):

(1) trójka kolejnych liczb naturalnych.

Warto zatrzymać się na chwilę nad sposobem, w jaki P weryfikował hipotezę odnoszącą się do tej własności: Trójka spełniająca własność (1) jest trójką pitagorejską. Choć przykład pokazał, że ta hipoteza nie jest twierdzeniem, matematyk nie odrzucił jej całkowicie. Zadał sobie kolejne pytanie: Czy istnieją jakieś inne trójki kolejnych liczb naturalnych spełniające równanie Pitagorasa? Rachunek algebraiczny rozstrzygnął tę kwestię ostatecznie: jedyną trójką o tej własności jest (3,4,5). To postępowanie można nazwać stosowaniem **zasady optymalnej ostrożności przy weryfikacji hipotezy**. Chodzi w niej o to, by nie odrzucać od razu hipotezy, której nie potwierdził przykład; mogłoby się bowiem okazać, że w ten sposób odrzucimy któreś z rozwiązań.

Kolejną własnością wyjściowej trójki dostrzeżoną przez P była:

(2) trójka takich liczb naturalnych, że pierwsza z nich jest nieparzysta oraz jej kwadrat jest sumą dwu pozostałych, którymi są kolejne liczby.

Pierwsza faza weryfikacji tej hipotezy sprowadzała się także do zbadania, czy dowolnie wybrana trójka (inna od tej już znanej) spełniająca własność (2), spełnia równanie (*). Tę fazę można nazwać **wstępną, częściową (empiryczną) weryfikacją hipotezy**. Jej pozytywny wynik spowodował zapewne wzrost wiary osoby P w to, że sformułowana hipoteza jest słuszna. Matematyk przystąpił teraz do dowodu prawdziwości implikacji postaci: Jeśli trójka spełnia własność (2), to spełnia równanie (*). Przeprowadzenie tego dowodu można nazwać **zupełną weryfikacją hipotezy**.

Zwróćmy uwagę na to, że obydwie własności trójki (3,4,5), jakie dostrzegł P, są tego rodzaju, iż łatwo można podać przykłady trójek spełniających je.

(Na tym etapie P odkrył co prawda nieskończony zbiór tzw. rozwiązań właściwych równania pitagorejskiego (Sierpiński, 1969), ale — oczywiście — nie wszystkie. W dalszych etapach prowadzonego przez siebie badania rozszerzał kolejno zbiór rozwiązań, ale w sposób, który w tej pracy nie będzie analizowany.)

Dla porównania przedstawię teraz, na jakiej drodze poszukiwali trójek pitagorejskich dwaj uczniowie, którym nie znane było wcześniej rozwiązanie tego zagadnienia.

Zadanie, które dano im do rozwiązania, brzmiało:

Znajdź możliwie najwięcej trójek liczb naturalnych spełniających równanie:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (*)$$

(Zadanie o trójkach pitagorejskich).

Rozumowanie 2 (Kuba — uczeń ósmej klasy szkoły podstawowej)

Zaraz po zapisaniu równania $x^2 + y^2 = z^2$ chłopiec mówi (tu rysuje trójkąt prostokątny, oznaczając jego boki odpowiednio przez x, y, z): *Przyszło mi na myśl twierdzenie Pitagorasa, ale nie wiem, co z tym zrobić.* Następnie stwierdza: *Jedną trójkę to mam,* po czym zapisuje $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dalej próbuje przekształcać wyjściowe równanie, przenosząc wyraz z jednej strony równania na drugą. Przekreśla jednak te zapisy mówiąc: *Próbowałem to jakoś ogólnie, wzorem, ale nic mi nie wyszło.*

Po chwili namysłu Kuba mówi:

— *Przychodzi mi do głowy, że to mogą być takie trzy liczby, że dwie są nieparzyste, a jedna parzysta*

Zaraz potem dodaje:

— *Suma 4 i 5 jest podzielna przez 3;*

— *... Pomyślałem, że to są kolejne liczby.*

To ostatnie stwierdzenie uczeń rozwija, zapisując równanie

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2,$$

po czym doprowadza je do postaci $x^2 - 2x = 3$. Próby rozwiązania tego ostatniego równania przez kolejne przekształcenia (np. $x^2 = 3 + 2x$, $x = \frac{x^2-3}{2}$) kończą się stwierdzeniem Kuby, że nie umie sobie z nim poradzić, i że gdyby wiedział, jak rozwiązuje się takie równanie, pracowałby dalej. Prowadząca badania

pomaga chłopcu w przekształceniu tego równania do postaci $(x-1)^2-4=0$. Z rozwiązaniem tego z kolei równania chłopiec nie ma już trudności. Po otrzymaniu układu warunków: $x=3$ lub $x=-1$, konstatuje, że są tylko dwie trójki kolejnych liczb naturalnych spełniających równanie Pitagorasa. Są nimi:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1. \end{cases}$$

Dodaje, że trójka liczb zapisanych jako druga nie jest trójką liczb naturalnych, a tę pierwszą znał już wcześniej.
Formułuje wniosek: *Nie ma co szukać wśród liczb kolejnych.*

W ciągu dalszym Kuba przypomina zauważoną wcześniej inną własność trójki liczb $(3,4,5)$ — to, że suma $4+5$ jest podzielna przez 3. Mówi następnie: *Napiszę to ogólnie*, po czym zapisuje kolejno warunki:

$$\frac{y+z}{x}=x,$$

$$y+z=x^2.$$

Teraz uczeń przechodzi do wskazania innego przykładu spełniającego powyższy warunek. Wybiera jako x liczbę 4, jej kwadrat przedstawia jako sumę liczb 2 i 14. Próbując sprawdzić, czy ta równość prowadzi do dobrego przykładu, Kuba pomaga sobie pytaniem: *Jak to było w tamtym przykładzie?* Zapisuje $4^2+5^2=9$. Skreśla jednak ten zapis stwierdzając, że nie jest to równość prawdziwa. Po chwili namysłu chłopiec zauważa: *W przykładzie* $3,4,5$ *liczba* x *była nieparzysta.* Wybiera więc liczbę nieparzystą 7. Po podniesieniu jej do kwadratu mówi: *Trzeba tę liczbę rozłożyć na sumę dwóch liczb ... zaraz, ale w pierwszym przykładzie* 3^2 *było sumą dwóch liczb kolejnych; tutaj też tak trzeba.* Po tym pisze:

$$7^2=24+25.$$

i skreśla wcześniej napisaną równość $4^2=2+14$. *Muszę teraz sprawdzić* — zapowiada — *czy ten przykład spełnia równanie.* Zaczyna od ustalenia, która z liczb odgrywa rolę x, która y, a która z; wyraża to wprowadzeniem oznaczenia:

$$\begin{array}{ccccc} 7^2 & = & 24 & + & 25 \\ x & & y & & z \end{array}$$

Sprawdza, czy 7^2+24^2 równa się 25^2. Po wykonaniu obliczeń Kuba konstatuje, że trójka liczb $7,24,25$ spełnia równanie (1). Teraz szuka jeszcze innego przykładu. Tym razem za x przyjmuje liczbę 5. Zapisuje:

$$25=y+z$$

$$25 = 12 + 13.$$

I znów ma kłopot ze sprawdzeniem, czy otrzymał w ten sposób „dobrą" trójkę; podpisuje bowiem liczbę x pod liczbą 25 w zapisie $25 = y + z$, oraz notuje: $12^2 + 13^2 = 25^2$ (patrz s. 2 arkusza pracy). Wykonawszy odpowiedni rachunek w pamięci, uczeń stwierdza, że ostatnia równość jest fałszywa, dodając przy tym: *chyba znowu coś pomyliłem.* Po tym odwraca swoją kartkę na pierwszą stronę, śledzi przez chwilę znajdujące się tam zapisy i odkrywa swój błąd, mówiąc: 25 *to nie jest* x, *ale* x^2. Następnie notuje:

$$5^2 + 12^2 \stackrel{?}{=} 13^2.$$

Sprawdziwszy ostatnią równość rozwiązujący zadanie zestawia (notuje jeden pod drugim) wszystkie trzy uzyskane przykłady „dobrych" trójek, po czym mówi: *To chyba jest dobry sposób. Trzeba to zapisać ogólnie.* Pojawia się zapis (patrz s. 2 arkusza pracy):

$y + z = x^2$

$z = y + 1$

x — nieparzysta N[2)]

Dalej uczeń przedstawia liczbę x jako $2a + 1$, gdzie $a \in N$, oblicza kwadrat x, otrzymując liczbę $4a^2 + 4a + 1$, którą natępnie rozkłada na sumę dwu kolejnych liczb: $2a^2 + 2a$ oraz $2a^2 + 2a + 1$, mniejszą z nich oznaczając jako y, pozostałą jako z.

Dowód (rachunek algebraiczny), że tak otrzymana trójka liczb x, y, z spełnia równanie pitagorejskie, przeprowadza już bez trudności (patrz s. 2 z arkusza pracy). Konstatuje z zadowoleniem, że według podanego sposobu można wskazać nieskończenie wiele trójek liczb, o które chodziło w zadaniu. I tym stwierdzeniem Kuba kończy swoją pracę nad zadaniem.

Komentarz do rozumowania 2

1. Jak wskazuje powyższy opis rozumowania, Kuba — podobnie jak matematyk w poprzednio opisanej sytuacji — przez analizę przykładu jako rozwiązania szczególnego starał się **odgadnąć własność, która generuje rozwiązanie** ogólne. Uczeń dostrzegł kolejno kilka różnych własności znanej mu trójki pitagorejskiej (3,4,5):

- W_1 — trójka liczb naturalnych, z których dwie są liczbami nieparzystymi, a pozostała — liczbą parzystą,
- W_2 — trójka kolejnych liczb naturalanych,

[2)] Skrót N oznacza u ucznia „liczba naturalna".

- W_3 — trójka liczb naturalnych, dla której kwadrat liczby stojącej na pierwszym miejscu jest sumą dwu pozostałych liczb.

Własnością W_1 uczeń nie intersował się bliżej. Można natomiast uznać, że przystępując do badania, czy układ trzech kolejnych liczb naturalnych spełnia równanie (*), uczeń weryfikował sformułowaną wcześniej (w myśli) hipotezę: „Jeśli trójka liczb spełnia własność W_2, to spełnia równanie pitagorejskie." Tę hipotezę Kuba obalił, przeprowadzając rachunek algebraiczny.

Weryfikacja hipotezy powstałej na tle warunku W_3 zaczęła się od badania przypadku numerycznego (4, 2, 14) i nie była dla rozwiązującego zadanie sprawą łatwą. Być może właśnie trudność (w podstawianiu do warunku, w którym występują trzy zmienne) spowodowała uświadomienie sobie potrzeby korekty własności W_3. Uczeń zmodyfikował ją, nadając jej ostatecznie postać:

- W_3' — trójka liczb naturalnych, z których pierwsza jest liczbą nieparzystą, a jej kwadrat jest sumą dwu pozostałych, będących liczbami kolejnymi.

Zaczynając od weryfikacji empirycznej, a następnie przechodząc na rachunek algebraiczny, uczeń wykazał, że jeśli trójka liczb spełnia własność W_3', to spełnia równanie (*).

Tak więc uczeń zaczynajacy klasę ósmą (badanie przeprowadzono w październiku) — z punktu widzenia strategii heurystycznej stosowanej w rozwiązywaniu analizowanego teraz zadania — postępował podobnie jak matematyk.

2. Różnice w zachowaniu Kuby i matematyka odnoszą się do wiedzy i doświadczenia matematycznego. Kuba nie umiał sobie poradzić z rozwiązaniem tzw. ogólnego równania kwadratowego, bo — zgodnie z programem — dotychczas uczył się rozwiązywać jedynie równania typu: $x^2 = a^2$. Wymagał więc pomocy obserwatora, by mógł prowadzić badania dalej. Udzielenie przez badającego osobie badanej wskazówki merytorycznej w opisanym przypadku — ilustruje użytą w badaniu metodę. Mianowicie osoba badana może w trakcie rozwiązywania zadania zadawać pytania odnoszące się do faktu matematycznego, którego nie pamięta, lub do procedury, o której wie, że istnieje w matematyce, i którą, gdyby ją znała, zastosowałaby w danym momencie. Badająca udzieliła więc wskazówki co do sposobu rozwiązania równania uznając, że nie dotyczy ona ani strategii, ani stosowanej metody matematycznej.

Inną trudnością, na którą natrafił Kuba, było sprawdzanie, czy konkretna trójka liczb posiadająca własność W_3 (lub W_3') spełnia równanie pitagorejskie. Na czym dokładniej polegała ta trudność? Na przykład, próbując wskazać jakąś trójkę spełniającą własność W_3' uczeń wybrał jako x liczbę 5, po czym napisał: $25 = 12 + 13$. Nie uświadomiwszy sobie dokładnie, jaką trójkę liczb

przez ten rozkład uzyskał, próbował od razu przejść do równania $x^2+y^2=z^2$. Prawdopodobnie wydawało mu się przez chwilę, że konsekwencją równości $25=12+13$ jest równość: $25^2=12^2+13^2$. Dopiero wynik rachunku wskazujący na to, że ta ostatnia równość nie jest prawdziwa, uświadomił uczniowi, że najpierw trzeba odczytać, na jaką trójkę liczb wskazał rozkład $5^2=12+13$, a więc ustalić, która z liczb odgrywa rolę x, która y, a która z. Zrobiwszy to, nie miał już dalej trudności ze wstępną weryfikacją swojej hipotezy. Nie powinna dziwić opisana tu trudność ucznia — podstawiania do warunku, w którym występuje kilka zmiennych, Kuba nie miał jeszcze okazji opanować. Napotkane w tym względzie trudności potrafił jednak sam przezwyciężyć, i w konsekwencji odkrył oraz opisał — najpierw werbalnie, a potem algebraicznie — nieskończony zbiór obiektów, o których udowodnił, że spełniają żądany warunek. Jest to bez wątpienia sukces ucznia, który można przypisywać — z jednej strony — gotowości do przechodzenia z przykładu empirycznego do algebraicznego opisu jego własności, z drugiej zaś — zainteresowaniu zadaniem, woli jego rozwiązania mimo trudności. Jest to postawa, którą Polya opisuje pod hasłem „wytrwałość, ale różnorodność", objawiająca się tu trzymaniem się zasady: „Trwajcie przy rozpatrywanej części zadania tak długo, jak długo jest nadzieja na dobry pomysł" (Polya, 1975, s. 282).

Rozumowanie 3 (Grzegorz — uczeń I klasy technikum)

Po stwierdzeniu, że znany mu jest przykład trójki liczb spełniającej równanie (*) — jest to (3,4,5) — Grzegorz poszukuje innych takich trójek. To poszukiwanie odbywa się w kilku krokach, z których każdy obejmuje taki sam układ czynności. Są nimi: werbalny opis warunku, jaki mogłyby spełniać poszukiwane trójki liczb, wybranie przykładowej trójki spełniającej ten warunek, i wreszcie sprawdzenie, czy spełnia ona równanie (*). Kolejność kroków ujmuje tabela 1.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń Grzegorz znalazł jeszcze jedną trójkę pitagorejską: (6,8,10). Rozwiązywanie zadania zakończył stwierdzeniem: *Myślę, że to równanie ma dużo więcej pierwiastków; powinny one dać się opisać w jakiś ogólny sposób, ale tego nie udało mi się uzyskać.*

Kolejne kroki	Podany warunek (stawiana hipoteza)	Rozpatrywane trójki liczb
1	Kolejne liczby naturalne	(4,5,6),(5,6,7) (Weryfikacja przez rachunek pamięciowy)[3]
2	Kolejne liczby parzyste	(4,6,8),(6,8,10),(8,10,12)
3	Kolejne liczby nieparzyste	(3,5,7),(5,7,9)
4	Skrajne liczby w trójce nieparzyste, środkowa – parzysta	(5,4,7)
5	Dwie liczby parzyste, jedna nieparzysta	(4,5,6),(4,6,7)
6	Kolejne liczby parzyste	(12,14,16)

Tab. 1

Komentarz do rozumowania 3

1. Tak jak autorzy dwu poprzednio opisanych rozumowań, Grzegorz także stawiał hipotezy dotyczące warunku wystarczającego na to, by trójka liczb naturalnych była trójką pitagorejską. Jest jednak pewna różnica odnosząca się do źródła tych hipotez. Zarówno w rozumowaniu matematyka (Rozumowanie 1), jak i Kuby (Rozumowanie 2), każda ze stawianych tam hipotez wywodziła się z własności trójki (3,4,5). W rozumowaniu Grzegorza tylko pierwsza hipoteza (krok 1) z pięciu przez niego rozpatrywanych miała taki charakter. Po zapisaniu trójki (3,4,5) uczeń postawił sobie pytanie: *Czy przypadkiem nie są to kolejne liczby?* i następnie sprawdził, czy układy liczb (4,5,6) oraz (5,6,7) są rozwiązaniami równania (*). Z chwilą gdy stwierdził, że trójka kolejnych liczb naturalnych nie musi być rozwiązaniem równania (*), zmienił taktykę. Zaczął rozpatrywać przypadki ze względu na parzystość składowych trójki. Wyjściowy przykład przestał go interesować, w tym sensie, że w krokach 2 i 3 postulował takie własności poszukiwanych trójek liczb, których wyjściowy przykład nie posiada. I choć kolejno rozpatrywana własność „skrajne liczby w trójce nieparzyste, środkowa — parzysta" (krok 4) jest spełniona przez wyjściowy przykład, to prawdopodobnie jej źródłem nie był ten przykład. Własność ta rozpatrywana była raczej, podobnie jak hipotetyczna własność 5, jako jeszcze jedna z możliwości w ciągu rozpatrywanych od kroku 2 zaczynając. To, co Grzegorz robił poza krokiem 1, nie odpowiada więc w ogóle strategii „rozważ przypadki szczególne". Hipotezy (poza pierwszą), jakie uczeń stawiał,

[3] W arkuszu pracy Grzegorza brak jest notatek odpowiadających temu fragmentowi rozumowania, uczeń wykonał rachunek w pamięci; opis odpowiada jednak temu, co zanotowane zostało w protokole obserwacji.

są pierwotne w stosunku do przykładów, przy pomocy których je weryfikował, i niezależne od przykładu rozpoczynającego pracę nad zadaniem.

Rozumowanie 3 — poza krokiem 1 — ilustruje takie postępowanie, w którym co prawda rozważa się przykłady, ale ich rola jest inna niż wtedy, gdy stosuje się strategię S. Tutaj (kroki 2 do 6) służą one weryfikacji hipotezy powstałej na innej drodze niż analiza przykładu. Strategię, którą Grzegorz zastosował jako drugą, można by nazwać postulowaniem własności rozwiązania; nie będzie ona analizowana w tym artykule.

2. W odróżnieniu od matematyka i Kuby, Grzegorz weryfikował stawiane przez siebie hipotezy tylko w sposób empiryczny. W żadnym przypadku nie prowadził rozważania ogólnego, rozumowania formalnego. Na przykład hipotezę wyrażoną pytaniem: A może to są kolejne liczby nieparzyste? (krok 3) uczeń mógłby odrzucić od razu, bez badania przykładów, gdyby skonfrontował ją z postacią równania (1). Żadna trójka liczb o sugerowanej własności nie może spełniać tego równania, bo suma liczb nieparzystych (kwadrat liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą) nie może być liczbą nieparzystą.

Podobna sytuacja wystąpiła w kroku 2. Uczeń badał, czy trójki kolejnych liczb parzystych spełniają równanie Pitagorasa (krok 2), i ponownie powrócił do tego pod koniec swojego rozumowania (krok 6) w nadziei, że skoro udało mu się znaleźć jedną „dobrą" trójkę o tej własności, to być może otrzyma jeszcze jedną. Nie zadawał sobie pytania, czy to w ogóle jest jeszcze możliwe. Negatywną odpowiedź na to pytanie można uzyskać dostępnym uczniowi klasy I szkoły średniej rachunkiem — rozwiązując równanie: $(2k)^2 + (2k+2)^2 = (2k+4)^2$ w zbiorze liczb naturalnych.

Rozumowanie 4 (Dorota — uczennica ósmej klasy szkoły podstawowej)

Dorota rozwiązuje zadanie:

> ***A* jest zbiorem liczb trzycyfrowych zapisanych ustalonymi cyframi a, b, c, różnymi od zera i różnymi między sobą. Wykazać, że w zbiorze *A* istnieją dwie różne liczby, których różnica jest podzielna przez 4.**
>
> (Zadanie o podzielności różnicy przez 4).

Etap 1

Po zapisaniu treści zadania „po swojemu" (patrz górna część 1. strony arkusza pracy) Dorota zapowiada: *Spróbuję sobie wypisać liczby w zbiorze A za pomocą cyfr* a, b, c. Pisze: $\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$. Następnie mówi:

Spróbuję podstawić sobie jakieś konkretne cyfry. Wybiera $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i tworzy odpowiadający temu wyborowi zbiór A, zapisując liczby w takiej kolejności, jak ustaliła to ogólnie. Tworzy kolejno trzy różnice liczb z tego zbioru: odjemną w każdej z nich jest liczba 123, odjemnikami — kolejno liczby zapisane w zbiorze A jako 2., 3.; liczbę 123 oznacza przez d, odjemniki przez e, wynik — przez f. Jako f otrzymuje kolejno: $-9, -90, -108$. Stwierdza, że trzecia różnica jest podzielna przez 4, po czym konstatuje: *Jak sobie wybrałam cyfry* 1,2,3, *to wyszło mi, że w zbiorze A istnieją takie dwie liczby, których różnica jest podzielna przez* 4. *To są* 123 *i* 231... *Teraz można by wybierać inne liczby i pokazywać to samo, ale to trwałoby bardzo długo, więc spróbuję znaleźć jakąś zależność.* Po chwili mówi: *Próbowałam szukać jakiejś zależności, np. to, że*

- *jest* 6 *cyfr w zbiorze A, ale* 4 *nie dzieli* 6,
- *każda cyfra w zbiorze A występuje 2 razy na tym samym miejscu, ale* 4 *nie dzieli* 2.

Nie widzę żadnej zależności. Można by brać inne cyfry i robić to, co w poprzednim przykładzie. To chyba nie ma sensu.

Etap 2

Po krótkiej przerwie, w czasie której wydaje się, że Dorota nie podejmuje nowej próby rozwiązania zadania, prowadząca badania pyta uczennicę: Czy chcesz jeszcze trochę popracować nad zadaniem? Dziewczynka odpowiada: *Tak, bo może się okazać, że jak wezmę inny przykład i nie znajdę tam różnicy podzielnej przez* 4, *to ta własność nie byłaby spełniona.*

Po tym Dorota wybiera drugi przykład: $a = 9, b = 8, c = 7$. Zapisuje zbiór A oraz tworzy trzy różnice dokładnie według schematu z poprzedniego przykładu. Otrzymuje kolejno te same co tam wyniki (z dokładnością do bezwzględnej wartości). Zauważa: *Tutaj też otrzymałam różnicę podzielną przez* 4. *Tak będzie w innych przykładach, bo wychodzą te same różnice. Ale muszę jeszcze sprawdzić, czy tak samo będzie, jeśli wybierzemy cyfry niekolejne.* Wybiera $a = 4, b = 7, c = 2$ (przykład 3). Tworzy zbiór liczb zapisanych tymi cyframi, zapisuje te liczby w kolejności ustalonej dla zbioru A w przypadku ogólnym (patrz górna część 1. strony arkusza pracy). Tworzy (pomyłkowo) różnice liczby zapisanej jako pierwsza w drugim przykładzie oraz kolejno 2., 3., i 4. liczby z przykładu 3. Dostrzega pomyłkę — to, że brała pod uwagę liczby należące do różnych zbiorów. Przekreśla poprzedni zapis i tworzy trzy różnice z rozpatrywanego teraz zbioru według schematu z poprzednich przykładów, to jest od liczby zapisanej jako pierwsza odejmuje kolejno 2., 3. i 4. liczbę

zbioru A ($a = 4, b = 7, c = 2$). Zauważa, że znowu trzecia z kolei różnica jest podzielna przez 4. Po tym stwierdza: *W każdym z tych przykładów wyszło mi, że jeśli od pierwszej liczby odejmę czwartą, to dostanę liczbę podzielną przez* 4.

Etap 3

Po chwili Dorota zapowiada: *Chciałabym jeszcze sprawdzić, czy jeśli w tych przykładach zmienię kolejność* a, b, c, *to też mi wyjdzie tak samo.* Powraca do trzeciego przykładu (cyfry: 2, 4, 7). Wprowadza inne niż przedtem oznaczenia: $a = 7, b = 2, c = 4$. Wypisuje liczby zbioru A (przykład 4) i następnie tworzy różnice według ustalonego już poprzednio schematu. Tym razem wynik trzeciego z kolei odejmowania, którym jest $724 - 247 = 477$, nie spełnia żądanej własności. Dziewczynka wykonuje jeszcze jedno odejmowanie: od pierwszej liczby, czyli 724, odejmuje liczbę zapisaną w rozpatrywanym zbiorze jako piąta. Teraz wynik odejmowania: $724 - 472 = 252$ jest już liczbą podzielną przez 4. Dorota dostrzega to i komentuje: *Tu mi nie wyszło. Od pierwszej liczby odjąć czwartą nie otrzymam liczby podzielnej przez* 4. *Tu mi wyszło, że jeśli od pierwszej odejmę piątą, to otrzymam liczbę podzielną przez* 4. Niedługo potem dodaje: *Wydaje mi się, że to twierdzenie jest prawdziwe. Chciałabym znaleźć tę zależność, według której tak się dzieje... Chciałabym jeszcze dalej szukać zależności.*

Teraz uczennica przygląda się temu, co zapisała do tej pory (na obydwu stronach kartki). Po chwili relacjonuje: *Patrzyłam na to,od której liczby zaczynał się każdy z przykładów. W pierwszym przykładzie — od najmniejszej, w drugim — od największej, w trzecim — od środkowej i w czwartym też od największej.* Kontynuuje (kierując wzrok wyraźnie na tę część swojej kartki, na której znajdują się zapisy odnoszące się do 1. przykładu: *Jeśli poukładamy cyfry od najmniejszej do największej, to w zbiorze A różnica, która ma być podzielna przez* 4, *to będzie różnica liczb większej z dwu środkowych i najmniejszej w ogóle — tak jest w 1. przykładzie... Sprawdzę, czy tak będzie w innych przykładach.* Teraz uczennica ponownie analizuje przypadek cyfr rozpatrywanych już w 2. przykładzie, z tym, że zmienia porządek cyfr, przyjmując: $a = 7, b = 8, c = 9$. Oblicza tylko jedną różnicę: od większej z dwu liczb „środkowych" odejmuje najmniejszą z liczb w rozważanym zbiorze, czyli $897 - 789$, otrzymując liczbę 108, o której stwierdza, że jest podzielna przez 4 (patrz przedostatni przykład zbioru A na 2. stronie arkusza pracy).

W „przeorganizowanym" przykładzie 3 ($a = 2, b = 4, c = 7$) wynik odejmowania wskazanych liczb: 472 (większa ze środkowych) i 247 (najmniejsza) nie spełnia, niestety, żądanej własności. Uśmiechając się na to, Dorota mówi: *Nie wyszło*, po czym dodaje: *To, co mówiłam przed chwilą, to jest dla cyfr*

a, b, c, które są po kolei. Jeśli a, b, c nie są kolejne, to przez 4 będzie podzielna różnica mniejszej z dwu liczb największych i większej z liczb środkowych. Tę ostatnią uwagę uczennica uczyniła po prześledzeniu rachunku odnoszącego się do układu cyfr: $a = 7, b = 2, c = 4$ (patrz górna część strony 2 arkusza pracy). Ostatnim zdaniem, jakie Dorota wypowiedziała w czasie obserwacji, było: *Wydaje mi się, że skończyłam.*

Komentarz do rozumowania 4

1. Dorota nie od razu podjęła decyzję o wykorzystaniu przykładu do znalezienia ogólnego rozwiązania zadania. Odnosi się wrażenie, że początkowo pierwszy z rozpatrywanych przez siebie przykładów traktowała jako ilustrację twierdzenia, którego prawdziwość miała wykazać. Nastawiona była raczej na poszukiwanie — jak się wyraziła — „jakiejś zależności, według której tak się dzieje". Dopiero, kiedy próby znalezienia takiej zależności nie powiodły się, skierowała swoją uwagę ponownie na rozważany już przykład — sposób jego badania stał się modelem badania kolejnych przykładów. W rozwiązaniu zadania w przypadku cyfr 1, 2, 3 w sposób istotny uczennica wykorzystywała uporządkowanie zbioru. Kolejność, w jakiej zapisała liczby należące do tego szczególnego zbioru, podyktowana była przyjętymi oznaczeniami ($a = 1, b = 2, c = 3$) oraz kolejnością, w jakiej zapisała liczby należące do zbioru A w przypadku ogólnym (patrz górna część 1. strony arkusza pracy).

Powróciwszy w 2. etapie swojej pracy do przykładu 1 Dorota uświadomiła sobie zapewne jego szczególną własność, a następnie postawiła sobie pytanie: Czy jeśli wybierzemy inne trzy kolejne cyfry i odpowiadający im zbiór liczb trzycyfrowych uporządkujemy w określony wcześniej sposób, to różnica liczby pierwszej i czwartej w tym zbiorze jest podzielna przez 4? W ten sposób została wyrażona hipoteza:

> Zbiór A odpowiadający cyfrom kolejnym spełnia żądany w zadaniu warunek.

Przykład 2 potwierdził tę hipotezę; co więcej — fakt, że wyniki kolejno wykonywanego odejmowania były (z dokładnością do wartości bezwzględnej) takie same, jak w pierwszym przykładzie, przekonał uczennicę do tego, by w tym momencie uznać tę hipotezę za twierdzenie. Sprawdzony już sposób wskazywania dwu liczb zbioru A spełniających żądany w zadaniu warunek postanowiła wypróbować dla cyfr niekolejnych. Przykład: $a = 4, b = 7, c = 2$ dał wynik pozytywny, a tym samym kolejna hipoteza:

> Zbiór A odpowiadający cyfrom niekolejnym spełnia żądany warunek

została potwierdzona.

Jakkolwiek Dorota miała pewne podstawy do tego, by w tej fazie swojej pracy uznać, że odgadła już rozwiązanie zadania, to swojego badania jeszcze nie zakończyła. Jest jednak interesujące, że swoich hipotez nie weryfikowała na przykładach innych zbiorów, ale poddała głębszej analizie przykłady tych zbiorów, które już rozważała. Prawdopodobnie, w wyniku kilkakrotnego powtórzenia sposobu badania zastosowanego we wstępnym przykładzie, uświadomiła sobie bardzo wyraźnie to, że ustalenie przez nią uporządkowania wybranych cyfr (to, którą z nich przyjąć jako a, którą jako b i którą jako c) ma wpływ na uporządkowanie zbioru A, i tym samym na wskazanie rozwiązania (dwu liczb, których różnica jest podzielna przez 4). Postanowiła zbadać, czy to rozwiązanie jest niezależne od uporządkowania wybranych cyfr. Zmiana tego uporządkowania w odniesieniu do cyfr: 2, 4, 7 spowodowała zmianę rozwiązania (różnica innych liczb jest podzielna przez 4). To przekonało uczennicę, że oczekiwanej przez nią niezależności nie ma, co z kolei uświadomiło jej, że — wbrew temu, co jej wydawało się wcześniej — zadanie nie zostało rozwiązane.

Tak więc pierwsza próba odgadnięcia własności generycznej przykładu nie zakończyła się sukcesem. Dorota nie „poddała się". Podjęła nową próbę odkrycia ogólnego rozwiązania zadania na podstawie wstępnego przykładu. Ponownie przyjrzała się temu przykładowi — tym razem zauważyła, że cyfry 1, 2, 3 oraz odpowiadający im zbiór A uporządkowane są rosnąco. Dalej — uczennica „przetłumaczyła" wynik uzyskany dla tego przykładu w poprzednim uporządkowaniu (różnica 1. i 4. liczby w zbiorze jest podzielna przez 4) na „język" nowego uporządkowania: różnica większej z dwu liczb „środkowych" i najmniejszej w zbiorze jest podzielna przez 4.

Następnie postawiła sobie kolejne pytanie: Czy jeśli w innych rozpatrywanych już przykładach zmienimy uporządkowanie wybieranych cyfr tak, że ustawimy je w ciągu rosnącym, to „nowe" rozwiązanie zachowa się? Drugi przypadek cyfr kolejnych: 7, 8, 9 dał na to pytanie odpowiedź pozytywną, a dla cyfr niekolejnych: 2, 4, 7 — znowu negatywną. Dla tego ostatniego przypadku uczennica „przełożyła" wynik uzyskany w 2. etapie pracy na „nowy" język i odniosła do wszystkich przypadków cyfr niekolejnych. „Nowy" wynik dla zbiorów odpowiadający układom cyfr: 1, 2, 3 oraz 7, 8, 9 uogólniła na wszystkie przypadki układów trzech cyfr kolejnych.

2. Odpowiedź Doroty w odniesieniu do zbiorów A utworzonych na tle trzech cyfr kolejnych jest poprawna. Rzeczywiście — w każdym z tych przypadków różnica większej z dwu liczb „środkowych" w zbiorze A i najmniejszej w ogóle wynosi 108, a więc jest podzielna przez 4. Przekonuje o tym poniższy rachunek (uczennica go nie przeprowadziła):

Niech $a \in \{1, 2, ..., 7\}$, $b = a + 1$, $c = a + 2$.

Wtedy jest

$$b \cdot 100 + c \cdot 10 + a - (a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) =$$

$$= (b - a) \cdot 100 + 10(c - b) + (a - c) =$$

$$= 100 + 10 - 2 = 108.$$

Stwierdzenie rozwiązującej zadanie dotyczące układu cyfr niekolejnych — *Różnica mniejszej z „dwu liczb największych" oraz większej ze „środkowych" jest podzielna przez* 4 — nie jest prawdziwe. Warunek ten nie jest spełniony choćby w takich przypadkach, w których $a < b < c$ oraz cyfry a, b nie są tego samego stopnia parzystości (wspomniana różnica jest wtedy nieparzysta). Uogólnienie dokonane przez Dorotę w tym przypadku jest więc za szerokie (*overgeneralization* — Maurer, 1987).

3. Jeśli chodzi o poziom rozumienia przez Dorotę metody matematycznej, to trudno byłoby tu podać jednoznaczną ocenę. Jest faktem, że formułowane przez siebie twierdzenia, powstałe w wyniku **uogólnienia typu indukcyjnego** (Krygowska, 1977b), weryfikowała jedynie empirycznie. Używając terminologii Legutki i Turnaua (1989), można więc powiedzieć, że uczennica nie osiągnęła jeszcze **poziomu 1 rozumienia metody matematycznej**: „... dowód rozumiany jako argument ogólny (w przeciwieństwie do przekonania na podstawie sprawdzenia kilku przypadków szczególnych)" (Legutko, Turnau; 1989, s. 14-15). Z drugiej strony, zachowanie uczennicy wskazuje na to, że wyraźnie odczuwała ona potrzebę poszukiwania owego „argumentu ogólnego", wyrażała to przez stwierdzenia: *Spróbuję znaleźć jakąś zależność. ...Chciałabym znaleźć tę zależność, według której tak się dzieje... . Chciałabym dalej szukać zależności.* Ponadto spontanicznie podjęła specyficzny dla badania matematycznego problem niezależności jednej własności obiektu matematycznego od innej jego własności (... *Chciałabym jeszcze sprawdzić, czy jeśli w tych przykładach zmienię kolejność* a, b, c, *to też mi wyjdzie tak samo*). Można chyba powiedzieć, że w momencie rozwiązywania zadania o podzielności różnicy przez 4 osiągnięcie poziomu 1 rozumienia metody matematycznej było w **strefie najbliższego rozwoju** Doroty (Wygotski, 1971; Gruszczyk-Kolczyńska, 1994).

Na uwagę zasługuje także postawa wytrwałości, przejawiająca się w podejmowaniu nowych prób rozwiązania zadania w przypadku, gdy poprzednie zawodziły.

Dorota wykazała więc pewne predyspozycje do prowadzenia badania matematycznego.

Rozumowanie 5 (Konrad — uczeń I klasy technikum mechanicznego)

Uczeń rozwiązuje zadanie o podzielności różnicy przez 4.

Etap 1

Konrad zaczyna od rozważania przykładu. Wypisuje w kolumnie wszystkie liczby trzycyfrowe o cyfrach 1, 2, 3 — w porządku od najmniejszej do największej (patrz s. 1 arkusza pracy). Tworzy kilka różnic: wybiera liczbę z wypisanego ciągu i odejmuje od niej liczbę mniejszą; za każdym razem sprawdza podzielność wyniku przez 4. Zauważa, że trzecia z kolei różnica: 231−123=108 spełnia żądany warunek. Zapisowi tego ostatniego odejmowania poświęca więcej uwagi: dostrzega, że odjemna jest liczbą stojącą na czwartym miejscu w wypisanym wcześniej ciągu, a odjemnik — liczbą na pierwszym miejscu.

Uczeń wybiera następnie inną trójkę cyfr: 1, 3, 4. Podobnie jak poprzednio, zapisuje przy pomocy tych cyfr rosnący ciąg liczb trzycyfrowych. Sprawdza, czy otrzyma również liczbę podzielną przez 4, jeśli od czwartej liczby w tym ciągu odejmie liczbę stojącą na pierwszym miejscu. Wykonuje więc odejmowanie: 341−134, otrzymując w wyniku 207. Po zbadaniu podzielności tej liczby przez 4 uczeń mówi: *Taki sposób, w jaki otrzymaliśmy w tamtym przykładzie różnicę podzielną przez* 4, *nie jest dobry dla innych cyfr.*

Etap 2

Konrad powraca teraz do wyjściowego przykładu — zbioru A dla cyfr 1, 2, 3. Decyduje się na utworzenie wszystkich różnic liczb z tego zbioru takich, że odjemnik jest mniejszy od odjemnej. Tworzy je w sposób systematyczny: od największej z tych liczb odejmuje kolejno wszystkie od niej mniejsze, potem od drugiej od końca odejmuje liczby od niej mniejsze, itd. Różnice o ustalonej odjemnej zapisuje w oddzielnych wierszach. Za każdym razem sprawdza podzielność wyniku przez 4. Wyróżnia graficznie (obwodzi „kółkiem") różnice spełniające warunek zadania. Jest ich 3 (patrz s. 1 arkusza pracy). Różnice te zapisuje powtórnie i opisuje każdą z nich, używając liter a, b, c, *zgodnie z przyjętym przez siebie założeniem* $a < b < c$. W przepisywaniu różnic popełnia pomyłkę, co w konsekwencji prowadzi do błędu w opisie algebraicznym. Ta pomyłka zostaje przez ucznia dostrzeżona i ostatecznie opis wyróżnionych różnic przyjmuje następującą postać:

(1) *cba* — *bac*,
(2) *cab* — *acb*,
(3) *bca* — *abc*.

Następnie Konrad przechodzi do weryfikacji swoich hipotez. Uświadamia sobie, że sposób (3) należy odrzucić jako nie prowadzący do żądanego wyniku, co sugeruje rozpatrywany wcześniej przykład cyfr 1, 3, 4 oraz cyfr 1, 2, 4. Uczeń przekreśla więc zapis (3).

Wybiera teraz cyfry 1, 4, 6. Tworzy odpowiadającą im różnicę pierwszego typu: *cba* – *bac*. Stwierdziwszy, że wynik odejmowania 641–416 nie jest liczbą podzielną przez 4 (liczy w pamięci tylko cyfrę jedności), konstatuje: *Taka różnica też nie musi dawać dobrego wyniku — trzeba ją odrzucić*, po czym przekreśla zapis (1).

Dla tych samych cyfr tworzy Konrad różnicę pozostałego z wyróżnionych typów: *cab* – *acb*. Odejmowanie 614–164 także nie daje pożądanego wyniku. Tym razem rozwiązujący zadanie nie stwierdza jednak, że ten sposób tworzenia różnicy należy odrzucić. Zatrzymuje się nad ostatnim przykładem: 614 – 164 = 450, przygląda się przez chwilę wynikowi i mówi: *Ale ostatnia cyfra różnicy jest zerem. Zawsze tak będzie przy takim ustawieniu cyfr. Aby ta różnica była podzielna przez* 4, *druga jej cyfra, czyli a – c, ... nie ... odejmujemy od większej mniejszą, czyli c – a musi być parzyste.* W wyniku tego stwierdzenia Konrad ujmuje „w ramkę" zapis *cab* – *abc* i obok notuje w skrócie: $c - a = pa$ (patrz dolna część s. 1 arkusza pracy).

Teraz uczeń wypisuje różne pary cyfr, których różnica jest parzysta: 3 – 1, 5 – 1 — itd. (patrz s. 2 arkusza pracy). Po ich wypisaniu stwierdza, że różnica $c - a$ będzie parzysta, gdy a, c będą albo obie parzyste, albo obie nieparzyste. Dalej przechodzi do wypisywania ciągu trójek, w których występuje układ cyfr: 3, 1 natomiast trzecia cyfra w trójce zmienia się:

312, 314, 315 itd.

Zwraca uwagę na to, że w każdym z układów trzech cyfr, w których występują cyfry 3, 1, od razu można wskazać dwie liczby, których różnica jest podzielna przez 4: odjemną będzie ta właśnie liczba, która została napisana, odjemnik zaś będzie miał tę samą cyfrę jedności, a cyfry setek i dziesiątek zmienią się miejscami. Ilustruje ten sposób dla cyfr 3, 1, 2, po czym dodaje: *tak samo będzie się tworzyć różnice dla innych wyborów cyfr, wśród których występują dwie cyfry tu wypisane. A co zrobić, jeśli różnica c – a będzie nieparzysta?* — pyta siebie uczeń, a po chwili namysłu odkrywa i komunikuje z wyraźnym zadowoleniem: *Ale przecież jak mamy trzy cyfry różne, to wśród nich muszą być takie dwie, które są parzyste, albo takie dwie, które są nieparzyste... Te cyfry ustawiamy jako cyfry setek i dziesiątek, a tę trzecią, pozostałą cyfrę na końcu. Od takiej liczby odejmiemy liczbę o tej samej cyfrze jedności, a o prze-*

stawionych cyfrach setek i dziesiątek. Możemy tę różnicę zapisać tak, jak było to już poprzednio:

cab – acb,

z tym, że teraz c, a są obie parzyste, albo obie nieparzyste... no i trzeba dodać, że a jest mniejsze od c. Ta różnica musi być podzielna przez 4, *bo a – c jest parzyste.*

Konrad kończy pracę nad zadaniem zilustrowaniem odkrytego sposobu tworzenia różnicy o żądanej własności dla kilku trójek cyfr: 1, 3, 4; 1, 5, 7; 3, 4, 7; 3, 6, 7.

Komentarz do rozumowania 5

1. W poszukiwaniu rozwiązania zadania Konrad także posłużył się przykładem. Na jego podstawie formułował różne własności, a w konsekwencji różne hipotezy co do sposobu tworzenia w zbiorze A różnicy liczb spełniającej żądany warunek. W 1. etapie pracy, w wyniku wskazania w zbiorze A odpowiadającym cyfrom 1, 2, 3 tylko jednej różnicy podzielnej przez 4, uczeń sformułował hipotezę, której można nadać brzmienie:

> Jeśli dla wybranych trzech różnych cyfr utworzymy rosnący ciąg liczb trzycyfrowych zapisanych tymi cyframi, a następnie od czwartej z nich odejmiemy pierwszą, to otrzymamy liczbę podzielną przez 4.

Hipoteza ta została przez ucznia obalona przez podanie kontrprzykładu.

W 2. etapie pracy, po dokładniejszym zbadaniu tego samego przykładu pod kątem spełnienia żądanego warunku, uczeń sformułował trzy równorzędne hipotezy, nazwijmy je H_1, H_2, H_3, odpowiadające kolejno sposobom (1), (2) i (3) ustawienia cyfr dla otrzymania dwu liczb, których różnica jest podzielna przez 4. Próby stosowania kolejno sposobów H_1, H_3 do innych przykładów zakończyły się ich odrzuceniem. Weryfikacja hipotezy H_2 przebiegała trochę inaczej niż w poprzednich przypadkach. Przy weryfikacji hipotezy H_2 stosował Konrad **zasadę optymalnej ostrożności.** Choć sprawdzenie tej hipotezy na nowym przykładzie dało wynik negatywny, uczeń prowadził badania dalej. Mianowicie zadał sobie bardzo istotne dla rozwiązania zadania pytanie, w jakich przypadkach sprawdzany teraz sposób prowadzi do oczekiwanego wyniku. Odpowiedź na to pytanie uzyskał na drodze rozumowania dedukcyjnego. Zauważył, że wynikiem odejmowania według sposobu (2) jest liczba, której cyfra jedności wynosi 0. Uświadomił sobie dalej, że na to, aby liczba była podzielna przez 4, cyfra jej dziesiątek $c - a$ musi być parzysta. Dalsze wypisywanie wszystkich układów cyfr, których różnica jest parzysta, to znowu empiria. I choć

można by powiedzieć, że w tej fazie rozwiązywania zadania empiria była już zbędna, to wydaje się, że właśnie wypisywanie przykładów opłaciło się — pomogło uczniowi w uzyskaniu takiego wglądu w zadanie, że objął jednym chwytem myśli wszystkie przypadki. Dostrzegł mianowicie, że proponowany sposób ustawienia cyfr — „dobry" w przypadku $a < b < c$, $c - a$ parzyste — przez niewielką modyfikację (rezygnacja z warunku $a < b < c$, z zachowaniem warunku: a, c parzyste lub a, c nieparzyste) — można odnieść do dowolnego układu trzech cyfr.

2. Ostatecznie Konrad, choć nie zaprezentował pełnego zapisu rozwiązania zadania, odkrył, a następnie przedstawił werbalnie istotę tego rozwiązania. Osiągnięcie tego sukcesu można, jak sądzę, w dużym stopniu przypisać dwu cechom postawy Konrada. Jedną z nich jest **dokładność i systematyczność w badaniu empirycznym.** Termin „systematyczność w badaniu empirycznym" wiąże się z postawą, którą — w wyniku swoich badań — Legutko (1988) wyróżniła pod nazwą „systematyczność w poszukiwaniu rozwiązania zadania". W przypadku Konrada ta postawa przejawiała się w tym, że

— przypadki numeryczne (uwzględniane w różnych fazach rozwiązania zadania) rozpatrywane były nie w sposób przypadkowy, chaotyczny, ale według ustalonego, czytelnego systemu (np. badanie w 2. etapie pracy wszystkich 15 różnic liczb należących do konretnego zbioru A),

— technika samego zapisu tych przypadków była przejrzysta (np. zapisywanie wspomnianych powyżej różnic tak, by różnice o tej samej odjemnej znajdowały się w oddzielnym wierszu, co pozwoliło między innymi na łatwiejszą kontrolę rachunku),

— uczeń kontrolował poprawność rachunków, zapisów — sprawdzenie w 2. etapie pracy zgodności „algebraicznych" zapisów hipotez z ich arytmetycznymi odpowiednikami pozwoliło na dostrzeżenie i poprawienie pomyłki (patrz opis rozumowania ucznia, s. 20), której pozostawienie uniemożliwiłoby dojście do rozwiązania zadania. Można więc chyba powiedzieć, że **empiria** w wydaniu Konrada była **dobrze zorganizowana.**

Drugą istotną cechą analizowanego rozumowania jest oderwanie się — na pewnym etapie rozwiązywania zadania — od empirii na rzecz argumentacji ogólnej. Rozumowanie Konrada może wskazywać na to, że ten uczeń jest bliski osiągnięcia lub już osiągnął poziom 1 rozumienia metody matematycznej według Legutki i Turnaua (patrz s. 19).

Rozumowanie 6 (osoba B — po studiach matematycznych)

W pracy osoby B nad rozwiązaniem tego samego zadania można wyróżnić

4 etapy (sygnalizują je punkty 1), 2), 3), 4) w arkuszu pracy osoby B).

Etap 1

Osoba B zaczyna swoje rozumowanie dokładnie tak samo jak Konrad w ostatnio opisanym przykładzie: wybiera cyfry 1, 2, 3 i tworzy odpowiadający im zbiór A. Szuka w tym zbiorze pary liczb, których różnica jest podzielna przez 4, rozpatrując liczby o tej samej cyfrze jedności. Znajduje taką parę liczb: 312, 132. Zwraca uwagę na wartość ich różnicy — liczbę 180. Zadaje sobie pytanie: *Czy to przypadek, że ta różnica wynosi* 180*?*
Opisuje teraz ogólniej (za pomocą symboli) sytuację rozpatrywaną w wyjściowym przykładzie:

Mówi: *Cyfry* a, b, c, *to trzy kolejne cyfry:* $a, a+1, a+2$, $1 < a < 7$). *Tworzymy liczbę*

$$(a+2) \cdot 100 + a \cdot 10 + (a+1)$$

i od niej odejmujemy liczbę o tej samej cyfrze jedności, ale o przestawionych cyfrach dziesiątek i setek, czyli liczbę

$$a \cdot 100 + (a+2) \cdot 10 + (a+1).$$

Jako wynik otrzymujemy liczbę $2 \cdot 90$, *oczywiście podzielną przez* 4 (patrz zapis w punkcie 1) arkusza pracy osoby B). *Zadanie jest rozwiązane w przypadku zbioru A utworzonego dla trzech cyfr kolejnych.*

Etap 2

Następnie B skupia swoją uwagę na zapisie algebraicznym przeprowadzonego przed chwilą rachunku i zadaje sobie pytanie: *Co znaczy ten wynik* $2 \cdot 90$*? Dlaczego dwa razy dziewięćdziesiąt?* (akcentuje w wypowiedzi słowo „dwa" a w zapisie rachunku obwodzi okienkiem liczbę 2). Po chwili odpowiada: *Liczba* 2 *w tym iloczynie bierze się stąd, że różnica między największą i najmniejszą cyfrą spośród wybranych cyfr* a, b, c *wynosi* 2. *Podobny wynik otrzymamy, jeśli liczbę* 2 *zastąpimy liczbą* 3, 4, *itd., ogólnie* k. *Rachunku nie ma co powtarzać, będzie zupełnie analogiczny. Zapiszemy tylko wynik:*

Niech

$$a < b < c$$

$$c = a + k.$$

Wtedy

$$(c\ a\ b)_{10} - (a\ c\ b)_{10} = k \cdot 90.$$

Liczba $k \cdot 90$ *będzie podzielna przez* 4, *o ile* k *będzie liczbą parzystą. Z tego wniosek, że zadanie jest rozwiązane w przypadku zbiorów A utworzonych dla takich trzech cyfr, dla których różnica* k *między największą i najmniejszą z tych cyfr jest parzysta, to znaczy dla* $k = 2,4,6,8$. *Przy tym założeniu liczby, których różnica jest podzielna przez* 4, *tworzymy w następujący sposób:*

— *odjemna ma w rzędzie setek największą z cyfr, w rzędzie dziesiątek najmniejszą, w rzędzie jedności pozostałą cyfrę;*

— *odjemnik ma tę samą cyfrę jedności co odjemna, jego cyfrą dziesiątek jest cyfra setek odjemnej, a cyfrą setek jest cyfra dziesiątek odjemnej.*

Etap 3

B konstatuje następnie, że pozostał do rozważenia przypadek, kiedy różnica między największą i najmniejszą spośród wybranych trzech cyfr jest nieparzysta. Zapisuje to symbolicznie:

$$a < b < c,$$

$$c = a + l, \qquad l - \text{nieparzyste.}$$

Przy tym założeniu wyróżnia trzy przypadki:

$$\text{I. } l = 3, \qquad \text{II. } l = 5, \qquad \text{III. } l = 7.$$

Dla pierwszego z nich analizuje zależności między cyframi: *Jeśli najmniejszą z nich oznaczymy przez* a, *to największa ma wartość* $a + 3$, *natomiast pośrednia może przyjmować wartości* $a + 1$ *lub* $a + 2$.
Zapisuje to tak:

I. $a \qquad a + 3$

$a + 1$

$a + 2$

Jak tutaj dobrać dwie szukane liczby? — pyta B i po chwili zauważa:
W przypadku cyfr: $a, a + 1, a + 3$, *możemy je ustawić w następujący sposób*

$a + 3$ — *w rzędzie setek,*

$a + 1$ — *w rzędzie dziesiątek,*

a — *w rzędzie jedności,*

i od liczby o takich cyfrach odjąć liczbę o tej samej cyfrze jedności, a wymieniających się miejscami cyfrach setek i dziesiątek.
Pojawia się zapis:

$$\begin{array}{rl} \text{A.} & (a+3)\cdot 100+(a+1)\cdot 10+a \\ - & (a+1)\cdot 100+(a+3)\cdot 10+a \\ \hline & 2\cdot 90 \end{array}$$

Podobnie będzie dla cyfr: $a, a+2, a+3$ — mówi B, po czym zapisuje:

$$\begin{array}{rl} \text{B.} & (a+2)\cdot 100+a\cdot 10+(a+3) \\ - & a\cdot 100+(a+2)\cdot 10+(a+3) \\ \hline & 2\cdot 90 \end{array}$$

W analogiczny sposób rozważany jest przypadek II. $l = 5$. Po zapisaniu związku między cyframi, w następującej formie graficznej:

$$\begin{array}{ccc} a & & a+5 \\ & a+1 & \\ & a+2 & \\ & a+3 & \\ & a+4, & \end{array}$$

rozwiązujący zadanie stwierdza, że w każdym z czterech powyższych przypadków istnieją dwie cyfry, których różnica jest parzysta. Znaczy to, że za każdym razem można wskazać dwie liczby zapisane przy pomocy tych cyfr, których różnica jest parzystą wielokrotnością liczby 90.

Rozwiązanie zadania, dla każdego z tych czterech układów cyfr, zapisuje w skrócie — podając cyfry tylko jednej z szukanych liczb, odjemnej — w porządku od rzędu najwyższego do najniższego z zaznaczeniem, że cyfry odjemnika powstają z przestawiania cyfr setek i dziesiątek odjemnej. Oto tabela zbierająca wyniki:

II. $l = 5$

	(1)	(2)	(3)
A.	$a+5$	$a+1$	a
B.	$a+2$	a	$a+5$
C.	$a+5$	$a+3$	a
D.	$a+4$	a	$a+5$

Ostatni z rozważanych przypadków matematyk bada dokładnie w taki sam sposób jak przypadek $l = 5$. Zachowuje tę samą co poprzednio konwencję zapisu (patrz arkusz pracy, s. 1, p. 3). Pod tabelą pisze: *W każdym przypadku są takie dwie liczby, że ich różnica jest podzielna przez* 4, *jako parzysta wielokrotność* 90.

Etap 4

Po zapisaniu ostatniego z rozpatrywanych przypadków osoba B wyznaje obserwatorowi: *Co prawda zadanie jest już rozwiązane, ale niepokoi mnie to, że mamy aż tyle przypadków.* Kontynuuje: *Zastanawiam się, czy nie dałoby się skrócić tego rozumowania... Jeszcze raz przyjrzyjmy się punktowi 3). Dlaczego przy każdym wyborze cyfr udało się spełnić żądany warunek?* Po chwili namysłu, B z wyraźną ulgą i zadowoleniem komunikuje: *Ależ oczywiście, musiało tak być. Za każdym razem potrafiliśmy wskazać dwie cyfry, których różnica była parzysta, bo przecież z trzech dowolnie wybranych cyfr dwie muszą być tego samego stopnia parzystości: albo parzyste, albo nieparzyste. Teraz wszystko jest jasne. Niepotrzebne jest rozważanie przypadków ze względu na wartość różnicy pomiędzy największą i najmniejszą z cyfr. Można rozróżnić przypadki ze względu na parzystość lub nieparzystość cyfr* a, b, c *— mówi osoba B — i po chwili zapisuje:*

I.	a, b, c — *parzyste*	*II.*	a, b, c — *nieparzyste*
III.	a, b — *parzyste*	*IV.*	a, b — *nieparzyste*
	c — *nieparzyste*		c — *parzyste*

W każdym z tych czterech przypadków będziemy budować dwie interesujące nas liczby według tej samej zasady — kontynuuje B*: Wybierzemy dwie cyfry tego samego stopnia parzystości. Jedną z nich, powiedzmy tę większą, przyjmiemy za cyfrę setek, mniejszą za cyfrę dziesiątek, a pozostałą z trzech cyfr — za cyfrę jedności. Odejmiemy teraz liczbę, która powstanie z poprzedniej przez przestawienie cyfr dziesiątek i setek oraz zachowanie cyfry jedności.*

Po tej zapowiedzi osoba B zapisuje rozwiązanie zadania, zaczynając od przypadku I:

Ad I) Niech $a < b < c$

$$\begin{array}{rr} & 100c + 10b + a \\ - & (100b + 10c + a) \\ \hline & 90(c - b) \end{array}$$

W przypadku II rachunek będzie analogiczny — mówi B (zapisuje tylko II jak I) i przechodzi do przypadku III, zapisując:

Ad III) $a < b$

$$\begin{array}{r} 100b + 10a + c \\ -\ (100a + 10b + c) \\ \hline (b - a) \cdot 90 \end{array}$$

parzyste

Dalej osoba B stwierdza, że zapis rozwiązania przypadku IV będzie wyglądał tak samo jak III, notuje więc tylko w skrócie: IV jak III. Następnie dodaje: *To ostatnie rozwiązanie bardziej mi się podoba od poprzedniego. Mam jeszcze taką uwagę, że właściwie zostało rozwiązane nie tylko to wyjściowe zadanie, ale cały szereg zadań do niego podobnych. Pokazaliśmy, że w zbiorze A istnieją dwie liczby, których różnica jest parzystą wielokrotnością liczby* 90. *Znaczy to, że w zbiorze A istnieją dwie liczby, których różnica jest podzielna nie tylko przez* 4, *ale także przez każdy inny dzielnik liczby* 180.

Tym stwierdzeniem osoba B kończy swoją pracę nad rozwiązaniem zadania.

W drugiej fazie obserwacji badająca zwracała się do osoby B z prośbą o pewne wyjaśnienie, mówiąc: Zatrzymujemy się na chwilę nad wstępnym etapem rozwiązywania zadania — nad przykładem zbioru *A* odnoszącego się do cyfr 1, 2, 3 oraz wskazaniem dla niego dwóch poszukiwanych liczb. W moim odczuciu istotnym momentem dla dalszego rozumowania było zwrócenie uwagi na to, że różnica 312 – 132 jest liczbą 180. Czy możesz jakoś wyjaśnić, dlaczego liczba 180 wydała ci się w tej sytuacji szczególna?

Sądzę — odpowiada B — *że z tą liczbą* 180 *było tak: Analiza przykładu uświadomiła mi, że ta „zabawa" polega na pewnym przestawianiu cyfr liczby trzycyfrowej. To skojarzyło mi się z podobnym, znanym mi zadaniem o liczbach dwucyfrowych. Mianowicie, odejmując od liczby dwucyfrowej liczbę o przestawionych cyfrach, otrzymujemy wielokrotności liczby* 9. *Pomyślałam sobie — tam wielokrotności liczby* 9, *być może w tym przypadku będą wielokrotnością liczby* 90. *Dalej, to już był tylko prosty algebraiczny rachunek.*

Komentarz do rozumowania 6

1. Uogólnienie rozwiązania zadania na podstawie rozwiązania zadania w szczególnym przypadku dokonane przez osobę B nie było aktem jednorazowym. Rozszerzanie zakresu obiektów spełniających żądany w zadaniu warunek odbywało się stopniowo, w kilku etapach. Przeanalizujmy te etapy z punktu widzenia stosowanej strategii.

a) Na początku swojej pracy nad zadaniem osoba B podjęła decyzję o rozpatrzeniu przykładu zbioru spełniającego warunek zadania; okazał się on tym samym przykładem, od którego wyszedł Konrad. Rozwiązujący zadanie

wskazał w nim parę liczb l_1, l_2, których różnica wynosi 180. Potraktował ten wynik (liczbę 180) jako szczególny; przemawia za tym postawienie sobie przez niego pytania: Czy to przypadek, że różnica liczb l_1, l_2 wynosi 180? Dalszy krok rozwiązującego zadanie (zastąpienie cyfr 1, 2, 3 literami a, $a+1$, $a+2$) sugeruje, że przez tak postawione pytanie sformułował on następującą hipotezę:

> Jeśli a, b, c są kolejnymi cyframi i utworzymy z nich dwie liczby l_1, l_2, według tej samej co w wyjściowym przykładzie zasady, to różnica $l_1 - l_2$ jako liczba 180, będzie podzielna przez 4.

Rachunek algebraiczny potwierdził tę hipotezę.

b) Proces kolejnego uogólniania rozwiązania zadania otrzymanego dla przypadku kolejnych cyfr zaczął się wtedy, gdy B zwrócił uwagę nie tylko na to, że różnica liczb tworzonych według odkrytej zasady spełnia żądany warunek, ale przyjrzał się dokładniej jej postaci. Zadał sobie pytanie, dlaczego ta różnica wynosi $2 \cdot 90$. Prześledzenie przeprowadzonego wcześniej rachunku spowodowało uświadomienie sobie przez osobę B zależności: związek, w jakim pozostają cyfry liczb wskazanych jako spełniające warunek zadania (różnica między największą a najmniejszą z cyfr wynosi 2) ma swoje odbicie w wyniku odejmowania tych liczb (różnica wynosi $2 \cdot 90$). Osoba B zauważyła dalej, że tego rodzaju zależność nie zmieni się, jeśli liczbę 2 zastąpimy liczbą k, gdzie $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Stąd już otrzymuje bezpośredni wniosek: jeśli różnica k między największą i najmniejszą cyfrą, z trzech dowolnie wybranych, jest parzysta, a więc dla $k = 2, 4, 6, 8$, to różnica tak utworzonych liczb l_1, l_2 jest podzielna przez 4. Zwróćmy uwagę na to, że w tym akcie uogólniania nie wystąpiło stawianie hipotezy co do rozwiązania w szerszej klasie obiektów. Wystąpiło natomiast **uogólnienie twierdzenia przez uogólnienie rozumowania** (Krygowska, 1977b), a dokładniej **przez uzmiennienie stałej**. W wyniku tego zabiegu rozszerzyła się klasa obiektów spełniających żądany w zadaniu warunek.

c) W trzecim etapie swojej pracy osoba B zajęła się pozostałymi przypadkami rozważanych obiektów; ich zbiór był rozłączny ze zbiorem obiektów badanych w 1. i 2. etapie pracy. Nie było to uogólnienie. Rozwiązanie zadania w tych nowych przypadkach polegało na podaniu innego niż poprzednio sposobu budowania z podanych cyfr dwu liczb tak, by ich różnica była podzielna przez 4.

Trzeci akt uogólnienia wystąpił w czwartym etapie pracy osoby B. Twierdzenia udowodnione w drugim i trzecim etapie pracy — w wyniku analizy rozumowania *ex post* — zostały zunifikowane: osoba B podała nowy sposób budowania z ustalonych cyfr dwu liczb spełniających żądany warunek, tak że

objęte nim zostały wszystkie przypadki. Można powiedzieć, że wystąpiło tu **uogólnienie twierdzenia przez unifikację** (Krygowska, 1977b).

2. Kilkakrotnie w pracy osoby B nad rozwiązaniem zadania, w różnych jej fazach, wystąpił wyraźnie **rzut oka wstecz** na to, co zostało już zrobione (Polya, 1964). I tak:

a) Po rozważeniu przypadku trzech liczb kolejnych rozwiązujący zadanie prześledził przeprowadzony rachunek algebraiczny. Zrobił to nie tyle może po to (lub nie tylko po to), by sprawdzić poprawność rachunku, ile raczej w celu uzyskania odpowiedzi na — prawdopodobnie nie do końca uświadomione — pytanie, czy przez podobny rachunek nie można by objąć jeszcze innych przypadków.

b) Po uzyskaniu rozwiązania zadania (etap 3) osoba B zadała sobie pytanie: **Czy nie można by skrócić rozumowania?** Ważnym motywem do postawienia tego pytania był, jak się wydaje, czynnik emocjonalny — niezadowolenie z tego, że rozwiązanie jest nieeleganckie, bo uwzględnia dużą liczbę przypadków. Odnosi się wrażenie, że osoba rozwiązująca zadanie nie była w pełni usatysfakcjonowana z uzyskanego rozwiązania, ponieważ nie dostrzegła jasno — **jedynym chwytem myśli** — powodu, dla którego spełnienie żądanego w zadaniu warunku w każdym z rozważanych przypadków jest możliwe. Dążąc do uchwycenia tego, co nazwalibyśmy istotą rozwiązania, zanalizowała ona swoje rozwiązanie — szczególnie punkt 3 (przypadek, gdy różnica między największą i najmniejszą spośród trzech wybranych cyfr jest nieparzysta) — i postawiła sobie kolejne pytanie: Dlaczego w każdym przypadku to jest możliwe? Śledząc zapis rozwiązania uświadomiła sobie ponownie, że wszystkie przypadki badane w punkcie 3 mają wspólną cechę — przy każdym wyborze trzech cyfr udało się wśród nich wskazać dwie takie, że ich różnica jest parzysta, oraz że tę samą cechę posiada przypadek rozpatrywany w punkcie 2. Takie spojrzenie na uzyskany wynik pozwoliło osobie B „zobaczyć" to, czego wcześniej nie „widziała": przy każdym wyborze trzech cyfr, muszą być albo dwie parzyste, albo dwie nieparzyste. Ten wgląd w zadanie pozwolił B dostrzec w 4. etapie inne, krótkie rozwiązanie. zaprezentowała w etapie 4. swojej pracy.

c) Przedstawienie drugiego, satysfakcjonującego osobę B rozwiązania nie zakończyło jeszcze jej pracy nad zadaniem. Obejmując myślą całość rozwiązania i zwracając szczególną uwagę na wynik uwzględnionego odejmowania, uświadomiła sobie, że uzyskane rozwiązanie wyjściowego zadania jest dowodem ogólniejszego faktu.

Opisy pracy, tak Konrada, jak i matematyka B, ilustrują zjawisko wglądu w sytuację matematyczną, objawiające się nagłym uświadomieniem sobie istoty rozwiązania zadania, po wielu wcześniejszych próbach jego rozwiązania. Występuje ono jako „olśnienie" w twórczej pracy matematyka, i odnosi się, oczywi-

ście, do daleko poważniejszych problemów niż tu rozważane: „Jak to przyznają sami matematycy, akt iluminacji następuje zwykle po ogromnej pracy wstępnej oraz poprzedza następny etap pracy organizowanej świadomie..." (Krygowska, 1986).

Charakterystyka odgadywania własności generycznej przykładu jako podstrategii strategii „rozważ przypadki szczególne"

Wszyscy autorzy rozumowań 1–5, niezależnie od tego, które z dwu zadań (o trójkach pitagorejskich czy o podzielności różnicy przez 4) rozwiązywali, postępowali — przynajmniej we wstępnym etapie — według podobnego schematu. Jego istotę można krótko ująć tak:

Osoba rozwiązująca zadanie zaczyna od przykładu obiektu spełniającego żądany w zadaniu warunek, traktując ten przykład jako rozwiązanie w przypadku szczególnym. Następnie analizuje ten przykład starając się dostrzec jakąś jego własność w nadziei, że generuje ona ogólne rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na to, że ta droga może, ale nie musi prowadzić do sukcesu. Może się zdarzyć, że znajdziemy, choć nie od razu, a dopiero za którąś z kolejnych prób, własność, która generuje rozwiązanie ogólne. Może się także okazać, że żadna z dostrzeżonych własności przykładu takiej cechy nie posiada. Niezależnie od tego, czy takie postępowanie zakończy się powodzeniem, czy nie, podpada ono pod strategię rozważania przypadków szczególnych.

Scharakteryzowanemu tu sposobowi wykorzystania rozpatrzonego na wstępie przykładu do otrzymania ogólnego rozwiązania zadania przypisuję nazwę **odgadywanie własności generycznej przykładu**. Taki właśnie sposób prezentują przykłady 1–5. Dla odgadywania własności generycznej przykładu charakterystyczne jest stawianie hipotez do rozwiązania ogólnego, których źródłem jest wstępny przykład.

Poszukiwanie transformacji zachowującej własność przykładu

Rozumowania 6, 7, 8, które będą przedstawione poniżej, odnoszą się do zadania o trójkach pitagorejskich.

Rozumowanie 7 (Witold — uczeń drugiej klasy technikum)

Uczeń zaczyna rozwiązanie zadania od stwierdzenia: *Już mam jedną trójkę liczb:* 1, 1, 1 *(zapisuje to pod równaniem* $x^2 + y^2 = z^2$*)* i niemal natychmiast dodaje: *Nie! — niestety pomyliłem się* równocześnie przekreślając to, co przed

chwilą napisał. Po chwili mówi: *Mogę to równanie zastąpić wzorem* $(x+y)^2 - 2xy = z^2$... *ale co nam to daje?* Niedługo potem komunikuje: *Przypominam sobie z geometrii, że chyba* 3, 4, 5 *spełnia to równanie.* Po sprawdzeniu pisze: (3, 4, 5) i podkreśla ten zapis.

Następnie Witold sprawdza, czy $(3^2, 4^2, 5^2)$ spełnia równanie. Otrzymuje odpowiedź negatywną. Bezpośrednio potem stawia sobie pytanie: *A co będzie, gdy każdą liczbę trójki* (3, 4, 5) *pomnożymy przez* 2*?* Po wykonaniu odpowiedniego rachunku stwierdza, że trójka (6, 8, 10) spełnia wyjściowe równanie.

Teraz rozwiązujący zadanie zapisuje po prawej stronie kartki — jedno pod drugim — uzyskane już rozwiązania równania (*) (patrz arkusz pracy). Następnie powtarza zabieg mnożenia składowych trójki przez 2, stosując go tym razem od rozwiązania: (6, 8, 10). Po wykonaniu sprawdzenia konstatuje, że trójka (12, 16, 20) także należy do poszukiwanych trójek liczb; dopisuje ją do zestawienia. Stwierdza dalej: *To jest już system. To musi być system. Sprawdzę jeszcze na jednym przykładzie.* Bada, czy $24^2 + 32^2 = 40^2$. Otrzymuje odpowiedź „tak". Wypowiedzią: *Jestem pewien, że jest to dobry system. W ten sposób powstanie nieskończenie wiele trójek liczb spełniających równanie* $x^2 + y^2 = z^2$ uczeń kończy rozwiązanie zadania.

Bezpośrednio po tym — w ramach drugiego etapu obserwacji — badająca przeprowadziła z uczniem krótki wywiad. Oto jego przebieg:

B (badająca): Na czym polega twój system? Jak byś go opisał?

W (Witold): Wyszedłem od trójki liczb (3, 4, 5). Pomnożyłem każdą liczbę przez 2. Otrzymałem (6, 8, 10). Sprawdziłem, że jest to pierwiastek równania. Dalej robiłem tak samo: mnożyłem każdą liczbę tej nowej trójki przez 2. Sprawdziłem, że także dostaje się pierwiastek. Już widziałem system. Sprawdziłem jeszcze na jednym przykładzie. Ten sposób można powtarzać w nieskończoność. Weźmy następny przykład: (48, 64, 80) (tu wykonuje odpowiedni rachunek)... też się sprawdza.

B: Skąd wiesz, że np. trójka liczb stojąca na setnym miejscu w twoim systemie będzie spełniać równanie?

W: Wiem, że tak musi być.

B: Dlaczego? Sprawdziłeś tylko dla czterech początkowych przykładów.

W (po chwili): Ja jestem pewien, no... ale zaraz... ten system można jakoś zapisać ogólnie. (Przygląda się przez chwilę zestawieniu znalezionych pierwiastków). Mieliśmy (3, 4, 5). Ogólnie to będzie... $(3 \cdot 2^n, 4 \cdot 2^n, 5 \cdot 2^n)$, bo najpierw mnożyliśmy przez 2, potem przez 4, 8, 16 itd. Teraz można

podstawić do równania — i tu wykonuje odpowiedni rachunek (patrz arkusz pracy — zapis pod poziomą kreską).

Komentarz do rozumowania 7

1. Sposób, w jaki Witold wykorzystał przykład, jest inny niż opisany poprzednio. Badanie, które ten uczeń przeprowadził, można by scharakteryzować w następujący sposób:

Po wskazaniu przykładowej trójki spełniającej równanie pitagorejskie — (3, 4, 5) — rozwiązujący zadanie stara się odpowiedzieć na pytanie, czy innych szukanych trójek liczb nie dałoby się otrzymać z wyjściowej trójki za pomocą jakiejś jej transformacji. Dla uzyskania odpowiedzi na to pytanie **postuluje** i bada kolejno pewne **transformacje**. Są nimi: (1) podnoszenie każdej składowej trójki do potęgi drugiej, (2) mnożenie każdej składowej przez 2. Sposób (1) uczeń odrzuca. Sposób (2) daje oczekiwany rezultat. W wyniku kolejnych iteracji transformacji (2) uczeń otrzymuje trzy nowe trójki pitagorejskie; jest pewien, że jego system pozwala na uzyskanie tak wielu rozwiązań zadania, jak chcemy.

Ujmując rzecz formalnie można powiedzieć, że postawienie przez ucznia pytania: *A co będzie, gdy każdą liczbę trójki* (3, 4, 5) *pomnożymy przez* 2*?* odzwierciedla w jego rozumowaniu sformułowanie hipotezy:

> Jeśli trójkę pitagorejską poddamy transformacji (2), to otrzymamy także trójkę pitagorejską.

To, co uczeń robił dalej, było weryfikacją tej hipotezy.

2. Powyższą hipotezę Witold weryfikuje empirycznie. Pozytywny wynik sprawdzenia na trzech przykładach przekonuje go, że jest ona twierdzeniem. Wywiad co prawda wskazał na to, że uczeń jest zdolny do przeprowadzenia dowodu twierdzenia — tu sprowadzającego się do wykonania prostego rachunku algebraicznego — ale nie odbywa się to u niego spontanicznie. W tej konkretnej sytuacji uczeń został niejako nakłoniony przez inną osobę do podania ogólnego uzasadnienia swojego sądu; sam jednak takiej potrzeby nie odczuwał.

Zwróćmy uwagę na to, że w wywiadzie Witold odkrył jeszcze inny sposób budowania ciągu trójek pitagorejskich. Ujmując rzecz formalnie — w pierwszym etapie obserwacji opisał ten ciąg rekurencyjnie (trójka (a_n, b_n, c_n), gdzie $a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = 5$ oraz $a_{n+1} = a_n \cdot 2, b_{n+1} = b_n \cdot 2, c_{n+1} = c_n \cdot 2$, jest trójką pitagorejską), w wywiadzie — podał tzw. jawny opis ciągu (trójka (a_n, b_n, c_n), gdzie $a_n = 3 \cdot 2^n, b_n = 4 \cdot 2^n, c_n = 5 \cdot 2^n$ (dla n naturalnych i różnych od 0) jest trójką pitagorejską).

Rozumowanie 8 (osoba M — matematyk, nie znający rozwiązania zagadnienia trójek pitagorejskich)

Etap 1

M zaczyna od stwierdzenia, że to zadanie kojarzy mu się z twierdzeniem Pitagorasa, a co za tym idzie z geometrią. *Jedną trójkę oczywiście pamiętam* — mówi M — *jest to* $(3,4,5)$*; są to długości boków trójkąta prostokątnego. W tym zadaniu chodzi o to, by odpowiedzieć na pytanie, jakie liczby naturalne mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego.* Po chwili M kontynuuje: *Jaka transformacja zachowa kąt prosty?... Jeśli rozciągniemy boki trójkąta* $(3,4,5)$ *proporcjonalnie, to trójkąt pozostanie prostokątny. Uzyskamy to przez jednokładność. Aby długości boków pozostały liczbami naturalnymi, jednokładność musi mieć skalę naturalną. Każda trójka* $(k \cdot 3, k \cdot 4, k \cdot 5)$*, gdzie* k *jest liczbą naturalną, spełnia równanie (*). ... Ale to jest rozwiązanie trywialne. Chodzi o to, by znaleźć jeszcze inne. Spróbuję wykorzystać komputer* — mówi M i na tym przerywa rozwiązywanie zadania pod obserwacją.

Etap 2

Po kilku dniach osoba M zdała relację prowadzącej badanie z dalszego etapu swojej pracy nad zadaniem. Powiedziała, że napisała program komputerowy, wydrukowała cały arkusz trójek i próbowała wyłonić jakieś wspólne ich własności. Nie udało jej się jednak tego zrobić — stawiane hipotezy musiała odrzucić. Osoba M obiecała sięgnąć po odpowiednią literaturę; nie skontaktowała się już jednak w tej sprawie z badającą.

Komentarz do rozumowania 8

Interesujący dla nas z punktu widzenia strategii rozwiązywania zadania stosowanej przez M jest etap 1 jej pracy, drugi — nie będzie tu analizowany.

M zaczął od zmiany interpretacji treści zadania z arytmetycznej na geometryczną. W tej nowej interpretacji stosował strategię S_1. Postępował podobnie jak Witold (Rozumowanie 7). Także zadał sobie pytanie, jaka transformacja zachowa tę własność rozwiązania szczególnego, jaką jest spełnianie żądanego w zadaniu warunku. Odpowiedź na to pytanie uzyskał nie drogą prób, jak Witold, a wykorzystując bezpośrednio swoją wiedzę geometryczną.

Rozumowanie 9 (Marcin — pierwsza klasa technikum)

Etap 1

Marcin zaczyna również od wskazania trójki $(3,4,5)$ jako rozwiązania szczególnego. Potem stawia sobie pytanie: Czy trójki kolejnych liczb naturalnych spełniają rozważane równanie? Sprawdza to przypuszczenie na przykładzie $(4,5,6)$, uzyskując odpowiedź negatywną. Wyjściową trójkę zapisuje w oddzielnej części kartki po prawej stronie (patrz arkusz pracy).

Etap 2

Następnie zapowiada: *Spróbuję inaczej — wybiorę sobie jakąś liczbę za z i będę chciał znaleźć takie dwie liczby, żeby suma ich kwadratów wynosiła* z^2. Jako z wybiera kolejno: 7, 9, 10. Na tej drodze znajduje nową trójkę: $(6,8,10)$. Zapisuje ją pod pierwszą trójką. Do tego zestawienia dopisuje trójkę $(9,12,15)$, po czym sprawdza, czy spełnia ona równanie. Po otrzymaniu odpowiedzi twierdzącej uzupełnia poprzednie zestawienie trójek nowymi, niczego jednak nie sprawdzając:

$$(12,16,20)$$

$$(15,20,25)$$

$$(18,24,30)$$

$$(21,28,35).$$

Stwierdza następnie: *Na podstawie tych przykładów można wywnioskować, że jeśli każdą liczbę trójki* $(3,4,5)$ *pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera, to otrzymamy trójkę spełniającą równanie Pitagorasa. Będą to trójki:* $(x\cdot 3, x\cdot 4, x\cdot 5)$*... trzeba jeszcze dodać, że* x *nie jest zerem* (tu uczeń pisze: $x \in \mathcal{N}\setminus\{0\}$). Na pytanie badającej „Czy skończyłeś już pracę?" chłopiec odpowiada: *Tak, bo znalazłem nieskończenie wiele rozwiązań.*

Tak jak w przypadku Witolda, badająca przeprowadziła z Marcinem rozmowę:

B: Czy jesteś pewien, że każda wielokrotność rozwiązania $(3,4,5)$ jest rozwiązaniem równania?

M: Jestem pewien.

B: Skąd ta pewność?

M: Sprawdziłem to dla kilku przykładów.

B: Jak sądzisz, czy to wystarczy?

M (po chwili): No... nie zawsze; może się zdarzyć, że znajdziemy przykład, który zaprzeczy temu, co nam się wydawało zawsze prawdziwe.

B: A jak to będzie dla zadania, które teraz rozwiązywałeś?

M: Prawdę mówiąc, dopóki pani nie zaczęła mnie pytać, byłem pewien, że mój sposób da zawsze dobry wynik. (Po chwili namysłu Marcin kontynuuje:) Trzeba sprawdzić przez podstawienie, czy $(x \cdot 3, x \cdot 4, x \cdot 5)$ jest pierwiastkiem równania. Po zapisaniu

$$9x^2 + 16x^2 = 25x^2$$

$$25x^2 = 25x^2,$$

uczeń stwierdza: To się sprawdza. Znalazłem nieskończenie wiele pierwiastków równania. Wszystkie dadzą się zapisać tym wzorem (wskazuje na ogólny zapis trójki).

Komentarz do rozumowania 9

1. Jak wskazuje powyższy opis, w 1. etapie swojej pracy Marcin próbował odgadnąć własność generyczną przykładu. Po pierwszej jednak próbie, która nie zakończyła się sukcesem, uczeń zmienił „taktykę". Tę nową można opisać w następujący sposób:

Znalazł drugie rozwiązanie równania (metodą ustalenia jednej ze zmiennych), zestawił je z wyjściowym i zauważył, że druga trójka liczb daje się otrzymać z pierwszej przez transformację (2) (mnożenie każdej składowej przez 2). Następnie uzmiennił stałą 2 na dowolną liczbę naturalną n i postawił hipotezę: Jeśli trójkę $(3,4,5)$ poddamy transformacji (n) (mnożenie każdej składowej przez n), to otrzymamy także trójkę pitagorejską.

2. Jeśli chodzi o weryfikację hipotezy, to Marcin robił to podobnie jak Witold (Rozumowanie 6): empirycznie, a dopiero w wywiadzie — kierowany pytaniami badającej — uzasadnił swoje twierdzenie w sposób zupełny.

3. Marcin, tak jak i Witold, wykorzystał przykład do dwóch celów: dla odkrycia nieskończonej klasy rozwiązań (wskazania transformacji (n)) oraz do weryfikacji hipotezy.

4. Zwróćmy jeszcze uwagę na jedno zdanie wypowiedziane przez Marcina na początku wywiadu. Zapytany o to, czy skończył już pracę nad zadaniem, odpowiedział: *Tak, bo znalazłem nieskończenie wiele rozwiązań.* Przypuszczalnie uczeń sądził, że rozwiązał zadanie w sposób pełny, tzn. znalazł

zbiór wszystkich rozwiązań. To przypuszczenie potwierdza jeszcze dobitniej zachowanie (początkującej) studentki I roku matematyki, Marty, która także rozwiązywała zadanie o trójkach pitagorejskich. Zrobiła to podobnie jak Marcin i na podobne pytanie: Czy chciałaby pani popracować jeszcze nad zadaniem? — odpowiedziała: *Nie, już rozwiązałam zadanie. Znalazłam nieskończony zbiór.* Dodajmy, że po kilku dniach od daty rozwiązywania omawianego zadania Marta oznajmiła prowadzącej badanie: *Sprawdziłam w encyklopedii jak to jest z tym wynikiem. Teraz wiem, że są jeszcze inne pierwiastki równania* $x^2 + y^2 = z^2$ *niż te, które już znalazłam. Wtedy, kiedy rozwiązywałam to zadanie, byłam przekonana, że skoro znalazłam nieskończony zbiór, to znalazłam wszystko, co można było znaleźć.* Prawdopodobnie w ten sposób zostało wyrażone przekonanie ucznia: „Nieskończony zbiór obiektów spełniających jakiś warunek znaczy zbiór wszystkich obiektów spełniających ten warunek." Być może jest to jedno z wielu przekonań, jeden z poglądów składających się na obraz „świata matematyki" wytworzony przez szkolne doświadczenie ucznia. System przekonań i poglądów jednostki o matematyce jako takiej i o poszczególnych jej zagadnieniach jest jednym z czterech czynników mających wpływ na proces rozwiązywania zadania przez tę jednostkę:

1. wiedza pojęciowa i proceduralna,
2. heurystyka — strategie i techniki stosowane w rozwiązywaniu niestandardowych zadań,
3. samoregulacja, zarządzanie (panowanie nad sytuacją) — ogół decyzji odnoszących się do wyboru wiedzy i strategii stosowalnych w danej sytuacji, planowanie czynności, sprawdzanie stopnia ich wykonania oraz poprawności otrzymywanych rezultatów na każdym etapie rozwiązywania zadania,
4. system przekonań i poglądów o matematyce i o własnych możliwościach w zakresie tego przedmiotu

(*resources, heuristics, control, belief system* — Schoenfeld, 1985, 1987).

Charakterystyka poszukiwania transformacji zachowującej własność przykładu

Rozumowania 6, 7, 8 mają wspólną cechę. Jest nią to, że ich autorzy poszukiwali odpowiedzi na pytanie, które można ująć tak: Poprzez jaką transformację obiektu stanowiącego szczególne rozwiązanie zadania można z niego otrzymać inne obiekty spełniające żądany w zadaniu warunek?

Poszukiwanie odpowiedzi na to pytanie w każdym z trzech przytoczonych rozwiązań było nieco inne.

Witold — **postulował** transformację, a więc próbował zgadywać i następnie sprawdzał swoje przypuszczenia empirycznie.

Osoba M — korzystając ze swojej wiedzy na temat niezmienników przekształceń geometrycznych — **wskazała** od razu tę właściwą.

Marcin potrzebował dwu przykładów poszukiwanych obiektów. Drugi z nich znalazł zrazu niezależnie od pierwszego, a potem zestawił oba i zauważył, że **drugi można otrzymać także inaczej** — poprzez pewną transformację pierwszego; swój sposób uogólnił, wskazując całą klasę poszukiwanych obiektów przez wskazanie ciągu transformacji określonego typu.

Rozumowania 7, 8 i 9 reprezentują strategię, którą nazywam **poszukiwaniem transformacji zachowującej żądaną własność przykładu.**

Dedukcyjnie ukierunkowane badanie przykładu

Rozumowania 10, 11, które przedstawię poniżej, odnosić się będą do następującego zadania:

> **Wykazać, że kwadrat liczby nieparzystej większej od 3 ma parzystą cyfrę dziesiątek.**

(Zadanie o kwadracie liczby nieparzystej)

Rozumowanie 10 (osoba C — matematyk)

Etap 1

Osoba C zaczyna od rozważenia przykładu. Wybiera liczbę 325. W trakcie wykonywania mnożenia pisemnego tej liczby przez nią samą uświadamia sobie, że na cyfrę dziesiątek kwadratu liczby mają wpływ tylko cyfry dziesiątek i jedności tej liczby. Po tym spostrzeżeniu nie wykonuje już rachunku do końca, natomiast skupia swoją uwagę na tej części zapisu, z której można odczytać cyfrę dziesiątek wyniku, i tę część oddziela od reszty pionową kreską (zapis a) w arkuszu pracy):

	3	25
×	3	25
	16	25
+	65	0
	975	

Zadaje sobie pytanie *Jak powstała ta cyfra dziesiątek?*

Analizuje — *jest sumą dwu składników parzystych:* 2 *oraz* 0. *Jak powstały te składniki?* — pyta. *Ten w pierwszym rzędzie — liczba* 2 *— powstał tak: mnożyliśmy liczbę parzystą* 2 *(jako cyfrę dziesiątek liczby* 325*) przez nieparzystą liczbę* 5 *(jako cyfrę jedności wybranej liczby); dodaliśmy do tego cyfrę dziesiątek kwadratu liczby nieparzystej* 5. *Wzięliśmy cyfrę jedności tego wyniku. Oczywiste jest, że musieliśmy dostać liczbę parzystą, bo iloczyn liczby nieparzystej przez parzystą jest liczbą parzystą, oraz kwadrat jednocyfrowej liczby nieparzystej to albo* 9, *albo* 25, *albo* 81 *— w każdym z tych przypadków cyfra dziesiątek jest parzysta.*

Jak powstał drugi składnik mający wpływ na cyfrę dziesiątek kwadratu naszej liczby? Jest nim 0 *— otrzymało się go przez wymnożenie cyfry dziesiątek wyjściowej liczby przez cyfrę jedności tej liczby i wzięcie cyfry jedności tego wyniku. To musi być liczba parzysta, bo iloczyn liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą parzystą. A więc tak, jak dla liczby* 325, *będzie dla każdej innej liczby, której cyfra dziesiątek jest parzysta.*

A co się zmieni, jeśli cyfra dziesiątek wyjściowej liczby będzie nieparzysta? Weźmy np. 375 — mówi C i kontynuuje: *Wystarczy, jeśli pomnożymy liczbę* 75 *przez siebie* (teraz C wykonuje to mnożenie (zapis b)):

	75
×	75
	375
	525

W podobny jak poprzednio sposób C wyjaśnia, że cyfra dziesiątek kwadratu liczby nieparzystej jest cyfrą jedności sumy dwu liczb nieparzystych, i jako taka musi być parzysta.

Etap 2

Czy to już wszystko? — pyta siebie C. *Zbierzmy wnioski* — mówi:

— *Tu rozpatrywaliśmy liczbę nieparzystą kilkucyfrową. Trzeba jeszcze przypomnieć, że jeśli liczba jest jednocyfrowa większa od* 3 *i nieparzysta, to jej kwadrat ma oczywiście parzystą cyfrę dziesiątek;*

— *Jeśli liczba jest więcej niż jednocyfrowa i nieparzysta, to na cyfrę dziesiątek jej kwadratu ma wpływ tylko dwucyfrowa końcówka. Jak powstaje ta*

cyfra? (tu C śledzi poprzednie zapisy i po chwili mówi:) *Zaraz... nie trzeba rozpatrywać przypadków ze względu na to, czy cyfra dziesiątek wybranej liczby jest parzysta czy nieparzysta. Cyfra dziesiątek kwadratu liczby powstaje właściwie tak: mnożymy cyfrę jedności przez cyfrę dziesiątek liczby, podwajamy wynik — mnożenie jest przecież przemienne — następnie dodajemy cyfrę dziesiątek kwadratu jednocyfrowej liczby nieparzystej i bierzemy cyfrę jedności tego wyniku. Nie ulega wątpliwości, że otrzymana cyfra jest parzysta.*

C kończy rozwiązywanie zadania stwierdzeniem: *Można by starać się to zapisać używając liter, ale nie chce mi się tego robić, bo wiem już, na czym rzecz polega.*

Etap 3

W kilka tygodni od dnia, w którym osoba C rozwiązywała zadanie, poinformowała prowadzącą badania, że przypadkowo natknęła się na kartkę z rozwiązaniem tego zadania i po jego przeczytaniu uświadomiła sobie, iż teza twierdzenia jest prawdziwa dla wszystkich liczb, których kwadrat cyfry jedności ma parzystą cyfrę dziesiątek. Dodała, że dowodzone wcześniej twierdzenie można uogólnić do następującego: Kwadrat liczby, której cyfra jedności jest różna od 4 i różna od 6, ma parzystą cyfrę dziesiątek.

Komentarz do rozumowania 10

1. C stosował strategię, która jest inna od dwu poprzednio opisanych. Zanalizujmy dokładniej, jak doszło do uogólnienia wyniku na podstawie rozpatrzonego przykładu. C zaczął od zapisania jakiejkolwiek, przypadkowo wybranej liczby trzycyfrowej nieparzystej i obliczał jej kwadrat stosując algorytm mnożenia pisemnego. Nie interesował go wynik rachunku, a odpowiedź na pytanie: **Jak powstaje cyfra dziesiątek tego wyniku?** Analizując kolejno wykonywane czynności (działania arytmetyczne) uświadomił sobie, że cyfra dziesiątek wyniku zależy jedynie od cyfry dziesiątek i jedności wyjściowej liczby. To spostrzeżenie odniósł C do wszystkich liczb dwu i więcej cyfrowych. Nie była to hipoteza, ale przekonanie, że tak jak w analizowanym przykładzie jest w każdym innym przypadku. I było to pierwsze przejście od „szczególnego" do „ogólnego".

Następnie C wrócił do przykładu i w wyniku bardziej szczegółowej analizy rachunku uświadomił sobie, z jakich „komponentów" składa się cyfra dziesiątek kwadratu liczby. To z kolei pozwoliło mu odpowiedzieć na pytanie: **Dlaczego ta cyfra jest parzysta?** Powód, dla którego tak jest, C wyjaśnił odwołując się do

— elementarnych twierdzeń o parzystości iloczynu oraz sumy liczb naturalnych,

— wyniku rozpatrzonych w tym miejscu dodatkowo kilku przypadków szczególnych (kwadrat liczby nieparzystej jednocyfrowej ma parzystą cyfrę dziesiątek)

oraz uwzględniając szczególną własność przykładu, jaką jest parzystość cyfry dziesiątek liczby. I znowu swoje spostrzeżenie odniósł C do całej klasy przypadków — liczb posiadających tę samą własność co wyjściowy przykład. To był drugi akt uogólnienia — uogólnienie twierdzenia przez uogólnienie rozumowania, a dokładniej przez uzmiennienie stałej (z cyfry 2 na dowolną parzystą).

Drugi z kolejno rozpatrywanych przez C przykładów reprezentował klasę przypadków jeszcze nie objętych rozumowaniem. W jego badaniu uwzględnione zostało doświadczenie z badania poprzedniego przykładu. Badanie zakończyło się uzasadnieniem analizowanego twierdzenia w przypadku, gdy cyfra dziesiątek liczby jest nieparzysta.

Kolejną fazą rozwiązywania zadania (etap 2) był rzut oka wstecz na przebytą drogę. Wystąpiło w nim:

— postawienie sobie pytania, czy wszystkie przypadki zostały już rozpatrzone,

— ponowne prześledzenie uzasadnienia tezy twierdzenia; jego wynikiem była modyfikacja dowodu: połączenie dwu przypadków w jeden, czyli w istocie uogólnienie twierdzenia przez unifikację.

Ostatecznie C, choć nie zapisał dowodu twierdzenia formalnie, werbalnie przedstawił jego istotę — odkrył powód, dla którego żądana własność jest spełniona dla każdej liczby naturalnej nieparzystej. To ostatnie usatysfakcjonowało C na tyle, że przestał go interesować formalny zapis.

W odniesieniu do omawianej sytacji — można za K. Härtigiem powiedzieć, że: „... ogólne „wiedzieć dlaczego" nie opiera się (tu) na aparacie formalnym, ani na wielokrotnym sprawdzeniu rachunkiem; zmienne pozostają — przede wszystkim — *variables dans la pensée* (Härtig, 1987, s. 81).

Zatrzymajmy się jeszcze nad 3. etapem pracy osoby C. Ponowny rzut oka wstecz, który polegał na zastosowaniu wypróbowanej wcześniej metody badania do liczb nie spełniających założenia twierdzenia, doprowadził do rozszerzenia zbioru liczb spełniających tezę twierdzenia. Wystąpiło tu uogólnienie

twierdzenia przez uogólnienie rozumowania.

Rozumowanie 11 (Piotr — uczeń piątej klasy technikum)

Etap 1

Piotr zaczyna rozwiązywanie zadania od zapisania — jak się wyraził — „wzoru na liczbę nieparzystą: $a = 2n-1$". Następnie dopisuje warunek $2n-1 > 3$ i przekształca go (pomyłkowo) do postaci: $n > 1$. Dalej, stosując wzór na kwadrat różnicy, uczeń oblicza kwadrat liczby a. Otrzymanemu wyrażeniu próbuje nadać inną postać — pisze: $4n^2 - 4n = 4n(n-1)$. Po chwili namysłu stwierdza: *Tu chyba nic się już nie da zrobić* i oddziela poziomą kreską to, co do tej pory zapisał, od reszty kartki (patrz arkusz pracy).

Etap 2

Teraz uczeń zapisuje i oblicza kwadraty liczb: 9, 5, 7, 11 i 13. Stwierdza, że w każdym z tych przypadków cyfra dziesiątek jest parzysta.

Jak to będzie dla liczby kilkucyfrowej? — pyta uczeń i zapisuje liczbę 297. Przy wykonywaniu mnożenia tej liczby przez siebie samą — na samym początku rachunku — myli się i przekreśla przykład.

Przechodzi do obliczenia kwadratu liczby 653. Po zapisaniu:

$$\begin{array}{r} 653 \\ \underline{653} \\ 1959 \\ 3265 \end{array}$$

mówi: *Można by dalej liczyć, ale nie trzeba, bo wynik mnożenia* $653 \cdot 6$ *zapisywałoby się zaczynając dopiero od rzędu setek — to nie będzie miało wpływu na cyfrę dziesiątek wyniku całego mnożenia.* Teraz uczeń oddziela pionową kreską tę część fragmentarycznie wykonanego mnożenia, z której to części można odczytać cyfrę dziesiątek wyniku (patrz arkusz pracy). Pyta: *Co można powiedzieć o tej cyfrze dziesiątek?* Po chwili konstatuje: *Tutaj trzeba dodać* 5 *i* 5, *i zapisać w rzędzie dziesiątek wyniku mnożenia cyfrę jedności tej sumy, czyli 0, a więc cyfrę parzystą* (zapisuje cyfrę 0 w rzędzie dziesiątek wyniku). Niedługo potem dodaje: *To „5" u góry (wskazuje na wiersz, w którym jest zapisana liczba* 1959*) powstało tak, że wymnożyliśmy cyfrę jedności liczby przez cyfrę dziesiątek* — $3 \cdot 5$ — *i wzięliśmy cyfrę jedności wyniku; to dolne* 5 (wskazuje na cyfrę jedności liczby 3265) *powstało podobnie, z tym tylko, że mnożyliśmy w innej kolejności. ... Właściwie, żeby otrzymać cyfrę dziesiątek kwadratu liczby, mnożyliśmy cyfrę jedności tej liczby przez cyfrę jej dziesiątek i ten wynik mnożyliśmy jeszcze przez* 2*; był liczbą parzystą, czyli wynik ma w rzędzie jedności*

cyfrę parzystą — ta właśnie cyfra jest cyfrą dziesiątek kwadratu liczby.

Po chwili zastanowienia Piotr mówi: *Można by to jakoś zapisać ogólnie... Interesuje nas tylko cyfra dziesiątek i jedności liczby, czyli można zapisać jakoś tak: $a = ...mn$* (patrz arkusz pracy), *gdzie m to cyfra dziesiątek, n — cyfra jedności. Mnożymy m razy n, potem n razy m i to dodajemy. Otrzymujemy oczywiście $2mn$; cyfra jedności tego iloczynu musi być parzysta.*

Na tym uczeń zakończył swoją pracę nad rozwiązaniem zadania.

Komentarz do rozumowania 11

1. Podane przez Piotra uzasadnienie faktu: cyfra dziesiątek kwadratu liczby nieparzystej jest parzysta — nie obejmuje, niestety, wszystkich przypadków. Nie można go odnieść do takich liczb dwu i więcej cyfrowych, dla których kwadrat cyfry jedności przekracza 10. Uczeń dokonał więc za szerokiego uogólnienia. To, że uczeń nie zmodyfikował podanego uzasadnienia tak, by objęło ono również liczby nieparzyste z cyfrą jedności 5, 7, 9, niekoniecznie znaczy iż potencjalnie nie był do tego zdolny. Sądzę, że występująca tu trudność nie jest ściśle merytoryczna, a dotyczy raczej strategii czy metody. Niewykluczone, że skupienie się na ogólnym zapisie dostrzeżonej prawidłowości — bezpośrednio po rozważeniu przykładu — spowodowało czasowe odsunięcie poszukiwania odpowiedzi na pytanie: Czy tak, jak dla liczby 653, będzie w każdym innym przypadku? Po formalnym zapisaniu tego, co zauważył w przypadku szczególnym, uczeń nie powrócił już do pytania o inne przypadki, tak jakby o tej sprawie zapomniał. Jest również możliwe, że w ogóle nie postawił sobie pytania: Czy uwzględniłem już wszystkie przypadki?

Gdyby wskazany przez Piotra powód, dla którego żądany w zadaniu warunek zachodzi, odnieść tylko do liczb mających 1 lub 3 jako cyfrę jedności, to należałoby go uznać za wystarczający. W tym przypadku uczeń postępował podobnie jak matematyk C rozwiązujący to samo zadanie. Zaczął od przykładu, w związku z którym zadał sobie ważne pytanie: **W jaki sposób powstaje cyfra dziesiątek tej liczby? Dlaczego jest ona parzysta?** Odpowiedź na to pytanie uzyskał przez wgląd w algorytm mnożenia pisemnego. Dostrzeżoną własność przykładu uogólnił używając argumentacji ogólnej.

Formalny zapis dowodu nie jest jednak poprawny. Symbol „mn", użyty w opisie tej samej sytuacji, ma podwójne znaczenie:

- w zapisie $a = ...mn$ — oznacza tzw. dwucyfrową końcówkę liczby, czyli liczbę $10m + n$, gdzie $m, n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$; tak więc uczeń zapisał liczbę dwucyfrową niezgodnie z przyjętą w arytmetyce konwencją,

- w zapisie $mn + nm = 2mn$ — oznacza iloczyn.

Z tej dwuznaczności symbolu rozwiązujący zadanie nie zdawał sobie sprawy.

2. Postępowanie Piotra w 1. etapie pracy, kiedy to podjęta przez niego próba rozwiązania zadania nie powiodła się, jest przykładem stosowania strategii, która ostatnio występuje w literaturze dydaktycznej pod nazwą **strategii pierwszego obiecującego sygnału** (*strategy of the first promising signal* — Hejný, 1992). W odniesieniu do analizowanego zadania można ją opisać w następujący sposób:

Termin „liczba nieparzysta", występujący w treści zadania, był sygnałem uruchamiającym myśl: „zapisać to tak, jak robiło się to zwykle w szkole, gdy była mowa o liczbie nieparzystej". Uczeń pozytywnie ocenił swoje możliwości w tym względzie: „umiem to zrobić", i podjął szybką decyzję: „zrobię to tutaj". To z kolei zablokowało bądź odsunęło w czasie podjęcie poszukiwania w innym kierunku i — co bardzo ważne — postawienie sobie pytania: Czy z tego zapisu liczby nieparzystej mam w ogóle szansę odczytać uzasadnienie tego, że ta liczba spełnia żądaną własność?

Po pewnym czasie Piotrowi udało się szczęśliwie zmienić niewłaściwy kierunek poszukiwań.

Wspomniana wyżej strategia łączy się z zagadnieniem czynników metapoznawczych interweniujących w procesie rozwiązywania zadania matematycznego: „Działalność matematyczna wymaga nie tylko wiedzy odnoszącej się do reguł, faktów i własności, ale również rozumienia tego, kiedy i w jaki sposób tej wiedzy użyć". (Boekaerts, Seegers, Vermeer, 1995, s. 242).

Rozumowanie 12 (osoba K — matematyk)

Poniższe rozumowanie odnosi się do następującego zadania:

> **Ile można zbudować trójkątów różnobocznych, których miarami boków są liczby naturalne:** $1, 2, 3, \ldots, n$.

(Zadanie o liczbie trójkątów)

Etap 1

K uświadamia sobie, że poszukiwana liczba trójkątów nie jest liczbą wszystkich trójelementowych podzbiorów zbioru liczb naturalnych od 1 do n. Długościami boków trójkąta należącymi do rozważanego zbioru liczb mogą być tylko takie trzy liczby, które spełniają warunek trójkąta. K stawia sobie pytanie: W jaki sposób szukać takich układów liczb?

Decyduje się na rozważenie przykładu. Wybiera $n = 10$. Motywuje ten wybór tym, że jest to dostatecznie duże n, by można było dostrzec, a następnie uogólnić jakieś zależności. Wypisuje zbiór liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

W tym przypadku — myśli K — znalezienie poszukiwanej w zadaniu wszystkich trójek o składowych należących do zbioru liczb naturalnych od 1 do 10, różnych między sobą oraz spełniających warunek trójkąta. K zadaje sobie pytanie: **Jaki przyjąć system wpisywania tych trójek, by trzy dowolne liczby z naszego zbioru, różne między sobą i spełniające warunek trójkąta, były składowymi dokładnie jednej trójki?**

Jeśli długości boków trójkąta zapisywałoby się w porządku ich wzrastania jako liczby a, b, c — rozumuje K — to warunek trójkąta sprowadziłby się do warunku: $a > c-b$. To zaś sugeruje następujący sposób wypisywania żądanych trójek liczb: ustalić liczbę a jako długość jednego boku trójkąta i dobierać do niej długości pozostałych boków b, c tak, by te trzy liczby spełniały dwa warunki:

- $a < b < c$,
- $c - b < a$.

K realizuje to zamierzenie, wybierając kolejno liczbę z ustalonego zbioru ($n = 10$) i traktując ją jako długość najkrótszego boku trójkąta. Wychodząc od liczby 1 zauważa, że nie można do niej dobrać dwu liczb b, c ($b < c$) od niej większych, by różnica $c - b$ była mniejsza od 1. Tak więc liczba 1 nie może być bokiem żądanego trójkąta rozważanego typu. (Rozwiązujący zadanie odnosi to spostrzeżenie nie tylko do $n = 10$, ale do dowolnego n.)

Do liczby 2 jako pierwszej składowej trójki — konstatuje K — jako druga i trzecia składowa będą dobierane takie liczby b, c, że b jest większe od 2, c jest większe od b, oraz różnica $c - b$ wynosi 1. Po wypisaniu takich trójek rozwiązujący zadanie oddziela to zestawienie poziomą kreską i przechodzi do wypisywania innej ich grupy, przy ustalonym $a = 3$. Uświadamia sobie, że z liczbą 3 na pierwszej pozycji będą występować dwa rodzaje trójek: liczbami b, c mogą być teraz takie liczby, dla których $c - b$ wynosi 1, albo takie, dla których $c - b$ wynosi 2. Trójki każdego z tych dwu rodzajów są wypisywane w innym wierszu:

3, 4, 5; 3, 5, 6; 3, 6, 7; 3, 7, 8; 3, 8, 9; 3, 9, 10;
3, 4, 6; 3, 5, 7; 3, 6, 8; 3, 7, 9; 3, 8, 10.

Według tej samej techniki osoba K wypisuje dalsze trójki liczb, kolejno z liczbą 4, 5, 6, 7 i 8 na pierwszej pozycji (s. 1 arkusza pracy osoby K). Tak więc w dokonywanym zestawieniu trójek liczb dla ustalonej pierwszej składowej a

— w jednym wierszu znajdują się trójki liczb, dla których różnica $c - b$ jest stała,

— w różnych wierszach — takie trójki, dla których różnica $c - b$ nie jest taka sama.

Ponadto poziomymi kreskami oddzielone są zestawienia trójek dla poszczególnych a.

Etap 2

Po wykonaniu zestawienia poszukiwanych trójek liczb dla $n = 10$ i ich zliczeniu, osoba K obserwuje tabelę z nastawieniem na dostrzeżenie jakichś jej własności. Oto poczynione przez nią spostrzeżenia:

1. Liczba wierszy zapisanych dla ustalonego a (pierwsza składowa trójki) najpierw o 1 wzrasta, od wartości 1 (dla $a = 2$) do 4 (dla $a = 5$), potem maleje.

2. Dla ustalonego a, o ile $a \leq 5$, liczba wierszy w tabeli wynosi $a - 1$. Dla $a > 5$ tak już nie jest; dla $a = 6$ są trzy wiersze, dla $a = 7$ tylko 2, i wreszcie dla $a = 8$ jeden wiersz.

Pozycja liczby 5 w rozpatrywanym zbiorze jest szczególna — myśli K — i w związku z tym stawia kolejne pytanie: Dlaczego tak jest, **jak wyjaśnić tę własność tabeli?**

Prowadzącej badania nie udało się odtworzyć dokładnie rozumowania, w wyniku którego osoba K otrzymała odpowiedź na postawione wyżej pytanie. Wiadomo jednak, że analizowała sposób konstruowania żądanych trójek liczb, wyobrażając sobie ciąg liczb naturalnych od 1 do 10 na osi liczbowej. Rozumowanie mogło przebiegać w następujący sposób:

> Ustalmy pierwszą składową trójki jako a ($1 < a \leq 8$), drugą i trzecią jej składową — liczby b, c — dobieramy spośród liczb większych od a, czyli należących do zbioru
>
> $$a + 1,\ a + 2, \ldots, 10,$$
>
> tak, by spełnione były warunki: $b < c$ oraz $c - b < a$. Jeśli wyobrazimy sobie ciąg liczb naturalnych od 1 do 10 na osi liczbowej, to na układ tych warunków można popatrzeć tak, że c następuje po b oraz odległość między c, b jest jedną z liczb
>
> $$1, 2 \ldots, a - 1.$$
>
> W zbiorze zaś liczb następujących po a, z których wybieramy b, c, odległości między liczbami przyjmują wartości:
>
> $$1, 2 \ldots, 10 - (a + 1).$$
>
> To, czy dla danego a każda z dopuszczalnych odległości między c, b (czyli liczb $1, 2, \ldots, a - 1$) może być przyjęta, czy nie, zależy od związku, w jakim pozostają liczby $10 - (a + 1)$ oraz $a - 1$.

Jeśli maksymalna odległość w zbiorze liczb następujących po a jest niemniejsza niż maksymalna z dopuszczalnych dla tego a odległości między b, c, to oczywiście każda z tych dopuszczalnych odległości c od b może być osiągnięta.

Dla jakiego a ten ostatni warunek będzie spełniony?

Właściwie pytamy o to, dla jakiego a — w ciągu liczb naturalnych od 1 do 10 — odległość a od pierwszej liczby w tym ciągu jest niewiększa od odległości liczby bezpośrednio następującej po a od ostatniej liczby ciągu, czyli dla jakiego a jest $a - 1 \leq 10 - (a + 1)$.

Oczywiście, taką własność ma każda liczba, która nie przekracza 5. To wyjaśnia, dlaczego w zestawieniu trójek liczb dla danego a, jeśli $1 < a \leq 5$, występuje $a - 1$ wierszy; w każdym z nich odległość c od b jest ustalona i wynosi odpowiednio 1, 2, itd., aż do $a - 1$ włącznie.

Jeśli a jest liczbą większą od 5, to odległość liczby bezpośrednio następującej po a od liczby 10 jest mniejsza niż odległość liczby a od liczby 1. Znaczy to, że dla $a > 5$ każda z możliwych różnic liczby b, c dobieranych do liczby a jest „dopuszczalna". To z kolei znaczy, że każda trójka liczb (a, b, c), gdzie $a > 5$, $a < b < c \leq 10$, spełnia warunek trójkąta.

W wyniku przeprowadzonego rozumowania osoba K znajduje uzasadnienie zaobserwowanej własności tabeli dla $n = 10$. Daje temu wyraz, między innymi, przez zanotowanie pewnych uwag (patrz s. 1 arkusza pracy osoby K), mianowicie:

— wyróżnia graficznie tę część zestawienia, która obejmuje trójki o pierwszej składowej $a = 5$ (obwodząc ją grubą ramką i stawiając obok niej wykrzyknik),

— obok zestawienia trójek dla $a > 5$ pisze:

„dla $5 < a < b < c \leq 10$, a, b, c dobra trójka, bo $c - b < a$ zawsze;

dla $5 < a < b < c \leq 10$ jest $\binom{5}{3} = 10$ trójek".

Etap 3

Osoba rozwiązująca zadanie przechodzi teraz do uogólnienia rozwiązania zadania uzyskanego dla szczególnego n — na dowolną liczbę naturalną. Dostrzega od razu, że

1. jeśli n będzie dowolną liczbą naturalną, to rolę liczby 5 z przeanalizowanego przykładu będzie odgrywać liczba $k = [\frac{n}{2}]$ (całkowita część liczby $\frac{n}{2}$),

2. liczba rozpatrywanych trójek, dla których pierwsza składowa jest liczbą większą od k, wynosi $\binom{n-[\frac{n}{2}]}{3}$.

Jako problem do rozwiązania K stawia sobie teraz obliczenie, ile jest wszystkich trójek liczb, dla których pierwsza składowa jest ustalona i niewiększa od całkowitej części liczby $\frac{n}{2}$. Zaczyna od zapisania tych trójek przy użyciu symboli algebraicznych. Wzorcem do tego opisu jest wyróżniona wcześniej część zestawienia dla $a = 5$. Opis odpowiada poszczególnym wierszom tabeli (patrz s. 2 arkusza pracy osoby K). I tak:

— trójki liczb, dla których różnica $c - b$ wynosi 1, zapisane w postaci

$$a \quad a+i \quad a+(i+1), \qquad \text{gdzie} \quad i = 1,2,\ldots,n-a-1,$$

— trójki liczb, dla których różnica $c - b$ wynosi 2 przyjmują postać

$$a \quad a+i \quad a+(i+2), \qquad \text{gdzie} \quad i = 1,2,\ldots,n-a-2,$$

itd., i wreszcie

— trójki liczb, dla których różnica $c - b$ wynosi $a - 1$ zapisane są jako

$$a \quad a+i \quad a+(i+a-1), \qquad \text{gdzie} \quad i = 1,2,\ldots,n-a-(a-1).$$

Dla uzyskania liczby wszystkich tak zapisanych trójek K oblicza sumę liczb wskazujących, ile różnych wartości może przyjmować zmienna i w opisie tych trójek (odpowiada to liczbie trójek ze wszystkich wierszy tej „komórki" zestawienia, która obejmuje trójki o tej samej pierwszej składowej a). Jest to więc suma liczb

$$(n-a-1)+(n-a-2)+\cdots+n-a-a(a-1),$$

czyli liczba

$$(a-1)(n-a)-(1+2+\cdots+a-1).$$

Następnie K tworzy sumę liczb tej postaci przy zmieniającej się kolejno wartości a — w zakresie od 1 do $k = [\frac{n}{2}]$. Tak więc liczba postaci

$$\sum_{a=1}^{k}(a-1)(n-a)-(1+2+\cdots+a-1),$$

która po przekształceniu przybiera postać

$$\sum_{a=1}^{k}(a-1)(n-\frac{3}{2}a),$$

jest liczbą wszystkich trójek, dla których pierwsza składowa jest dowolną liczbą naturalną niewiększą od liczby $[\frac{n}{2}]$.

Teraz K przechodzi do sprawdzenia, czy nie popełniła jakiegoś błędu w proponowanym sposobie obliczania żądanych trójek liczb dla dowolnego n. Mianowicie oblicza według tego sposobu liczbę trójek dla $n = 10$, dla których pierwsza składowa zmienia się od 1 do 5, i porównuje ją z odpowiadającą jej liczbą odczytaną z tabeli wykonanej w pierwszym etapie pracy. Podobne sprawdzenie wykonuje dla $n = 9$. Uzyskawszy w obydwu przypadkach rezultat pozytywny, przechodzi do następnego etapu obliczeń.

Do uzyskanej już liczby — rozumuje K — należy dodać jeszcze liczbę tych wszystkich trójek, dla których pierwsza składowa jest dowolną liczbą większą od $[\frac{n}{2}]$. Zgodnie z tym, co zostało już zauważone wcześniej, wyraża się to liczbą trzyelementowych kombinacji zbioru tych liczb od 1 do n, które są większe od $[\frac{n}{2}]$, czyli liczbą $\binom{n-[\frac{n}{2}]}{3}$.

Pojawia się zapis rozwiązania (patrz s. 3 arkusza pracy osoby K), z rozróżnieniem na liczbę parzystą i nieparzystą:

$$\sum_{a/1}^{[\frac{n}{2}]}(a-1)(n-\frac{3}{2}a)+\binom{n-[\frac{n}{2}]}{3};$$

$$\text{dla } n=2k \quad \sum_{a/1}^{k}(a-1)(n-\frac{3}{2}a)+\binom{k}{3}$$

$$\text{dla } n=2k+1 \quad \sum_{a/1}^{k}(a-1)(n-\frac{3}{2}a)+\binom{k+1}{3}$$

Osoba K nie jest w pełni zadowolona z uzyskanego dotychczas rezultatu, ze względu na konieczność rozróżniania dwu przypadków; wyraża to notatka: *Smutne, że nie mam jednego ładnego wzoru.*

Etap 4

Następuje teraz ostatni etap obliczeń. Ich celem jest wyeliminowanie symbolu $\sum$ z wyrażeń opisujących poszukiwaną w zadaniu liczbę. Przekształcenia tych wyrażeń, zajmujące strony od 3 do 5b w arkuszu pracy osoby K, doprowadziły ostatecznie do podania następującej odpowiedzi:

Licza trójkątów różnobocznych, których miarami boków są liczby naturalne $1, 2, 3, \ldots, n$, wynosi dla $n = 2k \quad x = \frac{2}{3}k(k-1)(k-\frac{5}{4})$,
dla $n = 2k+1 \quad x = \frac{2}{3}k(k-1)\left(k-\frac{1}{4}\right)$.

Osoba K kończy rozwiązanie zadania postawieniem problemu: *Czy nie można tego ująć w jeden wzór?*

Komentarz do rozumowania 12

1. Sposób wykorzystania szczególnego przypadku w Rozumowaniu 12 jest bardzo oryginalny. Można go uznać za model badania matematycznego. Osoba K świadomie wybrała typ przykładu — zbiór o takiej mocy, która nie jest ani bardzo małą, ani zbyt dużą liczbą. Zdecydowała się rozważyć $n = 10$ sądząc, że uda się jej na tym przykładzie zaobserwować, a następnie uogólnić, sposób konstruowania żądanych w zadaniu trójek liczb i ostatecznie wyrazić ich liczbę przez n. Specyfiką tego rozumowania jest nie tyle to, że elementy empirii przeplatają się z elementami dedukcji, co interakcja tych dwu typów rozumowania w badaniu samego przykładu: dedukcja poprzedzała fazę empirii, po której znów następowała faza dedukcji. Na czym to dokładniej polegało?

Otóż K organizowała badanie empiryczne inaczej niż wiele innych osób rozwiązujących zadanie o liczbie trójkątów (obserwowanych przez prowadzącą badania; ich rozumowania będą dokładniej analizowane w innej, szerszej pracy). Osoby te najpierw wybierały jakąś trójkę liczb o składowych z ustalonego przez siebie zbioru, a następnie sprawdzały, czy spełnia ona warunek trójkąta. Osoba K postępowała na odwrót. Zaczęła od odpowiedzi na pytanie ogólne: **W jakim związku pozostają ze sobą składowe trójki a, b, c, jeśli założymy, że spełnia ona warunek trójkąta?** Potem dopiero tworzyła trójki liczb o składowych należących do wybranego zbioru, pozostające w tym związku. K udało się zdecydowanie uprościć warunek trójkąta w postaci $|c-b| < a < b+c$, dzięki pewnej technice — przyjęciu założenia: $a < b < c$. Warunek $c - b < a$, równoważny warunkowi trójkąta przy założeniu $a < b < c$, „podyktował" K bardzo klarowny system, według którego tworzyła żądane trójki liczb: wybierać kolejno liczbę a i dobierać do niej b oraz c.

Tak więc **dedukcja organizowała empirię**, która z kolei podsuwała drogę dedukcji. Była to **empiria dobrze zorganizowana**, również jeśli chodzi o sam zapis — zestawienie trójek jest bardzo przejrzyste, jego wykonywaniu towarzyszyła myśl o późniejszym uogólnieniu sposobu, co częściowo wystąpiło już na samym początku fazy empirii. K stwierdziła, że to, iż liczba 1 nie wystąpiła w żadnej trójce tworzonego zestawienia, odnosi się do dowolnego n.

Wykonanie zestawienia poszukiwanych trójek liczb dla $n = 10$ bynajmniej nie zakończyło badania tego przypadku. Nastąpiła po nim dalsza, bardzo istotna faza: dedukcja. Osoba K analizowała przygotowaną w 1. etapie pracy tabelę w celu zauważenia jej własności. Po dostrzeżeniu pewnych specyficznych własności tej tabeli K nie sformułowała żadnej hipotezy, a starała się

wyjaśnić, a więc **wydedukować** z przyjętego systemu konstrukcji żądanych trójek, **dlaczego dla** $n = 10$ **tabela ma taką własność**. Po przeprowadzeniu tego rozumowania osoba K była już pewna, że w przypadku dowolnego n rolę liczby 5 odgrywa liczba $[\frac{n}{2}]$, i jest to wynik kolejnego uogólnienia — przez uzmiennienie stałej.

Droga do uzyskania ostatecznego rozwiązania, to jest wskazania liczby poszukiwanych trójek dla dowolnego n, była jeszcze długa. Dojście do tego wyniku wymagało jeszcze wielu czynności, wśród których można wyróżnić:

a) „przetłumaczenie" poszczególnych „komórek" tabeli uzyskanej w 1. etapie tak, by odpowiadało to dowolnemu n; sprowadzało się to do kilkakrotnego uzmiennienia stałej, efektem czego było wyrażenie poszukiwanej liczby za pomocą symbolu $\sum$ (patrz druga strona arkusza pracy),

b) „rozwijanie" otrzymanego wyrażenia do takiej postaci, w której symbol $\sum$ już nie występuje i która jest możliwie najprostsza (z rozbiciem na dwa przypadki: I — n parzyste, II — n nieparzyste).

2. W trakcie wykonywania przekształceń wyrażeń algebraicznych — w różnych fazach rachunku — osoba K odwoływała się do przykładu rozważanego w 1. etapie, tym razem w celu sprawdzenia poprawności wykonywanego rachunku algebraicznego (tę czynność traktowała jednak jako wstydliwą).

Sądzę, że powyższe rozwiązanie zadania (w szczególności dowód twierdzenia na stronie 6. arkusza pracy K) dobrze ilustruje jedną z tez K. Härtiga na temat dowodzenia w matematyce: „Opracowanie przypadków szczególnych lub pojedynczych może być [...] bardzo owocne, gdy poźniej ma nastąpić uogólnienie, stanowi główną część pracy, istotną ideę dowodu". (Härtig, 1987, s. 80)

Autorem powyższego rozumowania była Profesor Anna Zofia Krygowska. Jej pracy nad rozwiązaniem zadania nie obserwowałam. Pani Profesor przedstawiła drogę, na jakiej doszła do rozwiązania — w ramach prowadzonego przez siebie ogólnopolskiego seminarium z dydaktyki matematyki, które odbyło się w Zakładzie Dydaktyki Matematyki WSP w Krakowie dnia 24. II. 1987r. Notatki, których kopia jest w tej pracy prezentowana jako arkusz pracy osoby K, wraz z innymi materiałami zostały przekazane do wspomnianego Zakładu już po śmierci Pani Profesor — na Jej życzenie wyrażone w ostatniej woli. W przedstawionym powyżej opisie uwzględniłam rękopis Pani Profesor oraz moje notatki ze wspomnianego seminarium.

Charakterystyka dedukcyjnie ukierunkowanego badania przykładu

Rozumowania 10, 11 i 12, jakkolwiek różnią się między sobą, mają pewną cechę wspólną. Jest nią to, że ich autorzy, rozważając konkretny przykład sytuacji zadaniowej, dostrzegają własność tego przykładu i następnie zadają sobie pytanie: Dlaczego rozpatrywany przykład spełnia tę własność? W odpowiedzi na to pytanie używają argumentacji ogólnej, dedukują. Wynik uzyskany dla przypadku szczególnego uogólniają — przez uzmiennienie stałych — na pozostałe przypadki. Takiemu sposobowi wykorzystania rozwiązania zadania w szczególnym przypadku nadaję nazwę **dedukcyjnie ukierunkowane badanie przykładu.**

Oczywiście, wspomniane rozumowania różnią się między sobą znacznie, jeśli wziąć pod uwagę inne aspekty niż strategia rozwiązywania zadania. Zasadnicza różnica odnosi się do złożoności struktury przykładu. Przykłady rozważane przez matematyka C oraz Piotra — ucznia kończącego szkołę średnią — to po prostu jakiekolwiek przykłady liczb trzycyfrowych nieparzystych, z których każdą mnoży się przez siebie. Rozwiązanie zadania „o liczbie trójkątów" dla n=10 wymagało od matematyka K skonstruowania zbioru wszystkich trójek liczb naturalnych o składowych zmieniających się od 1 do 10 i spełniających warunek trójkąta. To samo w sobie jest zadaniem niełatwym.

Uwagi końcowe

1. Znaczenie używanego w artykule terminu „rozwiązanie zadania w przypadku szczególnym" („rozważenie przykładu") nie jest takie samo dla wszystkich czterech rozpatrywanych tu zadań; zmienia się w zależności od struktury logicznej zadania, którą uwidocznia tabela 2.

W odniesieniu do zadań o podzielności różnicy przez 4 i o kwadracie liczby nieparzystej — „rozwiązać zadanie w szczególnym przypadku" znaczyło wybrać (przez ustalenie parametrów) obiekt, o jakim mowa w zadaniu, i wykazać, że spełnia on żądany warunek.

„Rozwiązanie w szczególnym przypadku" zadania o liczbie trójkątów znaczyło wybranie (przez ustalenie mocy zbioru Z) argumentu szukanej funkcji i wyznaczenie odpowiadającej mu wartości tej funkcji. Wymagało to skonstruowania odpowiadającej wybranemu argumentowi rodziny wszystkich trójelementowych podzbiorów Z spełniających warunek trójkąta i znalezienie ich liczby.

Zadanie	Struktura zadania
o trójkach pitagorejskich	Wyznaczyć zbiór obiektów spełniających określony warunek.
o podzielności różnicy przez 4	Wykazać, że każdy element pewnej rodziny obiektów spełnia określony warunek.
o kwadracie liczby nieparzystej	Jak w zadaniu o podzielności różnicy przez 4.
o liczbie trójkątów	Utworzyć wzór funkcji (danej przepisem słownym), która liczbie n przyporządkowuje liczbę pewnej rodziny trójelementowych podzbiorów zbioru $Z = \{1, 2, 3, ..., n\}$

Tab. 2

Wreszcie „rozwiązanie w przypadku szczególnym" zadania o trójkach pitagorejskich polegało po prostu na wskazaniu jednego elementu poszukiwanego zbioru. Specyfika tego zadania ujawniła się też w tym, że każda z sześciu rozwiązujących je osób wskazywała od razu tę samą trójkę, już wcześniej znaną.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że obiekty występujące w poszczególnych zadaniach różni złożoność struktury.

2. Przedstawione w głównej części artykułu opisy poszukiwania rozwiązania otwartego zadania matematycznego pokazują, że rozwiązanie takiego zadania w szczególnym przypadku, jakim jest pojedynczy przykład, bywa wykorzystywane i może prowadzić do odkrycia rozwiązania zadania w przypadku ogólnym. Przykład pomaga nie tylko uczniowi szkoły podstawowej czy średniej, ale także matematykowi.

Tak więc stosowanie strategii „rozważ przypadki szczególne" jest cechą procesu rozwiązywania otwartego zadania, wspólną dla różnych poziomów wiedzy i doświadczenia matematycznego — na poziomie ucznia ostatniej klasy szkoły podstawowej, ucznia szkoły średniej i matematyka.

3. W odkrywaniu rozwiązania zadania przykład może być wykorzystany w różny sposób. Przedstawiłam tu trzy takie sposoby, trzy różne podstrategie strategii rozważania przypadków szczególnych. Każdy z tych sposobów był stosowany tak w pracy ucznia, jak i matematyka. Nazwy tych sposobów wskazują na kierunek eksploracji przykładu w badaniu sytuacji matematycznej, podczas gdy strategie wyróżnione przez Schoenfelda (patrz s. 2, 3) specyfikują raczej termin „szczególny przypadek", tłumaczą, czym może być szczególny przypadek w różnych sytuacjach zadaniowych.

Strategia, którą przedstawiłam w pracy jako pierwszą — odgadywanie własności generycznej przykładu — została zilustrowana większą liczbą przykładowych rozumowań towarzyszących poszukiwaniu rozwiązania zadania niż dwie pozostałe strategie. Nie jest to przypadek. Moje badania pokazały, że ta strategia stosowana jest częściej niż poszukiwanie transformacji zachowującej własność przykładu oraz dedukcyjnie ukierunkowane badanie przykładu, i to częściej przez uczniów niż matematyków.

4. Ze stosowaniem powyższych strategii (poza dedukcyjnie ukierunkowanym badaniem przykładu) wiąże się stawianie hipotez oraz ich weryfikacja. Każdy z autorów Rozumowań 1–9 zaczynał weryfikację swoich hipotez (przynajmniej jednej z nich) od badania, czy przykład ją potwierdza. I matematyk, i uczeń szkoły średniej, i uczeń ósmej klasy szkoły podstawowej postępowali tak samo — odrzucali hipotezę po wskazaniu kontrprzykładu. Takie rozumienie twierdzenia — co wykazały moje obserwacje (Ciosek, 1984) — występuje już na poziomie klasy czwartej szkoły podstawowej. Jest jednak różnica w rozumowaniu matematyka i ucznia, jeśli chodzi o status hipotezy w przypadku, gdy potwierdza ją kilka przykładów. Matematyk podejrzewa, że hipoteza może być prawdziwa i szuka odpowiedzi na pytanie, dlaczego jest ona prawdziwa; stara się znaleźć argument, który przekonałby go o tym, że każdy obiekt należący do rozważanej klasy spełnia tę hipotezę (niekoniecznie musi to być formalny dowód). Znalazłszy taki argument, matematyk uznaje hipotezę za twierdzenie; jeśli nie uda mu się podać przekonywającego uzasadnienia prawdziwości tej hipotezy i nie znajdzie dlań kontrprzykładu, pozostaje ona tylko hipotezą. Podobnym do opisanego powyżej rozumieniem uzasadnienia twierdzenia wykazali się także niektórzy z badanych uczniów (Kuba, Konrad, Piotr).

Wielu innych badanych uczniów (Dorota – klasa ósma szkoły podstawowej, Marcin, Witold – szkoła średnia, Marta – studentka pierwszego roku matematyki) zdawało się rozumować w następujący sposób: jeśli kilka przykładów, wybranych jakkolwiek, potwierdza hipotezę, to można ją uznać za twierdzenie odnoszące się do wszystkich obiektów rozważanej klasy. Uczniowie ci nie odczuwali potrzeby przeprowadzenia tego, co nazywamy dowodem. Weryfikowali stawiane przez siebie hipotezy tylko empirycznie.

Typ uzasadnienia twierdzenia, jaki zademonstrowali wymienieni wyżej uczniowie, podpada pod wyróżnioną przez Bella (1976) kategorię **ekstrapolacji** (*extrapolation*), jako jeden z kilku typów uzasadnienia empirycznego.

Według innego podziału, podanego przez N. Balacheffa (1987), jest to **próba rozstrzygająca** (*l'expérience cruciale*). Ten typ uzasadnienia charakteryzuje to, że po rozpatrzeniu jednego przykładu nie traktuje się dostrzeżonej w nim własności jako spełnionej ogólnie, a stawia się hipotezę, którą weryfikuje się na innych przykładach; istotne jest tu więc postawienie sobie pytania o to,

czy inne obiekty rozważanej klasy spełniają taką samą własność jak wyjściowy obiekt.

Jakkolwiek moje badania nie dotyczyły bezpośrednio metody matematycznej, to ujawniły, że wielu uczniów nie osiągnęło jeszcze pierwszego poziomu rozumienia metody matematycznej w sensie, jaki nadają temu terminowi Legutko i Turnau (Legutko, Turnau, 1989).

Wskazane tu trudności uczniów w zakresie uzasadniania w matematyce potwierdzają jedynie rezultaty uzyskane już we wcześniejszych, szerszych badaniach rozumienia przez uczących się metody matematycznej (np. Bell, 1976; Nowecki, 1978; Balacheff, 1987; Knoch-Tryba, 1992). Jedną z hipotetycznych przyczyn tych trudności przedstawiłam w pracy o błędach uczniów (Ciosek, 1992). Pewną, obiecującą dydaktycznie, próbę zmiany postawy uczących się matematyki (na różnych poziomach nauczania) wobec dowodu przedstawił w swoich pracach Dąbrowski (1992, 1993).

5. Oprócz trzech opisanych podstrategii strategii rozważania przypadków szczególnych, w analizowanych rozumowaniach wystąpiły jeszcze dwa zabiegi heurystyczne sprzyjające sukcesowi. Jednym z nich jest trzymanie się zasady optymalnej ostrożności przy weryfikcji hipotezy. Stosowali to wyraźnie matematyk P oraz Konrad.

Drugim zabiegiem było badanie empiryczne prowadzone w sposób dobrze zorganizowany. Tak postępowali: Anna (zob. Wstęp) i Konrad (rozwiązujący zadanie o podzielności przez 4). Przede wszystkim jednak trzeba tu wskazać badanie prowadzone przez matematyka K (Rozumowanie 12). Można je uważać za przykład paradygmatyczny (Freudenthal, 1978) dobrze zorganizowanego badania empirycznego.

6. Analiza przedstawionych rozumowań sugeruje, że w procesie rozwiązywania otwartego zadania z zastosowaniem strategii rozważania przypadków szczególnych występują — przeplatając się wzajemnie i uzupełniając — akty **specyfikacji** i **uogólniania**. W zaprezentowanych rozumowaniach wystąpił typ specyfikacji nazwany przez Serafina (1988) **specyfikacją na pierwszym poziomie** (jest to specyfikacja pojęć i twierdzeń w ramach jednej dziedziny matematycznej). Czynnością wstępną dla tej specyfikacji jest to, co Krygowska (1977b) nazywa **uszczególnianiem przez stabilizację zmiennych**.

Akty specyfikacji dokonywane (czasem kilkakrotnie) na drogach rozwiązywania zadania występowały wtedy, gdy autor rozwiązania

— ustalał parametry występujące w zadaniu w celu wcześniejszego rozwiązania zadania prostszego od wyjściowego (Dorota, Konrad, matematyk B, matematyk C, Piotr, matematyk K),

— sprawdzał (przez ustalenie zmiennych) czy hipoteza, sformułowana w

pewnej fazie pracy nad zadaniem, jest prawdziwa (matematyk P, Kuba, Grzegorz, Witold, Marcin, matematyk M w 2. etapie pracy, Konrad).

lub wreszcie

— sprawdzał poprawność przekształceń algebraicznych (przez podstawianie w przepisie funkcji szczególnej wartości na zmienną i porównanie wyniku obliczeń z liczbą otrzymaną wcześniej w inny sposób – matematyk K).

U jednego z uczniów (Kuba – Rozumowanie 2) wystąpiła trudność w specyfikacji twierdzenia: przy sprawdzaniu, czy pewien obiekt (trójka liczb) spełniający jeden warunek — spełnia też inny warunek. Jest to trudność w specyfikacji różna od tych, które ujawniły badania Skałuby (1988) oraz Demby (1994). Obserwacje Dybiec (1988) wskazują na to, że na trudności w specyfikowaniu natrafiają także uzdolnieni matematycznie uczniowie z tzw. klas uniwersyteckich, szczególnie gdy chodzi o wyróżnioną przez S. Serafina **specyfikację na wyższym poziomie**, kiedy „...pojęcie czy twierdzenie jednej dziedziny matematycznej specyfikuje się w innej poprzednio poznanej dziedzinie lub równolegle w kilku dziedzinach" (Serafin, 1988, s. 222).

W każdym z przedstawionych rozumowań wystąpił (czasem kilkakrotnie) akt uogólniania twierdzenia. Były to uogólnienia

— typu indukcyjnego (matematyk P, Kuba, Grzegorz – 1. etap pracy, Witold, Marcin, Marta, Dorota, Konrad, matematyk B)

lub

— przez uogólnienie rozumowania (matematyk B, Konrad, matematyk C, Piotr, matematyk K)

lub

— przez unifikację (matematycy B i C).

Tak więc w każdym z analizowanych tu rozumowań wystąpiło „przesunięcie uwagi ze szczególnego do ogólnego i z powrotem" (Binns, 1994, s. 29).

7. Przedstawiona analiza wskazuje na to, że rozumowanie w trakcie poszukiwania rozwiązania zadania otwartego nie jest ciągiem logicznych inferencji. Jest raczej ciągiem pytań i odpowiedzi–hipotez, do których dochodzi się na różnych drogach: empirycznej, intuicyjnej i dedukcyjnej. Potwierdza to pogląd Lakatosa (1976), który w swojej interesującej książce prezentuje matematykę — w aspekcie jej tworzenia — jako proces dialektyczny, wyznaczony przez etapy: sformułowanie wstępnego przypuszczenia, znalezienie dowodu, znalezienie kontrprzykładu, rewizja dowodu i sformułowanie nowego przypuszczenia.

Analizowane tu podstrategie strategii rozważania przypadków szczególnych nie wyczerpują, oczywiście, wszystkich możliwości. Nie uwzględnione zostały na przykład takie sytuacje, w których ogólne rozwiązanie zadania odkrywa się na podstawie rozważenia kilku przypadków szczególnych. Takie sytuacje, jak również inne niż tu przytoczone rozwiązania tych samych zadań, będą opisane w innej, szerszej pracy. Inspiracją do wyodrębnienia i zanalizowania sposobów wykorzystania jednego przykładu do ogólnego rozwiązania zadania była następująca uwaga, jaką J. Kilpatrick zrobił na marginesie w swej pracy na inny temat: „Rzadko mówi się o tym, że uogólnienie może być dokonane na podstawie jednego przykładu" (Kilpatrick, 1987, s. 137).

Arkusz pracy Anny

A jest zbiorem liczb trzycyfrowych utworzonych z trzech różnych ustalonych cyfr a, b, c ($a \neq b \neq c \neq a \neq 0$). Wykazać, że w zbiorze A istnieją 2 liczby, których różnica jest podzielna przez 4.

$A = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$

np. $a=1$, $b=2$, $c=3$

$A = \{123, 132, 231, 213, 321, 312\}$

np: ~~132~~ $312 - 132 = \underline{180}$

Czy ~~tylko~~ w zb. A istnieją dokładnie 2 takie liczby, czy też ~~jest ich kilka~~ może być ich kilka? (takich par). Zobaczmy na w/w przykładzie:

$123 - 132 = 9$
$123 - 231 = 109$
$123 - 213 = 90$
$123 - 321 = 189$
$123 - 312 = 19$

$132 - 231 = 99$
$132 - 213 = 81$
$132 - 321 = 189$
$132 - 312 = \boxed{180}$

$231 - 213 = 18$
$231 - 321 = 90$
$231 - 312 = 81$

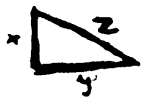
$213 - 321 = \underline{108}$
$213 - 312 = 109$

$321 - 312 = 19$

Na tym przykł. widać, że takich par może być więcej. ~~Wyda~~ Należy ~~podać~~ udowodnić, że istnieje przynajmniej jedna taka para.

$$\left(\underbrace{a \cdot 100}_{\text{zawsze podzielne przez 4.}} + b \cdot 10 + c\right) - \left(a \cdot 100 + c \cdot 10 + b\right) = (b-c) \cdot 10 + (b-c) = 9 \cdot (b-c)$$

Arkusz pracy Kuby



KUBA
kl. VIII e
str. 1

$x^2+y^2=z^2$

$3^2+4^2=5^2$

3, 4, 5

$3^2+4^2=5^2$

$5=\sqrt{3^2+4^2}$

$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$

$x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4$

$2x^2+2x+1=x^2+4x+4$

$2x^2-2x=x^2+3$

$x^2-2x=3$

$x^2=3+2x$

$x^2-3-2x=0$

$x^2-2x-3=0$

$(x-1)^2-1-3=0$

$(x-1)^2-4=0$

$(x-1)^2=2^2$

$x-1=2 \vee x-1=-2$

$x=3 \vee x=-1$

$y=4 \vee y=0$

$z=5 \vee z=1$

49

64 29
29

$x=\frac{x+3}{2}$

$x=\frac{x^2-3}{2}$

24
24
96
48
576
576
49
625

$\frac{y+2}{x}=x$

$\frac{x^2}{x}=x$

$y+2=x^2$

$\frac{4^2}{x}=\frac{24}{y}+\frac{25}{z}$

$4^2=$

$49+576=625$

49 57

3, 4, 5
7, 24, 25
5, 12, 13

$25 = y + 2$

$25 = 12 + 13$

$12^2 + 13^2 = 25^2$

KUBA II
kl. VIII e
str. ②

$$\begin{cases} y + 2 = x^2 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

x – liczba naturalna N

$x = 2a + 1 \quad a \in \{N\}$

$x^2 = (2a+1)^2$

$x^2 = 4a^2 + 4a + 1$

$y = \frac{4a^2 + 4a}{2}$

$5^2 + 12^2 = 13^2$

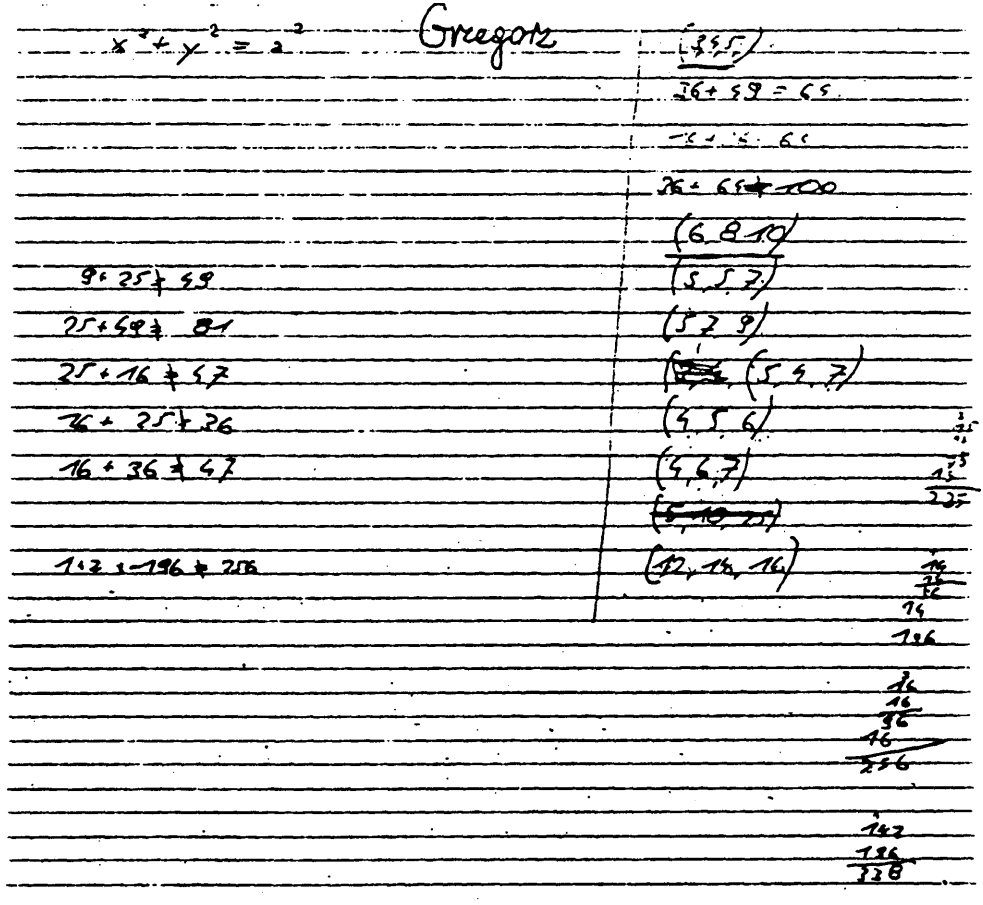
$25 + 144 = 169$

$169 = 169$

$$\begin{cases} y = 2a^2 + 2a \\ z = 2a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

$L = P$

Arkusz pracy Grzegorza



Arkusz pracy Doroty

Dorota kl VIII a 89.04.18 (1)

A {zbiór liczb trzycyfrowych zapisanych za pomocą cyfr a, b, c}

a, b, c ∈ {1-9}

W zbiorze A można istnieć takie dwie liczby różne, których różnica podzielna jest przez 4

A {abc, acb, bac, bca, cab, cba}

d ∈ A − e ∈ A gdzie różnica d daje f : 4

a = 1
b = 2
c = 3

A {123, 132, 213, 231, 312, 321}

213 231 360:2 432 342 234 126:2
123 123 180 252
090 108

a = 123
e = 132 f = −9

E = 213 f = −90
e = 231 f = −108 : 4 = −27

a = 9
b = 8
c = 7

A {987, 978, 897, 879, 798, 789}

d = 987 f = 9
e = 978
e = 897 f = 90
c = 879 f = 108 : 4 = 27

a = 4
b = 7
c = 2

A {447, 427, 742, 724, 247, 274}

d = 447 f = 560 d = 472
e = 427 f = 45
e = 742 f = 245 f = −270
c = 724 f = 252 : 4 = 63
f = 490 : 4 = 175

$a = 7$
$b = 2$
$c = 4$

$A\{724, 742, 274, 247, 472, 427\}$

$d = 724$
$e = 742 \quad f = -18$
$e = 274 \quad f = 950$
$e = 247 \quad f = 477$
$e = 472 \quad f = 252 : 4 = 63$

724 724 724
274 247 472
950 477 252

$a = 7$
$b = 8$
$c = 9$

$A\{789, 798, 879, 897, 978, 987\}$

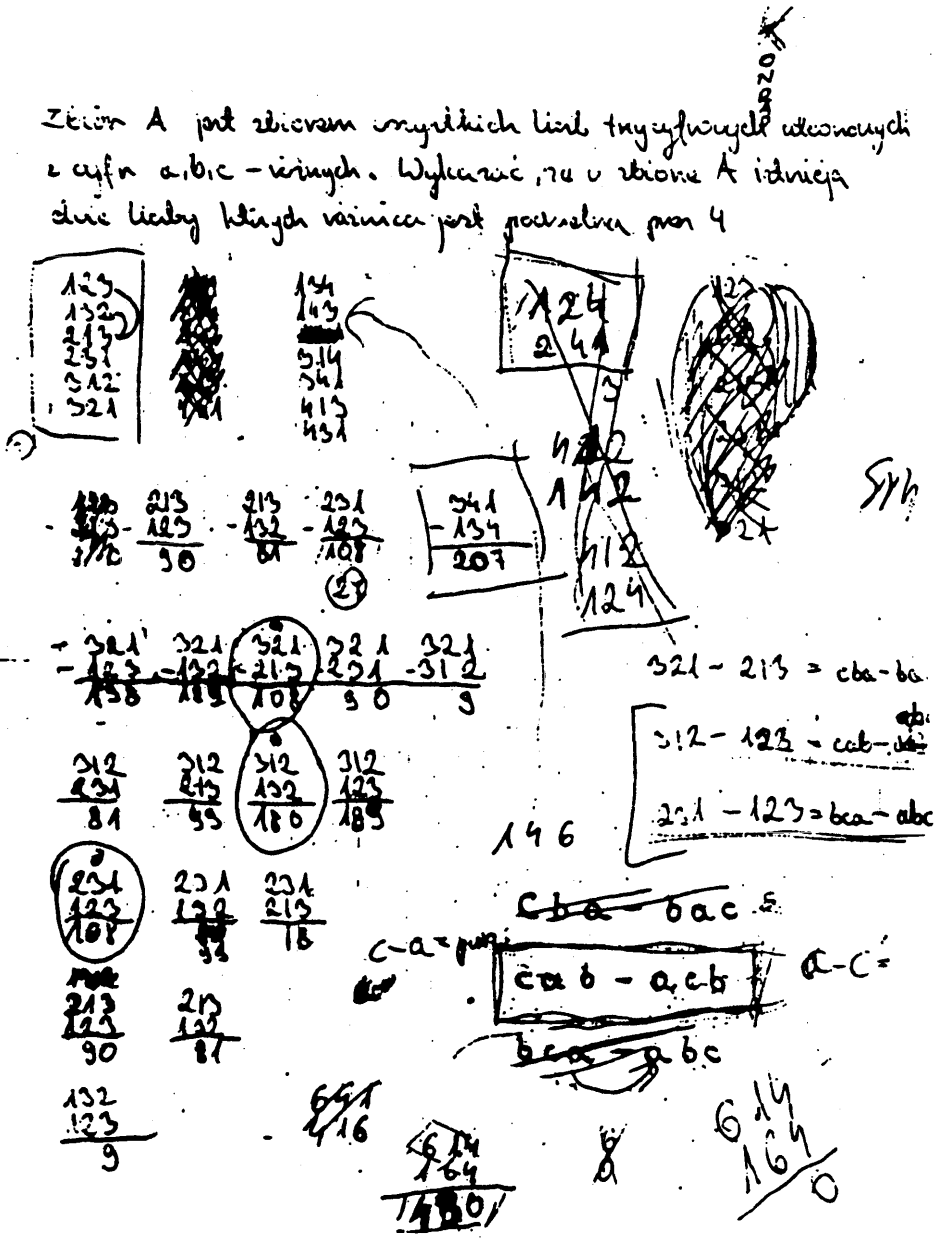
$d = 897$
$e = 789 \quad f = 108 : 4 = 27$

$a = 2$
$b = 4$
$c = 7$

$A\{247, 274, 427, 472, 724, 742\}$

$d = 472$
$e = 247 \quad f = 225$

Arkusz pracy Konrada



3 - 1	4 - 2	312
5 - 1	6 - 2	314
7 - 1	8 - 2	315
9 - 1	6 - 4	316
5 - 3	8 - 4	317
7 - 3	8 - 6	318
9 - 3		319
7 - 5		
9 - 5		
9 - 7 X		
7 9 X		

376
736

132 157
312 517

314

314
154

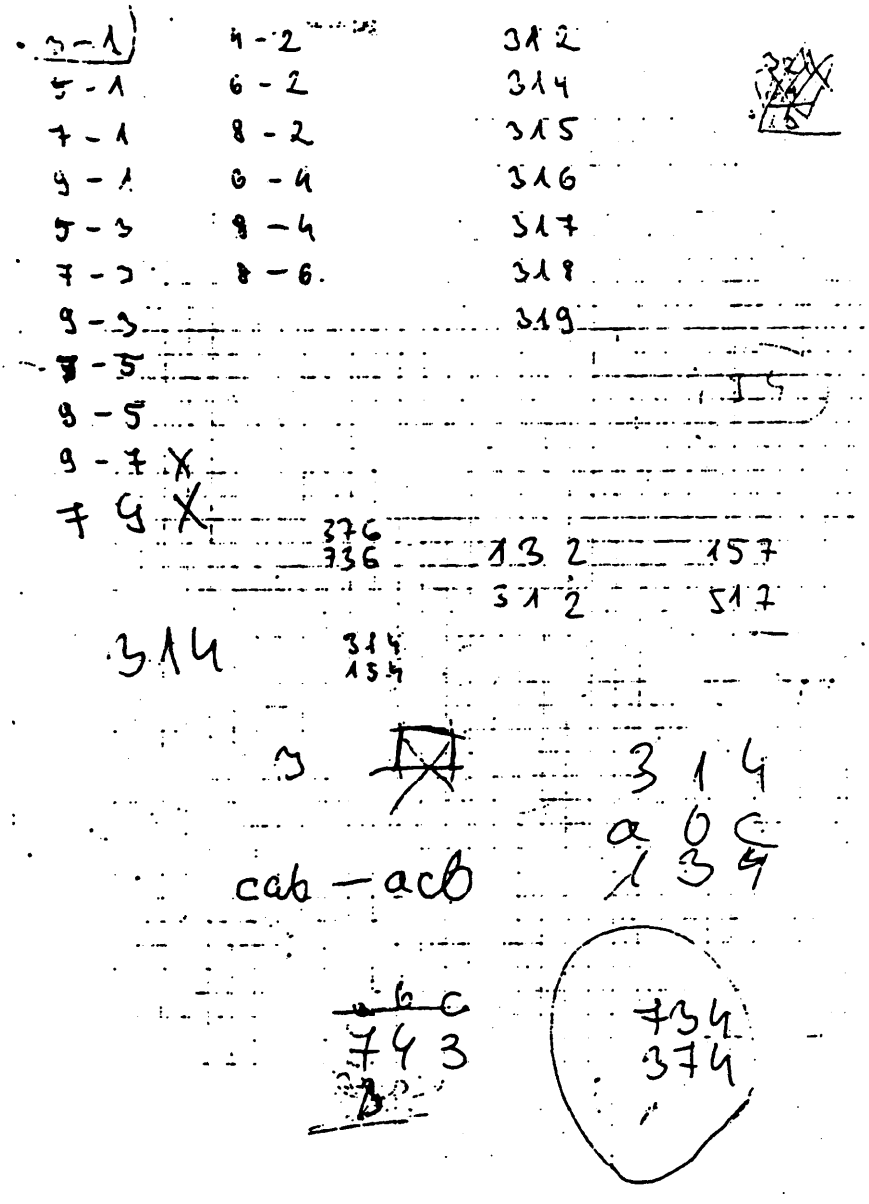
3 ~~[illegible]~~

314
a b c
134

cab — acb

~~a b c~~
743
3

734
374



Arkusz pracy osoby B

1, 2, 3

$A = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

$312 - 132 = 180$?

1) Kolejne l. naturalne: $a, a+1, a+2$ $\quad a<b<c$ $\quad 1<a<7$

$$\begin{array}{r} 100(a+2)+10a+(a+1) \\ -\ 100a+10(a+2)+(a+1) \\ \hline 2\cdot 100 - 2\cdot 10 = \boxed{2}\,90 \end{array}$$

$(cab)_{10} - (acb)_{10} = 2 \cdot 90$ (podzielne przez 4)

2) Niech $a<b<c$, $c = a+k$,

Wtedy $(cab)_{10} - (acb)_{10} = k \cdot 90$ (podzielne przez 4) jeśli k - parzyste: 2, 4, 6, 8

3) $a<b<c$, $c = a+l$, l - nieparzyste

l może być 3, 5 lub 7

(I) $l=3$

a, $a+1$, $a+2$, $a+3$

A) $(a+3)\cdot 100 - (a+1)\cdot 10 + a$ $-\ (a+1)\cdot 100 - (a+3)\cdot 10 + a$ $= 2 \cdot 90$

B) $(a+2)\cdot 100 + a\cdot 10 + (a+3)$ $-\ a\cdot 100 - (a+2)\cdot 10 + (a+3)$ $= 2 \cdot 90$

(II) $l=5$

a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$

	(a)	(b)	(c)
A)	a+2	a+1	a
B)	a+2	a	a+5
C)	a+5	a+3	a
D)	a+4	a	a+5

(III) $l=7$

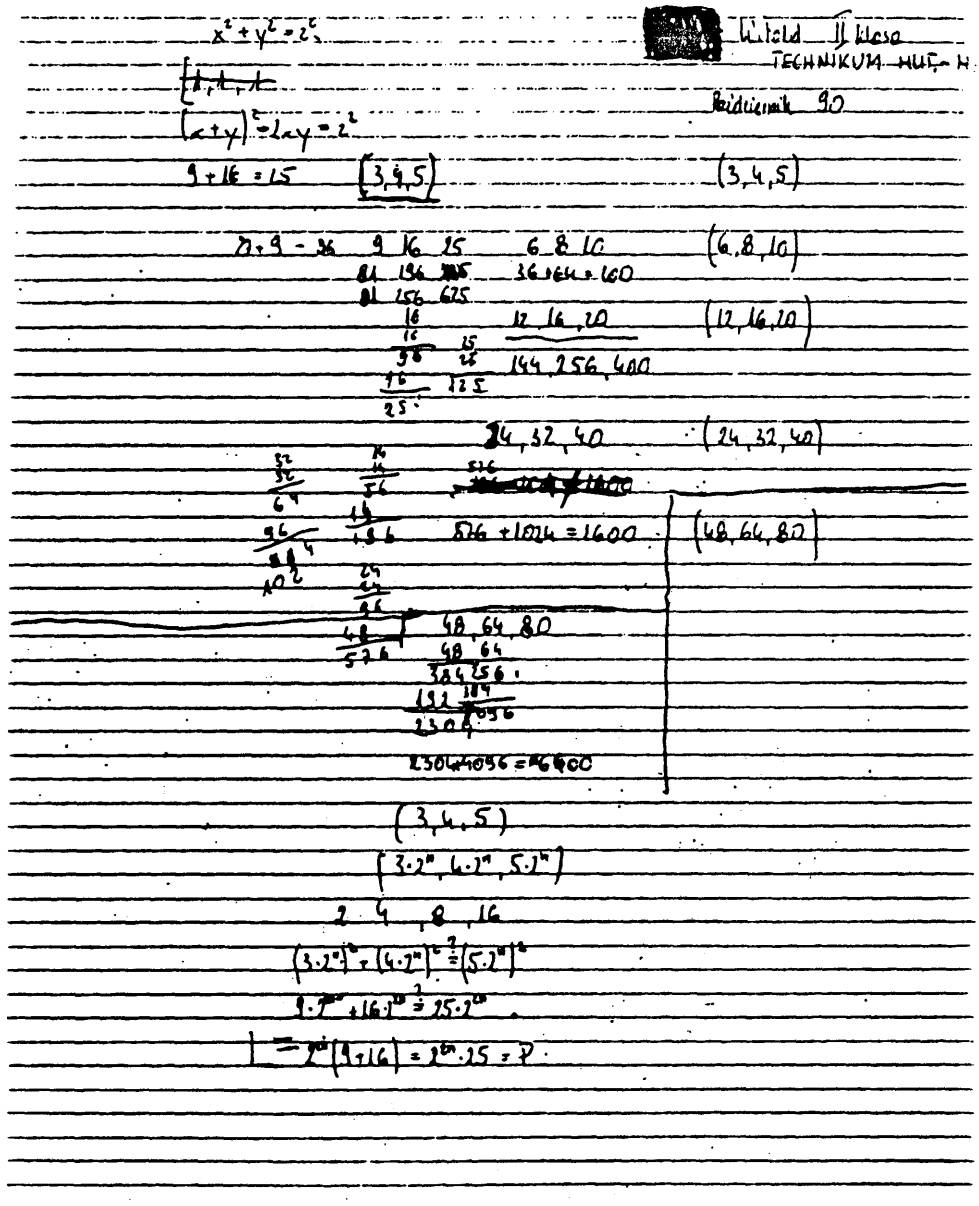
a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$, $a+7$

	(a)	(b)	(c)
A)	a+7	a+1	a
B)	a+2	a	a+7
C)	a+7	a+3	a
D)	a+4	a	a+7
E)	a+7	a+5	a
F)	a+6	a	a+7

W każdym przypadku (2) są 2 takie liczby, że ich różnica jest podzielna przez 4, jako parzysta wielokrotność 90.

4) I. a, b, c - parzyste
II. a, b - parzyste, c - nieparzyste
III. a, b, c - nieparzyste
IV. a, b - nieparzyste, c - parzyste

Arkusz pracy Witolda



Arkusz pracy osoby M



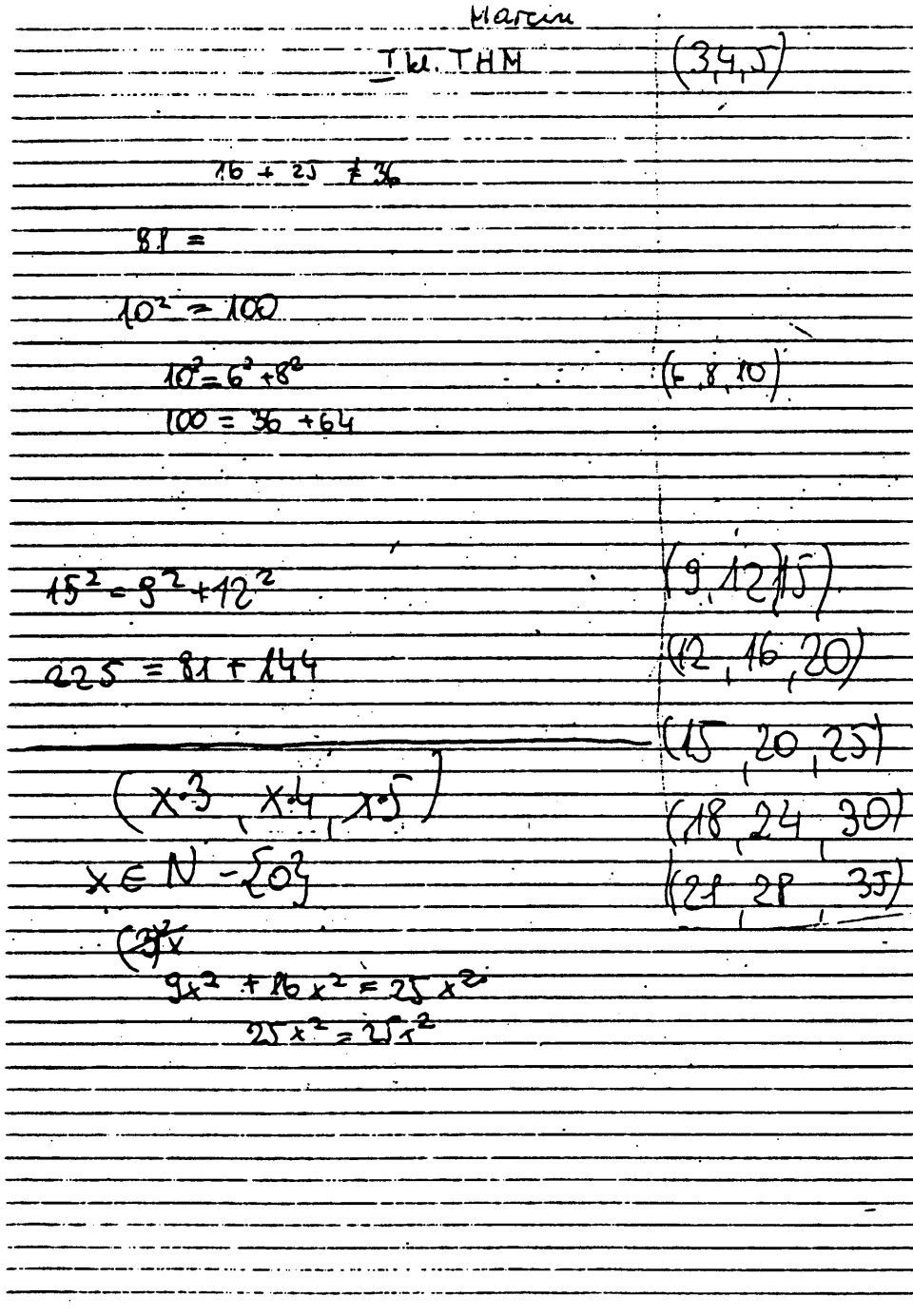
3 4 5

3a 4a 5a , $a \in N_1$

$[\ x^2 + y^2 = z^2 \longrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$x, y, z \in N_1$

Arkusz pracy Marcina



Arkusz pracy Piotra

Piotr Paweł kl. V 89. 04.05 THM

a, nieparzysta, $a>3$

$a^2 =$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] jest parzysta

$a = 2n-1$ $\quad 2n-1>3 \quad n>1$

$(2n-1)^2 = 4n^2-4n+1 \qquad 4n^2-4n = 4n(n-1)$.

$9^2 = 81 \qquad 5^2 = 25 \qquad 7 = 49$

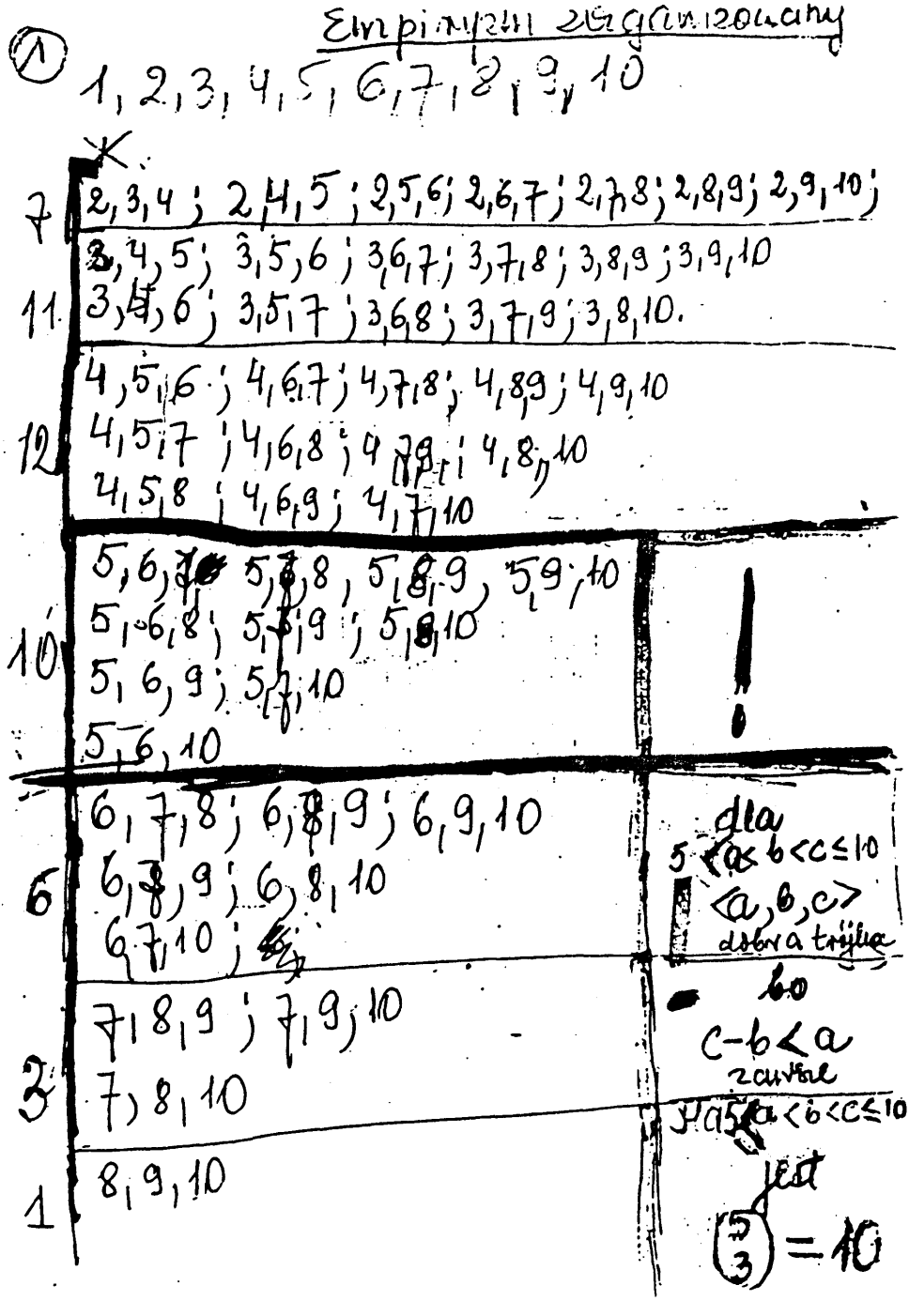
$23 \qquad 11^2 = 121 \qquad 13^2 =$ [illegible] 169

$$\begin{array}{r} 297 \\ 297 \\ \hline 39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 653 \\ 653 \\ \hline 1325 \\ 6 \\ 19\,|\,59 \\ 326\,|\,5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$a =$ [illegible] ... mn

$mn + nm = 2mn$

Arkusz pracy osoby K



(2) Uogólnienie

n

$K = \left[\frac{n}{2}\right]$

Dla $1 < a \leq K$

$a \quad a+i \quad a+(i+1) \quad i \mid 1, 2, \ldots n-a-1$

$a \quad a+i \quad a+(i+2) \quad i \mid 1, 2, \ldots n-a-2$

$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

$a \quad a+i \quad a+(i+a-1) \quad i \mid 1, 2 \ldots n-a-(a-1)$

$$\sum_{a|1}^{K} (a-1)(n-a) - (1+2+\ldots a-1) =$$

$$= \sum_{a|1}^{K} (a-1)(n-a) - (a-1)\frac{a}{2} =$$

$$= \sum_{a|1}^{K} (a-1)\left(n - \frac{3}{2}a\right)$$

Wstydliwe!

Spr dla $n=10$

$$\sum_{a|1}^{5} (a-1)\left(10 - \frac{3}{2}a\right) =$$

$= 40$ dobrze

dla $n = 9$

$$\sum_{a|1}^{4} (a-1)\left(9 - \frac{3}{2}a\right) = 24 \text{ (dobrze)}$$

③ Liczba trójkątów dla n

$$\sum_{a|1}^{[\frac{n}{2}]}(a-1)\left(n-\frac{3}{2}a\right)+\binom{n-[\frac{n}{2}]}{3}$$

dla $n=2k$ $\sum_{a|1}^{k}(a-1)\left(n-\frac{3}{2}a\right)+\binom{k}{3}$

dla $n=2k+1$ $\sum_{a|1}^{k}(a-1)\left(n-\frac{3}{2}a\right)+\binom{k+1}{3}$

...

Smutne, że nie mam jednego ładnego wzoru.

Ogólne $k=[\frac{n}{2}]$

$$=n\sum_{a|2}^{k}(a-1)-\frac{3}{2}\sum_{a|2}^{k}a^2+\frac{3}{2}\sum_{a|2}^{k}a+\binom{n-k}{3}=$$

$$=n\cdot\frac{k}{2}(k-1)-\frac{3}{2}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2+k}{2}(k-1)$$

$$+\binom{n-k}{3}$$

$$\frac{(2k-k)(2k-k-1)(2k-k-2)}{2} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

$\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$

(4)

dla $n = 2k$

$$k \cdot k(k-1) - \frac{3}{2}\left[\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 1\right] + \frac{3}{2}\cdot\frac{2+k}{2}(k-1) +$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{6} =$$

$$12k^3 - 12k^2 - 6k^3 - 6k^2 - 3k^2 - 3k + 18 + 18k + 9k^2 - 18 - 9k$$

12

$$+ \frac{2k^3 - 2k^2 - 4k^2 + 4k}{12}$$

$$\frac{8k^3 - 18k^2 + 10k}{12} = \frac{8k(k-1)(k-\frac{5}{4})}{12} = \frac{2k}{3}(k+1)(k-\frac{5}{4})$$

$$\frac{8\cdot 125 - 18\cdot 25 + 10\cdot 5}{12} = \frac{40\cdot 25 - 18\cdot 25 + 2\cdot 25}{12}$$

$$= \frac{24\cdot 25}{12} = 2\cdot 25 = 50$$

$$\leftarrow 4a \rightarrow$$

Na $n = 2k$

$$\sum_{a_1}^{n} (a-1)\left(n - \frac{3}{2}a\right) + \binom{k}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}k(k-1)\left(k - \frac{5}{4}\right)$$

5 Sprawdzam dla $n=10$
$k=5$

Liczba trójkątów

$\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot (5-\frac{5}{4}) =$

$= \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot \frac{15}{4} = 50$ | zgadza się!

Dla $n=2k+1$ < rachunek na str 56

$\sum_{a|1}^{k} (a-1)(n-\frac{3}{2}a) + \binom{k-1}{3} =$

$= \frac{2}{3} k(k-1)(k+\frac{1}{4})$ ##

Sprawdzam dla $n=9$

$\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot (4+\frac{1}{4}) = 8 \cdot \frac{17}{4} = 34$

zgadza się!

Dla $n = 2k+1$

$$(2k+1)\cdot\frac{k}{2}\cdot(k-1) - \frac{3}{2}\left[\frac{k_1(k+1)(2k+1)}{6} - 1\right] +$$

$$+ \frac{3}{2}\,\frac{2+k}{2}(k-1) + \frac{(k+1)\cdot k(k-1)}{6} =$$

$$= \frac{12k^3 + 6k^2 - 12k^2 - 6k - 6k^3 - 6k^2 - 3k^2 - 3k + 18}{12}$$

$$\frac{18k + 9k^2 + 18 - 9k + 2k^3 - 2k}{12}$$

$$= \frac{8k^3 - 6k^2 - 2k}{12} = \frac{4k^3 - 3k^2 - k}{6} =$$

$$= \frac{k(4k^2 - 3k - 1)}{6}$$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$k_1 = \frac{3-5}{8} = -\frac{2}{8}$ $\quad k_2 = \frac{3+5}{8} = 1$

(5b)

$= \frac{k}{6} 4 \cdot (k+\frac{1}{4})(k-1)$

$= \frac{k}{3} 2 (k+\frac{1}{4})(k-1) =$

$= \frac{2}{3} k(k-1)(k+\frac{1}{4})$

$n=11 \quad \frac{2}{3} 5 \cdot 4 \cdot (5+\frac{1}{4}) =$

$= \frac{40}{3} \cdot \frac{21}{4} = 10 \cdot 7 = 70,$

~~$\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{7}{4}$~~ ~~$n=2k+1$~~ $n=9$

$\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 8 (4+\frac{1}{4}) =$

$= 8(4+\frac{1}{4}) = 34$

6 Rozwiązanie

Liczba trójkątów różnobocznych których ~~bok~~ mianowicie oś są liczby natur.

$1, 2, 3, \ldots, n$

dla $n = 2k$

$$x = \frac{2}{3}k(k-1)\left(k-\frac{5}{4}\right)$$

dla $n = 2k+1$

$$x = \frac{2}{3}k(k-1)\left(k+\frac{1}{4}\right)$$

Problem, czy nie można tego ująć w jeden wzór

Literatura

A r p a i a, J. P.: 1972, Discoveries in Mathematics — Pythagorean triples, *The Mathematics Teacher*, LXV, 5, 463-465.

B a l a c h e f f, N.: 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18, 2, 147-176.

B e l l, A., W.: 1976, A study of pupil's proof — explanations, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 1/2, 23-40.

B i n n s, L.: 1994, Widzenie ogólnego w szczególnym, *Nauczycicle i Matematyka* 9, 28-29.

B o e k a e r t s, M., S e e g e r s, G., V e r m e e r, H.: 1995, Solving Maths Problems: Where and Why Does the Solution Process Go Astray?, *Educational Studies in Mathematics* 28, 3, 241-262.

C i o s e k, M.: 1984, Odkrycie i formułowanie twierdzenia oraz definiowanie nowego pojęcia przez dzieci 10-letnie i 11-letnie, *Dydaktyka Matematyki* 8, 7-44.

C i o s e k, M.: 1988, Poszukiwanie rozwiązania zadania na różnych poziomach matematycznego doświadczenia, *Dydaktyka Matematyki* 9, 125-172.

C i o s e k, M.: 1992, Błędy popełnione przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny, *Dydaktyka Matematyki* 13, 65-161.

D ą b r o w s k i, M.: 1992, O akceptowalności dowodów przez uczniów na przykładzie dowodów pewnych własności liczb naturalnych, *Dydaktyka Matematyki* 14, 5-70.

D ą b r o w s k i, M.: 1993, O akceptowalności dowodów przez uczniów na przykładzie dowodów istnienia liczb niewymiernych, *Dydaktyka Matematyki* 15, 5-36.

D e m b y, A.: 1994, Rozwój procedur stosowanych przez uczniów klas V-VIII przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych (nieopublikowana praca doktorska), WSP, Kraków.

D y b i e c, Z.: 1988, O pewnej trudności związanej ze specyfikacją w nauczaniu matematyki, *Dydaktyka Matematyki* 8, 213-220.

F r e u d e n t h a l, H.: 1978, *Weeding and Sowing*, Reidel Publishing Company, Dordrecht.

G r u s z c z y k - K o l c z y ń s k a, E.: 1994, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

H ä r t i g, K.: 1987, O dowodach i dowodzeniu w nauczaniu matematyki. Kilka tez i przykładów, *Dydaktyka Matematyki* 7, 77-94.

H e j n ý, M.: 1992, Analysis of student's solution of the equations $x^2 = a^2$ and $x^2 - a^2 = 0$, *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, Comenius University,

Bratislava, 65-82.
K i l p a t r i c k, J.: 1987, Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? w: Schoenfeld, A. H.: *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
K n o c h – T r y b a, K.: 1992, Trudności uczniowskie w rozwiązywaniu zadań konkursowych a sposoby oceniania tych zadań, *Dydaktyka Matematyki*, 14, 71-92.
K r y g o w s k a, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, część 1*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
K r y g o w s k a, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, część 3*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
K r y g o w s k a, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Dydaktyka Matematyki* 6, 25-41.
L a k a t o s, J.: 1976, *Proofs and refutations*, Cambridge University Press.
L e g u t k o, M.: 1988, Przykłady behawioralno-poznawczych postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych, *Dydaktyka Matematyki* 8, 51-102.
L e g u t k o, M., T u r n a u, S.: 1989, Nauczanie matematyki a nauczanie teorii matematycznej, *Dydaktyka Matematyki* 11, 9-36.
N o w e c k i, B.: 1978, *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki*, WN WSP, Kraków.
M a u r e r, S. B.: 1987, New Knowledge about Errors and New Views about Learners: What They Mean to Educators and More Educators Would Like to Know w: Schoenfeld, A. H.: *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 165-187.
P o l y a, G.: 1964, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.
P o l y a, G.: 1975, *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
S c h o e n f e l d, A. H.: 1982, Strategia rozwiązywania zadań w uniwersyteckim nauczaniu matematyki, w: Góralski, A.: *Zadanie, metoda, rozwiązanie*, zbiór 4, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 150-173.
S c h o e n f e l d, A. H.: 1985, *Mathematical problem solving*, Academic Press, INC.
S c h o e n f e l d, A. H.: 1987, What's all the fuss about metacognition? w: Schoenfeld, A. H.: *Cognitive science and mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 189-215.
S e r a f i n, S.: 1988, Kilka uwag na marginesie artykułu Z. Dybiec „O pewnej trudności związanej ze specyfikacją w nauczaniu matematyki", *Dydaktyka*

Matematyki 8, 221-223.
S i e r p i ń s k i, W.: 1969, *Arytmetyka Teoretyczna*, PWN, Warszawa.
S k a ł u b a, K.: 1988, Stosowanie przez uczniów wzoru algebraicznego, *Dydaktyka Matematyki* 9, 87-123.
W y g o t s k i, L. S.: 1971, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN Warszawa.

On the role of examples in a mathematical investigation

S u m m a r y

The paper presents reasonings of twelve people (lower and upper secondary school students, and professional mathematicians) while solving open mathematical problems like the one below.

A is the set of three-digit numbers, the digits being different non-zero constants a, b, c. Prove that there exist in A two (different) numbers such that their difference is a multiple of 4.

The solvers use the examining-special-case strategy (each of them examines only one single example regarded as a special case), but not the same way. The following three substrategies of this strategy have been identified:

1) guessing a generic property of the chosen example after it was examined,
2) searching for a transformation of the chosen example that would change it to another solution,
3) deductively directed exploration of the chosen example aimed at a generalised solution.

The main conclusion is that the examining-special-cases strategy is a feature of the problem solving process, common for different levels of mathematical knowledge and experience, from lower secondary to university. Yet the third substrategy is rarely used by people other than at a higher level of mathematical competence. School children often think of proving as checking a few examples.