ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 17(1995)

Jan Konior
Katowice

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Badania nad tekstem matematycznym i jego lekturą — stan obecny i perspektywy

1 Wstęp

Badania nad tekstem matematycznym rozważanym w kontekście nauczania stanowią w dydaktyce matematyki nurt stosunkowo młody. Prezentacja dorobku w zakresie tych różnych badań, nie poddanych jeszcze próbie syntezy, jest więc zadaniem złożonym, m. in. z uwagi na rozproszenie narastającej stopniowo literatury światowej na ten temat. Ponadto problemy dotyczące konstrukcji tekstu matematycznego, przebiegu procesu jego lektury oraz miejsca tego tekstu w uczeniu się matematyki są podejmowane w dydaktyce przy okazji innych badań i analiz; występują fragmentarycznie w pracach, których tytuły i cele nie wskazują na powiązania z tą problematyką. Zamysł — choćby tylko częściowego — uwzględnienia w tej prezentacji także podobnych badań w innych dziedzinach dla dydaktyki matematyki ościennych tym bardziej wiąże się z pewnym ryzykiem i wnosi dodatkowe utrudnienia.

Potrzeby rozwijającej się dziedziny, jaką jest dydaktyka matematyki, nakazują, aby podjąć takie ryzyko. Niniejszy artykuł zawiera więc szkicowy przegląd badań, zarysowany ze świadomością jego niekompletności. Pełna synteza dorobku badań nad tekstem matematycznym w nauczaniu winna być dokonana z dłuższej perspektywy czasowej. Nie wyklucza to jednak pewnej próby etapowej. Jej celem — poza wspomnianym już szkicowym przeglądem — jest dodatkowo zaprezentowanie przykładu badań nad procesem lektury tekstu matematycznego.

Gdy dalej mówi się o tekście, chodzi o tekst pisany, zbudowany w celach pedagogicznego przekazu, a więc tekst typowy dla podręczników przeznaczo-

nych do nauki na różnych poziomach. Rozważania dotyczą w większości okresu niewiele wykraczającego poza ostatnie dziesięciolecie.

2 Tekst domeną badań różnych dziedzin

Tekst pisany stanowi przedmiot badań różnych dziedzin. Każda z nich podejmuje temat ze swoistego dla siebie punktu widzenia, formułując pytania w jej języku, stosując własną metodologię i zmierzając do rezultatów określonych przez własne cele nadrzędne. Badania te różni nie tylko inna perspektywa ogólna, inny język i sposoby metodologicznych rozwiązań; inne były też i są na ogół motywy podjęcia oraz powody wyodrębniania tego kręgu badań w ramach różnych dyscyplin. Dla lingwistyki na przykład była to refleksja nad językiem i mową w zakresie ich użycia, dla psychologii główny motyw stanowiła chęć poznania mechanizmów percepcji i rozumienia komunikowanych treści, dla logiki — wypracowanie dyrektyw przekształcania tekstu (na przykład streszczania). W tym ostatnim przypadku chodzi o dyrektywy mające charakter algorytmiczny, podyktowane dążeniem do zastąpienia analizy intuicyjnej tekstu analizą na poziomie niemal zautomatyzowanych operacji (Marciszewski, 1977); ma to na celu obiektywizację, podobnie jak formalizacja rozumowań w logice matematycznej lub przetwarzanie danych według określonych procedur w informatyce.

Wyniki uzyskane w różnych dziedzinach nie są jednakowo interesujące dla dydaktyki matematyki. W dziedzinie naukoznawstwa bada się na przykład prawidłowości rządzące zjawiskiem cytowania w tekstach naukowych; rozważa się w szczególności częstość cytowania danej pozycji, zmiany tej częstości w czasie, jaki upłynął od momentu ukazania się pracy cytowanej itp. Socjologia bada — ogólnie biorąc — funkcjonowanie języka jako zjawiska społecznego, jego odmian, środowiskowych mechanizmów transformacji itp.

Najwięcej punktów stycznych z problematyką tekstu uprawianą w dydaktyce matematyki mają badania w psychologii i lingwistyce. Są to dyscypliny o dłuższej tradycji naukowej, a ich zainteresowanie tekstem doprowadziło w ramach tych dziedzin do wyodrębnienia się i względnej autonomii spójnych subdyscyplin, które jako swój przedmiot badań obrały tekst i jego funkcjonowanie w roli komunikatu językowego. W ten sposób w ramach tradycyjnej psychologii wyodrębniła się psycholingwistyka badająca językowe zachowania się człowieka, zaś w w obrębie językoznawstwa — lingwistyczna teoria tekstu. Pierwsza ma około czterdziestoletnią historię, druga ponad dwudziestoletnią. Odrębne potraktowanie młodych subdyscyplin nie wyklucza faktu, że obie macierzyste dyscypliny także pretendują do rozwijania różnych nurtów badań

nad tekstem. Badaniem tekstów w innym aspekcie zajmuje się zresztą jeszcze inna dziedzina językoznawstwa — statystyka leksykalna.

W niektórych psychologicznych badaniach szerzej rozumie się proces czytania niż obecnie w dydaktyce matematyki. W tej ostatniej chodzi głównie o aktywności, które czytelnik przejawia (powinien przejawiać) w pracy nad tekstem; więc o ważne dla nauczania prawidłowości rządzące budową tekstu i lekturą. Psychologię interesuje natomiast cały kompleks zachowań, począwszy od ruchów sakkadycznych i fiksacji oka (neurofizjologiczna strona czytania), poprzez złożone problemy rozumienia, aż do pomysłów zastosowania zdobytej informacji w obrębie nowych zadań. Tę rozpiętość wachlarza zagadnień trafnie wyraża tytuł jednego z artykułów psychologów amerykańskich: A theory of reading: From eye fiksations to comprehension (Just, Carpenter; 1980); por. także obszerną pracę (Kurcz, Polkowska; 1990) i zebraną tam bibliografię.

Badania psychologiczne w dużej części dotyczą wyraźnie **prawidłowości** rządzących przyswajaniem tekstów, w mniejszym zaś ich budowy. Oznacza to badanie powiązań. Chodzi więc o takie prawidłowości, które wyrażają się związkami między określonymi zmiennymi. W roli zmiennych niezależnych występują cechy bądź zjawiska leżące po stronie tekstu lub po stronie czytelnika, zaś zmiennymi zależnymi są na ogół różne efekty nauki, pamiętanie, rozumienie, trwałość zdobytej wiedzy, ocena szkolna itp. Tak na przykład bada się zależność efektów uczenia się tekstu od jego struktury, strategie stosowane przez uczniów w toku pracy nad tekstem podręcznikowym oraz rolę ilustracji w uczeniu się tekstu (por. np. pozycje (Chmielewska, 1980 i 1984), (Czerniawska, 1992), (Jagodzińska, 1976 i 1991)).

Rezultaty badań psychologicznych z ostatnich dziesięcioleci poświęcone recepcji tekstu wchodzą już częściowo do literatury podręcznikowej. Tak na przykład w ostatnim wydaniu „Psychologii wychowawczej" (Przetacznik-Gierowska, Włodarski; 1994) autorzy prezentują już elementy psychologicznej problematyki odbioru tekstu, nieobecne jeszcze w wydaniu poprzednim (z roku 1986). Mówi się ostrożnie, że stwierdzono m. in. nieobojętność w odbiorze takiego lub innego ustrukturyzowania tekstu, nadmieniając wszakże, iż zależności tu występujące są niezwykle złożone i niewiele jest jeszcze stwierdzeń, które mogłyby stanowić podstawę w pełni użytecznych w praktyce dydaktycznej postulatów.

Zasadnicze różnice między tekstami matematycznymi, a tekstami innych dziedzin z reguły wykorzystywanymi w badaniach psychologicznych powodują, że wiele problemów badawczych, a także niektóre wyniki tych badań, muszą być zweryfikowane, jeśli mają się odnosić do sytuacji i tekstów matematycznych. Te różnice wpływają ponadto na wybór kierunków i rozłożenie akcentów w badaniach. Tak na przykład zapamiętanie jest w pewnej części badań

psychologicznych problemem badawczym zasadniczym, rozumienie — niejednokrotnie drugoplanowym. Nie dlatego jednak, aby rozumienie było tu niedoceniane; w tekstach humanistycznych na ogół nie stanowi ono większego problemu. W badaniach nad odbiorem tekstów matematycznych odwrotnie: kwestią zasadniczą jest rozumienie (dlatego też jest przedmiotem badań dydaktyki matematyki), zapamiętanie stanowi rzecz wtórną. Podobnie jeden z wniosków sformułowanych na podstawie badań z wykorzystaniem tekstów niematematycznych słusznie zaleca, aby informacje główne, na których przyswojeniu nam najbardziej zależy, podawać w tekstach w pierwszej kolejności, gdyż wiadomości usytuowane w górnych piętrach hierarchii tekstowej zapamiętywane są najtrwalej; ponadto służą one czytelnikowi jako element strukturyzacji recypowanych dalej treści. W odniesieniu do wielu tekstów matematycznych — na przykład tekstów dowodów lub definicji — zalecenie takie kierowane do autorów musiałoby zostać poważnie zweryfikowane. Trudno bowiem „manipulować" tekstem definicji z takim stopniem swobody, jaki może być dopuszczalny w komponowaniu komunikatu w niejednej dziedzinie pozamatematycznej. Reguły kompozycji tekstu matematycznego mają dość sztywny, usankcjonowany w tradycji charakter, a ponadto jego konstrukcja jest w dużej części stymulowana prawidłami logiki i wymogami składni matematycznego języka.

W ramach badań z zakresu nauk pedagogicznych oraz psychologii istnieją także eksperymenty i prace prowadzące do pewnych ustaleń normatywnych. Zmierzają one do wypracowania użytecznych praktycznie wskaźników charakteryzujących teksty i proces lektury. I tak próbuje się określić dla danego ogólnie rodzaju tekstu (niematematycznego) normę w postaci liczby przeczytanych słów w jednostce czasu; otrzymuje się tzw. wskaźnik szybkości czytania. Istnieją też na przykład próby zmierzające do ilościowej charakterystyki stopnia trudności tekstu, mierzonego liczbą występujących w tekście pojęć abstrakcyjnych, średnią długością zdania lub średnią długością wyrazu.

Niektóre badania psychologiczne są tak konstruowane, że — niezależnie od ich niewątpliwych wartości, pomysłowych technik badawczych i dużego ładunku poznawczego — niejako z założenia idą w innym nieco kierunku i nie odpowiadają wprost oczekiwaniom, jakie żywi bezpośrednio praktyka nauczania. Podkreślają to zresztą sami psycholodzy. Są to bowiem badania prowadzone w warunkach laboratoryjnych, rozszczepiające złożone zjawiska na wypreparowane mikroelementy, które praktyka (tj. nauczyciel w konkretnym działaniu z uczniami) musi łączyć z innymi komponentami treści poznawczych oraz procesu dydaktycznego i niejednokrotnie traktować raczej całościowo. Niektóre badania o charakterze laboratoryjnym — zwłaszcza gdy ich wyniki chcemy odnieść do tekstów typu matematycznego — muszą zostać powtórzone w takim kontekście i warunkach, które przypominają naturalny przebieg zjawisk

w procesie nauczania lub w samodzielnej pracy nad tekstem.

Z psychologicznym nurtem badań kontrastują tematycznie teoriotekstowe badania językoznawcze poświęcone wyłącznie językowej analizie struktury samego tekstu.

Lingwistyczne zainteresowanie użyciem i pragmatyczną stroną języka, a także strukturą tekstu nasiliło się znacznie w ciągu ostatnich dziesięcioleci (wcześniej podzielano przekonanie, że domeną językoznawstwa jest abstrakcyjnie rozumiany język jako system; analizy lingwistyczne nie wykraczały poza granice zdania). Praktyczne zastosowania języka i obserwacja budowy wielozdaniowych całości komunikacyjnych doprowadziły do wyłonienia się w obrębie językoznawstwa lingwistycznej teorii tekstu. Przedmiotem badań teorii jest struktura tekstu; teoria dostarcza ponadto sposobów analizy wypowiedzi, w szczególności tekstów pisanych. W przeciwieństwie do psychologii koncentruje uwagę na samym tekście, choć pojmowanym abstrakcyjnie, zaś jego analiza stara się głównie odwoływać do obiektywnie postrzeganych cech tekstów konkretnie badanych. Jeśli w tej analizie pojawiają się odniesienia do hipotetycznego czytelnika, sposobu odbioru lub funkcjonowania poszczególnych elementów tekstowych w procesie lektury, to mają one na ogół charakter założeń (hipotetycznych stwierdzeń) stanowiących stosowny kontekst dla właściwych rozważań. Nadaje on tym ostatnim sens praktyczny. Tego typu odniesienia współdziałają w głębszym ujęciu rozważanego problemu, a ich pominięcie zubożyłoby treść analizy.

Niektóre ogólniejsze tezy lingwistycznej teorii tekstu dotyczą również tekstu matematycznego. Nie wymagają w swej podstawowej części weryfikującego postępowania w odniesieniu do tekstów matematycznych w takim zakresie jak niektóre badania psychologiczne mające za punkt wyjścia teksty niematematyczne. Niezbędne jest natomiast uszczegółowienie oraz relatywizacja do treści przedmiotowych matematyki i jej języka.

W dość wyspecjalizowanych badaniach i złożonym zakresie problemowym tej dziedziny warto przykładowo wskazać zagadnienia, które wydają się szczególnie interesujące z punktu widzenia problemów nauczania i uczenia się matematyki.

Jednym z głównych problemów tutaj badanych jest zagadnienie spójności tekstu, tj. takiego zespolenia elementów tekstowych, które stwarza warunki jego zintegrowanego odbioru, traktowania jako całościowego komunikatu. Rozważa się samo pojęcie spójności, jej rodzaje i środki stosowane w tekstach celem zespolenia wielozdaniowych wypowiedzi. Interesujący jest cały zakres tematyczny badań nad sposobami i rolą segmentacji tekstów. Chodzi tu zarówno o wydzielenie jednostki tekstowej z szerszego tła za pomocą tzw. ramy delimitacyjnej, jak i podział „przestrzeni wewnętrznej" wydzielonego

już tekstu na poszczególne części. Bada się w szczególności wyznaczniki czyli delimitatory granic tekstu i jego poszczególnych fragmentów oraz strategie komunikacyjne wykorzystywane przez autorów celem przybliżenia czytelnikowi sukcesu w odbiorze (szersze rozważania związane z tymi kwestiami oraz wyjaśnienia dotyczące użytej terminologii można znaleźć w pracy (Dobrzyńska, 1993), zwłaszcza w rozdziałach noszących tytuły: „Tekst — całościowy komunikat" i „Mechanizmy spójności tekstu"; dalsze rozszerzenie problematyki zawierają specjalistyczne publikacje wyszczególnione w bibliografii wspomnianej pracy).

Zainteresowanie delimitacją tekstu wynika z przekonania, że jego całościowy odbiór, jak również wyodrębnianie części stanowi jeden z podstawowych zabiegów czytelniczych prowadzących do rozumienia. Wyraźny brak ramy delimitacyjnej, a w szczególności deficyt wewnątrztekstowych wyznaczników granic części może powodować, że czytelnik przyjmuje postawę niezdecydowania i trudniej mu dokonać wyboru jednej z możliwych hipotez interpretacyjnych, pozwalających na całościowe ujęcie sensu wypowiedzi.

Tekst jako komunikat zawdzięcza swoje istnienie i funkcjonowanie zdaniom. Zdanie tekstowe — w ujęciu prezentowanej teorii — jest czymś więcej niż strukturą gramatyczną w rozumieniu tradycyjnego językoznawstwa. Każde z nich osadzone w odpowiednim miejscu konkretnego tekstu nabiera w nim specjalnego znaczenia i współtworzy sens całego komunikatu. Szczególną budowę i sens, zależne od gatunku tekstu, posiadają zdania występujące w pozycji inicjalnej, otwierające tekst. Niektóre zaobserwowane tu fakty mają swoiste odniesienie do tekstów matematycznych, gdzie typowym schematem otwierającym jest „Niech ..." (na przykład: Niech F będzie figurą domkniętą). (Użycie tego schematu redakcyjnego, raczej nie stosowanego w tej formie poza matematyką, jest tak charakterystyczne, że znalazło odbicie w środowiskowym, żartobliwym aforyzmie: gdyby J. Verne był matematykiem, jego znana powieść zaczynałaby się od słów: Niech Nautilus będzie okrętem podwodnym, a jego kapitan niech nazywa się Nemo...).

Lingwistyczną teorię tekstu cechuje znaczny stopień ogólności podejścia do przedmiotu badań i zaznaczony wyraźnie stopień abstrakcji stwierdzeń. Ta stosunkowo młoda dziedzina doczekała się już wstępnej syntezy w postaci opracowania (Dobrzyńska, 1993), będącego rekapitulacją zagadnień wchodzących w jej zakres problemowy. Odpowiednikiem analiz teoriotekstowych, mających za przedmiot zainteresowania wyłącznie teksty pisane, są prowadzone równolegle badania nad strukturą tekstów mówionych (por. pozycję (Żydek-Bednarczuk, 1994), gdzie zamieszczono liczne odesłania do literatury rodzimej i obcej).

Obok teoriotekstowych analiz, co najmniej dwa nurty językoznawstwa wykazują zainteresowanie tekstem. Jednym z nich jest usytuowana w języko-

znawstwie stosowanym lingwistyczna teoria czytania. Zmierza się w niej do — realizowanego w kategoriach językoznawczych — naukowego opisu czynności czytania. Pierwszoplanowym obiektem analizy jest więc nie sam tekst, lecz przebieg procesu lektury (Pawłowska, 1993). Tekst natomiast stanowi wyłączny przedmiot badań w drugim ze wspomnianych nurtów — statystyce leksykalnej. Bada się tu m. in. frekwencje wyrazów lub grup wyrazowych w tekstach oraz analizuje różne zależności statystyczne w słownictwie tekstu. Kontrastującą z metodami jakościowymi (zdominowały one wcześniej wspomniane dyscypliny) cechą tego obszaru badań jest prymat metod kwantytatywnych; wnioski o charakterze jakościowym wyprowadza się na podstawie materiału statystycznego, w drugiej kolejności.

W kontekście dokonanego przeglądu niektórych badań nad tekstem w dziedzinach dla dydaktyki matematyki ościennych nasuwa się pytanie, co ona sama mogłaby od nich zapożyczyć lub jakie korzyści mogłaby odnieść z częściowej zbieżności różnych kierunków badawczych. Jako dziedzina graniczna winna być w swoich badaniach dyscypliną otwartą na asymilację metod, technik i problemów innych dziedzin. Wydaje się, że istnieją różne możliwości wykorzystania przez dydaktykę matematyki owego sąsiedztwa i paralelizmu badań; wśród nich można wymienić:

a) inspirującą rolę dziedzin ościennych w podejmowaniu przez dydaktykę nowych tematów badawczych,

b) perspektywę modyfikacji zagadnień badanych już w tych dziedzinach oraz przewartościowania problemów z zamiarem nadania im charakteru adekwatnego do treści matematycznych i tekstów matematycznych; nie wyklucza się prowadzenia wspólnych tematów w odpowiednich zespołach interdyscyplinarnych,

c) możliwość wykorzystania niektórych wzorców metodologicznych, ewentualnie po ich stosownych weryfikacjach; dla przykładu można tu wymienić pewne sposoby postępowania stosowane w psychologicznych badaniach nad rolą obrazów (rysunków) w tekście,

d) możliwość bezpośredniego spożytkowania lub adaptacji wybranych elementów aparatu pojęciowego wypracowanego i stosowanego w dziedzinach ościennych w ramach badań nad tekstem; jako przykład szczególnie interesującego w dalszych badaniach dydaktycznych kanonu pojęć można przytoczyć fragmenty ich systemu wypracowanego w lingwistycznej teorii tekstu.

3 Problemy budowy i lektury tekstu matematycznego — współczesny stan i niektóre perspektywy badań

Postulaty dotyczące nauki czytania tekstu matematycznego były zgłaszane w rodzimej literaturze od dawna. Rolę podręcznika w kształceniu matematycznym podkreślał już w 1929 r. S. Neapolitański (1958); potrzebę nauki czytania tekstów matematycznych w szkole uzasadniała w 1952 r. A. Chmielewska-Daniłowicz w obszernym artykule (1952). A. Z. Krygowska podniosła ten krąg zagadnień do rangi problemów naukowych, postulując w referacie wygłoszonym na Międzynarodowym Kongresie Nauczania Matematyki w 1969 r. w Lyonie prowadzenie systematycznych badań nad tekstem matematycznym i jego funkcjonowaniem w nauczaniu ((Krygowska, 1969); por. też szersze opracowanie tej problematyki z punktu widzenia procesu nauczania zawarte w (Krygowska, 1977)).

Świadomość wagi zagadnienia w kręgu badaczy- profesjonalistów, a także wśród twórców programów nauczania, nie zmienia faktu, że w praktyce szkolnej raczej nie dostrzega się jeszcze w całej pełni znaczenia tej problematyki. Upowszechnienie tych problemów i odniesienie ich do konkretnych lekcji szkolnych jest ciągle jeszcze niezadowalające. Tymczasem szkoła ma przygotowywać do samodzielnego uczenia się, nie może więc pomijać nauki korzystania z podręcznika, w tym z tekstu matematycznego. Perspektywa ogólnego postępu i rozwoju świata o wiele wyraźniej niż przed kilkudziesięciu laty stawia przed szkołą zadania związane z przygotowaniem do samokształcenia.

Inercja wdrożeniowa ma zapewne różne źródła. Wolno sądzić, że jedną z przyczyn niezadowalającego postępu jest brak lub nikła popularyzacja badań bezpośrednio ukierunkowanych na zastosowania; niewiele też jest propozycji metodycznych w zakresie organizowania nauki czytania tekstu matematycznego w szkole. Dodatkową przyczyną jest ciągle jeszcze zakorzeniona w pracy szkoły — a nawet nieraz podzielana przez część specjalistów innych dziedzin — obiegowa opinia, iż podręcznik matematyki nie może służyć do samodzielnego uczenia się tego przedmiotu; historii, literatury i geografii można uczyć się z podręcznika, matematykę — w tej obiegowej ocenie — winien „wyłożyć" nauczyciel.

Żadnej chyba z dydaktyk szczegółowych problem badawczy tekstu i jego lektury nie narzuca się z taką ostrością, jak dydaktyce matematyki. W miarę pełne poznanie procesu lektury i wypracowanie opartych na racjonalnych podstawach sposobów pracy z tekstem jest bliższym lub dalszym celem wszystkich prawie metodyk; dydaktyka matematyki ma jednak specjalne powody,

aby tekst matematyczny i jego lekturę uczynić odrębnym przedmiotem badań. Tekst matematyczny ma specyficzną wśród innych tekstów budowę i wymaga specjalnych technik czytania. W toku jego lektury dochodzi do bezpośredniego kontaktu z osobliwym światem abstrakcji, z autentyczną materią matematyczną, odrębnym językiem, pojęciami występującymi w bogatych i swoistych kontekstach, dostosowaną do nich metodą badań. W procesie lektury takiego tekstu — jak w soczewce — skupiają się podstawowe aktywności matematyczne, stanowiące same w sobie przedmiot zainteresowań dydaktyki. Pogłębione studia nad tekstem matematycznym i jego lekturą należą w dydaktyce matematyki do zakresu tzw. badań podstawowych. Są to bowiem studia nad naturą poznania matematycznego i specyfiką reprezentacji oraz przyswajania treści matematycznych w procesie uczenia się na różnych poziomach. Obejmują także analizę wytworów pracy matematyków. Z drugiej strony niektóre badania i studia w pewnych swoich nurtach są skierowane bezpośrednio do praktyki i te mogą prowadzić do działań typu normatywnego.

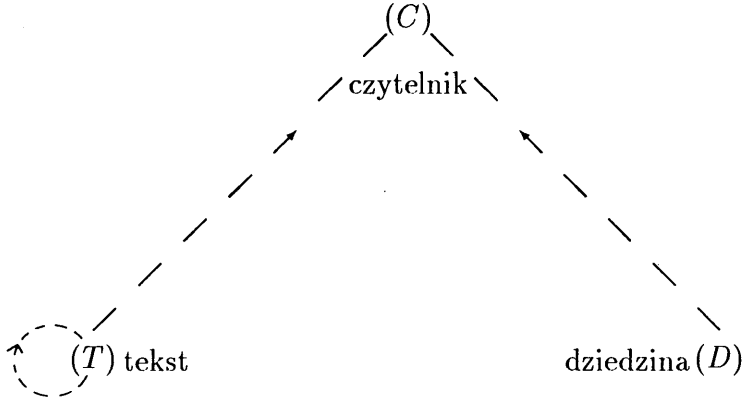
Problematyka tekstu matematycznego jest w gruncie rzeczy bardzo specyficznym i wyraźnie ogólnie zarysowanym obszarem badań, obejmującym przedział od pierwszych kontaktów z książką matematyczną po samodzielne redagowanie i studium prac naukowych z tego zakresu. Nie wszystkie problemy w tym rozległym obszarze zostały przez dydaktykę matematyki nawet zauważone oraz uświadomione, a zapewne tym bardziej należycie postawione.

Aby zdać sobie sprawę z rozmaitości potencjalnych kierunków badań leżących w tym obszarze, wyróżnijmy cztery wchodzące tu w rachubę kategorie (por. schemat na rys. 1):

— tekst (T),
— dziedzina przedmiotowa (D),
— czytelnik (C),
— autor tekstu (A).

Problematykę badań nad tekstem (nie tylko matematycznym) można ogólnie opisać, biorąc pod uwagę relacje między wyszczególnionymi na schemacie członami A, D, C, T; nie wykluczamy w tym ogólnym opisie także stosunków między danym członem a nim samym. W ten sposób można zarówno ująć te badania i kierunki badań, które zostały już podjęte i są w dydaktyce matematyki oraz w innych dyscyplinach kontynuowane, jak i wskazać badania dotąd jeszcze nie podjęte. Wspomniane wcześniej psychologiczne badania zależności różnych efektów uczenia się tekstu od jego struktury są na rysunku 1 reprezentowane przez relację typu $T \longrightarrow C$ (strzałka przerywana). Inny rodzaj badań reprezentuje relacja typu $D \longrightarrow C$ (zilustrowana na rys. 1 również strzałką przerywaną); może tu chodzić na przykład o badanie różnych strategii czytelniczych stosowanych przez odbiorcę w zależności od dziedziny, której tekst

dotyczy. Przypadek $T \longrightarrow T$ (na rys. 1 pętla) możemy kojarzyć z badaniami zależności strategii redakcyjnych — traktowanych jako obiektywne cechy tekstu — od typu tego tekstu lub wprost z analizą budowy tekstów, mającą na celu wykrycie ich cech interesujących dla nauczania (dalszych możliwych rodzajów badań nie zaznaczono już w podobny sposób na rysunku).



rys. 1

Wypracowywanie racjonalnych koncepcji nauki czytania tekstu matematycznego w szkole może iść różnymi torami. Z jednej strony, na przykład, należy badać strukturę tekstów matematycznych (szkolnych i naukowych) z zadaniem wykrycia komponentów mogących determinować przebieg lektury, a z drugiej, analizować tok autentycznego procesu pracy nad tekstem, i to zarówno u osób początkujących, jak i zaawansowanych (w tym profesjonalistów). Nie bez znaczenia byłyby badania — jak dotąd w dydaktyce matematyki nie podjęte — nad procesem redagowania tekstów matematycznych; również i tutaj należałoby uwzględnić rozgałęzienie: początkujący — profesjonaliści. Pokrewny typ reprezentowałyby badania dydaktyczne nad streszczaniem, konspektowaniem, przeróbkami i adaptacjami (także na użytek różnych typów kształcenia i poziomów szkolnych) tekstów matematycznych. Niezależnie od tego kierunku są już prowadzone interesujące badania nad przystępnością i różnymi aspektami tekstów matematycznych (Korcz, 1985, 1992). Pożyteczne dla dydaktyki matematyki mogą też okazać się prace porównawcze nad lekturą tekstu matematycznego i niektórych tekstów niematematycznych; to również problematyka całkiem otwarta dla badań mogących ujawnić fakty istotne dla

ulepszania nauczania matematyki. Przeprowadzono szersze — odniesione do wydzielonej klasy tekstów — badania nad konstrukcją tekstu matematycznego (Konior, 1983).

Znaczna jednak część rozważań i prac spotykanych w literaturze dydaktycznej dotyczy procesu lektury oraz analiz diagnostycznych relacjonujących przebieg badań nad tym procesem i jego różnymi aspektami. Mają one zresztą najdłuższą tradycję. Próby do badań pobiera się na ogół spośród uczniów starszych lat nauczania bądź też studentów (Walther, 1981). W omówieniach i komentarzach przeważają wnioski o wymowie negatywnej, stwierdzające nieumiejętność pracy z tekstem matematycznym i zmierzające do określenia i charakterystyki różnych nieprawidłowości oraz błędów w tym procesie (za punkt odniesienia służy jednak najczęściej wiedza i doświadczenie czytelnicze osób prowadzących badania; nie ma bowiem — poza ogólnymi ramami i modelami czytania — obiektywnie wypracowanych wskazań, jakie szczegółowe zachowania w toku lektury tekstu matematycznego uważać za właściwe, a co jest błędne w pracy z tego typu tekstem). Dość bogaty ilościowo i zróżnicowany jakościowo materiał na temat funkcjonowania rozmaitych elementów języka matematycznego w tekstach adresowanych do różnych poziomów kształcenia można znaleźć w pozycjach poświęconych wprost lub tylko pośrednio problematyce tekstu matematycznego (por. na przykład (Keitel, Otte, Seeger; 1980), (Pimm, 1990), (Shuard, Rothery; 1984)).

W perspektywie zadań, jakim w najbliższym czasie musi sprostać praktyka szkolna, a także w świetle wielorakich możliwych kierunków analiz dydaktycznych, stanu obecnych badań nad tekstem matematycznym i jego lekturą nie można jeszcze w dydaktyce matematyki uznać za w pełni zadowalający. Brak jest jeszcze na przykład szerzej rozwiniętego frontu badań, które mogłyby oświetlać problemy tekstu z różnych stron i dopełniać się nawzajem. Konieczna jest także pewna ciągłość w rozwijaniu badanej już tematyki; problem rozpoczęty rzadko bywa wyczerpująco opracowany w pierwszych badaniach, które wymagają nie tylko kontynuacji, ale często pogłębienia, a nawet powtórzenia w zmieniających się warunkach. Oczywiście nie chodzi o izolowane powtarzanie lub dosłowne powielanie tematów i procedur.

Postęp w danej dziedzinie ułatwiają omówienia, podsumowania (choćby tylko etapowe), prace syntetyzujące i przeglądowe oraz krytyczne oceny całych kierunków i teorii; można z nich uczynić odskocznię do nowych problemów. Istnienie różnych takich krytycznych analiz znamionuje dynamikę rozwoju dyscyplin z większą tradycją naukową.

Prezentując badania nad tekstem w dydaktyce nie można nie wspomnieć o definicji podstawowego pojęcia będącego bezpośrednio lub tylko pośrednio obiektem zainteresowań — pojęcia tekstu.

W obiegowej świadomości pojęcie tekstu matematycznego nie budzi większych kontrowersji. Klasyczny tekst matematyczny, którego egzemplifikacje znajdujemy na przykład na kartach akademickiego podręcznika dość konsekwentnie realizuje bowiem pewien wzorzec wypracowany w tradycji. Ten tradycyjny model jest dla autorów bardziej zaawansowanych już książek matematycznych modelem obligatoryjnym. W miarę jednak oddalania się od tego wzorca napotykamy w badaniach różne materiały redagowane z myślą o przekazie informacji matematycznej. Wobec mnogości coraz bardziej zróżnicowanych i nieraz nawet radykalnie zmodernizowanych podręczników do nauczania matematyki, zwłaszcza na niższych poziomach, potrzeba choćby tylko częściowej odpowiedzi na pytanie, co będziemy nazywali tekstem matematycznym, staje się coraz bardziej widoczna. Określenie pojęcia tekstu matematycznego bądź też typu tekstu badanego w konkretnym przypadku byłoby pożyteczne również dlatego, że pojawiają się stale nowe środki wyrazu stosowane w pisemnej reprezentacji matematyki. Między obrazowym elementarzem matematycznym adresowanym do całkiem początkujących uczniów, a tekstami dojrzałymi, także uniwersyteckimi lub spotykanymi w pracach naukowych, istnieje cały wachlarz tekstów, których przydatność musi być permanentnie badana i oceniana z punktu widzenia nauczania i odbioru.

W dużej części badań organizowanych do tej pory, określenie rodzaju analizowanego tekstu nie było w istocie potrzebne. Jeśli bowiem można wprost przytoczyć analizowane teksty bądź wskazać jednoznacznie ich źródła (na przykład matematyczne podręczniki akademickie z pewnego okresu), to nie ma wątpliwości, o jakie teksty chodzi. Całkiem inna sytuacja pojawia się wówczas, gdy przedmiotem jednoczesnych badań stają się cechy różnych tekstów (w tym klasycznego), których nie można *a priori* usytuować w konkretnej klasie podręczników. W rozszerzającej się działalności badawczej byłby pożyteczny aparat terminologiczny pozwalający odróżniać, na przykład, teksty matematyczne (klasyczne) od tekstów paramatematycznych; można byłoby wówczas uniknąć niektórych nieporozumień i poruszać się sprawniej w złożonej rzeczywistości różnych tekstów prezentujących matematykę. Jest oczywiste, że określenie tekstu przez wskazanie podręcznika lub — ogólniej — rodzaju źródła, z którego on pochodzi, może się okazać rozwiązaniem nie dość ogólnym i doraźnym; ponadto wykorzystuje środki zewnętrzne (przypomina więc nieco „określenie" orientacji płaszczyzny w geometrii poglądowej przy pomocy zegarka).

Jednak potrzeba określenia pojęcia tekstu to jedno, a rysujące się przy tym zasadnicze trudności to drugie. W różnych badaniach, na przykład językoznawczych, ogólne pojęcie tekstu było i nadal pozostaje przedmiotem licznych dociekań. W szczególności stało się tematem międzynarodowej konferencji na Uniwersytecie Columbia w Nowym Jorku w 1978 r. , gdzie zarysowały się

istotne trudności w sprecyzowaniu określenia (Cieślikowska, 1995). Piśmiennictwo przynosi różne propozycje rozwiązań całościowych lub tylko aspektowych w zakresie definicji ogólnego pojęcia tekstu, ale równocześnie wielu autorów wyraża sceptycyzm co do możliwości znalezienia powszechnie zadowalającej formy rozwiązania.

Dla podkreślenia specyfiki zwyczajowo ukształtowanej formy konwencjonalnego tekstu matematycznego porównuje się go nieraz z tekstem humanistycznym. Jeśli nawet ten ostatni przynależy do jakiegoś określonego podgatunku, to jego autor często korzysta z szerokiego marginesu swobody w realizacji gatunkowego schematu. Tę samą uwagę można by odnieść do wielu szkolnych tekstów matematycznych powstałych przez elementaryzację tekstu klasycznego — zwłaszcza, że zakres elementaryzacji jest dość rozległy. Dotyczyć ona może samego języka, wzbogacania nowymi środkami wyrazu, metody, porządku przedstawiania matematycznych faktów itp.

Jednym z istotnych kierunków badań nad tekstem i jego funkcjonowaniem w procesach recepcji w obecnym, ciągle jeszcze wstępnym etapie są — jak już wspomniano — badania przebiegu autentycznej lektury tekstu matematycznego. Podejścia mogą tu być różne. Rozmaite — mniej lub bardziej szczegółowe — mogą też być cele. Obok zwykłej obserwacji ogólnych zachowań i działań czytelniczych dostępnych bezpośrednio, można wypróbowywać specjalne techniki mogące prowadzić do ujęcia bardziej specyficznych i szczegółowych komponentów procesu lektury tekstów matematycznych. Tego typu przykład (zarazem propozycję) obecnie przytaczamy dla ilustracji; prezentuje on więc badania wspomnianego kierunku, ale różniące się od najczęściej spotykanych badań tego typu.

4 Przykład badań

Prezentowany tu przykład jest fragmentem szerszych badań[1] nad autentycznym przebiegiem procesu lektury tekstu matematycznego. Wybrana dla ilustracji ich część wiąże się z pytaniem, jak proces czytania realizuje się przestrzennie, tzn. jak rozwija się na tle architektury strony druku (bliższe objaśnienia dotyczące treści tego pytania zostaną podane w toku opisu badań).

Tekst matematyczny, w szczególności tekst dowodu, zawiera bardzo często zwroty odsyłające czytelnika do wcześniejszych jego partii. W roli wyrażeń odsyłających występują na przykład zwroty: „z uwagi na powyższy związek", „na mocy uzyskanej wcześniej równości", „z założenia"; w tej samej funkcji wykorzystuje się systemy numeracji (oznakowań) cyfrowych lub literowych.

[1] Pełny cykl badań w toku.

Podobnie często stosowane powiadomienia typu „zatem", „wynika", „mamy więc" kierują czytelnika do mających nastąpić fragmentów tekstu. Jedne i drugie wyrażenia wygodnie będzie nazywać adresami w górę lub w dół — w zależności od tego, do jakiego obszaru tekstu przenoszą uwagę dbiorcy. Oprócz adresów (w górę i w dół) w tekście dowodu można wyróżnić pojedyncze informacje matematyczne (założenia, wnioski itp.). W rezultacie bardzo często cały tekst zostaje rozczłonkowany na poszczególne elementy wymienionych rodzajów.

A oto przykładowy tekst, w którym wyodrębnione części wyszczególnionych trzech rodzajów (adres w górę, adres w dół, informacja matematyczna) opatrzono kolejnymi numerami w nawiasach kwadratowych. Każdy numer umieszczony jest z lewej strony na wysokości odpowiadającej oznaczanemu fragmentowi tekstu; adres w dół i wniosek bezpośrednio następujący otrzymują jeden numer.

Twierdzenie

[1] Jeśli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta

[2] oraz suma liczb x, y, z jest równa zeru, to

[3] $$a^2yz + b^2xz + c^2xy \leq 0 \tag{1}$$

Dowód

[4],[5] Niech L oznacza lewą stronę nierówności (1).

[6] Z założenia wynika, że

[7] $$z = -(x + y),$$

zatem

[8] $$L = -a^2y(x + y) - b^2x(x + y) + c^2xy$$

czyli

[9] $$L = (c^2 - a^2 - b^2)xy - a^2y^2 - b^2x^2. \tag{2}$$

Liczby a, b, c, spełniają nierówność

[10] $$|a - b| < c < a + b.$$

Stąd

[11] $$(a - b)^2 < c^2 < (a + b)^2,$$

więc

[12] $$-2ab < c^2 - a^2 - b^2 < 2ab. \tag{3}$$

[13],[14] Jeśli $xy > 0$, to z (3) wynika, że

[15] $$(c^2 - a^2 - b^2)xy < 2abxy,$$

[16] wobec czego z (2) otrzymujemy

[17] $L < 2abxy - a^2y^2 - b^2x^2 = -(ay - bx)^2 \leq 0.$

[18],[19] Jeśli $xy < 0$, to na mocy (3)

[20] $-2abxy > (c^2 - a^2 - b^2)xy,$

[21] zatem z (2) wynika, że

[22] $L < -2abxy - a^2y^2 - b^2x^2 = -(ay + bx)^2 \leq 0.$

[23],[24] Jeśli wreszcie $xy = 0$, to z (2) otrzymujemy

[25] $L = -a^2y^2 - b^2x^2 \leq 0.$

[26] We wszystkich przypadkach $L \leq 0$, co należało wykazać.

W przytoczonym tekście mamy więc (przykładowo)
— informacje:

[1] „liczby a, b, c są długościami boków trójkąta" (założenie),

[3] „$a^2yz + b^2xz + c^2xy \leq 0$" (wniosek pośredni),

[4] „L oznacza lewą stronę nierówności" (umowa),
— adresy w górę: [5]„nierówności (1)" (odesłanie do nierówności o numerze (1)),

[6] „z założenia" (odesłanie do założenia $x + y + z = 0$),
— adresy w dół (wraz z wnioskami bezpośrednimi):

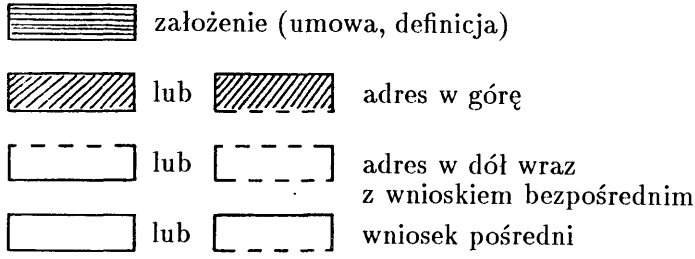
[7] „wynika, że $z = -(x + y)$",

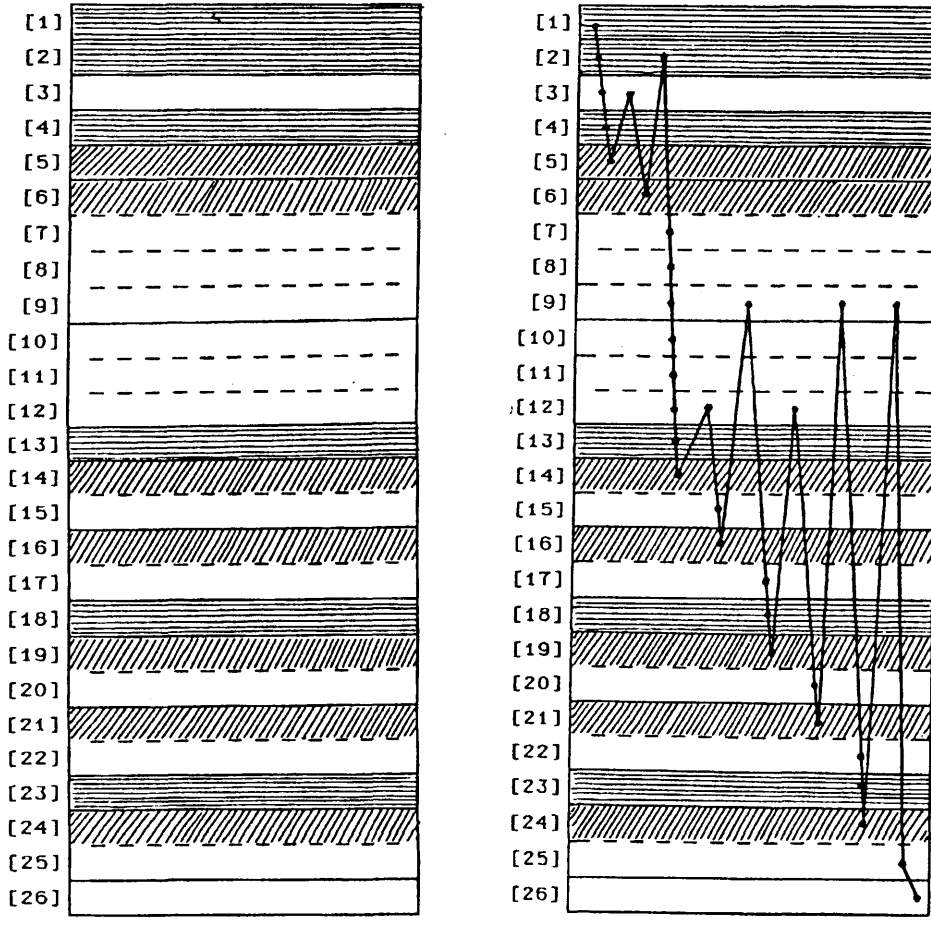
[17] „otrzymujemy $L < 2abxy - a^2y^2 - b^2x^2 = -(ay - bx)^2 \leq 0$".

Strukturę tekstu ze względu na wyróżnione rodzaje jego fragmentów można zilustrować geometrycznie, przedstawiając oznaczone numerami części w postaci prostokątnych pasków zgodnie z następującą legendą (rys. 2a).

Uzyskuje się w ten sposób obraz przestrzennego rozmieszczenia wyodrębnionych elementów tekstu (zwany dalej jego obrazem segmentacyjnym). Respektując dosłownie wszystkie adresy w górę i w dół — każdy jednokrotnie — możemy odtworzyć drogę „abstrakcyjnego" czytelnika wyznaczoną bezpośrednio przez ten tekst. Na rys. 2b przedstawiono tę drogę na tle obrazu segmentacyjnego tekstu (linia łamana, której punkty zaznaczone kropkami symbolizują momenty zatrzymania uwagi na danym fragmencie tekstu). Taka technika opisu pozwoli interpretować podobne ścieżki odpowiadające już rzeczywistemu przebiegowi procesu lektury badanego czytelnika.

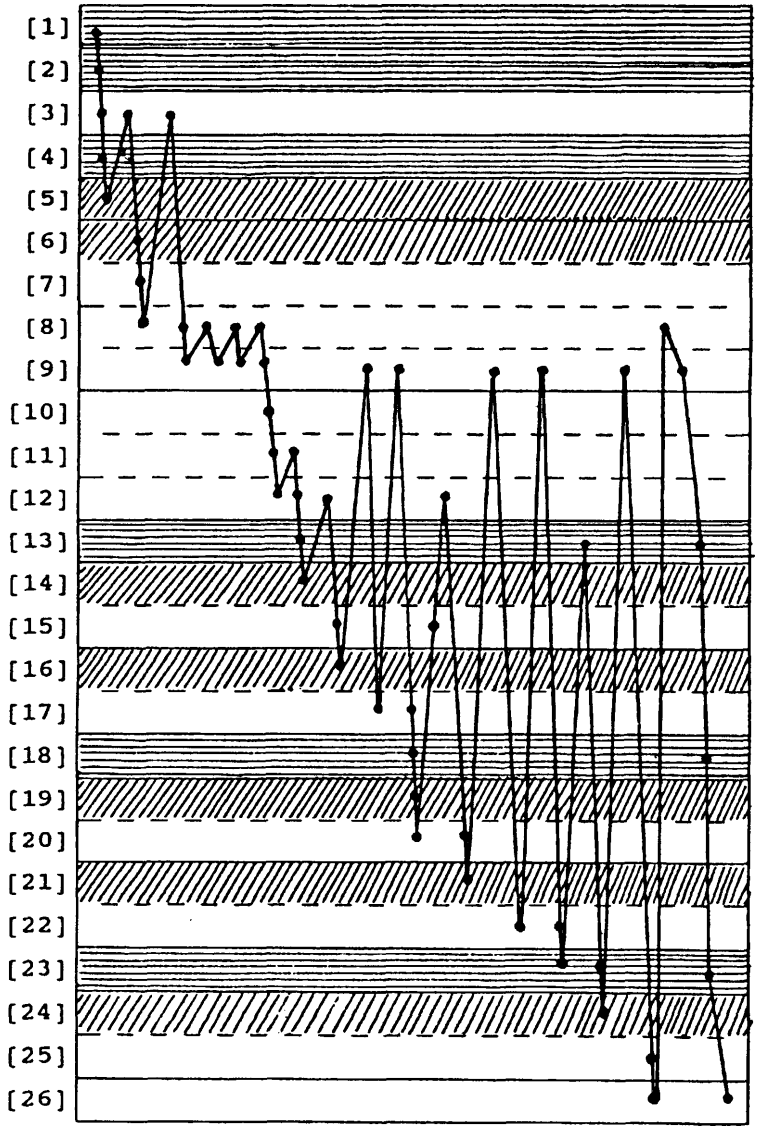
Badanej osobie poleca się głośne czytanie (studium) tekstu z jednoczesnym wskazywaniem miejsc, nad którymi aktualnie pracuje. Pozwala to rejestrować szczegółowo kroki czytelnika w płaszczyźnie zadrukowanej strony tekstu i w rezultacie odtworzyć rzeczywistą ścieżkę odpowiadającą jego pracy nad tekstem. Rysunek 3 przedstawia w tej konwencji autentyczną ścieżkę pracy nad tekstem jednego z uczniów klasy II szkoły średniej.


założenie (umowa, definicja)
lub
adres w górę
lub
adres w dół wraz
z wnioskiem bezpośrednim
lub
wniosek pośredni


[1]
[2]
[3]
[4]
[5]
[6]
[7]
[8]
[9]
[10]
[11]
[12]
[13]
[14]
[15]
[16]
[17]
[18]
[19]
[20]
[21]
[22]
[23]
[24]
[25]
[26]

a) b)

rys. 2



rys. 3

Ponieważ pisemna prezentacja twierdzenia i dowodu ma charakter dwuwymiarowej konstrukcji przestrzennej usytuowanej na płaszczyźnie kartki, czytelnik wędruje po tekście respektując (lub nie) adresy wyrażone przez autora wprost bądź pośrednio. Być może powraca też do wcześniejszych partii tekstu z własnej inicjatywy. Wyodrębnione w powyższy sposób z całego złożonego procesu lektury i zarejestrowane ścieżki czytelnicze stanowią bezpośredni

przedmiot przytoczonych badań. Ich celem — stanowiącym fragment szerszego zadania — jest w skrótowym ujęciu obserwacja kształtu zarejestrowanych ścieżek; interesującym jest bowiem pytanie, czy i jak czytelnik respektuje włączone do tekstu adresy oraz jak kształt łamanej (rys. 3) zależy od zaawansowania matematycznego odbiorcy. Na przykład ostatni, złożony z sześciu odcinków, fragment łamanej na rys. 3 odzwierciedla dokonaną przez ucznia rekapitulację dowodu; obecność tego typu syntezy jest — jak wiadomo — bardzo pożądana w procesie czytania. Tego typu informacje wraz z innymi danymi eksperymentalnymi mogłyby stanowić podstawę do wyciągania wniosków na temat rzeczywistego przebiegu procesu lektury.

5 Dalsze uwagi dotyczące dydaktycznych badań związanych z tekstem matematycznym

Postulat ciągłej weryfikacji badań dydaktycznych nad tekstem i jego lekturą wynika nie tylko ze zmiennych warunków społecznych i ewoluujących zadań szkoły. Jest on także prostym następstwem zmian, jakim podlegają w swym rozwoju zwyczajowe normy redagowania i forma samego tekstu w matematyce.

W przeszłości ukształtował się pewien wyraźnie wyprofilowany styl redagowania tekstów matematycznych. Współczesny kształt przyjęły reguły kompozycyjne — specyficzne kanony budowy takiego tekstu wypracowane w praktyce redakcyjnej przez pokolenia matematyków. Na ten proces stopniowego formowania się obowiązującego później przez dziesięciolecia stylu miały zapewne wpływ następujące fakty:

— uporządkowanie wielu zagadnień dotyczących podstaw matematyki, o czym zadecydowało m. in. przezwyciężenie trudności „naiwnej" teorii zbiorów; pojawiło się aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości skontruowane w ten sposób, aby w jego ramach nie można było odtworzyć znanych antynomii, a zarazem wystarczające do rekonstrukcji rozumowań klasycznej matematyki,

— ostateczne uformowanie się klasycznego rachunku logicznego (wcześniej rachunku zdań, a następnie rachunku kwantyfikatorów), któremu postać współczesną nadali po raz pierwszy pod koniec lat dwudziestych D. Hilbert i W. Ackermann; spowodowało to znaczny wzrost znaczenia logiki formalnej,

— renesans metody aksjomatycznej jako metody prezentacji teorii matematycznych (mimo ograniczeń wynikających z fundamentalnych prac K. Gödla) i rozwój tendencji formalistycznych w matematyce.

Wydaje się, że ten wypracowany sposób konstruowania tekstów matematycznych zaczyna podlegać w ostatnich czasach pewnej ewolucji, choć byłoby zapewne przedwcześnie ogłaszać zmianę kierunku procesów, które ze swej na-

tury postępują bardzo wolno. Dają się jednak — przynajmniej w niektórych publikacjach matematycznych — zauważyć pewne oznaki rozluźniania się dość sztywnych kanonów i form redakcyjnych stosowanych na przykład w prezentacji dowodów (co oczywiście nie oznacza naruszenia wymogów ścisłości lecz — być może — większą naturalność wysłowień). Jeśli takie zmiany stylu rzeczywiście nastąpią, może to pociągnąć konieczność weryfikacji dotąd opracowanych w dydaktyce zasad czytania tekstów matematycznych.

Stopniowej ewolucji podlega także podręcznik szkolny z matematyki. Trudno dziś przewidzieć w szczegółach, jaki będzie końcowy efekt tych zmian. Pewne tendencje zdają się wskazywać, że perspektywiczne zmiany mogą doprowadzić (na niektórych szczeblach nauczania) do zaniku tradycyjnej formy podręcznika szkolnego.

Ze zmianami matematycznego stylu w pisemnym przekazie informacji wiąże się jeszcze jeden rodzaj badań — prawie zupełnie jeszcze nie rozpoczętych w szerszej skali — mających znaczenie dydaktyczne. Chodzi tu o badania nad historycznym kształtowaniem się tekstu matematycznego — tej specyficznej formy prezentacji twierdzeń, definicji, dowodów itp. Wiadomo bowiem, że ta forma zmieniała się w ciągu wieków.

Byłoby zasadne oświetlenie pod względem dydaktycznym tych przemian. Z tego punktu widzenia mogłoby się okazać interesujące studium oryginalnych tekstów, na przykład J. L. Lagrange, a czy L. Eulera; zasady komponowania prac oryginalnych mogą się różnić od dostosowanych do późniejszych form podręcznikowych rozmaitych sposobów wtórnego przedstawiania tych samych treści. Pouczające okazać się może również studium rozmaitych uwag na temat konkretnych tekstów matematycznych oraz ocen wyrażanych przez samych matematyków-recenzentów. Przykładem mogą tu być wypowiedzi P. G. L. Dirichleta i L. Kroneckera na temat tekstów K. F. Gaussa, w szczególności słynnych „Disquisitiones arithmeticae", dzieła zwanego z uwagi na swą zwięzłość i lapidarny styl „księgą siedmiu pieczęci", stawiającego wymagania nawet specjalistom.

6 Zakończenie

Niektóre publikacje poświęcone z nazwy analizie tekstów matematycznych i badaniu procesu lektury w gruncie rzeczy analizują wyłącznie język używany w tych tekstach lub też — ogólniej — język matematyki. Utożsamienie analizy tekstu matematycznego z analizą samego języka, czy też sprowadzenie pojęcia takiego tekstu do pojęcia języka nie jest w pełni zasadne. Może stanowić okoliczność utrudniającą interdyscyplinarne badania, racjonalną kontynuację pro-

blematyki badawczej, obiektywne porównywanie wyników i ocenę postępu. W szczególności zagadnień specyfiki tekstu matematycznego nie można sprowadzić wyłącznie do problemów dotyczących swoistości języka matematycznego.

Oczywiście, trudności w posługiwaniu się językiem matematycznym występującym w odbiorze matematyki pisanej wiążą się na ogół z trudnościami w recepcji tekstu, ale niekoniecznie na odwrót. Każdy tekst matematyczny ma swoją wewnętrzną kompozycję. Teksty stosują różne techniki i środki wyrazu nie funkcjonujące poza matematyką, ale też nie dające się bezpośrednio zaliczyć do sfery języka. W samym odbiorze istotna może być na przykład architektura strony druku (co ma związek z czytaniem w przedziale przestrzeni, które interweniowało w przytoczonym wcześniej przykładzie badań), decydującym elementem może okazać się też sposób segmentacji tekstu oraz zewnętrzne jego cechy będące samodzielnymi nośnikami informacji lub przynajmniej wspomagające i wzmacniające niektóre wątki przekazu. Są to niewątpliwie elementy nie należące wprost do języka. Tekst matematyczny jest więc czymś więcej niż prostym zestawem językowych komponentów: symboli, wyrazów i zdań. Jest obszerniejszą całością, w jakiś sposób zorganizowaną, misternie oraz metodycznie dla celów przekazu informacji „utkaną"; wszak „tekst" według łacińskiego źródłosłowu oznacza *textum* — tkaninę.

Niektóre zagadnienia dotyczące tekstu i jego lektury pojawiają się w literaturze jako problemy uwikłane w cały kompleks tematyczny związany bezpośrednio z funkcjonowaniem podręcznika szkolnego w procesie nauczania i uczenia się, co z kolei wiąże się z obszerniejszym zakresem ogólnych badań nad podręcznikiem i jego strukturą, wywodzących się z tradycji pedagogicznych. W istocie badania nad podręcznikiem matematycznym i jego funkcjonowaniem w procesie uczenia się są w ogólności czym innym niż badania nad tekstem matematycznym i jego lekturą *sensu stricto*. Jest tak już choćby dlatego, że korzystanie z podręcznika zawiera elementy i aktywności nowe i zewnętrzne w stosunku do samej tylko lektury danego z góry tekstu. Oba kierunki badań mają, oczywiście, wiele punktów stycznych, tym niemniej tekst i jego lektura stanowią w obszarze klasycznych badań nad podręcznikiem po części problematykę dopełniającą lub zgoła pomocniczą, pojawiającą się tu okazjonalnie.

Literatura

Lista pozycji bezpośrednio cytowanych w artykule została znacznie rozbudowana ze względu na jego charakter. Niniejsza bibliografia zawiera więc obszerniejszy ich zbiór. Poszerzony zestaw pozycji zawierających dalsze odesłania, choć zapewne nie jest kompletny, winien stanowić punkt wyjścia do dalszych poszukiwań i źródło orientacji co do kierunków badań nad tekstem

jako środkiem pedagogicznego przekazu.
Austin J. L., Howson A. G.: 1970, Language and mathematical education, *Educational Studies in Mathematics* 2, 161-197.
Bauersfeld H., Zawadowski W.: 1988, Mwtafory i metonimie w nauczaniu matematyki, *Dydaktyka Matematyki* nr 15, 155-186.
Brunner R. B.: 1976, Reading Mathematical Exposition, *Educational Research* 18(3), 208-213.
Call R. J., Wiggin N. A.: 1966, Reading and Mathematics, *The Mathematics Teacher* 59, 149-157.
Chmielewska E.: 1980, Zależność efektów uczenia się tekstu od jego struktury, *Psychologia Wychowawcza* 4, 441-452.
Chmielewska E.: 1984, Zależność efektów uczenia się tekstu od sposobu uwypuklania jego struktury, *Psychologia Wychowawcza* 1, 17-29.
Chmielewska-Daniłowicz M.: 1952, Uczmy młodzież korzystania z podręcznika, *Matematyka* 4, 16-27.
Cieślikowska T.: 1995, *W kręgu genologii, intertekstualności, teorii sugestii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa — Łódź.
Cormack A.: 1978, *A Study of Language in Mathematics Textbooks*, M. Phil. Thesis, London.
Czerniawska E.: 1992, Strategie uczenia się tekstów podręcznikowych i inne wybrane aspekty funkcjonowania poznawczego uczniów a ich osiągnięcia szkolne, *Psychologia Wychowawcza* 2-3, 130-143.
Dobrzyńska T.: 1993, *Tekst. Próba syntezy*, IBL, Warszawa.
Earp N. W.: 1970, Procedures for Teaching Reading in Mathematics, *The Arithmetic Teacher* 17, 575-579.
Fabijańczyk M., Warężak A.: 1993, Praca studenta z tekstem matematycznym, *Acta Universitatis Lodziensis*, Folia Mathematica 6, 15-23.
Freudenthal H.: 1973, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, E. Klett Verlag, Stuttgart.
Gierulanka D.: 1962, *Zagadnienie swoistości poznania matematycznego*, PWN, Warszawa.
Glaeser G.: 1977, Analyse de la transmission. Le Livre des Mathématiques et sa lecture, *ZDM* 1, 33-40.
Götz W.: 1978, Textoptimierung im Mathematikunterricht auf der Grundlage eines vierdimensionalen Verständlichkeitskonzepts, *Blätter für Lehrerfortbildung* 30, 489-495.
Götze D.: 1976, Zur Arbeit mit dem Mathematik-Lehrbuch, *Mathematik in der Schule* 11, 601-604.
Harkin J. B., Rising G. R.: 1974, Some Psychological and Pedagogical Aspects of Mathematical Symbolism, *Educational Studies in Mathematics* 3,

255-260.
J a g o d z i ń s k a M.: 1976, Rola ilustracji w uczeniu się tekstu, *Psychologia Wychowawcza* 2, 178-191.
J a g o d z i ń s k a M.: 1991, *Obraz w procesach poznania i uczenia się. Specyfika informacyjna, operacyjna i mnemiczna*, WSiP, Warszawa.
J u s t M. A., C a r p e n t e r P. A.: 1980, A theory of reading: From eye fixations to comprehension, *Psychological Review* 87, 329-354.
K a n e R. B. (et al.): 1974, *Helping Children Read Mathematics*, American Book Company, New York.
K e i t e l C h., O t t e M., S e e g e r F.: 1980, *Text, Wissen, Tätigkeit*, Seriptor Verlag Gmb.
K i e r a n C.: 1981, Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in Mathematics* 3, 317-326.
K o n i o r J.: 1983, *Analiza konstrukcji tekstu dowodu jako środka przekazu w matematyce*, Wydawnictwo Naukowe UŚ, Katowice.
K o n i o r J.: 1988a, Z badań nad konstrukcją tekstu dowodu w podręcznikach akademickich i monografiach matematycznych, *Wiadomości Matematyczne* XXVIII. 1, 69-79.
K o n i o r J.: 1988b, Praca ucznia z tekstem matematycznym w nauczaniu szkolnym (propozycja ćwiczeń z dydaktyki matematyki), w: *Resortowy Program Badań Podstawowych RP III 30, Materiały i opracowania z roku 1987* pod redakcją naukową B. Niemierki, tom II, część II, WSP Bydgoszcz, 376 -389.
K o n i o r J.: 1991a, Propozycje do lekcji obejmujących pracę ucznia z tekstem matematycznym, *Matematyka* 2, 79-84.
K o n i o r J.: 1991b, Recherches sur la structuré du texte mathematique (basés sur des textes de démonstrations), w: *Le metier d'enseignement de mathématiques dans un monde qui change*; CIEAEM — 42, Pedagogical University in Cracow, Department of Mathematics Education, Poland, 458-462.
K o n i o r J.: 1993, Research into the construction of mathematical texts; *Educational Studies in Mathematics* 24, 251-256.
K o n i o r J. (red.): 1990, *Nauka czytania tekstu matematycznego w szkole (wybrane problemy i propozycje)*, CDN w Warszawie Oddział w Bielsku-Białej, Bielsko-Biała.
K o ń c z a l T., K o r c z M.: 1987, Vermittlungsformen mathematischer Inhalte im Schulbuch, *Der Mathematikunterricht* 5, 46-56.
K o r c z M.: 1977, Trudności uczniów przy czytaniu tekstu matematycznego, *Matematyka* 5, 282-285.
K o r c z M.: 1985, Problemy przystępności tekstu matematycznego, *Problemy Dydaktyczne Matematyki* II, Wydawnictwo WSP, Zielona Góra, 5-13.

K o r c z M.: 1992, Einige Aspekte der Analyse des Textes von Mathematiklehrbüchern, w *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Red. H. Schumann), Verlag Franzbecker Hildesheim, 259-262.

K r y g o w s k a Z.: 1969 - 1970, Le texte mathematique dans l'enseignement des mathématiques, *Educational Studies in Mathematics* 2/3, 360-370.

K r y g o w s k a Z.: 1974, Tekst matematyczny w nauczaniu szkolnym, w: *Wybrane zagadnienia nauczania matematyki w szkole średniej. Wykłady telewizyjne II* (red. B. Nowecki), WSiP, Warszawa, 526-260.

K r y g o w s k a Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, część 2*, WSiP, Warszawa.

K u r c z I., P o l k o w s k a A.: 1990, *Interakcyjne i autonomiczne przetwarzanie informacji językowych — na przykładzie procesu rozumienia tekstu czytanego na głos*, Wydawnictwo PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław — Warszawa — Kraków — Gdańsk — Łódź.

L a b o r d e C.: 1990, Sprache im Unterricht, *Mathematik in der Schule* 9, 592-600.

M a d e r O.: 1966, Zu einigen Fragen der Schulbuchgestaltung, *Mathematik in der Schule* 4, 458-462.

M a r c i s z e w s k i W.: 1977, *Metody analizy tekstu naukowego*, PWN, Warszawa.

M i r e k M.: 1972, Tekst dowodu matematycznego w samodzielnej pracy ucznia, *Matematyka* 1, 35-40.

N e a p o l i t a ń s k i S.: 1958, *Zarys dydaktyki matematyki*, PZWS, Warszawa.

N o w a k W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

N o w e c k i B.: 1974, Przyczynek do badań nad rozumieniem przez uczniów tekstu matematycznego, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny*, Zeszyt 54, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 65-110.

N o w e c k i B.: 1984, Lektura tekstu matematycznego na przykładzie zadań, *Oświata i Wychowanie, Wersja B* (Dydaktyka Matematyki) nr 15, 48-52.

P a w l a k R. J.: 1993, Conducting „Problem Lectures" by academic teachers and „Control Self-Dependence", *Problemy Matematyczne* Zeszyt 12 i 13, Wydawnictwo Uczelniane, WSP Bydgoszcz, 3-8.

P a w ł o w s k a R.: 1993, *Lingwistyczna teoria nauki czytania*, Wydawnictwo UG, Gdańsk.

P i e p r z y k H.: 1986, Uczyć czytać podręcznik, *Oświata i Wychowanie — Wersja Edukacyjna Dla Słuchaczy NURT-u* nr 14, 20-23.

P i l e c k a H.: 1977, Praca nad tekstem matematycznym z uczniami liceum ogólnokształcącego, w: *Szkoła Dydaktyki Matematyki*, IKNiBO, Karpacz, 75-78.

P i m m D.: 1983, *Similarities and differences between mathematical and linguistic transformations*, Nottingham Linguistic Circular 12(1), 66-82.

P i m m D.: 1990, Speaking Mathematically, *Communication in Mathematics Classroom*, Routledge, London and New York.

P o d g ó r s k i P.: 1980, Plany czynności w nauce korzystania z tekstu matematycznego, *Matematyka* 4, 239-241.

P r z e t a c z n i k - G i e r o w s k a M., W ł o d a r s k i Z.: 1994, *Psychologia wychowawcza*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

S c h u l z v o n T h u n F., G ö t z W.: 1976, *Mathematik verständlich erklären*, Urban R. Schwarzenberg, München.

S e m a d e n i Z., P u c h a l s k a E.: 1985, Symbole literowe w nauczaniu początkowym, w: *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 3 (praca zbiorowa pod red. Z. Semadeniego); WSiP, Warszawa, 173-192.

S h u a r d H., R o t h e r y A.: 1984, *Children Reading Mathematics*, Hurray Ltd, London.

S o l o w j o w a A. F.: 1960, Die selbständige Arbeit der Schüler mit dem Lehrbuch in der Unterrichtsstunde, *Pädagogik* 15, 985-999.

S t e e r o d N. E., H a l m o s P. R., S c h i f f e r M. M., D i e u d o n n é J. A.: 1978, Jak pisać teksty matematyczne, *Wiadomości Matematyczne* XXI. 1, 29-81.

S z n a j d e r M.: 1978, Teksty sterujące pracą ucznia w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej, *Rocznik Naukowo — Dydaktyczny Zeszyt 67, Prace z Dydaktyki Matematyki* II, Wydawnictwo Naukowe WSP Kraków, 137-221.

U f e r S.: 1976, Zur Arbeit mit dem Lehrbuch im Mathematikunterricht, *Mathematik in der Schule* 10, 529-534.

W a l t h e r G.: 1981, Autonomes Lernen und die Lektüre mathematischer Texte, Büldunkstheoretische Gesichtspunkte; *Journal für Didaktik der Mathematik* 2, 147-177.

Z a m o r s k a Z.: 1977, Trudności uczniów szkoły zmodernizowanej w interpretowaniu tekstu definicji — w świetle badań indywidualnych, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny*, Zeszyt 4/32, Wydawnictwo Uczelniane WSP Rzeszów, 123-143.

Ż y d e k - B e d n a r c z u k U.: 1994, *Struktura tekstu rozmowy potocznej*, Wydawnictwo Naukowe UŚ, Katowice.

The construction and the reading of the mathematical text — present state and perspektives of scientific research

Summary

Studies on selected problems concerning the mathematical text and its reading are reviewed in the article. Some perspectives of research on the reception of mathematical texts are proposed, too. An example study on the mathematical text reading process is reported to illustrate proposed research ideas.