ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 8 (1987)

MAŁGORZATA ĆWIK
Kraków

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Pytanie nauczyciela jako środek kontroli w nauczaniu matematyki (próba diagnozy)

WSTĘP

1. Niniejszy artykuł przedstawia sprawozdanie z fragmentu szerszych badań poświęconych problemom kontroli w procesie nauczania matematyki. Badania te miały charakter diagnostyczny. Chodziło o zorientowanie się, jak przebiega ten proces w szkolnej rzeczywistości. Przedstawiony tu fragment tych badań dotyczył roli pytań stawianych przez nauczyciela.

Jednym bowiem z ważnych sposobów kontroli dydaktycznej jest rozmowa nauczyciela z uczniem. Tradycyjnie lekcja matematyki przebiega ciągle jeszcze według schematu „jednostronnie zorientowanego dialogu". Nauczyciel stawia pytania i daje polecenia, uczniowie odpowiadają i wykonują polecenia. Tak zorganizowane są ćwiczenia, przygotowanie nowego materiału, odkrycia twierdzeń, prowadzenie dowodów itp. Nie jest to więc pełna dwustronna rozmowa. W tej sytuacji szczególną rolę dydaktyczną pełnią pytania stawiane przez nauczyciela. W badaniach poświęconych problemom kontroli skoncentrowaliśmy uwagę na jednym tylko, nie najważniejszym, ale jednak bardzo ważnym aspekcie takiej „jednostronnie zorientowanej rozmowy". Sytuacja, w której formułuje się pytanie i sposób jego zadawania, wpływa bowiem w dużym stopniu na rodzaj i jakość informacji, jakie nauczyciel zdobywa o uczniu na podstawie jego reakcji na to pytanie, w której przejawia się jego aktywność, wiedza, uzdolnienia, inteligencja.

W ramach ciągłej kontroli, zgodnie z przyjętym ogólnie jej rozumieniem, prawie każde poprawnie sformułowane pytanie może być wykorzystane dla uzyskania informacji w zakresie wszystkich pod-

stawowych elementów kontroli (wiadomości, umiejętności, braki w wiedzy, popełnione błędy, blokady w myśleniu, inwencja, samoocena nauczyciela z punktu widzenia skuteczności realizowanego przez niego procesu uczenia itp.). To uzasadnia podjętą przeze mnie próbę rejestracji i analizy pytań stawianych przez nauczycieli w toku lekcji hospitowanych przeze mnie w ramach ukierunkowanego na taką rejestrację i analizę sondażu w szkołach podstawowych Krakowa.

2. KLASYFIKACJE PYTAŃ W LITERATURZE PRZEDMIOTU

W literaturze znajdujemy próby klasyfikacji pytań z zastosowaniem różnych kryteriów (Ajdukiewicz, 1960; Sośnicki, 1966; Racinowski, 1967; Dormolen, 1978). Tak na przykład K. Ajdukiewicz podaje kilka sposobów klasyfikacji pytań: kryteria logiczne, psychologiczne, dydaktyczne. Pytania dzieli więc z pierwszego punktu widzenia według ich logicznej budowy: na pytania rozstrzygnięcia i dopełnienia. Pytaniami rozstrzygnięcia nazywa: „pytania składające się z partykuły pytajnej *czy* oraz całego zdania w sensie logicznym tą partykułą objętego i pytania takim równoznawcze" (Ajdukiewicz, 1960, str. 280). Wszystkie inne pytania nazywa się w tym podziale pytaniami dopełnienia. Podział ten jest ważny w zastosowaniu do nauczania. Na pytanie rozstrzygnięcia uczeń może odpowiedzieć „tak" lub „nie", bez uzasadnienia tego stwierdzenia. Odpowiedź ta daje więc nauczycielowi informacje ograniczone. Interesujący jest również inny podział proponowany przez K. Ajdukiewicz. Dokonuje on klasyfikacji pytań ze względu na ich „znaczenie psychologiczne", przy czym wyjaśnia ten termin w następujący sposob: „Znaczeniem psychologicznym zdania pytajnego, czyli myślą, którą zdanie pytajne u wymawiającego je lub słuchającego wyraża, jest normalnie stan pewnego psychicznego napięcia, podobny do pragnienia, zmierzający do zdobycia przez osobnika żywiącego ów stan, takiego przekonania, które może być wyrażone przez jakąś odpowiedź właściwą na to zdanie pytajne" (Ajdukiewicz, 1960, str. 284). W dalszym ciągu czytamy: „Osobnik przeżywający ów stan psychicznego napięcia, który nazwiemy stanem pytania, zmierza więc normalnie do zdobycia pewnej wiadomości, ale nie byle jakiej, lecz wiadomości z góry do pewnego stopnia określonej" (Ajdukiewicz, 1960, str. 284). Ze względu na

„stan pytania" K. Ajdukiewicz wyróżnia: „pytania stawiane na serio" oraz „pytania tylko pomyślane". Pytania nauczyciela są w tym sensie dla niego w większości pytaniami tylko „pomyślanymi", a nie pytaniami „postawionymi na serio", nie wywołują one bowiem „stanu pytania", ponieważ najczęściej zna on odpowiedź. Można by jednak zinterpretować pojęcie „stanu pytania" z punktu widzenia dydaktyki inaczej. Nauczyciel stawia pytanie dotyczące na przykład twierdzenia Pitagorasa i nie jest to „pytanie na serio", w tym znaczeniu, że zna on na nie odpowiedź. Jest to jednak „pytanie na serio" w innym sensie, związane jest bowiem z „napięciem psychicznym", gdy nauczyciel chce się dowiedzieć, czy uczeń ma pewną wiedzę, czy opanował pewne umiejętności, czy umie myśleć samodzielnie itp. To samo dotyczy ucznia; uczeń wie, że nauczyciel zna poprawną odpowiedź, ale wie także, że nauczyciel od niego takiej odpowiedzi oczekuje, co łączy się z napięciem psychicznym charakteryzującym stan pytania. Dla ucznia pytania nauczyciela mogą być więc „pytaniami na serio".

Według trzeciego z rozważanych kryteriów, to jest kryterium dydaktycznego, K. Ajdukiewicz rozróżnia pytania naczelne od naprowadzających. „Pytanie jest naczelne w obrębie jakiegoś okresu nauczania, gdy znalezienie trafnej i uzasadnionej na nie odpowiedzi jest jednym z ostatecznych celów tego okresu" (Ajdukiewicz, 1960, str. 285). „Pytanie jest naprowadzające w danym okresie nauczania, gdy znalezienie przez ucznia trafnej i uzasadnionej na nie odpowiedzi nie należy do ostatecznych celów tego okresu, lecz ma być tylko środkiem dla osiągnięcia trafnego i uzasadnionego rozwiązania pytania naczelnego tego okresu" (Ajdukiewicz, 1960, str. 286).

W *Poradniku dydaktycznym* K. Sośnicki (1966) wprowadza dwa sposoby klasyfikacji pytań:

(a) dzieli je na pobudzające do myślenia (badawcze), które prowadzą do uzyskania pewnej nowej wiedzy, oraz egzaminacyjne (kontrolne), które wymagają od ucznia odtworzenia poznanej uprzednio wiedzy;

(b) dokonuje podziału pytań ze względu na główne czynności myślenia ucznia, do których pytania te go pobudzają.

Wyodrębnia więc następujące grupy pytań:

(1) Pytania, które wymagają od ucznia opisu zjawiska lub przedmiotu, znanego z własnego doświadczenia, opowiadań, lektury itp.

(2) Pytania, które żądają od ucznia, aby na podstawie analizy przedmiotu lub zjawiska dokonał pewnych uogólnień oraz ustalił związki przyczynowe stosując myślenie indukcyjne.

(3) Pytania inspirujące do wykrycia związku przyczynowego pomiędzy zjawiskami i w związku z tym do sformułowania hipotezy i jej zweryfikowania często za pomocą myślenia dedukcyjnego.

(4) Pytania inspirujące do przeprowadzenia rozumowania dedukcyjnego.

(5) Pytania wymagające myślenia przez analogię.

(6) Pytania skojarzeniowe (postawione w celu przypomnienia uczniowi pewnego zjawiska, faktu, pojęcia, prawa przez podanie okoliczności skojarzonych z tym zjawiskiem).

(7) Pytania inspirujące myślenie porządkujące pewne przedmioty, zjawiska, prawa.

K. Sośnicki wyjaśnia: "nie trzeba jednak sądzić, że pytanie określonego typu spowoduje powstanie procesów myślenia odpowiadających jedynie temu typowi. Możemy obserwować u uczniów różne wykonywanie odmiennych czynności myślowych związanych z tym samym lub podobnym typem pytania" (Sośnicki, 1966, str. 117). Ten podział nie daje więc podstawy do klasyfikacji pytań na rozłączne grupy z punktu widzenia możliwej odpowiedzi. Proponuje się czasem też podziały pytań ze względu na ich merytoryczne treści. Przykładem takiej klasyfikacji może być klasyfikacja S. Racinowskiego (1967).

Dydaktyka matematyki interesować mogą szczególnie klasyfikacje J.V. Dormolena (1978), ponieważ odnoszą się one bezpośrednio do nauczania matematyki. Dormolen rozpatruje dwa sposoby klasyfikacji pytań. W jednym z nich rozważa łącznie pytania i zadania; dzieli je ze względu na funkcje, jakie pełnią w procesie nauczania. Wyodrębnia następujące grupy:

„A. Pytania i zadania mogą być stosowane w celu zbadania czy uczniowie mają określone wiadomości i umiejętności. Mówimy wtedy o testach, zadaniach egzaminacyjnych, pytaniach kontrolnych.

B. Pytania i zadania mogą być stosowane w celu wykształcenia pewnych nawyków. Mówimy wtedy o ćwiczeniach, przykładach rachunkowych, zadaniach itp.

C. Pytania i zadania mogą w fazie wstępnej pomóc uczniom w przyswajaniu sobie nowych pojęć i twierdzeń i sposobu postępowania,

to znaczy w asymilacji schematu. Mówi się tu o zadaniach eksplorujących. Zadania te mają również na celu wprowadzenie uczniów w samodzielne odkrywanie przykładów.

D. Pytania i zadania mogą być środkiem pomocniczym realizacji celów dalszych, np. umiejętności rozstrzygania czy algorytm jest szczegółowy, wywodzenia twierdzenia z przykładów, przedstawiania na piśmie przejrzystych rozwiązań problemu ukazujących relacje między nimi" (Dormolen, 1978, str. 97).

Ważniejszą może z punktu widzenia interesujących nas tu problemów jest inna klasyfikacja Dormolena, związana z przyjętą przez niego taksonomią celów nauczania. W tej taksonomii pierwszy poziom pytań odnosi się do powtórzeń i przypomnień, jest to taksonomicznie poziom wiedzy. Dormolen analizuje go nie w kontekście kontroli, a w organizacji procesu uczenia się. Z punktu widzenia rozważanych tu problemów jest to jednak też typ pytań kontrolnych, mianowicie kontrolujących wiedzę ucznia już mu przyswojoną. Cel pytania ma tutaj charakter dialektyczny, z jednej strony chodzi o postęp w procesie uczenia się (pytanie skierowane wprzód), z drugiej informujący o tym, w jakiej mierze skuteczny był poprzedni etap tego procesu (pytanie skierowane równocześnie wstecz). Dormolen zastrzega się jednak, że uczeń nie powinien mieć uczucia, że jest kontrolowany, wtedy, gdy pytanie (polecenie, zdanie) nawiązuje do przeszłości, ale ma inspirować jej dalszy ciąg.

Drugi poziom pytań określa Dormolen, jako poziom pytań pojęciowych, odpowiadający taksonomicznie poziomowi pojęć. Chodzi tu o pytania dotyczące rozumienia pojęć, przy czym autor zastrzega się, że uczeń powinien móc odpowiedzieć na pytanie wykonując niewiele kroków myślowych. Te pytania mają być bardziej otwarte niż te, które zaliczono do grupy A, ale nie tak, aby uczeń był sam sobie pozostawiony.

Trzeci poziom, który Dormolen określa dosłownie jako „obserwowanie", wiąże się z taksonomicznym poziomem „zastosowań". Jest to już poziom świadomego stosowania wiedzy.

Czwarty poziom to „stosowanie hipotez", ich dowodzenie lub odrzucenie", odpowiadający taksonomicznie poziomowi analizy i syntezy (Dormolen, 1978, str. 110).

Jak już zaznaczyłam, Dormolen zawsze myśli tu o pytaniach pobudzających ucznia do matematycznej aktywności na coraz wyższym

poziomie abstrakcji. W ramach rozważanej tu problematyki ważna jest i druga strona: informacje o możliwościach ucznia w zakresie jego matematycznej aktywności na danym poziomie. Kontrola ciągła to właśnie ma na celu, funkcjonować ona w tym sensie powinna w każdym etapie procesu dydaktycznego.

3. ANALIZA PYTAŃ ZAREJESTROWANYCH NA OBSERWOWANYCH LEKCJACH

3.1. Ogólne zasady podziału pytań

W ramach przeprowadzonego ograniczonego sondażu analizuję pytania z 30 lekcji w szkole podstawowej przeze mnie obserwowanych i nagranych na taśmy magnetofonowe z punktu widzenia wartości, znaczenia i zróżnicowania roli tych pytań w ciągłej kontroli. Analiza zadawanych przez nauczycieli pytań pozwoliła mi na dokonanie próby ich klasyfikacji według umownych „poziomów" pytań uwzględniających pewną hierarchię kategorii aktywności umysłowej niezbędnej do poprawnej odpowiedzi oraz związaną z tym wartość kontrolną. Przyjęty przeze mnie podział ma też, podobnie jak podział Dormolena, charakter taksonomiczny. Ten podział stosuję tylko do pytań związanych bezpośrednio z treściami matematycznymi, z samą materią matematyczną. Poza tymi pytaniami pozostają inne, z których niektóre mogą być wykorzystane do kontroli; pewne z nich są związane z różnymi organizacyjnymi czynnościami nauczyciela. Oto przykłady takich pytań kontrolnych i organizacyjnych (pytanie koduję symbolem a/b, gdzie a jest numerem kolejnego pytania na lekcji o numerze b)[1]:

„Kto miał trudności z zadaniem?" 1/16.
„W jaki sposób przygotowywałeś się do rozwiązania zadania?" 7/16.
„Dlaczego nie możesz się skupić?" 41/16.
„Dlaczego się nie nauczyłeś?" 54/16.
„Czego nie wiedziałeś?"
„Co chciałeś powiedzieć?" 11/12.
„Czy radzisz sobie z rozwiązywaniem równań?" 3/7.
„Czy złapałeś, o co chodzi?" 22/19.

---

[1] Protokoły lekcji i dokumentacja w nagraniach są w posiadaniu autorki.

„A kto nie umiał?" 14/15.

„A dlaczego mówisz wszystko razem?" 48/13.

„Czy przeczytaliście?" 48/7.

„Czy jesteście gotowi?" 49/7.

Nazwijmy umownie pytania związane bezpośrednio z treściami matematycznymi omawianymi na lekcji pytaniami merytorycznymi. Podział na poziomy odnosi się tylko do pytań merytorycznych.

Do pierwszego, najniższego poziomu zaliczam pytania inspirujące ucznia do odtworzenia w sposób werbalny lub symboliczny treści definicji, twierdzenia (wzoru), znanego algorytmu lub innych bardzo prostych wiadomości. Do tego poziomu zaliczam też pytania prowokujące ucznia do powtórzenia tekstu zadania, wyodrębnienia danych i szukanych, odczytania wyniku lub powtórzenia innej wiadomości, która została poprzednio na lekcji omówiona, a także pytania, które inspirują uczniów do zdania sobie sprawy z czynności poprzednio przez niego wykonanych. Większość odpowiedzi na pytania poziomu I wymaga więc od ucznia przede wszystkim odwołania się do pamięci lub bezpośredniego postrzegania. Odpowiedź na takie pytania rzuca zatem światło nie tylko na najprostsze elementy wiedzy ucznia, ale i na proste umiejętności porządkowania danych, interpretowania werbalnego tekstu, zdawania sobie sprawy z wykonywanych czynności itp.

Pytania poziomu drugiego - to pytania badające umiejętność odtwarzania przećwiczonych już poprzednio zastosowań twierdzeń, definicji, algorytmów, dowodu lub jego fragmentu. Odpowiedzi na takie pytania informują nauczyciela o tym, w jakim stopniu uczeń opanował bardziej złożone fragmenty wiedzy, oraz jak rozumie to, co było już w toku nauczania przećwiczone, czy rzeczywiście zostało to opanowane „rozumnie".

Pytania poziomu III są pytaniami o zastosowanej wiedzy w nowych sytuacjach. Wśród nich można wyróżnić pytanie o sformułowanie nowej definicji lub twierdzenia, o własny sąd w zakresie nowej problematyki, o jego uzasadnienie, o analogie lub różnice w nowej sytuacji, o odkrycie błędu, o rozwiązanie nowego problemu, o przeprowadzenie dowodu itp. Poprawne odpowiedzi na pytania poziomu III dają podstawę do wnioskowania o wiedzy w głębszym znaczeniu, o umiejętności samodzielnego rozumowania ucznia, o jego inwencji itp.

W pewnych sytuacjach różnica między pytaniami poziomu II a pytaniami poziomu III nie jest wyraźna. Może się zdarzyć, że odpo-

wiedź na pytanie poziomu II wymaga złożonych operacji myślowych, pomimo że dotyczy przerobionej i wyćwiczonej na lekcjach problematyki. Także granica między pytaniami poziomu I i poziomu II nie zawsze jest jednoznaczna. Wyjaśnię to bliżej, podając przykłady pytań każdego z poziomów.

Zaliczenie pytania do odpowiedniego poziomu zależy od następujących czynników:

- zakresu wiedzy ucznia wymaganej w danym momencie, w określonej klasie według programu,
- sytuacji dydaktycznej, w której zostało pytanie postawione (między innymi od pytań, poleceń i komentarzy wypowiedzianych przed postawieniem pytania i celu pytania),
- sposobu sformułowania pytania.

Wśród klasyfikowanych pytań były takie, których samo sformułowanie nie wystarczało do zaliczenia go do odpowiedniego poziomu. Typowym przykładem może być pytanie: „Co dalej?". Z obserwacji wynika, że w tej samej sytuacji pytanie to może inspirować ucznia do mechanicznego kontynuowania rachunku, albo do przedstawienia własnej, pomysłowej koncepcji rozwiązania zadania. Przy klasyfikacji takich pytań (była ich znikoma ilość), poza kryteriami sformułowanymi w określeniu poziomów, brano też pod uwagę odpowiedź ucznia. W takim przypadku to samo pytanie, ze względu na reakcje ucznia, może być zaliczone do różnych poziomów.

O zaliczeniu pytania do poziomu II i III decyduje więc przede wszystkim sytuacja dydaktyczna oraz poziom wiedzy określony normatywnie przez program, w mniejszym stopniu jego sformułowanie. Może się zdarzyć, że to samo pytanie może być zaliczone w zależności od wyżej wymienionych czynników do II albo III poziomu.

3.2. Przykłady pytań należących do wyodrębnionych poziomów

W dalszym ciągu przedstawiam przykłady pytań zaliczonych do wyróżnionych poziomów. Pytania cytuję dosłownie tak, jak zostały przez nauczyciela wypowiedziane.

Przykłady pytań zaliczonych do poziomu I (od 1 do 15):

1. „Jakie znasz działania dla liczb wymiernych?" 1/13.

Pytanie zostało postawione w klasie VII w toku kontroli wiadomości ucznia z materiału „Działania na liczbach względnych". Odpowiedź nie wymagała od ucznia żadnej inwencji, była oczywista.

2. „Z czego składa się nasza suma?" 9/13.

(Chodziło o sumę $5(-2) + 5 \cdot 2$.)

Pytanie zostało postawione w klasie VII na lekcji, której nowym tematem było: „Monotoniczność mnożenia", w toku pogadanki wprowadzającej prawo monotoniczności mnożenia.

Odpowiedź na to pytanie oparta jest na bezpośrednim postrzeganiu i odwołaniu się do zapamiętanych elementarnych składników wiedzy (co to jest: suma, jej składniki, iloczyn, jaka jest kolejność działań itp.).

3. „Co to jest przekształcenie tożsamościowe?" 6/15.

Pytanie postawione w klasie VII na początku lekcji (temat lekcji - „Symetria środkowa") w czasie kontroli wyuczonych wiadomości.

Odpowiedź wymagała odtworzenia z pamięci definicji przekształcenia tożsamościowego.

4. „A w jednej całości, to ile trzecich?" 36/14.

O zakwalifikowaniu tego pytania do poziomu I zadeoydował fakt, że pytanie to postawione uczniowi z klasy VII jest trywialne w tej klasie. Natomiast pytanie to, zadane na przykład w klasie IV, należałoby zaliczyć do poziomu II.

5. „A ile?", „powiedz wynik" 54/14.

Rachunek został wykonany przed postawieniem pytania.

Odpowiedź wymaga tylko odczytania zapisanego wyniku.

6. „A co to za figura?" 11/27.

Przed zadaniem pytania w klasie VIII nauczyciel narysował trapez.

Odpowiedź na to pytanie oparta jest na elementarnej wiedzy - umiejętności rozpoznania trapezu, którego kształt znany jest uczniowi klasy VIII.

7. „Jakie twierdzenie udowodniliśmy?" 72/8.

Klasa VII. Nauczycielowi chodziło o powtórzenie treści twierdzenia poprzednio udowodnionego na tej lekcji. Treść tą została wcześniej słownie wypowiedziana i symbolicznie zapisana na tablicy.

8. „Czym są połączone niewiadome w wyrażeniu $x = y$?" 21/25.

Nauczyciel postawił to pytanie w klasie V, w trakcie wprowadzania pojęcia równania z dwiema niewiadomymi.

Odpowiedź wymaga znajomości nazwy symbolu „równości".

9. „Co obliczyłeś?" 37/27.

Pytanie postawione po obliczeniu przez ucznia wysokości w trójkącie, która była potrzebna do wyznaczenia pola trójkąta. Aby sformułować odpowiedź uczeń musi tylko zdać sobie sprawę z poprzednio wykonanych czynności.

10. „Która liczba miała większą wartość bezwzględną?" 4/13.

Uczeń klasy VII wykonał działanie $-7 + 2 = -5$ i zacytował „regułę", na podstawie której tak napisał.

Odpowiedź na pytanie wymaga wyćwiczonego wcześniej rozpoznawania wartości bezwzględnej.

11. „I co jeszcze?" 5/8.

Pytanie zadane w sytuacji, gdy uczeń klasy VII analizuje tekst zadania i nie wymienia danych wyjściowych.

Odpowiedź wymaga od ucznia odwołania się do tekstu, gdzie wyraźnie wyodrębnione są dane.

12. „Ile wynosi $\cos(180^\circ - \alpha)$?" 18/23.

Pytanie postawione w klasie VIII, w której wcześniej wyprowadzono wzory redukcyjne i wykonano wiele ćwiczeń utrwalających je. Aby odpowiedzieć na to pytanie uczeń odwołuje się do pamięci i dlatego zaliczam je do poziomu I.

Pytanie to ilustruje fakt ścisłej zależności zakwalifikowania danego pytania do określonego poziomu, od zakresu wiedzy ucznia osiągniętej do danego momentu w danej klasie według programu. Pytanie „Ile wynosi $\cos(180 - \alpha)$?" może być też zaliczone, w zależności od sytuacji, do poziomu II lub nawet III. Do poziomu III, gdy jest postawione na lekcji po raz pierwszy i odpowiedź na nie wymaga odkrycia wzoru, co byłoby rezultatem samodzielnego rozumowania; do poziomu II, gdy uczeń zna drogę dojścia do odpowiedzi, bo udowadniał wcześniej inne wzory redukcyjne, np. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Jest to więc przypadek, w którym uczeń wykazuje umiejętność zastosowania znanych wiadomości (definicji funkcji trygonometrycznych i metody wyprowadzania wzorów redukcyjnych).

Konstruując odpowiedź na większość pytań poziomu I uczeń odwołuje się przede wszystkim do pamięci. Są też pytania (5, 6, 7, 8, 11), na które odpowiedzi oparte są również na odczytaniu informacji zawartej w tekście, na rysunku lub wymagają powtórzenia wcześniej omawianych na danej lekcji treści, wyników przeprowadzonego rozumowania lub wykonanych rachunków.

Przykłady pytań zaliczonych do poziomu II (od 13 do 26):

13. „Jak to zapisać?" 6/8.

Chodzi o zapis tego, że stosunek dwóch odcinków równa się $1\frac{2}{3}$, i jeden z nich jest o 4 cm dłuższy od drugiego.

Pytanie zadane w klasie VII, w której znane są operacje prowadzące do symbolicznego zapisu relacji danych w temacie zadania.

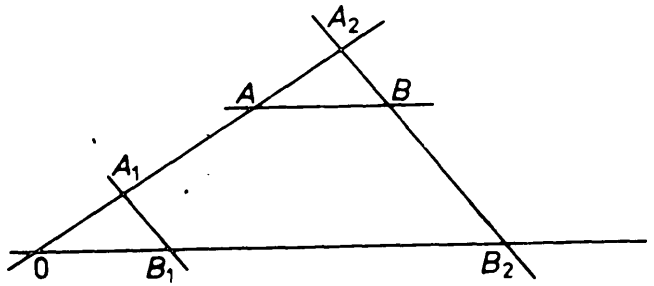
Operacje te były ćwiczone w zastosowaniu do innych danych numerycznych.

14. „Jak postępowalibyście?" 46/8.

(Chodzi o podział odcinka w stosunku 5 do 8.)

Wcześniej w klasie (klasa VII), w ciągu tej samej lekcji, zostało rozwiązane podobne zadanie przy innych danych numerycznych. Bardzo szczegółowo analizowano każdy krok rozwiązania. Odpowiedź na to pytanie wymaga więc od ucznia powtórzenia drogi rozwiązania, którą śledził w ciągu tej samej lekcji w innej sytuacji.

15. „Skąd wiesz, że trójkąty OA_1B_1, AA_2B są przystające?" 57/8. (rys. 1).



Rys. 1

Uczniowie (klasa VII) mają informację, że trójkąt ABA_2 jest obrazem trójkąta OB_1A_1 w translacji o wektor $\overrightarrow{A_1A_2}$. Odpowiedź na powyż-

sze pytanie wymaga zastosowania definicji figur przystających lub odpowiedniego twierdzenia.

Tego typu zastosowania definicji i twierdzeń były wcześniej niejednokrotnie ćwiczone.

16. „W jaki sposób obliczyłeś pole sześciokąta foremnego, jeżeli bok równa się 3?" 1/27.

Pytanie postawiono w klasie VII. Uczniowie znają metodę obliczania pola wielokąta, wiedzą, że sześciokąt foremny można rozłożyć na trójkąty równoboczne. Znają też wzór na pole trójkąta równobocznego.

Aby odpowiedzieć na to pytanie stosują znane wzory i twierdzenia w sytuacjach analogicznych do spotykanych poprzednio.

17. „Skąd wiesz, że cos 285° = sin 15°?" 8/23.

Pytanie zadano w klasie VIII po wyprowadzeniu wzorów redukcyjnych i przeprowadzeniu serii ćwiczeń na ich zastosowanie. Pytanie to wymaga reprodukcji przećwiczonych poprzednio zastosowań.

18. „My to udowodniliśmy. Kto by powiedział, w jaki sposób?" 2/6.

Klasa VII. Na poprzedniej lekcji udowodnione zostało pewne twierdzenie na podstawie twierdzenia Talesa. Odpowiedź wymaga powtórzenia dowodu tego twierdzenia.

19. „Co to znaczy, że przekształcenie jest izomeryczne?" 5/15.

Pytanie zostało postawione w klasie VI. Uczniów zaznajomiono wcześniej z definicją przekształcenia izometrycznego w formie odpowiedzi na pytanie: „co to jest przekształcenie izometryczne" i mają zapisaną tę definicję w zeszycie.

Pytanie: „Co to znaczy, że przekształcenie jest izometryczne?" inspiruje ucznia do szerszego objaśnienia definicji.

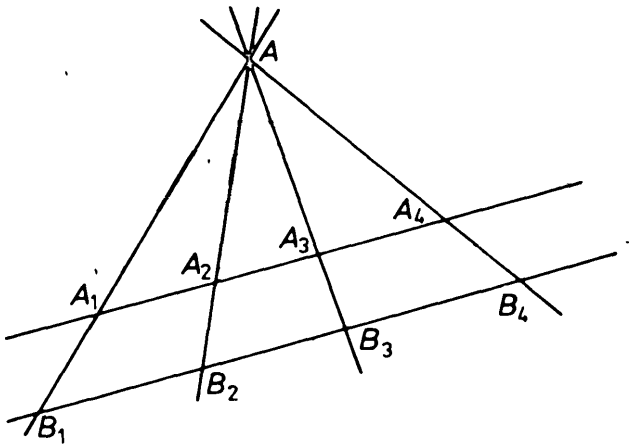
20. „I co jeszcze wiemy?" 34/10.

Pytanie zostało postawione w klasie VII podczas przeprowadzania dowodu tzw. twierdzenia „o odcinkach na dwóch prostych równoległych przeciętych pękiem prostych".

Nauczyciel zapisał obok rysunku (rys. 2) kilka proporcji potrzebnych do dowodu twierdzenia.

Odpowiedź wymaga uzupełnienia wypisanych przez nauczyciela proporcji dalszymi proporcjami niezbędnymi do udowodnienia twierdzenia.

21. „Z jakich twierdzeń poznanych wcześniej należy skorzystać dla wyprowadzenia wzoru na pole koła?" 22/12.



Rys. 2

Pytanie w klasie VII, po samodzielnym przeczytaniu przez uczniów tekstu dowodu twierdzenia: „Pole koła o promieniu r równa się πr^2". W tekście tym było wyraźnie zaznaczone (tłustym drukiem): „Liczba π równa się polu koła o promieniu 1". Natomiast tekst ten nie zawierał wyraźnie sformułowanego twierdzenia o tym, że stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa.

Niektóre z przedstawionych pytań (14, 16) poziomu II wymagają odtworzenia poznanego wcześniej algorytmu rozwiązania zadania, inne (15, 17) zastosowania twierdzenia lub definicji w sytuacjach znanych lub analogicznych do znanych, jeszcze inne (18) odtworzenie poznanego dowodu; są też takie (17, 21), które wymagają przytoczenia twierdzenia lub powołania się na stwierdzenie, na podstawie którego przeprowadzono rachunek lub rozumowanie.

Pytania poziomu II są zróżnicowane ze względu na aktywność myślową, do jakiej inspirują uczniów.

Odpowiedzi na jedne z nich (na przykład na pytanie 16) są w większym stopniu zależne od zapamiętania wiadomości niż od rozumowania. W niektórych innych przykładach (na przykład 22 „Skąd wiesz, że cos 285° = sin 15°") ważniejszą rolę odgrywa przeprowadzenie rozumowania.

A oto przykłady pytań poziomu III (od 22 do 36).

22. „Które pary będą rozwiązaniem?" 79/25.

Chodzi o rozwiązanie równania $5x + 3y = 0$.

Nauczyciel postawił to pytanie w klasie V na lekcji, na której uczniowie dopiero co zapoznali się z pojęciem równania z dwiema niewiadomymi, na przykładzie formy zdaniowej $y = x$. Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba wyznaczyć pary liczb spełniające to równanie. Jest to zatem dla ucznia problem, który wymaga od niego stosunkowo dużej aktywności, bo wykrycia jakiejś regularnej metody.

23. „A jak sprawdzić, czy zrobiliśmy dobrze, czy źle?" 58/11.

Uczniowie klasy VII rozwiązali - bezpośrednio po wprowadzeniu pojęcia jednokładności zadanie: znaleźć obraz kwadratu w jednokładności o środku O i skali $\frac{2}{3}$. Odpowiedź wymaga sprawdzenia czy poprawnie zostały przekształcone wierzchołki kwadratu przez odwołanie się do twierdzenia Talesa w nowej sytuacji.

24. „Według jakiego planu powtórzymy sobie materiał?" 1/1.

Pytanie zadane w klasie VII na lekcji, której celem było powtórzenie wiadomości o jednokładności.

Odpowiedź na to pytanie wymaga analizy przerobionego materiału i ułożenia pojęć i twierdzeń w pewnym logicznym porządku.

25. „Ile papieru zużyto na ten sześcian?" 1/22.

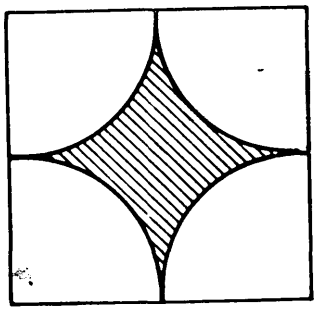
Pytanie postawione w klasie V. Odpowiedź na nie wymaga od ucznia stosunkowo dużej aktywności w związku z tym, że nie zna on wzoru na pole powierzchni sześcianu, a także nie rozwiązywał wcześniej podobnego zadania.

26. „Jak należało obliczyć pole zakreskowanej figury?" 13/16. (rys. 3).

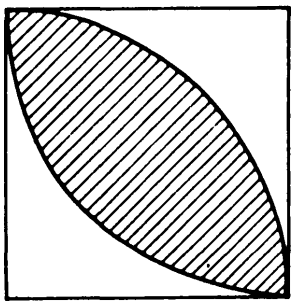
Uczniowie (klasa VII) poznali na poprzedniej lekcji wzór na pole koła i wykonali kilka prostych ćwiczeń na jego zastosowanie.

Obliczanie pola figury przedstawionej na rysunku jest nowym zadaniem - problemem, którego rozwiązanie wymaga analizy rysunku;

w wyniku tej analizy uczeń dojdzie do wniosku, że niezakreskowana część kwadratu ma pole równe polu koła o promieniu równym połowie długości boku tego kwadratu.



Rys. 3



Rys. 4

27. „A kto z was inaczej liczył?" 20/16.

Jeden z uczniów (klasa VII) objaśnił, w jaki sposób obliczał pole zakreskowanej figury (rys. 4). Nauczyciel tym pytaniem inspiruje innych uczniów do porównania ich sposobów rozwiązania zadania ze wskazanym przez kolegę.

28. „Definicja 6 jest podobna do (definicji) 7? Inna?" 31/18.

29. „Czy którąś z tych odpowiedzi dałoby się poprawić na taką, którą można by było przyjąć za definicję? Jak?" 45/18, 46/18.

Pytania (28, 29) żadano w czasie dyskusji nad sformułowanymi samodzielnie przez uczniów różnymi definicjami symetrii środkowej. Były w tym i błędne. Odpowiedzi na te pytania wymagają głębszej analizy, konfrontacji formalnej i semantycznej rozważanych tekstów.

30. „Czy umiałby ktoś podać liczbę niewymierną, która spełnia ten $(2n < 5)$ warunek?" 10/19.

Pytanie zadane w klasie VI. Inspiruje ono ucznia do szerszej wypowiedzi, konstrukcji ułamka dziesiętnego, nieskończonego, nieokresowego spełniającego daną nierówność.

Pytania poziomu III prowokują bardzo zróżnicowane aktywności matematyczne (wykrycie ogólnej metody zastępującej „zgadywanie" dowodzenie, refleksja krytyczna itp.). Odpowiedzi informują nauczyciela, w jakim stopniu uczniowie są zdolni do tych już wyższych (w stosunku do ich wiedzy) aktywności.

Tabela 1

Numer lekcji	Ilość pytań ogółem	W tym				
		Pytania merytoryczne				Inne
		Ogółem	Poziom I	Poziom II	Poziom III	
1	45	38	20	11	7	7
2	76	64	22	41	1	12
3	49	47	28	17	2	2
4	50	42	8	27	7	8
5	53	48	25	21	2	5
6	24	16	5	8	3	8
7	80	63	39	22	2	17
8	72	57	18	38	1	15
9	84	66	39	27	-	18
10	51	46	15	22	9	5
11	56	43	10	24	9	13
12	27	17	8	9	-	10
13	58	50	35	11	4	8
14	54	49	25	23	1	5
15	45	44	12	20	12	1
16	73	52	25	24	3	21
17	51	50	31	16	3	1
18	52	46	16	13	17	6
19	29	20	3	8	9	9
20	48	48	21	17	10	-
21	33	31	15	8	8	2
22	66	60	16	40	4	6
23	27	26	10	16	-	1
24	38	35	21	10	4	3
25	99	92	54	32	6	7
26	72	66	40	17	9	6
27	79	72	43	27	2	7
28	118	102	74	25	3	16
29	48	42	12	24	6	6
30	53	47	20	23	4	6
	1710	1479	710	621	148	231

W tabeli 1 przedstawiam dane dotyczące ogólnej liczby pytań na obserwowanych lekcjach z wyodrębnieniem pytań merytorycznych według poszczególnych poziomów.

Ogólna liczba pytań zadanych przez nauczycieli w czasie obserwowanych lekcji wynosi 1710, w tym merytorycznych 1479 (84% ogółu pytań). Ilość pytań na poszczególnych lekcjach wahała się od 24 do 118. Pytania merytoryczne poziomu I stanowią 48% ogółu pytań merytorycznych, poziomu II 42%, a poziomu III 10%. Z danych tych wynika, że różnice w częstotliwości występowania pytań poziomu I i II są nieznaczne, natomiast zwraca uwagę niski udział pytań poziomu III w ogólnej liczbie pytań. Dane te ukazują również, że na poszczególnych lekcjach udział pytań poziomu III w ogólnej liczbie pytań jest bardzo zróżnicowany. Na trzech lekcjach (9, 12, 23) pytania tego poziomu w ogóle nie wystąpiły, pomimo że na jednej z tych lekcji nauczyciel zadał 84 pytań, w tym 66 merytorycznych. Na lekcji 2 z 76 pytań tylko jedno należało do poziomu III. Podobną sytuację można było obserwować na lekcji 8. Są lekcje, na których liczba pytań poziomu III jest stosunkowo wysoka i wynosi ponad 25% liczby wszystkich pytań merytorycznych zadanych na lekcji. I tak na lekcji 15 pytania poziomu III stanowią 27% pytań merytorycznych postawionych na tej lekcji, na lekcji 18 - 37%, a na lekcji 19 aż 45%.

Na niektórych lekcjach (3, 5, 7, 9, 13, 14, 17, 25, 26, 27, 28) ponad 50% ogółu pytań merytorycznych stanowią pytania poziomu I, na innych (2, 4, 8, 11, 12, 22, 23, 29) natomiast ponad 50% jest pytań poziomu II. Jest rzeczą oczywistą, że rozkład typów pytań na poszczególnych lekcjach zależy w dużej mierze od tematyki lekcji. Niemniej można stwierdzić, że na obserwowanych lekcjach informacje oparte na odpowiedziach uczniów dotyczyły przede wszystkim ich wiedzy i umiejętności poprzednio ćwiczonych (pytania I, II poziomu łącznie stanowiły 78% wszystkich pytań, a aż 90% ogółu pytań merytorycznych). W stosunkowo małym stopniu mogła się w tej sytuacji ujawnić matematyczna inwencja uczniów (pytania III poziomu stanowiły 9% wszystkich pytań, a 10% pytań merytorycznych).

Y. Tourneur i D. Bouillon (1977) podają wyniki niektórych badań dotyczących rozkładu pytań (stawianych przez nauczyciela lub znajdujących się w podręcznikach szkolnych) według taksonomii Bloo-

ma. Stwierdzają oni, że: 1° 65% - 75% ogółu uwzględnionych pytań stanowią pytania dotyczące reprodukcji wiadomości uczniów zdobytych na lekcjach szkolnych, 2° na 711 przeanalizowanych pytań z podręcznika szkolnego 51% tych pytań dotyczyło zapamiętania szczególnych faktów; 11,6% to pytania na poziomach „tłumaczenia" i „interpretacji"; 10% na poziomach zastosowania, a tylko 2,1% na poziomach syntezy i oceny.

Porównując wyniki moich badań z przytoczonymi tu przykładami, można stwierdzić pewną zgodność w zakresie małej częstotliwości występowania pytań wyższych poziomów taksonomicznych.

3.3. Pytania typu „dlaczego"

Wśród pytań poziomu II i III dużą, kontrolną rolę odgrywają pytania o uzasadnienie własnego sądu ucznia, zapisanej po omówieniu formuły itp. Mają one różne sformułowania w zależności od kontekstu. Oto główne tego rodzaju sformułowania:

1. „Dlaczego?" (np. 31/17).
2. „Czy potrafiłbyś to uzasadnić?" 4/29.
3. „Jak to udowodnić?" 17/10.
4. „Czemu wystarczy zmierzyć jedną krawędź?" 14/22.
5. „A skąd to wiesz?" 14/30.
6. „Po co właściwie policzyliśmy ten ciężar właściwy?" 23/20.
7. „Jak można by było to uzasadnić?" 30/29.
8. „Na jakiej podstawie?" 7/30.
9. „Z czego to wynika?" 45/30.
10. „W jaki sposób uzasadniliśmy to twierdzenie?" 2/5.

Nazwijmy takie wypowiedzi umownie pytaniami „dlaczego".

Analizuję dalej te pytania tylko w stosunku do pytań, które nazwaliśmy też umownie „merytorycznymi", a więc odnoszącymi się bezpośrednio do treści matematycznych. Pytanie „dlaczego" inspiruje ucznia do rozumowania, którego celem jest uzasadnienie jakiegoś stwierdzenia. Ponadto pobudza go w pewnych sytuacjach do refleksji nad własnym rozumowaniem i krytycznej jego oceny, do przeprowadzenia analizy błędu, to znaczy do aktywności stanowiącej ważny składnik samokontroli. Dla nauczyciela ma ono szczególne znaczenie diagnostyczne, gdy odpowiedź na to pytanie nie jest powtórzeniem tylko tego, co poprzednio było ćwiczone.

W przypadku pozytywnej odpowiedzi nauczyciel zdobywa informacje o samodzielności myśli matematycznej ucznia, o rozumieniu przez niego problemu, celu wykonanych czynności itp. W przypadku negatywnej odpowiedzi nauczyciel może się wiele dowiedzieć o tym, czego uczeń nie rozumie. Brak odpowiedzi jest również symptomatyczny, wskazuje potrzebę dalszych wyjaśnień w rozmowie z uczniem, niejednokrotnie może nauczyciela uświadomić, że poprzednie zabiegi dydaktyczne były zbyt formalne.

Pytania „dlaczego" mają wprawdzie istotne znaczenie w zakresie wszystkich przedmiotów, ale ze względu na abstrakcyjny, formalny, dedukcyjny charakter matematyki ich rola w nauczaniu tego przedmiotu jest i specyficzna, i szczególnie duża.

Pytania „dlaczego" pojawiły się na obserwowanych lekcjach w następujących sytuacjach:

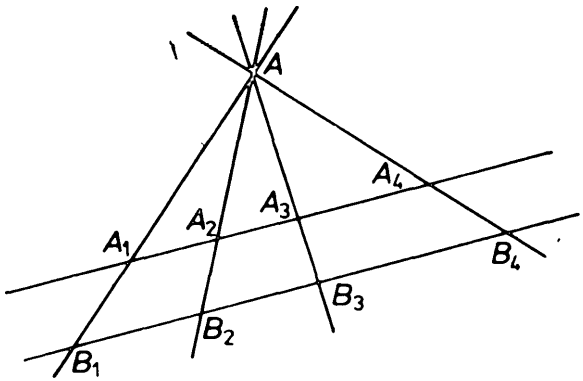
- w toku rozwiązywania zadań wymagających zastosowania poznanej definicji, twierdzenia lub algorytmu;
- podczas zaznajamiania ucznia z nowym dowodem;
- w toku wprowadzania definicji pojęcia;
- w toku kontroli umiejętności przeprowadzenia wcześniej poznanego dowodu.

Pytanie „dlaczego", które pojawia się po wprowadzeniu twierdzenia lub definicji w toku rozwiązywania zadań wymagających ich zastosowania, może pełnić z jednej strony funkcje ćwiczenia rozumienia twierdzenia (definicji), z drugiej strony jest pytaniem kontrolnym - kontroluje rozumienie tego twierdzenia (definicji).

A oto przykłady pytań typu „dlaczego".

P r z y k ł a d 1 (klasa VII, lekcja 10). Nauczyciel zapoznaje uczniów z dowodem twierdzenia: „jeżeli dwie proste równoległe przecięte są różnymi prostymi, które przechodzą przez ten sam punkt, to odcinki jednej z owych równoległych są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej z nich" (Białas, Straszewicz, str. 202). Na tablicy został narysowany odpowiedni rysunek (rys. 5) oraz zapisana teza twierdzenia:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}.$$



Rys. 5

Nauczyciel zaproponował uczniom zapisanie proporcji, które według ich przekonania mogą być pomocne w przeprowadzeniu dowodu. Uczniowie podają dwie proporcje:

(1) $$\frac{AA_1}{AB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2},$$

(2) $$\frac{AA_2}{AB_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}.$$

Nauczyciel zapisuje drugą z nich i zadaje pytanie:

„No, a dlaczego tak? Dlaczego nie wzięliśmy odcinków na tej pierwszej prostej (wskazuje AA_1), tylko na tej drugiej (wskazuje AA_2)?" 21/10, 22/10.

Pytanie zostało postawione w nowej dla ucznia sytuacji (proste równoległe przecięte prostymi z pęku). Odpowiedź na nie wymaga od ucznia uchwycenia myśli przewodniej dowodu, dużej sprawności w zastosowaniu twierdzenia Talesa. Jako takie ma duże znaczenie kontrolne.

Inny charakter ma pytanie „dlaczego" w przykładzie 2.

P r z y k ł a d 2 (klasa VIII, lekcja 27). Uczeń rozwiązuje równanie

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}}.$$

„Uczeń:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}}, \qquad x = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}, \qquad x = 2.$$

Nauczyciel: Dlaczego? Z czego korzystałeś?" (52/27), (53/27).

Uczeń rozwiązał sprawnie dane równanie. Pytaniami: „Dlaczego?", „Z czego korzystałeś?" - nauczyciel kontroluje, czy uczeń uświadamia sobie, na czym polega poprawność kolejnych przez niego uzyskanych przekształceń równania.

Pytania te są w kontroli istotne; nauczyciel uzyskuje informacje dotyczące rozumowania ucznia i ma podstawę do stwierdzenia, czy przekształcenie poprawnie wykonane wynika z właściwej wiedzy i rozumienia, czy też z pewnego automatyzmu.

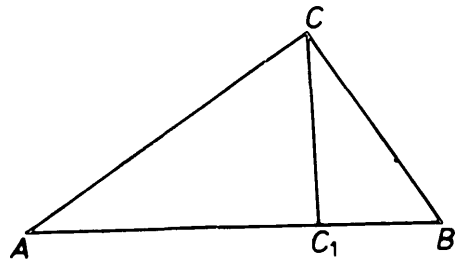
P r z y k ł a d 3 (klasa VI, lekcja 17). Uczniowie, po zmierzeniu kątów w „konkretnych trójkątach", postawili hipotezę, że suma kątów w trójkącie równa się 180°. W tej sytuacji nauczyciel zadał pytanie: „Jak można by udowodnić, że suma miar kątów trójkąta musi wynosić 180°?" 26/17.

Pytanie to inspiruje do przeprowadzenia dowodu postawionej przez uczniów hipotezy i do ujawnienia pewnej inwencji.

Na obserwowanych lekcjach pytanie „dlaczego" było czasami reakcją na błąd popełniony przez ucznia. A oto przykład takiej sytuakcji.

P r z y k ł a d 4 (klasa V, lekcja 22). Uczeń, obliczając pole powierzchni materialnego modelu graniastosłupa o podstawie trójkąta, zaznaczył, że w celu obliczenia pola podstawy graniastosłupa należy zmierzyć wysokość CC_1 i bok BC (rys. 6). Inni uczniowie zauważają błąd i protestują. Nauczyciel kieruje do nich pytanie:

„Dlaczego tutaj jest źle zaznaczone?" 47/22.



Rys. 6

Odpowiedź na to pytanie wymaga znajomości wzoru na pole trójkąta i właściwego jego rozumienia.

Pytania typu „dlaczego" w zasadzie zostały zaliczone do dwóch poziomów, II oraz III (tylko jedno pytanie zaliczono do poziomu I). Jeżeli wymagało od ucznia odtworzenia wcześniej wyćwiczonego rozumowania, rachunku itp. zaliczano je do poziomu II.

Tabela 2

Numer lekcji	Liczba pytań merytorycznych ogółem	W tym Pytania „dlaczego"			
		Poziom I	Poziom II	Poziom III	Ogółem
1	38	-	1	1	2
2	64	-	6	-	6
3	47	-	1	-	1
4	42	-	4	5	9
5	48	-	1	-	1
6	16	-	2	-	2
7	63	-	1	-	1
8	57	-	5	1	6
9	66	-	7	-	7
10	46	-	-	4	4
11	43	-	-	3	3
12	17	-	1	-	1
13	50	-	1	1	2
14	49	-	5	-	5
15	44	-	-	1	1
16	52	-	4	-	4
17	50	-	4	1	5
18	46	-	-	4	4
19	20	-	1	1	2
20	48	-	-	1	1
21	31	-	2	1	3
22	60	-	4	1	5
23	26	-	2	-	2
24	35	-	2	1	3
25	92	-	2	1	3
26	66	-	-	-	-
27	72	-	2	3	5
28	102	1	-	-	1
29	42	-	2	4	6
30	47	-	5	1	6
	1479	1	65	35	101

Pytania „dlaczego" na poziomie II stanowią 64% ogółu pytań tego typu, 35% pytań „dlaczego" zaliczono do poziomu III ze względu na to, że wymagały one samodzielnego myślenia w nowej sytuacji. Z przedstawionych tu przykładów pytania 2 i 4 zaliczono do poziomu II, a pozostałe do poziomu III.

Na przykład pytanie 2 wymaga od ucznia uzasadnienia wykonywanych przez niego przekształceń opartych na znanych mu twierdzeniach i ich zastosowaniach. Natomiast pytanie 1 zaliczono do poziomu III, ponieważ odpowiedź na nie wymaga, w nowej dla ucznia sytuacji, samodzielnego rozumowania prowadzącego do odkrycia idei dowodu.

Obok pytań „dlaczego" na obserwowanych lekcjach prawie nie występowały inne polecenia uzasadniania (tylko jedno takie polecenie).

Rozkład pytań typu „dlaczego" według poziomów I, II, III z uwzględnieniem poszczególnych lekcji przedstawia tabela 2.

Tylko 7% ogółu pytań merytorycznych, postawionych przez nauczycieli na obserwowanych lekcjach, stanowiły pytania „dlaczego". Wynika stąd, że pytania o uzasadnienie nauczyciele stosowali na obserwowanych lekcjach stosunkowo rzadko, co ograniczało ich możliwości w zakresie kontroli rozumienia, rozumowania oraz poznawania przyczyn błędów i trudności uczniów.

3.4. Pytania rozstrzygnięcia

Wśród pytań zadawanych przez nauczycieli występuje grupa tzw. pytań rozstrzygnięcia. Wartość tych pytań z punktu widzenia kontroli zależy od kontekstu, w którym one występują. Pytania takie, postawione bez uzupełniających je poleceń lub innych pytań, mogą być mało użyteczne jako środek kontroli ze względu na to, że uczeń ma na nie do wyboru dwie odpowiedzi i prawdopodobieństwo odgadnięcia poprawnej jest duże. Ponadto pytania rozstrzygnięcia są często w dużym stopniu sugestywne ze względu na ich sformułowanie, a w pewnych przypadkach na intonację, jaką nadaje im nauczyciel. Pytanie rozstrzygnięcia ma wartość kontrolną przede wszystkim w przypadku, gdy jest uzupełnione pytaniem „dlaczego?" lub innym poleceniem (między innymi o podanie przykładu) uzasadnienia odpowiedzi. W praktyce szkolnej zdarza się, że uczeń robi to spontanicznie.

Dla ilustracji znaczenia pytań rozstrzygnięcia dla kontroli wybrałam kilka przykładów z obserwacji 30 lekcji.

P r z y k ł a d 1 (klasa VII, lekcja 20). „Czy stosunek ciężarów dwóch sztabek ze srebra i złota o różnych objętościach jest równy stosunkowi ciężarów właściwych tych metali?" 32/20.

Takie pytanie nauczyciel skierował do uczniów po uzasadnieniu przez nich tego, że stosunek ciężarów sztabek srebrnej i złotej o tych samych wymiarach jest równy stosunkowi ich ciężarów właściwych. Na to pytanie jeden z uczniów odpowiedział „nie". Nauczyciel nie poleca mu uzasadnić tej odpowiedzi. Nie otrzymuje w ten sposób bliższych informacji, czy odpowiedź ucznia oparta była na właściwym rozumieniu. W tej sytuacji pytanie rozstrzygnięcia prowadzi do kontroli powierzchownej.

P r z y k ł a d 2 (klasa VI, lekcja 15). „Czy symetria środkowa będzie przekształceniem tożsamościowym?" 39/15.

U: Nie, bo obrazami punktów różnych od O są nie te same punkty.

W tym przypadku uczeń z własnej inicjatywy uzasadnia swoją odpowiedź. W kontekście odpowiedzi ucznia pytanie to ma znaczenie kontrolne, bo sprowokowało go ono do wydania sądu i jego uzasadnienia.

P r z y k ł a d 3 (klasa VII, lekcja 14). Jedna z uczennic wykonała rachunek:

$$-\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{5}_{1}} \cdot \left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{9}_{3}}\right) - 3 = +\frac{4}{3} - 3.$$

N: Czy dobrze jest? (pytanie skierowane do innych uczniów).

U: Tak, dobrze.

N: A dlaczego? Skąd tu się wzięło $\frac{4}{3}$?

U_1: Nie, to jest źle, ona zrobiła źle, $\frac{4}{3}$ to chyba wzięła mianownik i licznik z innego działania.

N: Jak z innego działania, jeśli tu jest jedno działanie?

U_1: Bo tam jej po skróceniu wyszły $\frac{4}{1}$, a napisała $\frac{4}{3}$, tak, nie ..., czyli znaczy pomyliła się.

Uczniowie (chórem): dobrze jest, $\frac{4}{3}$ dobrze jest, 4 razy $\frac{1}{3}$.
N: Proszę (do ucznia U_2).
U_2: Po skróceniu wyszło mu $\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3}$, to jest $\frac{4}{3}$.

Mamy tu przykład wartościowego zabiegu dydaktycznego. Uczeń stwierdził, że rachunek wykonano poprawnie. Żądanie nauczyciela, aby ten sąd uzasadnić, wywołuje od razu wątpliwości. Uczniowie są bowiem przyzwyczajeni, że jeżeli odpowiedź „tak" na pytanie rozstrzygnięcia jest poprawna, to nauczyciel już o jej uzasadnienie nie pyta. W opisanej tutaj sytuacji nauczyciel postąpił inaczej, więc niektórzy uczniowie zinterpretowali to jak stwierdzenie błędu. Rzuca to także światło na niepewność matematycznych sądów wypowiadanych przez uczniów i konieczność kontroli także w przypadku odpowiedzi poprawnej.

W tabeli 3 umieściłam dane dotyczące liczby pytań rozstrzygnięcia na poszczególnych lekcjach w zestawieniu z ogólną liczbą pytań.

Na obserwowanych lekcjach nauczyciele zadali 119 merytorycznych pytań rozstrzygnięcia. Na 30 pytań tego typu (25% wszystkich pytań rozstrzygnięcia) uczniowie spontanicznie sformułowali odpowiedź („tak", „nie") wraz z jej uzasadnieniem. Miały więc te pytania szczególną wartość kontrolną z punktu widzenia poznania aktywności ucznia.

Na pozostałe 89 pytań uczniowie odpowiedzieli w pierwszej kolejności bez uzasadnienia, z tym jednak, że w 44 przypadkach (37% ogółu pytań rozstrzygnięcia) nauczyciele skierowali uzupełniające pytania, za pomocą których inspirowali uczniów do uzasadnienia ich wypowiedzi, kontrolując w ten sposób czy odpowiedź nie jest przypadkowa, a w niektórych przypadkach poznając jednocześnie sposób myślenia ucznia i jego wiedzę. 38% wszystkich pytań rozstrzygnięcia - to pytania, na które uczniowie odpowiadają krótko „tak", „nie" i nie są przez nauczyciela prowokowani do uzasadnienia ich odpowiedzi. W tej sytuacji pytania rozstrzygnięcia nie mają w zasadzie znaczenia kontrolnego.

T a b e l a 3

Numer lekcji	Liczba pytań merytorycznych ogółem	W tym pytania rozstrzygnięcia
1	38	3
2	64	5
3	47	9
4	42	5
5	48	9
6	16	1
7	63	9
8	57	2
9	66	5
10	46	3
11	43	2
12	17	1
13	50	4
14	49	15
15	44	6
16	52	7
17	50	2
18	46	4
19	20	2
20	48	9
21	31	2
22	60	1
23	26	-
24	35	-
25	92	2
26	66	1
27	72	-
28	102	1
29	42	8
30	47	1
Ogółem	1479	119

3.5. Pytania w seriach

W praktyce szkolnej można zaobserwować zjawisko polegające na tym, że nauczyciel zadaje kilka pytań (2 do 5 na obserwowanych lekcjach) jedno po drugim, nie czekając na odpowiedź ucznia na kolejne pytania. W ciągu tych pytań można wyodrębnić 3 typy powiązań:

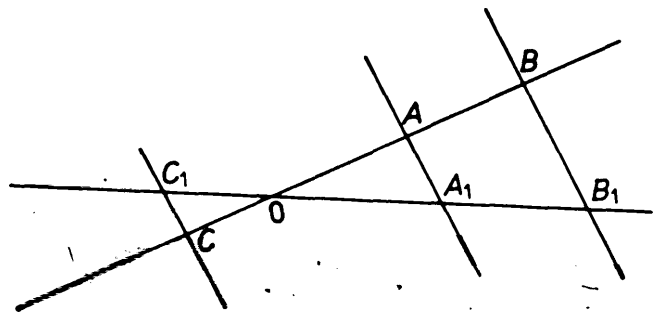
1° pytanie następne jest innym sformułowaniem lub uściśleniem poprzedniego,

2° pytanie następne zawiera wskazówkę do odpowiedzi na poprzednie pytanie, ma więc na celu ułatwienie uczniom odpowiedzi,

3° pytanie następne nie jest wyraźnie powiązane z poprzednim, jest to w istocie rzeczy zmiana treści pytania.

A oto przykłady zależności typu (1).

P r z y k ł a d 1 (klasa VII, lekcja 9). Uczniowie rozwiązują zadanie: „Dane są odcinki C_1O, CO, AB (rys. 7); szukane odcinki: A_1B_1".



Rys. 7

Uczeń układa proporcję $\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}$, z której nie jest możliwe

wyznaczenie odcinka A_1B_1, ponieważ nie są znane A_1C_1 i AC. W tej sytuacji nauczyciel zadaje od razu dwa kolejne pytania:

(1) „Czy wam się to podoba?" 60/9.

(2) „Czy to wam się podoba do rozwiązania zadania?" 61/9.

Przykład ten ilustruje powiązanie, w którym następne pytanie jest uściśleniem poprzedniego. Odpowiedzią na pytanie (1) mogło być zdanie: „tak, podoba się", bo napisana proporcja jest zgodna z twierdzeniem Talesa. Nie o to chodzi jednak nauczycielowi. Dlatego, bez oczekiwania na odpowiedź, inaczej formułuje pytanie. Pytanie (2) lepiej wyraża to, do czego nauczyciel zmierzał - „podobać się" może tylko poprawnie ułożona proporcja i to taka, że za jej pomocą można rozwiązać zadanie. Odpowiedzi zarówno na pierwsze, jak i na drugie pytanie, mogłyby mieć wartość kontrolną w przypadku, gdyby zawierały uzasadnienie sądów „tak" („nie"), a nie ograniczały się tylko do krótkich odpowiedzi „tak", „nie".

P r z y k ł a d 2 (klasa VIII, lekcja 16). Nauczyciel poleca uczennicy przedstawić poznany na poprzedniej lekcji dowód twierdzenia: „Pole koła o promieniu r równa się $\pi \cdot r^2$". Uczennica zapisuje wzór $P = \pi \cdot r^2$, ale nie rozpoczyna dowodu. W tej sytuacji nauczyciel stawia kolejno, bez przerw, pytania:

(1) „Powiedz, skąd to (wskazuje $P = \pi \cdot r^2$) się wzięło?" 50/16.

(2) „Jaką drogą doszliśmy do tego?" 51/16.

(3) „Jak doszliśmy do tego, że to jest $\pi \cdot r^2$, a nie coś innego?" 52/16.

Przykład ilustruje sytuację, w której pytanie następne jest innym sformułowaniem poprzedniego. Pytanie (3) być może bardziej trafia do ucznia, akcentuje bowiem mocno tezę twierdzenia („że to jest $\pi \cdot r^2$"), o dowód którego nauczyciel pyta. Z punktu widzenia kontroli zadane pytania (2) i (3) nie wpływają dodatkowo na jakość informacji dostarczonej nauczycielowi przez odpowiedź ucznia.

Powiązanie typu (2) pomiędzy pytaniami ilustruje następujący przykład:

P r z y k ł a d 3 (klasa VI, lekcja 21). Na pytanie nauczyciela czy można skonstruować romb mając dane jego przekątne, uczeń

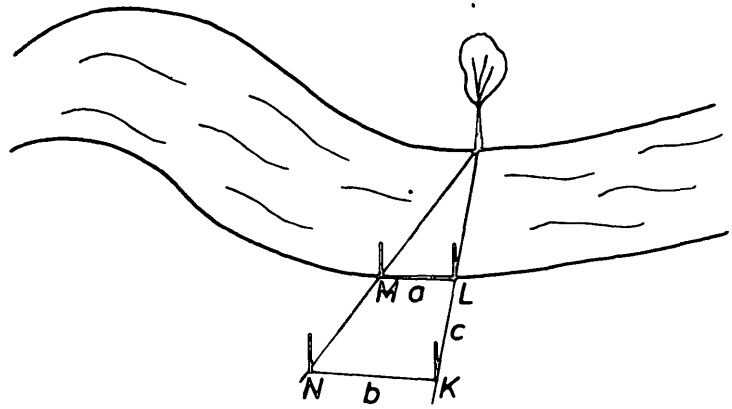
odpowiada: „tak". Nauczyciel w tej sytuacji stawia dwa pytania, jedno po drugim, bez czekania na odpowiedź ucznia na pytanie (1).

(1) „Dlaczego tak uważasz?" 25/21.

(2) „Z jakich własności trzeba by było skorzystać i rozwiązać to zadanie?" 26/21.

Pierwsze z postawionych przez nauczyciela pytań wymaga od ucznia samodzielnego uzasadnienia wypowiedzianego przez niego sądu, drugie natomiast jest wskazówką do odpowiedzi na pierwsze, sugeruje bowiem, że - aby skonstruować romb - trzeba skorzystać z pewnej własności. Odpowiedź na pytanie (1) dostarcza więc nauczycielowi bogatszych informacji niż na pytanie (2).

A oto przykład ilustrujący powiązanie między pytaniami typu (3).



Rys. 8

P r z y k ł a d 4 (klasa VII, lekcja 5). Uczniowie mieli wyjaśnić na podstawie obserwacji rysunku (rys. 8), jak można obliczyć szerokość rzeki.

Jeden z uczniów opisuje, jak umieszczałby paliki (K, L, M, N); między innymi mówi: „Między tamtymi (wskazuje K, L) odległość c". Nauczyciel reagując na tę wypowiedź stawia trzy pytania (bez czekania na odpowiedź na pierwsze dwa).

(1) „Czy w odległości c?" 21/5.
(2) „Czy mogę powiedzieć, że w odległości c?" 22/5.
(3) „Ale jak ustawić paliki?" 23/5.

Pytanie (2) - to inne sformułowanie pytania (1). Pytania (1), (2) są tak sformułowane, że właściwie trudno jest się domyślić, jaką intencję miał nauczyciel zadając je. Pytanie (3) nie ma żadnego związku z poprzednim. Być może nauczyciel zdawał sobie sprawę z tego, że pytanie (2) nie wyraża tego, o co mu chodziło, i dlatego postawił pytanie oderwane od poprzedniego, które w tej sytuacji jakby kasuje pytanie (2). Pytania (1) i (2) w tym fragmencie lekcji nie spełniły żadnej roli, były zbyteczne.

A oto przykład serii czterech pytań rozmaicie ze sobą powiązanych.

P r z y k ł a d 5 (klasa VII, lekcja 5). Uczniowie rozwiązując zadanie otrzymali wynik $x = \frac{a\,c}{a-b}$. Nauczyciel w tej sytuacji stawia 4 pytania, nie czekając na odpowiedzi na pierwsze trzy z nich.

(1) „Co moglibyśmy powiedzieć o wartościach?" 45/5.
(2) „Wszystko możemy tu podstawić?" 46/5.
(3) „Czy wszystkie liczby?" 47/5.
(4) „Czego dotyczy to zadanie?" 48/5.

W tej serii pytań widzimy wszystkie trzy typy powiązań. Pytanie (2) zawiera wskazówkę do odpowiedzi na pytanie (1), a więc mamy tu do czynienia z powiązaniem typu 2^{o}. Pytanie (3) można uznać za inne sformułowanie pytania (2), jest to powiązanie pierwszego typu, natomiast pytanie (4) nie jest ściśle powiązane z poprzednim, nie dotyczy ono bowiem tej samej treści co pytanie (3), a więc jest to związek pytań typu 3^{o}.

Na obserwowanych lekcjach występowały znacznie częściej w seriach pytań powiązania typu 1^{o} lub 2^{o} niż 3^{o}. Z punktu widzenia aktywizacji ucznia w procesie nauczania oraz kontroli jego postępów można mieć wątpliwości co do wartości takich serii pytań. Zwiększają one niepotrzebnie ilość wypowiedzi nauczyciela, których jest i tak bardzo dużo, a nie pobudzają do większej aktywności ucznia niż przy odpowiedzi na jedno pytanie właściwie sformułowane. Często też pytania w serii pytań są sugestywne, uwalniają więc ucznia od większego intelektualnego wysiłku przy konstruowaniu odpowiedzi. Nauczyciel w tej sytuacji nie otrzymuje głębszych informacji dla kontroli, ponieważ uczeń najczęściej odpowiada tylko na ostatnie pytanie danej serii pytań.

Tabela 4 przedstawia ilość serii pytań, które wystąpiły na obserwowanych lekcjach w zestawieniu z ogólną liczbą pytań merytorycznych.

Poza omówionymi seriami pytań nauczyciela, obserwacja rzeczywistości dostarcza wielu innych przykładów nadmiernej interwencji nauczyciela w toku odpowiedzi ucznia. Dla ilustracji przedstawiam fragmenty dwóch typowych w tym zakresie lekcji prowadzonych przez dwóch nauczycieli.

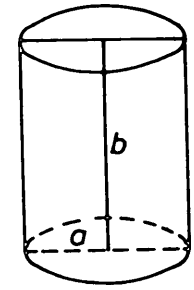
P r z y k ł a d 1 (klasa VIII, lekcja 26). Fragment protokołu dotyczy rozwiązania zadania: „Prostokąt, którego pole równa się 80 cm^2 obraca się dookoła jednego z boków. Objętość figury powstałej z obrotu prostokąta wynosi 640 cm^3. Oblicz pole powierzchni tej figury".

N (nauczyciel)	U (uczeń)
1. Proszę bardzo. Co masz dane?	Dane mam pole prostokąta i mamy powiedziane, że ten prostokąt obraca się dookoła jednego z boków. Objętość tej bryły wynosi 640 cm^3. Trzeba policzyć pole powierzchni tej bryły.
2. Dobrze, siadaj. Jak to zrobić? Szybciutko Aniu! Jak ty myślisz to zrobić?	Wzór na pole prostokąta jest $a \cdot b$.

T a b e l a 4

Numer lekcji	Liczba pytań merytorycznych ogółem	Ilość serii pytań
1	38	3
2	64	14
3	47	3
4	42	-
5	48	2
6	16	2
7	63	4
8	67	2
9	66	9
10	46	3
11	43	3
12	17	3
13	50	3
14	49	7
15	44	-
16	52	11
17	50	2
18	46	3
19	20	-
20	48	4
21	31	4
22	60	6
23	26	-
24	35	2
25	92	4
26	66	6
27	72	6
28	102	2
29	42	2
30	47	-

3. No, chodź do tablicy. Może sobie pomożesz rysunkiem pomocniczym. Zaznacz a, b.



Rys. 9

4. Co wiemy o tym prostokącie?

Obraca się wokół jednego boku. Pole prostokąta wynosi 80 cm^2. $a \cdot b = 80\ cm^2$.

5. Napisz to sobie.
6. Dobrze. Teraz przyjrzyj się. Czym jest a, a czym b dla tego walca?

a jest promieniem.

7. Czyli a równa się?

$a = r$, $b = h$,

8. Co masz jeszcze dane?

objętość powstałej figury walca

$$V = 640\ cm^3,$$

9. Czyli objętość czego?
10. Dobrze. Zapisz to!
11. Co masz obliczyć?

pole powierzchni walca

$$P = ?$$

. . .

12. No i co dalej?
13. Joasiu, pomóż jej. Od czego być zaczęła?

Pole powierzchni to jest $2\pi r(r + h)$,

$$P = 2\pi r(r + h).$$

14. Tak. Zapisz to
15. Proszę. Co dalej?

Teraz r mamy, że to jest równe a, h to jest równe b. Mamy boki tego prostokąta.

16. No, ale proszę popatrzeć. Czy my mamy a i b konkretnie dane? No! No to co? Trzeba to jakoś tę daną,

którą wy macie, ten związek między a i b podany w tym zadaniu, trzeba jakoś to wykorzystać do tego zadania. Proszę, przyglądnijcie się dobrze. Bobrowski, jak byś do tego doszedł? Związek tej danej z tymi bokami a i b.
No co ci to da? A proszę patrzeć! Moje r - to czym jest w tym zadaniu?

17. Moje h w zadaniu dla nas to jest b. Tak? I trzeba tymi danymi się posługiwać, a i b. Tak?
Teraz, czy te dane są tutaj konkretnie? Nie ma danych. Mam tylko ten związek podany. I co jeszcze jest podane? Proszę patrzeć na następną daną, która tu może pomoże nam w znalezieniu tego co potrzeba.

18. Co i co z tego?

Mamy jeszcze objętość walca. Mamy podaną objętość walca, to jest $\pi \cdot r^2 h = 640\ cm^3$

19. Tak.

Wiem, że r razy h to jest $80\ cm^2$ i jeszcze ...

20. Dobrze.

21. No i tu ten związek Joasiu ci się wyłania. Pomyśl dobrze, bo ci się bardzo ładnie ten związek wyłania między tymi danymi. No to zapisz to, co ona powiedziała, aby ci nie wyleciało.

$V = \pi r^2 \cdot h$,
$a = r$, $b = h$.

22. Proszę popatrzeć! Macie tu nasze r i nasze h. My możemy tu zamiast b podstawić h, a zamiast a podstawić r. Czyli z tego by wynikało, że: $a \cdot b = 80$, $r \cdot h = 80$. A proszę popatrzeć! No?

πr.

23. No Marta, proszę bardzo.

$r \cdot h = 80$, czyli $r \cdot 80$ ...

24. No nie chcecie uchwycić! Ale tu masz r^2. masz $r \cdot h = 80$, a to jest $r^2 \cdot h$

To rozbić r razy 80.

25. Dobrze. Aha, czyli chcesz. Ale dalej. Ale w tym związku, jeżeli tak rozbijesz jak ty mówisz $r \cdot r \cdot h$. Tak? Za $r \cdot h$ przedstawisz 80, a co podstawisz za r?

. . .

26. No, ale tu dobrze. No spróbuj! Chodź do tablicy. Marta popatrz, gdybyś tu wstawiła, bo ty tak chcesz, napisz na tablicy

$V = \pi r \cdot r \cdot 80$.

27. No i co dalej? Zastanów się! Czy cię to do czegoś doprowadzi?

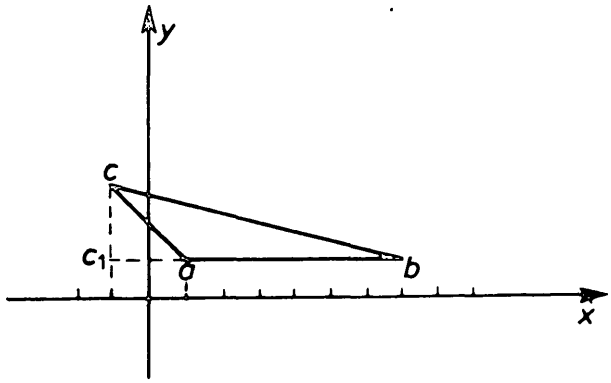
Za V wstawię 640 cm^3, $640\ cm^3 = \pi r \cdot 80$.

28. Bardzo dobrze, bardzo dobrze. I co z tego wyliczysz? Bardzo dobrze, ślicznie. Z tym jednak, że ja chciałem wyłonić ten związek, który zaczęła tu Joasia. I ona nie umiała z tego związku wybrnąć. Ona tu zaczęła dobrą drogę, bo tu można r wyliczyć tak jak podała Marta - jeden sposób. A można było do tego r wyjść z tego, co Joasia tu przed chwilą mówiła!

r wyliczę, $r = \frac{640\ cm^2}{80}$.

P r z y k ł a d 2 (klasa VIII, lekcja 27). Uczniowie rozwiązują zadanie: „Dane są współrzędne punktów $a(1,1)$, $b(7,1)$, $c(-1,3)$. Obliczyć pole trójkąta abc".

Uczniowie rysują trójkąt abc, w układzie współrzędnych obliczają $|\vec{ab}| = 6$, $|\vec{ac}| = 2\sqrt{2}$. A oto dalszy fragment lekcji.



Rys. 10

N (nauczyciel)	U (uczeń)
1. Wobec tego mamy podstawę $ab = 6$. Proszę narysować wysokość opuszczoną na tę podstawę. Paweł do tablicy! Muszę ...	Muszę przedłużyć podstawę (rysuje wysokość cc_1).
2. Otrzymałem?	Trójkąt prostokątny.
3. Zaznacz go.	
4. Idź na miejsce. Szukana jest wysokość. Jak znajdziemy wysokość w tym (wskazano trójkąt acc_1) trójkącie? Spróbuj Artek. Artek, co znamy w tym trójkącie?	Długość przekątnej.

5. Jej długość wynosi ...	$2\sqrt{2}$.
6. Napisz.	$2\sqrt{2}$.
7. Popatrz na ten trójkąt. Możesz kąt jakiś wskazać?	(Uczeń zaznacza 45°).
8. A dlaczego?	$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.
9. Jakie tu są kąty? One mają swoją nazwę. Kąty przyległe, tworzą razem 180°. No więc jest tu 45°, tu jest h i długość $2\sqrt{2}$. Jaka funkcja?	sinus.
10. No tak.	$\sin 45^\circ = \frac{x}{2\sqrt{2}}$
11. Pamiętasz z tabelki?	. . .
12. Podpowiedz! (polecenie skierowane do innego ucznia).	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
13. Tak.	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}}$.
14. Jak z tego obliczyć x?	$x = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$,
	$x = 2$.

Zauważmy, że w pierwszym przykładzie na 89 zdań wypowiedzianych przez nauczyciela wypada 34 zdań sformułowanych przez uczniów, w drugim na 25 wypowiedzi nauczyciela - 13 uczniów.

Obydwa przykłady ukazują powszechne w praktyce szkolnej sterowanie odpowiedzią ucznia. Można takie postępowanie krytykować z różnych względów, między innymi z punktu widzenia kontroli. Jest to tak silne sterowanie, że utrudnia ono obserwatorowi ocenę tego, w jakiej mierze uczniowie są zdolni do samodzielnego rozwiązywania zadań. Nauczyciel, ingerując w tok odpowiedzi uczniów, ogranicza możliwość poznania umiejętności formułowania przez ucznia własnych sądów oraz samodzielnego rozumowania, a także pomysłowości, zdolności, a nawet wiedzy. Sterując rozumowaniem ucznia za pomocą pytań, poleceń, komentarzy, może on uzyskiwać fałszywe informacje dotyczące wyników nauczania, niezgodne z rzeczywistym stanem. Z obserwacji lekcji wynika, że zdarzają się zarówno takie sytuacje, w których w wyniku ingerencji nauczyciel nie jest w stanie wykryć różnego rodzaju braków ucznia, jak i takie, w których nie dopuszcza ucznia do ujawnienia własnej idei rozwiązania, traci więc moż-

liwość poznania jego samodzielności myślenia, a nawet w pewnych wypadkach zdolności twórczych.

3.6. Pytania ucznia

Duże znaczenie dla poznania ucznia z punktu widzenia jego sposobu myślenia, zainteresowań, aktywności intelektualnej, umiejętności formułowania myśli itp. mają stawiane przez niego pytania. Istotne jest więc możliwie szerokie prowokowanie uczniów do stawiania pytań. Tego trzeba uczyć zresztą nie tylko w celu kontroli; stawianie pytań jest bowiem jednym z bardzo ważnych wyników nauczania, także z punktu widzenia ogólnego matematycznego kształcenia.

D. Bouillon i Y. Tourneur (1977) stwierdzają słusznie: „Nieumiejętność rozwiązania problemu nie jest ani defektem, ani objawem nieinteligencji. To, co jest godne pożałowania, to nieumiejętność stawiania pytań" (Tourneur, Bouillon, 1977, str. 33).

Na znaczenie dla kontroli pytań uczącego się zwraca uwagę J. Rudniański (1972) pisząc: „Umiejętność stawiania pytań jest jedną z podstawowych umiejętności, która świadczy o tym, że ktoś, kto studiuje dany przedmiot, naprawdę ów przedmiot lub fragment opanował, orientuje się w nim i potrafi na ten temat myśleć" (Rudniański, 1972, str. 165).

Na podstawie moich obserwacji w okresie pracy w szkole średniej mogę stwierdzić, że pytania problemowe stawiają przede wszystkim uczniowie reprezentujący wysoki poziom rozumienia, aktywności intelektualnej, zainteresowań. Potwierdzają ten fakt badania prowadzone przez R. Radwiłowicza (Radwiłowicz, Pauzewicz, Kosiński, 1969, str. 112).

Tym samym problemem zajmuje się D. Bouillon i Y. Tourneur (1977). Powołują się między innymi na pracę Micheza, który sprawdził hipotezę dotyczącą roli pytań stawianych przez uczniów w procesie nauczania, stwierdzając, że: "jeżeli uczniów prowokuje się do poszukiwania i konstruowania problemów, wówczas oni rozwiązują je poprawniej niż gdy ich przygotowuje się do rozwiązania zadań bez konieczności ich rozumienia" (Tourneur, Bouillon, 1977, str. 34). Ale pytania problemowe stanowią tylko jeden z rodzajów pytań uczniów. Najczęściej ich pytania mają na celu upewnienie się czy rozwiązanie zadania jest poprawne. Uczeń pyta: „Czy to dobrze?",

„Czy tak można?" itp. Takie pytania tylko w małej mierze umożliwiają nauczycielowi wgląd w to, jak uczeń myśli.

W toku analizowanych ze względu na pytania nauczyciela i ucznia 30 lekcji w szkole podstawowej nauczyciele zadali w sumie 1476 merytorycznych pytań, a uczniowie tylko 9!

Zacytuję je więc wszystkie, bo każde z nich wydaje mi się charakterystyczne.

1. W klasie VII (lekcja 8) rozwiązywano frontalnie zadanie: „podzielić odcinek w stosunku 3 do 5". Po rozwiązaniu tego zadania nauczyciel postawił uczniom pytanie: „Kto z was tego nie rozumie?" W reakcji na to uczennica pyta: „Dlaczego ma być tych odcinków 8?"

Pytanie jest istotne i instruktywne dla nauczyciela. Uczennica nie rozumie idei konstrukcji.

2, 3. Uczniowie (klasa VII, lekcja 12) samodzielnie w toku pracy z podręcznikiem zapoznali się z dowodem twierdzenia: „Pole koła o promieniu r równa się πr^2". Jeden z uczniów na pytanie nauczyciela: „Jakie macie wątpliwości po przeczytaniu tekstu?" mówi: „Ja nie rozumiem; co to jest ta jedynka?" (wskazuje zdanie „π równa się polu koła o promieniu 1").

Na polecenie nauczyciela, aby wyjaśnił dokładniej, o co mu chodzi, uczeń stawia pytanie: „Czy to może być 1 m, czy 1 cm?"

Pytanie dotyczy nie tak prostego zagadnienia struktury geometrii euklidesowej, której twierdzenia nie zależą od wyboru jednostki długości. Uczeń (kl. VII) może mieć duże trudności ze zrozumieniem tego faktu.

4. „Czy to da się tak zrobić, aby średnicę pomnożyć przez π ?" (klasa VII, lekcja 12). (Chodzi o obliczenie długości półokręgu.)

Typowe pytanie „o upewnienie się" (uczeń popełnia zresztą błąd).

5. „Ja mam jedno pytanie: na jakiej zasadzie ja będę wybierał dobre definicje? Czy to będzie losowanie? Czy te, które pani uważa za najciekawsze"? (klasa VI, lekcja 18).

Na tablicy zostały zapisane sformułowane przez uczniów definicje symetrii środkowej. Uczniowie mają się do nich ustosunkować, odpowiedzieć na pytanie, która definicja jest poprawna w stosunku do intuicyjnie już ujętego pojęcia, a która nie i dlaczego. Pytanie problemowe, właściwie mające już charakter metodologiczny dotyczący kryteriów poprawności definicji.

6. Uczeń (klasa VI, lekcja 19) zapisał w swoim zeszycie rozwiązanie zadania: „podaj przykład liczby niewymiernej spełniającej nierówność $2n < 5$" podając liczbę 1, 12 13 14 15 ... Pyta nauczyciela: „Czy ten przykład jest dobry?"

Znowu typowy przykład „upewnienia się".

7. „Czy będę mógł powiedzieć swoje zadanie?"

Uczeń (klasa VII, lekcja 20) pyta o to, czy będzie mógł przedstawić rozwiązanie zadania. Pytanie informuje nauczyciela tylko o pewnej aktywności w postawie ucznia.

8. Nauczyciel podaje tekst zadania: „Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Rysujemy prostą CD dowolną, D leży między A i B, ale jest dowolny. Wiemy, że $AD/DB = m/k$. Nasze zadanie jest następujące: Obliczyć, ile wynosi P_1/P_2; P_1 - to pole trójkąta ADC, P_2 - to pole trójkąta DCB".

Uczeń w tej sytuacji pyta: „A ile równa się m i k?"

Pytanie bardzo charakterystyczne dla pewnego poziomu, dla potrzeby konkretności w stosunku do obiektów matematycznych, którymi się operuje. Uczniowie szkoły podstawowej mają trudności w zrozumieniu „realności" obiektów reprezentowanych przez nazwy literowe, w szczególności w stosunku do zmiennych parametrów.

9. Na lekcji (klasa VI, lekcja 25) nauczyciel wprowadza równanie z dwiema niewiadomymi na przykładzie równania $y = x$. Uczniowie podają pary liczb spełniające to równanie. Podano przykłady: (1,1), (5,5), (-2,-2). Jeden z uczniów zadaje pytanie: „Proszę pani, a jak podstawimy $\frac{3}{2}$ za x i $1\frac{1}{2}$ za y, to czy będzie dobrze?" Pytanie pozornie naiwne, ale w istocie rzeczy istotne, dotyczące sensu znaku równości postawionego między różnymi nazwami tego samego obiektu.

Zacytowałam te wszystkie, wyłowione z 30 lekcji przykłady, aby uwidocznić, jak wielkie (poza pytaniami „upewnienia się") mogą mieć znaczenie jako środek kontroli pytania stawiane przez uczniów. Niestety, uczniowie - zasypywani pytaniami nauczyciela - za mało mają czasu na własną refleksję i za mało odwagi, aby pytania zadawać. Z tego punktu widzenia przeprowadzone przeze mnie obserwacje mają chyba ogólniejszą wartość, choć były ograniczone tylko do niewielkiego fragmentu rzeczywistości szkolnej.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w artykule wyniki badań uwzględniają przede wszystkim jeden aspekt formułowania pytań w procesie nauczania matematyki. Diagnoza dotyczy tylko roli pytania w kontroli szeroko rozumianych wyników nauczania. Sposób formułowania pytań, sytuacja w których się je zadaje, treść którą one zawierają mają zasadnicze znaczenie dla całości procesu uczenia się - nauczania matematyki, a nie tylko dla kontroli. Z tej bardzo szerokiej dziedziny różnych problemów uwzględniam tylko niektóre.

Stwierdziliśmy, że pytania zadawane przez nauczycieli w toku obserwowanych lekcji w wielu przypadkach nie pełniły odpowiedniej funkcji w zdobywaniu przez nauczyciela istotnych informacji o poziomie matematycznej wiedzy, matematycznego rozumowania i matematycznej aktywności uczniów. To stwierdzenie nie ma na celu krytyki działalności nauczyciela. Wydaje się, że ta niezadowalająca sytuacja jest między innymi wynikiem głęboko w praktyce szkolnej zakotwiczonej tradycji jednostronnie ukierunkowanego dialogu, braku refleksji nad formą tego dialogu oraz trudnych warunków nauczania w szkołach. Przeładowane programy, liczne klasy, wieczny pośpiech sprawiają, że nauczyciel nastawiony jest przede wszystkim na tzw. „realizację programu nauczania", choćby nawet formalną, byle dokonaną w odpowiednich ramach czasowych. Nauczyciel stara się więc możliwie przyspieszać tok lekcji, unika trudnych sytuacji wymagających czasu, stąd jego zbyt silna ingerencja w ten tok, polegająca między innymi na zadawaniu zbyt wielu pytań, stąd tendencja do unikania pytań bardziej otwartych, bardziej kłopotliwych. W dużej mierze ogranicza to samodzielność ucznia i osłabia jego aktywność, i tym samym zmniejsza zakres i głębokość informacji o tym, co uczeń rozumie, czego nie, jak myśli.

Pomimo że w artykule charakteryzuję z tego punktu widzenia tylko pewien wycinek rzeczywistości szkolnej, to jednak zaobserwowałam stan, który stanowi podstawę do stwierdzenia, że zadawanie pytań w procesie nauczania matematyki jest ważkim i trudnym problemem dydaktycznym, wymagającym opracowania podstaw teoretycznych tych zabiegów oraz uwzględnienia takiej teorii i jej konkretyzacji w praktyce.

Literatura cytowana

A j d u k i e w i c z, K.: 1960, *Język i poznanie*, PWN, Warszawa.

B i a ł a s, A., S t r a s z e w i c z, S.: 1965, *Matematyka kl. 7*, PZWS, Warszawa.

D o r m o l e n, J.V.: 1978, *Didaktik der Mathematik*, Vieweg.

R a c i n o w s k i, S.: 1967, *Pytanie i odpowiedź*, Nasza Księgarnia, Warszawa.

R a d w i ł o w i c z, R., P a n c e w i c z, K., K o s i ń s k i, Cz.: 1969, *Pytania uczniów a treść nauczania*, PZWS, Warszawa.

R u d n i a ń s k i, J.: 1972, *Sprawność umysłowa*, W.P., Warszawa.

S o ś n i c k i, K.: 1966, *Poradnik dydaktyczny*, PZWS, Warszawa.

T o u r n e u r, Y., B o u i l l o n, D.: 1977, *Fonctions et types de questions en mathématique. Evaluation et enseignement mathématique*, Comptes rendus de la 29^{e} rencontre organisée par la CIEAEM, Lausanne, 31-64.

QUESTIONS AS A MEANS OF CONTROL IN MATHEMATICS TEACHING - ATTEMPTED DIAGNOSIS

S u m m a r y

The paper presents the results of the investigation of the role of questions as the ways and means of control in the process of teaching mathematics.

In the course of the investigation 1479 questions asked by the teachers during 30 lessons have been analysed. The questions have been divided into three groups according to the level of mental activity shown on answering the questions. The criteria agreed upon and employed in this classification have been of hierarchical character. It should be pointed out that about 90% of the questions analysed referred to the skills previously acquired, whereas only 10% required new approach of the learner.

The questions asked by the learners have also been analysed. It is noteworthy that during these 30 lessons the teachers asked 1479 questions and the learners only 9.

Although only a part of the school reality in Poland has been presented in the paper, the results show how essential and difficult it is to ask questions in the process of teaching. It seems that a theoretical approach should be worked out and then taken into consideration in educating future teachers of mathematics.