ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 8 (1987)

MARIA LEGUTKO
Kraków

Przykłady behawioralno-poznawczych postaw uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych

1. UWAGI WSTĘPNE

Podjęcie badań nad rozwojem postawy ucznia wobec problemów matematycznych postulowano już od wielu lat. Świadczy o tym między innymi apel autorów raportu amerykańskiego komitetu National Advisory Committee on Mathematical Education (NACOME): „Wzywamy wszystkich dydaktyków do podjęcia badań nad rozwojem postaw, umiejętności rozwiązywania problemów, nawyków krytycznego myślenia - tradycyjnie uznawanych za istotne w nauczaniu matematyki - oraz nad dostępnymi środkami mierzalnej oceny w tym zakresie" (NACOME, 1975, str. 55).

Badania omawiane w niniejszym artykule stanowią fragment szerszych badań, w całości mających charakter tylko wstępny i sondażowy, gdyż zajmowałam się w nich nie tyle rozwojem, co opisem zastanych postaw uczniów wobec zadań matematycznych rozwiązywanych w klasie czwartej szkoły podstawowej. Sondażowy charakter tych badań wiąże się też z tym, że zastosowane przeze mnie narzędzia badawcze dają jedynie wstępną orientację w postawach uczniów. Przy doborze i stosowaniu tych narzędzi starałam się bowiem utrzymać takie warunki, w jakich zazwyczaj uczniowie rozwiązują zadania matematyczne w klasie.

Ten poziom kształcenia (pierwsza klasa ponadpoczątkowa) wybrałam do badania postaw uczniów dlatego, że stanowi on według mnie ważny etap w kształtowaniu motywacji i metod postępowania dotyczących zadań matematycznych. Na tym etapie postępowanie uczniów, wynikające z ich doświadczeń nabytych w okresie nauczania początkowego, ulega zmianom w związku z wyższymi wymaganiami i uczeniem się pod kierunkiem nauczyciela matematyki, na ogół innego niż w klasach początkowych. Warunkiem odpowiedniego ukierunkowania przez nauczyciela postępowania uczniów przy rozwiązywaniu zadań matematycznych jest rozeznanie w istniejących i funkcjonujących w rzeczywistości szkolnej ich postawach wobec takich zadań. Moje doświadczenia z pracy z dziećmi na tym poziomie nauczania i obserwacja lekcji nauczycieli wskazują, że nauczyciel często nie ma świadomości tych postaw, nie zawsze dostrzega przyczyny określonych zachowań dzieci wobec zadań, nie widzi też często konieczności głębszego wnikania w te problemy. Dlatego uważam, że zarówno pokazanie różnorodności postaw uczniów, jak i próba analizy tych postaw z punktu widzenia kształcenia matematycznego, są bardzo pożądane.

W celu opisania postaw uczniów wobec zadań matematycznych potrzebne jest ustalenie sposobu rozumienia pojęcia postawy oraz ustalenie sposobów badania i opisywania tego pojęcia. Postawy uczniów wobec zadań matematycznych rozważam na tle szerszego pojęcia postawy podmiotu wobec przedmiotu w psychologii.

2. POJĘCIE POSTAWY PODMIOTU WOBEC PRZEDMIOTU W PSYCHOLOGII

Poszukiwanie sposobu opisu postawy ucznia wobec zadań matematycznych rozpoczęłam od zbadania rozumienia pojęcia postawy w ogóle.

W pracach psychologów nie ma pełnej zgodności co do rozumienia pojęcia postawy i sposobów jej diagnozy. Dla potrzeb mojej pracy wybrałam, wyróżniające się przejrzystością, stanowisko J. Reykowskiego, przyjmowane również w psychologii społecznej (J. Reykowski, 1973).

J. Reykowski określa postawę osoby wobec przedmiotu jako dyspozycję tej osoby do ustosunkowania się wobec przedmiotu. Zreferuję krótko, jak Reykowski charakteryzuje pojęcie ustosunkowania,

czyli aktywnych organizacji własnych stosunków osoby z rzeczywistością.

Ustosunkowanie to ma formy praktyczne - gdy człowiek podejmuje czynności rzeczywiste, lub symboliczne - gdy jednostka nie ma kontaktu z obiektem ustosunkowania, a tylko z jego symboliczną reprezentacją, z jego wyobrażeniem lub ideą. Przez ustosunkowania symboliczne rozumie się procesy regulacji psychicznej, dzięki którym akty rzeczywistego ustosunkowania się dochodzą do skutku; chodzi tu o wyobrażenia, plany, pomysły zmian oraz związane z nimi emocje i motywy. Ustosunkowanie wobec konkretnego obiektu może przybierać najrozmaitsze formy, które dałoby się zakwalifikować najogólniej jako pozytywne lub negatywne.

W każdym akcie ustosunkowania można wyróżnić trzy podstawowe kompqnenty: behawioralny, poznawczy i emocjonalno-motywacyjny. Komponent *behawioralny* ustosunkowania wyraża się w formie konkretnych czynności motorycznych i werbalnych. Odpowiednikiem symbolicznym są wyrażenia i poglądy na temat tego, co podmiot zamierza zrobić lub co postuluje, co uważa za konieczne do zrobienia. Komponent *poznawczy* ustosunkowania wyraża się w czynnościach poznawczych podmiotu, a dokładnie w tym, jak podmiot selekcjonuje i organizuje napływające informacje. Organizacja informacji polega na ich klasyfikacji w odpowiednich kategoriach, na wartościowaniu informacji. Komponent *emocjonalno-motywacyjny* wiąże się z uwarunkowaniami każdego ukierunkowanego zachowania przez proces motywacyjny wraz z procesami emocjonalnymi. Proces motywacyjny może być bardziej lub mniej uświadomiony; uświadomionymi formami tego procesu są na przykład pragnienia, intencje, chęci, obawy. Emocje mogą sterować aktami ustosunkowania, bądź współwystępować z nimi.

Ustosunkowanie jednostki do rzeczywistości zależy od tego, w jaki sposób zostały zorganizowane informacje, jakie emocje i motywy powstały, jakim repertuarem możliwości wykonawczych jednostka dysponowała.

W zakończeniu opisu pojęcia ustosunkowania J. Reykowski napisał: „Jak wiadomo, ustosunkowania jednostki wobec pewnych obiektów otoczenia wykazują w pewnym dłuższym przeciągu czasu dość znaczną regularność (...), człowiek ustosunkowuje się do otaczających go przedmiotów w stały, charakterystyczny dlań sposób (...). *Postawa*

jest wewnętrznym warunkiem aktów ustosunkowania, dyspozycją do tych aktów (podkreślenie moje). Dzięki tej dyspozycji ustosunkowania wobec przedmiotów wykazują względną stałość w dłuższym przeciągu czasu" (J. Reykowski, 1973, str. 95).

Właściwa diagnoza postaw wymaga jasnego rozumienia stałości ustosunkowań. Otóż:

„Stałość ustosunkowań nie polega jednak na powtarzalności tych samych aktów wobec tych samych obiektów, a na dokonywaniu aktów mających wspólne znaczenie. Tak np. jednostka może ujawniać rozmaite reakcje emocjonalne wobec przedmiotu w zależności od tego, jak zmienią się aktualne stosunki między jednostką a danym przedmiotem, ale można w tych reakcjach dopatrzyć się wspólnego znaczenia" (J. Reykowski, 1973, str. 95).

Tak więc stałość ustosunkowania nie pociąga za sobą stałości wzorów zachowania, emocji; nie wyklucza zmienności doraźnych ustosunkowań, które zależą od doraźnych relacji podmiot-przedmiot, często różnych od relacji stałych. To, co obserwujemy, co bezpośrednio badamy, jest aktem ustosunkowania, który jest pewnym zewnętrznym przejawem postawy, sama zaś postawa jest, w podanym przez J. Reykowskiego określeniu, dyspozycją - strukturą latentną. Diagnoza postawy, jej opis, jest więc bardzo trudnym zagadnieniem.

W procedurze opisu postawy trzeba, zdaniem tego autora (J. Reykowski 1973, str. 114-115):

1) opisać powtarzające się tendencje w zachowaniu (behawioralne) podmiotu wobec przedmiotu - a nie konkretne czynności,

2) ustalić sposoby odbierania i organizowania informacji o rozpatrywanym przedmiocie,

3) opisać reakcje emocjonalne na zmiany stosunku podmiot-przedmiot.

Wszystkie wskaźniki postawy, które możemy otrzymać stosując przedstawioną procedurę opisu, są obciążone, według J. Reykowskiego, określonymi wadami związanymi przede wszystkim z ich zależnością od czynników sytuacyjnych. Pojedynczy pomiar wskaźników postawy informuje tylko o stanie aktualnym; na podstawie tych informacji nie można określić, jak się ma ów stan aktualny do stanu rzeczywistego - jaka jest między nimi rozpiętość.

Procedura opisu postawy przedstawiona przez J. Reykowskiego

sugeruje, że psycholog ten wyróżnia w dyspozycji tworzącej postawę: tendencje do zachowań, sposoby odbierania i organizowania informacji oraz reakcje emocjonalne. Mają one odpowiedniki w komponentach ustosunkowania: behawioralnym, poznawczym i emocjonalno-motywacyjnym, i niejako sterują nimi.

Przedstawione tutaj ujęcie postawy według J. Reykowskiego przyjmuję za podstawę do określenia pojęcia postawy ucznia wobec zadań matematycznych.

3. POJĘCIE POSTAWY UCZNIA WOBEC ZADAŃ MATEMATYCZNYCH

Pojęcie postawy występuje też w literaturze z zakresu dydaktyki matematyki. Pojęcie to jest związane z postulowanymi ogólnymi celami nauczania matematyki, przy czym autorzy poprzestają na dosyć ogólnym opisie cech postaw określonego typu. Podam przykłady. A.Z. Krygowska charakteryzując tendencje w formułowaniu ogólnych celów powszechnego nauczania „matematyki dla wszystkich" w różnych krajach, wyróżnia trzy poziomy kwalifikacji, które uczeń powinien zdobyć w procesie uczenia się matematyki. Drugi z tych poziomów tworzy specyficzne dla matematycznej aktywności *postawy intelektualne* (strategie i techniki intelektualne) stosowane w toku rozwiązywania matematycznych problemów oraz rozumienie związanych z tym podstawowych elementów metodologii matematyki (A.Z. Krygowska, 1981, str. 49). G. Polya wymienia następujące cechy *postaw użytecznych w rozwiązywaniu* zadań: (a) racjonalność, (b) oszczędność, lecz bez założonych z góry ograniczeń, (c) wytrwałość, lecz i różnorodność, (d) stosowanie reguł preferencji, np. łatwiejsze ma pierwszeństwo przed trudniejszym (G. Polya, 1975, str. 279-288).

Postawę twórczą, według H. Wintera, cechuje: przekształcanie sytuacji problemowej, jej przedłużenie, transfer; gotowość do rozważania alternatyw (myślenie dywergencyjne z aspektami płynności idei, oryginalności i ruchliwości); odkrywanie nowych możliwości przez kombinowanie (na przykład pojęć lub reguł); wykraczanie poza dane informacje; gotowość (i umiejętność) do samodzielnego poszukiwania dróg rozwiązania problemu i dowodzenia; odkrywania związków, wzorów, struktur; rozpoznawanie, formułowanie i uzasadnianie uogólnień; tworzenie hipotez (cytuję za A.Z. Krygowską, 1981, str. 50).

Przedstawione tu charakterystyki postaw można traktować jako postulowane cele rozwoju istniejących postaw uczniów wobec zadań matematycznych. W artykule tym zamierzam opisać postawy rzeczywiście występujące w praktyce szkolnej; zestawienie ich z postulowanymi postawami może być interesujące.

Zastosowanie zaproponowanej przez J. Reykowskiego procedury opisu postawy, gdy jej podmiotem jest uczeń klasy czwartej, a przedmiotem zadania matematyczne, wymaga między innymi opisania reakcji emocjonalnych ucznia na zmianę stosunku uczeń-zadanie. Takie reakcje badałam i opisałam w szerszej rozprawie(1). Tu ograniczam się tylko do sprawozdania z obserwacji i analizy postaw behawioralno-poznawczych (w terminologii Reykowskiego) uczniów klas czwartych wobec dwóch zestawów zadań matematycznych, oraz do krótkiego zestawienia wyników badań przeprowadzonych na większej liczbie zadań.

Zastosowanie zaproponowanej przez J. Reykowskiego procedury opisu postawy wymagałoby też oddzielnego opisania tendencji do zachowań uczniów wobec zadań oraz oddzielnego opisania sposobów odbierania i organizowania przez tych uczniów informacji związanych z zadaniami. Należałoby w związku z tym, przy badaniu ustosunkowań ucznia wobec zadań, oddzielnie opisywać ich komponent behawioralny, czyli czynności konkretne ucznia (wypowiedzi, zapis symboliczny, rysunek, czynności rzeczywiste wykonywane na przedmiotach materialnych) oraz oddzielnie opisywać ich komponent poznawczy, czyli operacje myślowe ucznia. Czynności konkretne ucznia są jednak powiązane z jego operacjami myślowymi, charakter związków między nimi można, za A.Z. Krygowską, opisać w następujący sposób:

„Czynność konkretna

(a) może być źródłem procesu interioryzacji, w którym jako jej odbicie powstaje określona operacja myślowa,

(b) może być wykonywana równolegle z operacjami myślowymi, wspierać je i stabilizować - przez odbicie w konkrecie i równocześnie je pobudzać,

---

(1) Całość badań postawy uczniów w aspekcie behawioralno-poznawczym i emocjonalno-motywacyjnym została opisana w mojej pracy doktorskiej pt. *Postawy uczniów klasy IV szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych*. Maszynopis tej pracy znajduje się w Bibliotece Głównej WSP w Krakowie.

(c) może być weryfikacją w konkrecie efektywności pomyślanego ciągu operacji" (A.Z. Krygowska, 1977, t. 1, str. 128).

Uważam, że przy opisie postawy ucznia wobec zadań trzeba brać pod uwagę powiązania konkretnych czynności ucznia z jego operacjami myślowymi i trzeba opisywać charakterystyczne dla niego *metody postępowania* przy rozwiązywaniu zadań, w których łączą się jego tendencje do zachowań wobec zadań ze sposobami odbierania i organizowania przez niego informacji dotyczących tych zadań. Przykładem takiej, charakterystycznej dla danego ucznia, metody postępowania może być dążenie do wykonywania rachunków na danych liczbowych zadania. Czynności konkretne ucznia związane z tymi rachunkami mogą być z jednej strony wynikiem jego koncentrowania się przy czytaniu treści zadania na danych liczbowych, z drugiej zaś mogą być sposobem lepszego rozeznania w zależnościach między danymi a szukanymi tego zadania. Ujawnienie się takiej metody postępowania ucznia może zależeć od rodzaju zadania. Przykładem innej metody postępowania, również związanej z rodzajem zadania, może być dążenie ucznia do konkretnego interpretowania informacji danych w zadaniu, związanego z bardzo żywym wyobrażeniem rzeczywistych sytuacji, spotykanych w życiu lub w dotychczasowym doświadczeniu szkolnym. Może to wpływać na przyjmowanie przez ucznia dodatkowych założeń nie istniejących w tekście zadania.

W prowadzonych badaniach, za J. Reykowskim, przez *postawę ucznia wobec zadań matematycznych* rozumiałam *jego wewnętrzną dyspozycję do ustosunkowań wobec tych zadań*. Nie oddzielałam jednak aspektu behawioralnego od poznawczego, a więc wyróżniłam tylko dwa aspekty postawy ucznia wobec zadań matematycznych:

(1) *aspekt behawioralno-poznawczy*, obejmujący metody postępowania ucznia w procesie rozwiązywania zadań matematycznych,

(2) *aspekt emocjonalno-motywacyjny*, obejmujący motywacje uczniów wobec zadań matematycznych.

Aspekty te są ze sobą powiązane, ich rozdzielenie ma ułatwić przeprowadzenie badań dotyczących diagnozy postaw. Do opisania postaw uczniów wobec zadań matematycznych, poza opisaniem ich motywacji i metod postępowania, istotne jest podjęcie próby ocenienia stałości tych motywacji i metod, zależności od rodzaju zadań. Jak już wspomniałam poprzednio, w artykule ograniczam się tylko do pierwszego aspektu obserwowanych postaw.

4. DOBÓR ZADAŃ DO BADANIA POSTAW UCZNIÓW

Przy różnych rodzajach zadań można oczekiwać różnych metod postępowania uczniów przy rozwiązywaniu tych zadań. Opis procesu rozwiązywania zadań powinien więc uwzględniać różne ich aspekty.

A.Z. Krygowska wyróżnia trzy takie aspekty:

„Każde zadanie jest nośnikiem różnych elementów dydaktycznej instrukcji, takich jak: *treść matematyczna* - twierdzenia, definicje, algorytmy itp.; *aspekt metodologiczny* - formy rozumowania, dedukcja, redukcja, poprawna klasyfikacja przypadków, logiczna struktura twierdzenia, którego się dowodzi itp.; *aspekt heurystyczny* - analogia, indukcyjne poszukiwanie rozwiązania, próba rozwiązania w przypadku szczególnym i poszukiwanie sposobu uogólnienia itp" (A.Z. Krygowska, 1977, str. 130 - podkreślenia moje). W pracy pod redakcją G.A. Goldina i C.E. Mc Clintocka (1979) precyzuje się cztery kategorie zróżnicowania sytuacji występujących w badaniach nad rozwiązywaniem zadań. Są to zmienne charakteryzujące:

(a) *syntaktykę zadania*, tj. układ występujących w nim słów i symboli,

(b) *treść matematyczną* i kontekst pozamatematyczny,

(c) *strukturę zadania* (w sensie adekwatnego modelu matematycznego),

(d) specyficzne dla danego zadania *procesy heurystyczne*.

Zmienna dotycząca syntaktyki zadania nie jest osobno wyróżniona w przedstawionym wyżej ujęciu autorstwa A.Z. Krygowskiej.

Uwzględnianie w badaniach procesu rozwiązywania zadań ich aspektu związanego z układem słów i symboli w treści zadania uważam za ważne. Nieznajomość lub nierozumienie przez uczniów konwencji dotyczących zapisu treści zadania może być przyczyną wielu ich niepowodzeń w rozwiązywaniu zadań, co ilustruje też fragment badania opisany w rozdziale 6 tego artykułu. W badaniach postaw uczniów wobec zadań matematycznych ważną rolę odgrywa ich typowość lub nietypowość.

W literaturze dydaktycznej wymienia się różne kryteria typowości zadania. Podam przykłady.

„W doborze zadań zdeterminowanym przez treści programu nauczania występują głównie zadania typowe ze względu na *sprawności* i

wiedzę określonego fragmentu materiału" (W. Mnich, 1980, str. 4 - podkreślenie moje).

G. Polya charakteryzuje zadania typowe następująco: „Ogólnie rzecz biorąc zadanie jest zadaniem typowym, jeżeli można je rozwiązać albo przez podstawienie danych szczegółowych do poprzednio rozwiązywanego zadania ogólnego, albo przez *naśladowanie* krok po kroku, bez jakiejkolwiek oryginalności, jakiegoś dobrze znanego *przykładu*. (...) Przykład typowy, jest to przykład o niewielkim zakresie poznawczym, ilustruje on pewną izolowaną regułę dając przykład jej zastosowania i nic ponad to" (G. Polya, 1964, str. 243; 1975, str. 297; podkreślenie moje).

A.Z. Krygowska uważa, że: „Tradycyjne zadania matematyczne cechują się najczęściej tym, że są *zamknięte ze względu na dane* i że poprawne *rozwiązanie jest jednoznaczne*. Dane są ściśle określone, podaje się ich tyle i tylko tyle, ile ich potrzeba do rozwiązania, pytanie jest tak sformułowane, że uczeń nie ma wątpliwości co do tego, że odpowiedź jest jednoznaczna. (...) Tematy standardowych zadań matematycznych zawierają typowe polecenia i typowe pytania lub tylko polecenia lub tylko pytania" (A.Z. Krygowska, 1977, t. 3, str. 30; podkreślenie moje).

Zbierając cytowane wyżej charakterystyki zadań typowych (standardowych, tradycyjnych) wyróżniłam trzy aspekty, ze względu na które dane zadanie może być uznane za typowe lub nietypowe. Zadanie może być typowe ze względu na jeden aspekt, a nietypowe ze względu na drugi. *Zadanie* może być *typowe* ze względu na:

(a) *treści matematyczne*, gdy są one bezpośrednio związane z wymaganymi przez program wiadomościami i umiejętnościami,

(b) *schematyczność rozwiązania*, gdy uczeń może rozwiązać zadanie przez bezpośrednie zastosowanie znanego mu schematu postępowania,

(c) *strukturę treści zadania*, gdy danych jest dokładnie tyle, ile potrzeba do rozwiązania zadania; polecenie, pytanie jest jednoznacznie sformułowane; możliwe jest dokładnie jedno rozwiązanie (wynik).

Częste rozwiązywanie zadań nietypowych ze względu na aspekt (a) lub (b) może spowodować uznanie ich za typowe, natomiast typowość lub nietypowość ze względu na aspekt (c) raczej nie zależy od

częstotliwości rozwiązywania (mogą być przyjmowane dodatkowe konwencje precyzujące jednoznaczny sposób rozumienia zadania).

W literaturze dydaktycznej (np. Z. Semadeni (1981), G. Treliński (1980)) omawia się zadania nietypowe ze względu na strukturę treści. Wskazuje się tam, że mogą być trzy rodzaje zadań nietypowych ze względu na dane:

(a) zadania z *nadmiarem danych;* gdy niektóre dane lub związki są zbędne do znalezienia rozwiązania, nie wykorzystuje się ich w rozwiązaniu, można je wymienić na inne, a nie zmieni się wynik, albo można je też wysnuć z pozostałych danych,

(b) zadania z *niewystarczającą liczbą danych*, gdy brakuje danych (deficyt danych), i nie można jednoznacznie wyznaczyć szukanego obiektu,

(c) zadania ze *sprzecznymi danymi*, jeśli poszczególne informacje nie dadzą się pogodzić ze sobą, gdy nie można w ogóle wyznaczyć szukanego obiektu.

Subiektywne ocenianie przez ucznia typowości zadania ze względu na dane może być różne od stanu faktycznego. Na przykład, w niektórych zadaniach można wyznaczyć kilka obiektów spełniających warunki poprawnego rozwiązania zadania i rozwiązanie zadania polega na podaniu wszystkich takich obiektów (dotyczy to nie tylko zadań z nietypową strukturą treści). Takie zadania mogą być przez uczniów oceniane jako nietypowe, gdyż na ogół spotykają się oni z zadaniami, w których istnieje dokładnie jeden obiekt spełniający warunek poprawnej odpowiedzi.

Wśród zadań nietypowych ze względu na nieschematyczność rozwiązania, na strukturę treści zadania, przeznaczonych już dla klas początkowych, ważną rolę odgrywają zadania wprowadzające ucznia w różne elementy aktywności umysłowej, takie jak: porównywanie, analogia, dostrzeganie prawidłowości, rozumowanie indukcyjne i uogólnianie. Zadania takie przygotowują ucznia do posługiwania się w rozwiązywaniu zadań jedną z podstawowych technik heurystycznych, jaką jest dostrzeganie i stosowanie analogii. Przykłady tego typu zadań można znaleźć w podręczniku matematyki dla klasy czwartej pod redakcją S. Turnaua (1980, str. 27) i w książkach G. Polyi (1964, 1975), i wielu innych.

Wśród zadań podobnych pod względem metody rozwiązania szczególne miejsce zajmują zadania *izomorficzne*, mające wspólny typ ma-

tematycznej struktury, choć mogą być odległe fabułą, treścią, rodzajem lub ilością obiektów w nich występujących.

Terminu „zadania izomorficzne" używa H. Freudenthal, ilustrując go najpierw przykładami zadań mających ten sam model matematyczny:

„(1) Z miasta *A* do miasta *B* prowadzą trzy drogi, z miasta *B* do miasta *C* - dwie drogi. Na ile sposobów można pojechać z miasta *A* do miasta *C* przejeżdżając przez miasto *B*?

(2) Są trzy domy i dwa garaże, z każdego domu prowadzi droga do każdego garażu. Ile jest wszystkich dróg?

(3) Masz trzy swetry i dwie pary spodni. W ciągu ilu dni możesz się inaczej ubrać?" (H. Freudenthal, 1978, str. 196-199).

W terminologii używanej przez H. Freudenthala w cytowanej pracy zadanie (1) jest *zadaniem paradygmatycznym* do zadań (2) i (3) oraz innych zadań izomorficznych. Rozwiązanie wszystkich przedstawionych wyżej zadań polega na wyznaczeniu mocy odpowiednich iloczynów kartezjańskich, które można przedstawić w tej samej tabelce kartezjańskiej. H. Freudenthal stwierdza dalej, że nowe zadania, które otrzymalibyśmy zamieniając w tych zadaniach dane liczbowe 2 i 3 innymi liczbami, też byłyby izomorficzne do zadania (1). Zadania te miałyby już różne modele, będące nadal modelami tego samego typu matematycznej struktury.

W. Mnich proponuje nazywać dwa zadania *izomorficznymi w wąskim sensie*, gdy w ich rozwiązywaniu interweniują izomorficzne struktury matematyczne (ta sama struktura matematyczna), a *izomorficznymi*, gdy w ich rozwiązywaniu interweniuje ten sam rodzaj matematycznej struktury (W. Mnich, 1980, str. 56-58).

Posługiwanie się ucznia schematami graficznymi przy przedstawieniu treści zadania lub jego rozwiązania może mu ułatwić dostrzeżenie podobieństwa izomorfizmu poszczególnych zadań. Do schematów graficznych używanych w etapie pośrednim między myśleniem konkretnym a myśleniem abstrakcyjnym, jakie występuje u uczniów klasy czwartej, należą *reprezentacje ideograficzne* (ikoniczne w sensie J.S. Brunera), czyli rysunki schematyczne, uproszczone, stylizowane, zawsze jednak odzwierciedlające jakieś istotne cechy rozpatrywanych pojęć i sytuacji (Z. Semadeni, 1981, str. 72; Z. Putkiewicz, 1962, str. 15). Do tych schematów graficznych należą: punkty, pętle, tabelki, drogi, drzewa, strzałki. W teorii rozwoju J.S. Brunera (1978, str. 530-531) reprezentacja w postaci obrazowej, zwana

reprezentacją ikoniczną, następuje po reprezentacji opartej na działaniu, zwanej reprezentacją enaktywną, a poprzedza reprezentację symboliczną opartą na słowach czy innych symbolach. Reprezentacja ikoniczna jest pewnym uogólnieniem konkretnej sytuacji i krokiem naprzód w kierunku formalnej matematyzacji, pozwala uprościć sytuację; właściwie wykorzystana pozwala pominąć informacje nieistotne do rozwiązania zadania (problemu), a skoncentrować się na tym, co jest istotne; ułatwia dziecku rozumowanie i może zastąpić wykonanie podobnych czynności na materialnych przedmiotach.

Behawioralno-poznawcze postawy uczniów wobec zadań matematycznych przejawiają się w metodach ich postępowania w toku rozwiązywania tych zadań.

W dalszym ciągu ograniczam się więc do opisu sposobów postępowania uczniów wybranych klas czwartych podczas rozwiązywania zadań przy uwzględnieniu trzech aspektów tych zadań: treści matematycznych, struktury treści zadania oraz schematyczności rozwiązania z zaznaczeniem typowości lub nietypowości zadań ze względu na te aspekty.

Nie podejmuję się wyodrębnienia zadań stanowiących „reprezentatywną próbkę" zadań rozwiązywanych w klasie czwartej. W zestawach zadań wykorzystanych w badaniach opisanych w tej pracy, w większości umieściłam zadania nietypowe ze względu na wymienione przeze mnie aspekty, których z pewnością do takiej „reprezentatywnej próbki" nie można zaliczyć. Taki dobór zadań może nasuwać wątpliwość, że metody postępowania uczniów w procesie rozwiązywania tych zadań będą zupełnie odmienne niż w przypadku zadań typowych.

Obserwowałam tych samych uczniów rozwiązujących zadania typowe i nietypowe. Zewnętrzne reakcje uczniów bardzo dobrych na zadania nietypowe są często wyraźnie inne niż na zadania typowe. Uczniowie ci zadania typowe rozwiązują na ogół szybko, sprawnie, stosując dobrze opanowany sposób postępowania; proces analizy treści, poszukiwanie sposobu rozwiązania zadania przebiega błyskawicznie i od razu pojawia się prawidłowe rozwiązanie. Przy zadaniach nietypowych bardzo dobrzy uczniowie także miewali trudności, wypisywali czasem nonsensy, według opinii ich nauczycielek, nietypowe dla siebie. „Nonsensowne" zachowanie ucznia w przypadku danego nietypowego zadania było nieraz próbą zastosowania tego schematu postę-

powania, który w przypadku zadań typowych był wielokrotnie skuteczny i nagradzany dobrą oceną. Gdy bardzo dobry uczeń nie umiał rozwiązać zadania, to była to może sytuacja nietypowa, ale mimo to ujawniał on typowy dla siebie sposób postępowania, a przecież o to chodziło. Uczniowie przeciętni lub słabsi, którzy przy zadaniach nietypowych mają trudności, popełniają błędy, wycofują się z nich - zachowują się podobnie jak przy rozwiązywaniu zadań typowych. Zdarzało się, że ci słabsi uczniowie przy rozwiązywaniu zadań nietypowych odpowiadali nadspodziewanie dobrze, a więc „nietypowo" dla siebie. Nadspodziewanie dobra odpowiedź słabego ucznia mogła być nie tyle objawem „zwyżki formy", co sukcesem nieskutecznego na ogół, wobec rozległych braków w opanowaniu treści programowych, sposobu postępowania. Tym sposobem postępowania może być odwoływanie się do wyobrażenia konkretnych, życiowych sytuacji.

Ocena „typowości" lub „nietypowości" zachowania się ucznia w przypadku danego nietypowego zadania w opinii nauczycielek wiąże się prawdopodobnie z tym, że przez pryzmat zadań-ćwiczeń bezpośrednio sprawdzających opanowanie treści programowych oceniają one umiejętność rozwiązywania przez uczniów zadań matematycznych w ogóle. Tymczasem zadania nietypowe mogą sprzyjać ujawnieniu także takich ustosunkowań, metod postępowania uczniów, które są różne od wyuczonych i odtwarzanych mechanicznie.

5. OPIS METOD POSTĘPOWANIA UCZNIA W PROCESIE ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ MATEMATYCZNYCH

W pracach psychologów można znaleźć opisy postępowania ucznia rozwiązującego proste zadanie matematyczne, które są wykorzystywane do charakteryzacji struktury jego myślenia. Wyróżnia się trzy składniki struktury czynności myślenia (J. Kozielecki, 1978, str. 356):

(1) *informacje* o świecie, które są materiałem myślenia; informacje są tym, co jest przetwarzane w myśleniu,

(2) *operacje*, czyli elementarne transformacje umysłowe, za pomocą których przetwarzamy materiał myślenia,

(3) *reguły* (metody, taktyki, strategie), czyli to, co wpływa

na uporządkowanie kolejnych operacji; dzięki regułom łańcuch operacji ma prawidłowy charakter.

W tej terminologii, w opisie postępowania ucznia rozwiązującego proste zadanie matematyczne, zwraca się uwagę na to, jakie informacje wykorzystuje, jakie operacje na nich wykonuje, według jakich zasad, reguł postępuje.

Psychologowie różnie klasyfikują operacje umysłowe. Na przykład S.L. Rubinsztejn i A. Smirnow wyróżniają dwie operacje podstawowe: analizę i syntezę, oraz trzy pochodne: porównywanie, abstrahowanie i uogólnianie. Psychologowie konstruujący programy symulujące myślenie, A. Newell i H. Simon twierdzą, że istnieje dużo liczniejszy zbiór operacji, wymieniając m.in.: zastępowanie, sprawdzanie, poszukiwanie, odrzucanie, kombinowanie, wybieranie, badanie. D.W. Berlyne, J. Piaget, A. Szemińska, nie podejmując próby wyliczenia wszystkich rodzajów operacji, charakteryzują prawa rządzące nimi, eksponując przede wszystkim odwracalność operacji. Wyróżnia się dwa podstawowe typy reguł sterujących operacjami umysłowymi: reguły algorytmiczne (algorytmy) oraz reguły heurystyczne (heurystyki). Reguły algorytmiczne mają zastosowanie do pewnej ograniczonej klasy zadań, są dobrze określone i niezawodne; reguły heurystyczne, ogólne bądź szczegółowe, mają zastosowanie w szerokiej klasie zadań, są mniej określone niż algorytmy, są zawodne.

Do diagnozy postawy ucznia w jej aspekcie behawioralno-poznawczym ważny jest opis reguł, którymi uczeń się kieruje, opis metod postępowania, które sterują jego konkretnymi czynnościami w rozwiązywaniu różnych zadań. W literaturze dydaktycznej można znaleźć opisy postulowanych metod postępowania, które - jak twierdzą ich autorzy - powinien stosować uczeń, jeśli chce skutecznie rozwiązywać zadania. Są to w terminologii J. Rudniańskiego modele metod. Jedną z zasadniczych różnic między modelem metody a metodą jest to, że skuteczność rzeczywista metody jest stopniowalna, podczas gdy model metody postuluje skuteczność całkowitą (J. Rudniański, 1967, str. 13).

Modele metod postępowania ucznia w procesie rozwiązywania zadań są najczęściej przedstawiane w postaci wskazówek heurystycznych pogrupowanych w kilku etapach, fazach pracy nad zadaniem.

G. Polya (1964) systematyzując wskazówki heurystyczne wyróżnia cztery fazy w rozwiązywaniu zadania:

(1) zrozumienie zadania - co jest niewiadome? co jest dane? jaki jest warunek?

(2) układanie planu - pomysł, wykorzystanie zadania analogicznego, niekiedy przeformułowanie zadania, rozwiązanie zadania analogicznego prostszego;

(3) wykonanie planu - wykonanie i sprawdzenie kolejnych kroków, zapis rozwiązania;

(4) „rzut oka wstecz" - sprawdzenie wyniku, uzasadnienie rozwiązania; czy wynik można otrzymać w inny sposób? czy wynik lub metodę można wykorzystać do innego zadania?

Niemiecki dydaktyk E. Wittmann (1974) wyróżnia, dla ćwiczenia lub prostszego zadania, które jest elementem ciągu matematycznych problemów „tworzących", następujące fazy pracy ucznia:

(1) zrozumienie zadania - objaśnienie zadania, ustalenie danych informacji, sporządzenie szkicu sytuacji, jasne sformułowanie celu,

(2) znalezienie rozwiązania - pamiętanie ważnych informacji, przetworzenie ich, znajdowanie potrzebnych reguł,

(3) sformułowanie rozwiązania - sprawdzenie rozwiązania,

(4) dyskusja przebiegu rozwiązania - stosowane reguły, kontekst z wcześniejszymi wiadomościami,

(5) przejście do kolejnego zadania w ciągu matematycznych problemów „tworzących".

Radziecki dydaktyk matematyki P.M. Erdniew (1978) wyróżnia cztery kolejne, wzajemnie ze sobą powiązane, etapy pracy ucznia nad zadaniem matematycznym:

(1) ułożenie matematycznego działania,

(2) wykonanie działania,

(3) sprawdzenie wyniku (kontrola),

(4) przejście do pokrewnego, lecz bardziej złożonego zadania.

W klasyfikacji P.M. Erdniewa, podobnie jak u E. Wittmanna, zadanie pojawia się w pewnym ciągu zadań.

W opracowaniu metodycznym pod redakcją J. Górskiej, *Z doświadczeń nauczycieli matematyki* (1961), nauczyciele J. Sztajer oraz

A. Westwalewicz wyróżniają dla zadań tekstowych trzy etapy pracy ucznia przy ich rozwiązywaniu:

(1) zapoznanie się z treścią zadania - analiza językowa treści zadania, zapis treści zadania (rysunek, pomoc poglądowa), rozbiór zadania dokonany metodą analityczną lub syntetyczną,

(2) rozwiązywanie zadania - plan rozwiązywania zadania, rozwiązywanie zadania, wzór rozwiązania,

(3) sprawdzenie wyniku - w związku z warunkami występującymi w treści zadania.

Ostatnią fazę pracy ucznia nad zadaniem w trzech pierwszych klasyfikacjach można by krótko określić terminem „rzut oka wstecz" lub „rzut oka w przód". Celem tej fazy jest „przedłużenie" rozwiązywania zadania przez ucznia. W polskiej praktyce szkolnej jest to ciągle raczej postulowana niż realnie występująca faza pracy ucznia nad zadaniem. Cytowana tu klasyfikacja „z doświadczeń nauczycieli" ogranicza ostatnią fazę pracy ucznia nad zadaniem do sprawdzenia wyniku rozwiązania, nie sugerując dyskusji nad nim, przedłużenia rozwiązania.

W rzeczywistych sposobach rozwiązywania zadania poszczególne fazy przeplatają się. Proponuję nieco inne spojrzenie na etapy pracy ucznia nad zadaniem.

Można wyróżnić listę problemów, do których uczeń na ogół musi się ustosunkować w pracy nad zadaniem matematycznym:

(1) *ustalenie danych, szukanych i warunku zadania,*

(2) *dobór środków rozwiązania* - chodzi o środki wykorzystywane w znajdowaniu i zapisywaniu rozwiązania, np. schematy graficzne, pomocnicze obliczenia,

(3) *rozważenie różnych możliwości* - z jednej strony chodzi o rozpatrzenie wszystkich przypadków, z drugiej zaś o różnorodność podejść do rozwiązania,

(4) *dobór schematu rozwiązania zadania* - np. dostrzeżenie, wykorzystanie schematu rozwiązania analogicznego zadania,

(5) *dobór środków kontroli rozwiązania.*

W celu diagnozy postawy uczniów wobec zadań matematycznych opisuję ustosunkowania, metody postępowania uczniów wobec tych problemów w pracy nad wybranymi zadaniami matematycznymi.

6. BADANIE ASPEKTU BEHAWIORALNO-POZNAWCZEGO POSTAWY UCZNIÓW WOBEC ZADAŃ MATEMATYCZNYCH NA WYBRANYCH PRZYKŁADACH

Prezentowane tu badania prowadziłam od września 1982 do października 1983 roku. Badaniami objęłam ogółem 76 uczniów trzech klas czwartych: klasy IVa i IVb ze Szkoły Podstawowej nr 33 oraz klasy IVa ze Szkoły Podstawowej nr 35 w Krakowie. Są to Szkoły Laboratoria Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie. Pisząc w tym artykule o badanych uczniach, myślę o uczniach wymienionych wyżej klas czwartych, oznaczając je krótko, na przykład klasę IV szkoły 33 oznaczam IVa33. Klasy te ze względu na uczniów nie były specjalnie dobierane; jedynymi warunkami, od których uzależniono ich wybór, były zgoda nauczycielki i dyrekcji szkoły.

6.1. Charakterystyka badanych uczniów

Wiek badanych uczniów w momencie rozpoczynania badań wahał się od 9 lat i 7 miesięcy do 11 lat i 10 miesięcy - różnica wieku wiąże się z tym, że czterech uczniów rozpoczęło naukę z rocznym wyprzedzeniem, a pięciu powtarzało już jakąś klasę. Większość uczniów w momencie rozpoczynania badań miała ukończone 10 lat. Okres badań dla większości uczniów przypadał więc na jedenasty i początek dwunastego roku życia.

Postawa ucznia wobec zadań matematycznych jest składnikiem całego systemu jego postaw. Właściwa diagnoza postawy ucznia wobec zadań wymaga więc porównania tej postawy z innymi postawami. Chodzić tu może na przykład o postawy wobec matematyki, wobec szkoły, nauczyciela, uczenia się itp. Opisywanie wszystkich tych postaw wykracza poza ramy podjętych badań. W celu jedynie wstępnej orientacji w tych postawach zebrałam opinie nauczycielek matematyki i wychowawczyń badanych uczniów, przeglądnęłam dzienniki lekcyjne. Przy zbieraniu opinii nauczycielek, wyrażanych w języku funkcjonujących w praktyce szkolnej określeń, posłużyłam się ankietą. Pomijam te dane, ponieważ w artykule z nich nie korzystam, wyraźnie przedstawiam tylko tabelę ocen z matematyki. Natomiast przytoczę opinię nauczycielek, które uznały, że klasy te raczej nie wyróżniały się spośród klas czwartych, z jakimi dotychczas pracowały.

T a b e l a 1. Zestawienie ocen z matematyki: w klasie III(1.), na półrocze klasy IV(2.) i po klasie IV(3.)

klasy:	IVa33(28)			IVb33(28)			IVa35(20)			Razem(76)		
	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
Oceny:												
bardzo dobry	11	4	7	10	11	5	9	7	8	30	22	20
dobry	10	12	12	10	8	14	7	5	5	27	25	31
dostateczny	7	9	8	8	6	8	4	8	7	19	23	23
niedostateczny	0	3	1	0	3	1	0	0	0	0	6	2
										76	76	76

6.2. Metoda, narzędzia i organizacja badań

6.2.1. *Metoda badań.* Celem badania postawy w jej aspekcie behawioralno-poznawczym jest opisanie ustosunkowań, metod postępowania uczniów wobec wyróżnionych przeze mnie w p. 5 problemów, które mogą pojawić się w pracy ucznia podczas rozwiązywania wybranych zadań matematycznych. Z tym celem związane są dwa zadania. Zadanie pierwsze polega na opisaniu, jakie są metody postępowania uczniów. Zadanie drugie polega na określeniu stopnia stałości stosowania tych metod, czyli na stwierdzeniu, czy ustosunkowania związane z tymi metodami powtarzają się wobec różnych zadań.

Z tak rozumianymi zadaniami powiązałam metody badań.

Podstawową metodą jest *analiza pisemnych prac uczniów*, którzy w naturalnych warunkach w klasie samodzielnie rozwiązywali specjalnie dobrane przeze mnie zestawy zadań matematycznych. Uzupełnieniem tej metody była *obserwacja ukierunkowana na uczniów zadających pytania* w trakcie rozwiązywania zadań; w tym celu nagrałam za pomocą magnetofonu pytania uczniów. Po wstępnej analizie prac, z niektórymi uczniami przeprowadzałam *rozmowy indywidualne* (wywiady) dotyczące ich rozwiązań. Do drugiego zestawu zadań dołączyłam *ankietę* badając, jakie zadania uczniowie uznają za podobne.

Materiały zebrane przy użyciu tych wspomagających metod wykorzystywałam przy interpretacji wyników pisemnych prac uczniów (czystopisów i brudnopisów).

Analiza pisemnych prac przebiegała w kilku etapach.

Rozpoczynałam od zaznaczenia wszystkich błędów i usterek, następnie po ocenie rozwiązań w kategoriach: poprawne, błędne, brak, niepełne - analizowałam je, starając się ustalić metody postępowania uczniów wobec wyróżnionych przeze mnie w p. 5 problemów. Na tym etapie sporządzałam zestawienie wyników dla poszczególnych uczniów. Wyniki te były podstawą pewnych zbiorczych zestawień, które omawiam w dalszym ciągu.

6.2.2. *Narzędzia i organizacja badań.* Do badania postawy uczniów w jej aspekcie behawioralno-poznawczym wykorzystałam specjalnie dobrane zestawy zadań, a do niektórych z nich dołączyłam pytania. Tu przedstawię tylko dwa spośród tych zestawów zadań.

Z e s t a w I.

C z ę ś ć A

1. Jak może kasjerka w sklepie wypłacić 100 złotych pięcioma monetami? (monety w Polsce: 50 zł, 20 zł, 10 zł, 5 zł, 2 zł, 1 zł, 50 gr, 20 gr, 10 gr).

2. Wojtek wysłał list do wujka, Ania wysłała list do wujka i Tomek wysłał list do wujka. Ile osób otrzymało listy?

3. Ola ma dla lalki trzy spódnice: zieloną, granatową, czerwoną oraz dwie bluzki: białą i niebieską. Jakie są wszystkie sposoby ubrania lalki?

4. Żołnierz maszeruje z prędkością 6 km na godzinę. Z jaką prędkością będzie maszerowało 100 żołnierzy?

5. Chcę napisać liczbę trzycyfrową za pomocą cyfr 1 i 2. Znajdź wszystkie takie liczby.

C z ę ś ć B

6. Ułóż zadanie związane z tą sytuacją: Masz 200 zł i wiesz, że:



Rys. 1

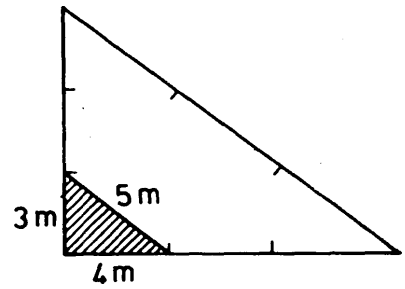
7. Oblicz: (3+5)·30 = i ułóż dwa zadania z treścią, których rozwiązaniem byłoby to obliczenie.

Z e s t a w II

C z ę ś ć A

1. Oblicz sumę cyfr liczby 345 i zwiększ ją 35 razy.

2. Każdy bok zakreskowanego na tym rysunku (rys. 2) ogródka zwiększono 3 razy. Ile metrów siatki potrzeba teraz do ogrodzenia ogródka?



Rys. 2

3. Gospodyni sprzedała 3 kg śliwek, potem jeszcze 4 kg, a resztę 5 kg kupiła jedna pani na przetwory. Kilogram śliwek kosztował 35 zł. Ile pieniędzy otrzymała gospodyni za śliwki?

4. Rafał czytał interesującą książkę - jednego dnia przez 3 godziny, drugiego 4 godziny, a w wolną sobotę czytał przez 5 godzin. Rafał średnio na godzinę czyta 35 stron. Ile stron mogła mieć książka, którą przeczytał?

5. Z 10 kg śliwek mama zrobiła 8 litrowych słoików powideł. Zużyła do tego 3 kg cukru. Ile średnio kosztuje mamę słoik powideł, jeżeli kilogram śliwek kosztował 35 zł, a kilogram cukru 46 złotych?

6. Oblicz: (10·35+3·46):8.

7. Agata na tydzień pożyczyła książkę *Alicja w krainie czarów*, która ma 145 stron. W poniedziałek przeczytała 22 strony, we wtorek 17, a przez pozostałe pięć dni tygodnia czytała po 20 stron. Czy zdążyła przeczytać książkę na poniedziałek rano?

8. Mama kupiła 7 kg śliwek na przetwory. Kilogram śliwek kosztował 60 zł. Ile mama zapłaciła za śliwki?

C z ę ś ć B - pytania i polecenia

1. Napisz numery zadań, które według ciebie są podobne, napisz obok, dlaczego są podobne.

Wyniki części B zestawu I są bardzo słabe. W odpowiedzi na polecenie zadania 6 tylko 17 uczniów (na 67) ułożyło zadania bez usterek, w zadaniu 7 - było tylko 12 takich uczniów. Polecenia obu zadań 6 i 7 poprawnie wykonało tylko 4 uczniów.

Błędy popełniane przez uczniów ujawniają ich metody postępowania przy ustaleniu danych, szukanych oraz warunku zadania.

Jednym z najczęściej występujących nieporozumień było *niewykorzystanie wszystkich informacji* podanych w zadaniach 6 i 7, często łączone z ich zmienianiem, z *wprowadzaniem nowych danych*. Oto przykłady:

W zadaniu 6:

(a) „Olek kupił dla siebie i siostry lalkę za 50 zł, długopis za 40 zł, notes za 20 zł i auto za 90 zł, razem wydał 200 zł". - Andrzej (38).

(Zmieniona została tutaj cena długopisu i notesu w stosunku do danych zadania 6, wprowadzono nową daną - cenę samochodu. Uczeń napisał zdanie, a nie zadanie, brak jest pytania, nie wiadomo co jest szukane.)

W zadaniu 7:

(b) „Szkoła zakupiła 4 stołki po 60 zł. Oblicz, ile kosztowały stołki?" - Artur (11).

(Uczeń miał obliczyć, ile to jest $(3+5)\cdot 30$, i ułożyć zadanie, którego rozwiązaniem byłoby to obliczenie. W ułożonym zadaniu tylko wynik jest równy liczbie otrzymanej z obliczeń.)

Takie nieporozumienia wystąpiły w pracach 54 uczniów (81%); we wszystkich zadaniach ułożonych przez siebie nieporozumienia tego rodzaju popełniło 26 uczniów w zadaniu 6, 24 uczniów w zadaniu 7, oraz 10 uczniów w obu zadaniach równocześnie.

Błędne ustalenia warunku dostrzegłam w 32 zadaniach ułożonych przez uczniów w odpowiedzi na polecenie 7. Ogółem w pracach 31 uczniów (46%) *brakuje pytań* do ułożonych zadań. We wszystkich zadaniach ułożonych przez siebie ten błąd popełniło 16 uczniów w zadaniu 6, 22 w zadaniu 7 oraz 11 w obu zadaniach równocześnie. Przykłady:

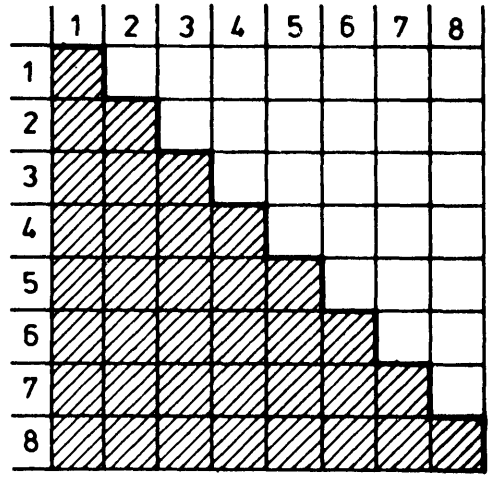
(c) „W sklepie były 3 misie i 5 piłek. Po tygodniu dowieziono 30 skakanek. $(3+5)\cdot 30 = 240$" - Agata (1).

(Agata (1) błędnie ustaliła związki między danymi; cytowane przez nią rozwiązanie nie jest poprawne. Brak pytania.)

2. W tabelce obok wpisano numery zadań tego zestawu. Wstaw znak X w kratkę oznaczoną numerami zadań podobnych.

3. Które zadania można podobnie rozwiązać?

4. Podaj numery zadań, których rozwiązanie jest równocześnie rozwiązaniem innego zadania z tego zestawu.



Rys. 3

Zadania zestawów (lub ich pierwowzory) zaczerpnęłam z podręczników matematyki klas III-IV lub z opracowań metodycznych do tego poziomu nauczania, powinny to być więc zadania dostosowane do poziomu uczniów klasy czwartej. Nie oznacza to, że wszystkie te zadania są typowe ze względu na schematyczność rozwiązania, treści matematyczne lub strukturę treści zadania. Właśnie zestaw I utworzony jest z zadań, które nie są typowe, natomiast w zestawie II wykorzystałam zadania raczej typowe, a wśród nich zadania podobne w treści, a także izomorficzne.

Zestaw I zawiera część A i B. Część A tego zestawu składa się z pięciu zadań - cztery z nich mogą być rozwiązane bez wykonywania rachunków, a rachunki w zadaniu 1 można wykonać w pamięci. Dla wielu uczniów były to zadania nietypowe ze względu na nieschematyczność rozwiązania. Jak się okazuje, część uczniów odczuwa w zadaniu 1 nadmiar danych i niejednoznaczność pytania, a w zadaniu 5 deficyt danych. Deficyt danych, deficyt informacji o związku między danymi a szukanymi, występuje też w zadaniach 2 i 4. W zadaniu 2 nie wiadomo, czy te dzieci miały różnych wujków, czy wysyłały do różnych wujków, czy wszystkie listy dotarły do adresatów (w zadaniu jest mowa o wysyłaniu, a pytanie dotyczy otrzymania listów). W zadaniu 4 nic nie wiadomo o związku danego żołnierza z innymi. Stąd zadania 1, 2, 4 i 5 traktuję jako zadania nietypowe ze względu na strukturę ich treści. Zadania 2 i 3 są nietypowe ze względu na treści matematyczne nie związane bezpośrednio z wymaganiami pro-

gramu. Najczęściej uczniowie w odpowiedzi do zadania podają jakieś liczby - inaczej jest w zadaniach 1 i 3.

W zadaniu 2 oczekiwałam odpowiedzi, że listy mogło otrzymać trzech, dwóch lub tylko jeden wujek (można by, wobec wcześniejszej uwagi, rozszerzyć poprawną odpowiedź o możliwość, że żaden z wujków nie otrzymał listu). W zadaniu 4 uznawałam, że prawidłowym rozwiązaniem jest odpowiedź w rodzaju „nie można określić prędkości", oceniałam też jako poprawne odpowiedzi „6 km/h", gdy uczeń podawał wyjaśnienie typu „żołnierze idą w jednej kolumnie".

W części B zestawu I znajdują się dwa zadania. Uczniowie mają tu sami ułożyć zadania tekstowe o treści dotyczącej zadanych obiektów i częściowo zadanego warunku (w zadaniu 6) lub o dowolnej treści, ale pasującej do danego działania (w zadaniu 7). Z tego typu sytuacjami uczniowie mogli zetknąć się w klasach początkowych, nie tak często jednak, by mogli wypracować sobie odpowiedni schemat postępowania. Uważam te zadania za nietypowe ze względu na nieschematyczność rozwiązania.

Zestaw II zawiera części A i B. Część A składa się z ośmiu zadań typowych ze względu na treści matematyczne, schematyczność rozwiązania i strukturę treści. Zadania 1, 3 i 4 są *izomorficzne w wąskim sensie* (zob. p. 4) - wszystkie one mają wspólny model matematyczny wyrażający się działaniem $(3+4+5)\cdot 35$. Podobnie, izomorficzne w wąskim sensie są zadania 5 i 6, ich wspólny model wyraża się działaniem $(10\cdot 35+3\cdot 46):8$. Zadania 1, 2, 3, 4 są *izomorficzne*, w ich rozwiązaniu stosuje się prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania opisane wyrażeniem $(a+b+c)\cdot d$. Również pary zadań nieizomorficznych zostały tak dobrane, by wystąpiły różnego typu podobieństwa, analogie; między nimi:

(1) *podobne* (te same) *obiekty:* śliwki (w zadaniach 3, 5 i 8), strony książek (w zadaniach 4 i 7), mama (w zadaniach 5 i 8);

(2) *podobne pytania:* o koszt śliwek (w zadaniach 3 i 8); te same polecenia: „oblicz" (w zadaniach 1 i 6);

(3) *ten sam liczbowy wynik* - 420 (w zadaniach 1, 3, 4 i 8).

Część B zestawu II składa się z czterech pytań i poleceń dla uczniów. W dwóch pierwszych chodzi o wskazanie wszystkich podobieństw między zadaniami części A, w pozostałych dwóch chodzi o wskazanie zadań izomorficznych.

W tabeli 3 zestawiłam liczby uczniów obecnych podczas rozwiązywania poszczególnych zestawów zadań. Nieobecność uczniów podczas badań utrudnia opracowanie rezultatów badań, niestety ze względów organizacyjnych na ogół nie mogłam już uzupełnić braków spowodowanych nieobecnością części uczniów.

T a b e l a 2. Czas trwania i termin przeprowadzenia badań

numer zestawu	czas trwania	termin
I	90 minut	październik 1982 r.
II	90 minut	listopad 1982 r.

T a b e l a 3. Frekwencja uczniów w badaniach

Klasy i ich stan:	IVa33(28)	IVb33(28)	IVa35(20)	Razem(76)
Zestaw I	26	22	19	67
Zestaw II	26	26	19	71

Organizacja pracy uczniów w klasie podczas rozwiązywania zadań zestawów wyglądała w następujący sposób:

Na początku lekcji informowano uczniów, że:

(a) każdy otrzyma teksty zadań i dwa arkusze czystego papieru z przeznaczeniem na czystopis i brudnopis,

(b) należy zadania rozwiązywać samodzielnie,

(c) potrzebne obliczenia, inne zapisy, należy wykonywać tylko na otrzymanych kartkach,

(d) w przypadku trudności można podejść do nauczycielki i zapytać, ale w taki sposób, by nie utrudniać pracy innym uczniom (rozmowy z nauczycielką nagrywano na taśmie magnetofonowej).

W trakcie trwania badań przestrzegano tych ustaleń.

Wyniki każdego zestawu były omawiane z uczniami, przy czym starałam się utrzymać terminy przedstawiania i omawiania wyników sprawdzianów praktykowane przez nauczycielki tych klas. W trakcie omawiania lub po nim rozmawiałam z niektórymi uczniami na temat ich rozwiązań; rozmowy te nagrywałam na taśmie magnetofonowej.

Ponieważ uczniowie pytali: „Czy rozwiązujemy zadania na oceny?", to w porozumieniu z nauczycielkami ustaliłam, że będzie zwracana uwaga na sposób rozwiązania, i że za poprawne i ciekawe rozwiązania uczniowie mogą (jeśli zechcą) uzyskać oceny z wpisaniem do dziennika, oceny niedostateczne nie będą odnotowywane w dzienniku.

6.3. Wyniki badań i ich interpretacja

Przy prezentowaniu wyników obu zestawów zadań stosuję następujący schemat.

Rozpoczynam od przedstawienia zbiorczych wyników, podając na przykład, ilu uczniów poprawnie rozwiązało poszczególne zadania zestawu. Staram się od razu skomentować niektóre z tych wyników.

Następnie opisuję ustosunkowania i metody postępowania uczniów przy ustalaniu danych, szukanych oraz warunku rozwiązywanych przez nich zadań. Opis ten w przypadku różnych zadań może być bardziej lub mniej obszerny - zależy to od tego, czy zadania te sprzyjały ujawnieniu się ustosunkowań i metod postępowania uczniów w tym zakresie. Opis ten w dużej mierze opiera się na interpretacji tego, co uczeń napisał w brudnopisie i czystopisie, o co pytał przy rozwiązywaniu zadania. Przy bardziej jednoznacznej interpretacji podawałam liczby ilustrujące częstość zaobserwowanego ustosunkowania lub metody postępowania; przy mniej jednoznacznej interpretacji posługiwałam się określeniami w rodzaju „niektórzy uczniowie". W opisie tym często cytuję imiona dzieci (wraz z numerem). Dawało to możliwość skonfrontowania postępowania danego ucznia z pewną jego charakterystyką zawartą w innej części badań (których w tym artykule nie przedstawiam). Z prac wielu uczniów, przy braku pytań z ich strony, nie potrafiłam odczytać ustosunkowań, metod postępowania przy ustalaniu danych, szukanych oraz warunku zadania, stąd opis ten ma na celu ukazanie, jakie ustosunkowania i metody postępowania uczniów wystąpiły, bez dokładniejszej oceny ilościowej częstości ich występowania.

Po opisaniu sposobów ustalania danych, szukanych oraz warunku rozwiązywanych zadań, opisuję - w podobny sposób - postępowanie uczniów przy doborze środków rozwiązania, rozważaniu różnych możliwości, przy doborze schematu rozwiązania oraz przy doborze środków kontroli.

Prezentowanie wyników zestawu kończę sformułowaniem wniosków na temat metod postępowania uczniów, sterujących ich ustosunkowaniami ujawnionymi w trakcie rozwiązywania zadań tego zestawu. Metody postępowania wiążę z wyróżnionymi przeze mnie problemami: ustalenia danych, szukanych oraz warunku zadania, doboru środków rozwiązania, itd.

Przy takim schemacie prezentowania wyników informacje o sposobach rozwiązania jakiegoś konkretnego zadania są rozproszone w kilku miejscach.

6.3.1. *Zestaw* I - *część* A

Dla orientacji, w przedstawionych przez uczniów rozwiązaniach zadań z części A, podam najpierw, ilu uczniów miało rozwiązanie: poprawne - uwzględniono wszystkie możliwości, wskazano wszystkie wyniki spełniające warunek poprawnego rozwiązania, niepełne - wskazano tylko część wyników, co najmniej jeden jest dobry, błędne - nie wskazano żadnego dobrego wyniku.

T a b e l a 4. Procentowe zestawienie wyników części A zestawu I

numer zadania:	1	2	3	4	5
rodzaj rozwiązania:					
poprawne	3	9	58	64	51
niepełne	91	90	30	0	30
błędne	6	1	12	36	19

Słabe wyniki zadań 1 i 2 wymagają komentarza. Pytanie w zadaniu 1 jedynie sugeruje możliwość istnienia różnych wyników, w odróżnieniu od zadań 3 i 5, w których treści wyraźnie wymaga się znalezienia i podania wszystkich wyników. Zgodnie z ogólną konwencją, w odpowiedzi na pytanie „jak można?" trzeba podać lub opisać wszystkie możliwości. Uczeń miał w tym zadaniu dostrzec możliwość różnych odpowiedzi i podać je wszystkie. Prawie 3/4 uczniów poprzestało na podaniu jednego tylko wyniku, co wskazuje na inny sposób odbierania przez nich sensu pytania „jak można?". Niektórzy uczniowie nie podawali innych wyników, mimo że chyba je dostrzegali (pisząc np.

wielokropek), niektórzy zadawali pytanie: „Czy jeden sposób podać, czy różne?". Wobec deficytu danych w zadaniu 2, jego rozwiązanie powinno być wyborem różnych możliwości. To, że większość uczniów (84%) podawała tylko jedną z możliwości, mogło być spowodowane tym, że w typowej sytuacji na pytanie „ile?" podaje się tylko jeden wynik liczbowy.

(1) U s t a l e n i e d a n y c h, s z u k a n y c h o r a z w a r u n k u z a d a n i a.

Pytania niektórych uczniów zadawane podczas rozwiązywania zadania 1: „Czy wszystkie monety muszą być użyte?", „Czy można dopisać inne monety?" oraz zadania 4: „To o prędkość tych żołnierzy chodzi?" - mogą świadczyć o *pobieżnym* czytaniu treści zadania; uczniowie pytali o te informacje, które mogli sami znaleźć w treści zadania.

Pytanie ucznia „Czy wszystkie monety muszą być użyte?" mogło też świadczyć o *chęci wykorzystania wszystkich danych*. Wykorzystanie wszystkich informacji danych w treści zadania było niezbędne do rozwiązania zadań 3 i 5. Dążenie do wykorzystania wszystkich danych było widoczne szczególnie w tych przypadkach, gdy prowadziło do błędnych odpowiedzi. Tak na przykład Ania (43) w rozwiązaniu zadania 1 napisała: „2·50 zł, 5·20 zł, 10·10 zł, 20·5 zł, ..." (W temacie zadania wymagano wypłacenia 100 zł pięcioma monetami. Do tego Ania się nie zastosowała: wypłacała jednym rodzajem monet, i to schematycznie, po kolei). W zadaniu 4 w sumie 21 uczniów (na 67) podało rozwiązanie wykorzystujące obie dane liczbowe 6 i 100, pisząc $6 \cdot 100 = 600$ lub $100:6 = 16\frac{4}{6}$.

Pytania uczniów „Czy można dopisać inne monety?", a w zadaniu 5: „Czy może być zero?" świadczą o chęci *wprowadzenia do treści zadania nowych danych*. Niektórzy uczniowie wprowadzali dodatkowe dane do treści zadań z deficytem danych. W zadaniu 2 w sumie 21 uczniów odpowiedziało, że listy otrzymał tylko jeden wujek, ale tylko niektórzy zaznaczyli, że według nich w tekście zadania jest mowa o tym samym wujku; 35 uczniów odpowiedziało, że listy otrzymały trzy osoby, przyjmując, że dzieci wysyłały listy do różnych wujków. W zadaniu 4 w sumie 43 uczniów podało odpowiedź, że stu żołnierzy maszerować będzie z prędkością 6 km/h przyjmując (wyraźnie lub nie), że żołnierz, którego prędkość jest znana, maszeruje

wśród tych stu, albo że podana prędkość jest średnią prędkością marszu. Także w zadaniu 5 w sumie 8 uczniów, odczytując dane jako niewystarczające, przyjmowało dodatkowe dane: jedną cyfrę (0 lub 3) lub kilka cyfr. W zadaniach 1 i 3, w których nie brakowało danych, także wprowadzono dodatkowe informacje, przyjmując, że: kasjerka wypłaca jednakowymi monetami - Ania (43), stroje lalek mają być kolorystycznie dobrane - 7 uczniów nie podawało w rozwiązaniach zadania 3 strojów zielono-niebieskich, zielono-czerwonych. Pytania uczniów dotyczące zadania 2: „Czy Ania, Tomek i Wojtek są rodzeństwem?", „Czy dzieci pisały do tego samego wujka, czy każde do swojego?" - źle sformułowano. Gdyby nawet udało się rozstrzygnąć czy Ania, Tomek i Wojtek są rodzeństwem, czy każde dziecko pisze do swojego wujka, to i tak dalej nie byłoby wiadomo, do ilu wujków wysłano listy. Pytania te mogą ilustrować trudności uczniów z ustaleniem, których danych brakuje do jednoznacznego rozwiązania zadania.

Uczniowie pytali: czy jedną z danych można wielokrotnie wykorzystywać, na przykład w zadaniu 1: „Czy monety mogą się powtarzać?", w zadaniu 3: „Czy jeśli użyłam raz bluzki, to mogę ją użyć jeszcze raz?", a w zadaniu 5: „Czy może być 111?", „Czy cyfry mogą się powtarzać?", „Czy cyfry mają (muszą) się powtarzać?". Pytania te mogą świadczyć o traktowaniu danych zadania „dosłownie" jako *konkretnych*, pojedynczych, *przedmiotów*, których nie można użyć wielokrotnie. Sądzę, że część uczniów odbierała sytuację opisaną w zadaniu jako realną, życiową, i to wpływało na sposób interpretacji danych informacji. Na przykład w zadaniu 3 niektórzy uczniowie proponowali stroje kolorystycznie dobrane, rozważali też możliwość ubrania lalki tylko w spódnicę lub tylko w bluzkę. W zadaniu 4 uczniowie uzależniali prędkość marszu od trudności i długości trasy oraz zauważali, że w grupie idzie się szybciej. Niektórzy uczniowie przy rozwiązywaniu zadania 5 wyobrażali sobie chyba układanie liczb z użyciem kartoników z cyframi - przyjęcie, że dane są tylko dwa kartoniki powodowało odczucie braku danych.

(2) Dobór środków rozwiązania.

Część uczniów zapisywała „rachunki" nawet wtedy, gdy nie było to potrzebne; świadczą o tym ich pytania: w zadaniu 1 - „Czy trzeba ułożyć równanie?", w zadaniu 2 - „Czy do tego zadania można zrobić działania?", w zadaniu 3 - „Czy pisać obliczenia?", „Czy tu

działaniem mam zrobić?" oraz zapis „pomocniczych obliczeń" przez niektórych uczniów. Oto przykłady:

W z a d a n i u 2 - Agnieszka (68) zapisała: „1 + 1 + 1 = = 3·1 = 3". W rozmowie na pytanie: „co tu obliczałaś?" odpowiedziała: „troje dzieci wysłało po 1 liście to 1+1+1 = 3 i każdy wujek otrzymał po jednym liście 3·1 = 3. Trzech wujków otrzymało listy".

W z a d a n i u 3 - Irek (62) obliczał: „1 zielona + 1 granatowa + 1 czerwona = 3, 1 biała + 1 niebieska = 2, 3 + 2 = 5, 5 - 1 = 4". Irek próbował zapisać liczbowo dane: Ola miała trzy spódnice i dwie bluzki, razem 5 (części garderoby). Odejmowania nie potrafił następnego dnia uzasadnić. Podobnie próby „matematycznego obliczenia" są widoczne u Janka i Kasi: „(1+2)+(1+2)+(1+2) = = 3+3+3 = 9" - Janek (63), „2 · 3 = 6" - Kasia (60).

W z a d a n i u 4 zapisy „100 · 6 = 60" - Marta (67) i „100 : 6 = 16,4" - Marcin (65) ukazują ukierunkowania na wykorzystanie schematu" pomnożyć (podzielić) dane liczbowe" z zadania.

W z a d a n i u 5 pojawiły się zapisy: „2:1 = 1, 1+1+1 = = 3·1, 111" - Joanna (69), „1+2 = 3, 123, 132, 321..." - Andrzej (54). Z Joanną (69) przeprowadziłam następnego dnia po rozwiązaniu zadania rozmowę:

N: Jak z tych obliczeń wywnioskowałaś, że będzie 111?

U: Taka liczba wyjdzie z jedynek jedna.

N: Dlaczego z jedynek?

U: Bo taki wynik otrzymałam z dzielenia 2:1.

N: Ile to jest 2:1?

U: Napisałam i wyszło mi, że będzie jeden, a potem dodałam 1+1+1 = 3 i stąd brałam jedynki do liczby.

N: Czego chciałaś się dowiedzieć dzieląc 2 przez 1?

U: Chciałam 2 podzielić, by mieć trzy cyfry, a potem chodziło mi o sumę cyfr, biorę 1+1+1, to jest 3, a tu 3·1 ... zaznaczyłam, że są trzy jedynki z których napisałam liczbę, suma cyfr jest trzy.

Widać, że uczennica odczuwała brak danych (dane dwie cyfry, a miała napisać liczbę trzycyfrową) stąd potrzeba wyliczenia trzeciej cyfry. Widoczny jest także wpływ zadania, w którym należało znaleźć sumę cyfr liczby trzycyfrowej. Podobnie postępował Andrzej.

Tomek (58) - siedział tuż przy nauczycielce, długo nic nie pisał, a potem podał swoje rozwiązanie zadania 5: „1+1+1 = 3, 2+1 = 3,

3·2 = 6, 2·3 = 6". Następnego dnia Tomek nie potrafił wyjaśnić swojego postępowania. Joanna, Tomek i Andrzej starali się „na siłę" zastosować wyuczony sposób postępowania - „mechanicznie" wykonując obliczenia na liczbach danych w treści zadania. W pracach Joanny i Andrzeja widoczny jest chyba wpływ rozwiązywanych wcześniej zadań; w jednym z nich należało znaleźć liczby trzycyfrowe o zadanej z góry sumie cyfr, w drugim trzeba było wypisać liczby trzycyfrowe z cyfr 1,2,3 używając każdej cyfry tylko raz. Tomek, jak to wynika z innych jeszcze obserwacji, nastawiony jest na podpowiedź lub odpisanie, i jeśli nie ma takiej możliwości, to pisze „cokolwiek" (bo przecież wszyscy coś piszą!).

Próby wykorzystania *środków graficznych* do przedstawienia danych informacji wystąpiły tylko w zadaniu 3. Stroje lalki zastępowano rysunkiem schematycznym, literami, liczbami lub kropkami. Próby te dostrzegłam w brudnopisach ośmiu uczniów rozwiązujących zadanie 3. Tylko jedna uczennica - Kasia (59), posłużyła się schematem graficznym (tabelką) w czystopisie rozwiązania zadania pisząc:

bluzki	spódnice
biała	granatowa
niebieska	zielona
biała	czerwona
niebieska	granatowa
biała	zielona
niebieska	czerwona

Przykłady brudnopisów i czystopisów prac uczniów rozwiązujących zadanie 3:

P r z y k ł a d (1)

Brudnopis pracy Kasi (60) przedstawiono na rysunku 4.

W czystopisie Kasia (60) zapisała:

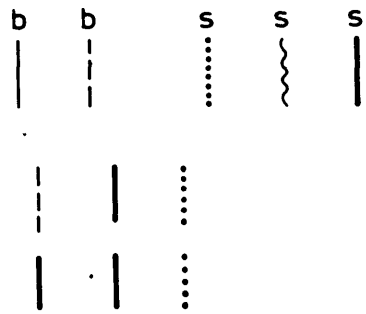
Odp. 2·3 = 6.

Odp. Ola może swoją lalkę ubrać na 6 sposobów: biały-zielony, biały-granatowy, biały-czerwony, niebieski-granatowy, niebieski--zielony, niebieski-czerwony.



Rys. 4

P r z y k ł a d (2)



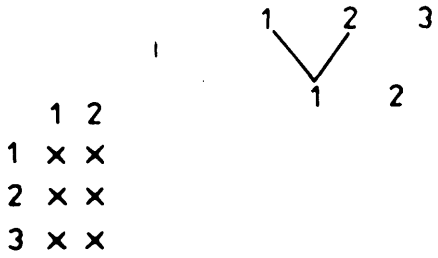
Rys. 5. Brudnopis pracy Tomka (58) (Tomek użył kolorów: — biały, - - niebieski, ... granatowy, ∿∿∿ czerwony, ▬▬ zielony)

W czystopisie Tomek (58) zapisał: Odp. Lalki można ubrać w niebieską spódnicę i niebieską bluzkę, czerwoną spódnicę i białą bluzkę, albo zieloną spódnicę i niebieską bluzkę.

P r z y k ł a d (3)

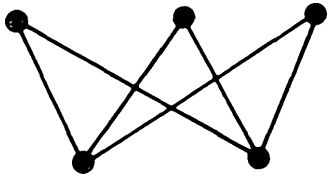
Brudnopis pracy Marcina przedstawiono na rysunku 6.

W czystopisie: Odp. Zielona z białą, zielona z niebieską, granatowa z białą, granatowa z niebieską, czerwona z białą, czerwona z niebieską.



Rys. 6. Brudnopis pracy Marcina (36)

P r z y k ł a d (4)



Rys. 7. Brudnopis pracy Kuby (14)

W czystopisie Kuba (14) zapisał: Odp. Jest 6 sposobów ubrania lalki.

Także w sensownych obliczeniach w zadaniu 1, 19 uczniów używało drzewek zapisując działania. Wszyscy oni byli uczniami klasy IVa33. (Sądzę, że jest to wynik pracy nauczyciela.)

Sprawdzałam czy uczniowie w rozwiązaniach zadania 3 posługiwali się skrótami literowymi. Można tu było posłużyć się pierwszą literą nazwy koloru i części ubrania lalki, można też było poprzestać na pierwszej literze nazwy koloru (nie byłoby kolizji oznaczeń). Skróty literowe znalazłam w pracach 18 uczniów. W formuło-

waniu rozwiązań zadań 1 i 4 uczniowie wykorzystywali powszechnie używane skróty zł, km; choć i z tym mieli kłopoty.

(3) R o z w a ż a n i e r ó ż n y c h m o ż l i w o ś c i.

Poza cytowaną wyżej pracą Marcina (36), który w brudnopisie próbował podać dwa sposoby rozwiązania zadania 3 (grafem, jak u Kuby (14) i tabelką kartezjańską), nie znalazłam *różnych sposobów rozwiązania* przez ucznia tego samego zadania.

W sytuacji nietypowej, gdy (jak w zadaniu 1 i 2) rozwiązanie zadania jest wyborem z kilku możliwości (wypłat, liczby osób), uczeń może znalezienie różnych możliwości uważać za różne sposoby rozwiązania tego samego zadania. Świadczą o tym, według mnie, pytania uczniów do zadania 1: „Czy jeden sposób podać, czy różne?", „Czy odwróconą kolejność wydawania podawać?" (chodziło o rozróżnianie rozwiązań: 10,10,10,20,50 i 50,20,10,10,10), do zadania 2: „Czy wszystkie rozwiązania podawać?"

Z rozmów z niektórymi uczniami wywnioskowałam, że podawali w rozwiązaniu zadań 1 i 2 różne sposoby, bo nie wiedzieli, „o który sposób chodzi nauczycielowi". Ujawniła się tutaj postawa, w której uczeń postępuje zgodnie z „niepisaną umową" (swoistym „kontraktem szkolnym") tak, by spełnić oczekiwania nauczyciela.

Systematyczne poszukiwanie rozwiązania ułatwiało znalezienie wszystkich wyników w zadaniach 1, 3 i 5.

W zadaniu 1 dwie uczennice podały wszystkie możliwe wypłaty, a u jednej z nich, Darii (35), widoczne jest systematyczne poszukiwanie rozwiązania zadania. Daria wypisywała wypłaty, zaczynając od możliwie największych monet:

50 , 20 , 20 , 5 , 5
50 , 20 , 10 , 10 , 10
20 , 20 , 20 , 20 , 20

W zadaniu 3, w rozwiązaniach 38 uczniów (57%) dostrzegłam systematyczny sposób wypisywania strojów lalki (choć nie wszyscy spośród nich podali wszystkie sposoby ubrania lalki):

- 12 uczniów kolejno wymieniało kolory spódnic, dopasowując do nich bluzki,
- 23 do bluzek dopasowywało spódnice,

- 3 uczniów zapisywało stroje w tabeli, wypisując w stałej kolejności bluzki i spódnice.

Spośród 38 uczniów, którzy podali wszystkie możliwości ubrania lalki w pracach 6 uczniów trudno było dostrzec systematyczność w poszukiwaniu tego rozwiązania.

W zadaniu 5, w rozwiązaniach 28 uczniów (42%), wystąpiło systematyczne poszukiwanie rozwiązania:

- 10 uczniów wypisywało liczby w porządku rosnącym:
  111,112,121,122,211,212,221,222 - np. Piotr (16);
- 10 uczniów wypisywało osobno liczby z trzema jednakowymi cyframi, osobno liczby z dwoma jedynkami i osobno liczby z dwoma dwójkami; w ostatnich dwóch grupach następowała cykliczna zmiana:
  111,222,121,211,112,212,122,222 - np. Andrzej (31);
- 3 uczniów wypisywało pary liczb, w których na pozycjach symetrycznych względem przecinka następowała zamiana 1 i 2:
  221,211 121,212 112,122 111,222 - np. Ela (10);
- 4 uczniów stosowało różnego rodzaju symetrie przy wymianie cyfr:
  121,112,222 - 111,221,212 122-211 - Jakub (14),
  222-111 221,122 - 211,112 212-121 - Jacek (6);
- 1 uczeń wymieniał cyfrę 2 na 1, a następnie 1 na 2 na kolejnych miejscach, poczynając od ostatniego:
  222,221,211,111,112,122 212,121 - Konrad (4).

Spośród tych 28 uczniów, 20 podało wszystkie liczby. W pracach pozostałych 14 uczniów, którzy podali poprawne rozwiązania, trudno było dostrzec wyraźną regularność w wypisywaniu liczb.

Około 30% uczniów rozwiązujących zadania 3 i 5 poszukiwało w systematyczny sposób rozwiązania obu tych zadań, ponad 40% - tylko jednego z nich.

(4) D o b ó r s c h e m a t u r o z w i ą z a n i a.

Zapisy pomocniczych obliczeń mogą być świadectwem stosowania przez ucznia wyuczonego sposobu postępowania, polegającego na *wykonywaniu obliczeń na danych* (często mechanicznym). W zadaniu 1 niektórzy uczniowie rozpoczynali rozwiązywanie od wykonania działania 100:5 = 20, w wyniku czego otrzymali jeden sposób wypłaty: „5·20 zł"; aż 47 uczniów poprzestało na takim wyniku, nie szukając

innego sposobu wypłaty. W pozostałych zadaniach wykonywanie działań na danych liczbowych nie było potrzebne, a mimo to wykonało je w którymś z zadań 34 uczniów (na 67). Obrazuje to tabela 5.

T a b e l a 5. Liczba uczniów, którzy w podanych zadaniach wykonywali działania arytmetyczne na danych liczbowych

numer zadania	2	3	4	5
liczba uczniów	12	5	24	5

W sumie 14 uczniów wykonywało działania arytmetyczne na danych liczbowych w co najmniej dwóch zadaniach.

Zauważyłam, że nastawienie uczniów na wykonywanie niepotrzebnych rachunków na danych liczbowych zależy od klasy. W klasie IVa35 aż 18 uczniów, na 19 piszących, wykonało takie rachunki w którymś z zadań 2 - 5, w klasie IVa33 było 6 takich uczniów (na 26), w klasie IVb33 - 8 (na 22). Jest to także przejaw postawy, w której uczniowie dążą do wypełnienia „kontraktu szkolnego".

W pracach uczniów trudno było dostrzec *wykorzystywanie wyników* lub *metod rozwiązania zadań podobnych*. Niektóre błędy jednak można tłumaczyć wpływem rozwiązywanych wcześniej zadań pozornie podobnych, które uczniowie prawdopodobnie przypomnieli sobie. Wpływ zadania o znajdowaniu różnych rozkładów tej samej liczby na sumę składników widać na przykład w rozwiązaniach:

„20+40+20+20 = 100" - w zadaniu 1, czystopisie pracy Andrzeja(38)

„1+2 = 3, 2+1 = 3, 3+0 = 3, 0+3 = 3"- w zadaniu 5, w brudnopisie pracy Irka (62)

(może to być także przejawem postawy ukierunkowanej na wykonywanie rachunków).

W rozwiązaniu zadania 5 przez Joannę (69) można dopatrzyć się wpływu wcześniej rozwiązywanego zadania, w którym należało znaleźć liczby trzycyfrowe o zadanej z góry sumie cyfr.

Pytanie jednego z uczniów do zadania 4: „Jak jeden żołnierz idzie 6 km/h, to trzeba pomnożyć przez 100?" oraz rozwiązania tych wszystkich uczniów, którzy podali wynik 6·100 = 600, mogą świadczyć o schematycznym powielaniu postępowania wielokrotnie stosowanego w

rozwiązywaniu zadań: jeśli w zadaniu mam dane informacje o jednym obiekcie, a pytanie dotyczy pewnej liczby takich samych obiektów, to uzyskam dobry wynik po pomnożeniu (ewentualnie po podzieleniu) liczb występujących w zadaniu. Tak jest na przykład, gdy występuje proporcjonalność prosta lub odwrotna.

(5) D o b ó r ś r o d k ó w k o n t r o l i.

Wielu uczniów zwracało się w swoich pytaniach z prośbą o kontrolę poprawności swojego rozwiązania. Niepewność uczniów co do poprawności własnego rozwiązania była widoczne przede wszystkim przy zadaniach 1 i 2.

W rozwiązaniach zadania 3 wielu uczniów podawało liczbową odpowiedź, choć nie było to potrzebne. Taką odpowiedź podali, na przykład, Kasia (60) i Jakub (14). Kasia (60) do swojej liczbowej odpowiedzi na pytanie zadania 3 dołączyła dwa uzasadnienia - przez rachunek i przez wypisanie sposobów ubrania lalki. Takie uzasadnienia, wypisywane w czystopisie, można by traktować jako środki kontroli poprawności rozwiązania, tu jednak wydaje mi się, że są to próby spełnienia oczekiwań nauczyciela.

W brudnopisach prac 21 uczniów widoczne są próby sprawdzania poprawności rachunków przez wykonanie działań odwrotnych (chodzi o zadanie 1; np. 100 : 5 = 20, spr. 5·20 = 100).

Zestaw I - *część* B

W odpowiedzi na polecenie zadania 6 wszyscy uczniowie układali zadania z treścią, ilość zadań ułożonych przez jednego ucznia wahała się od jednego do sześciu, ogółem ułożono 142 zadania. W odpowiedzi na polecenie zadania 7, 62 uczniów ułożyło po dwa zadania, 2 po jednym i 1 uczeń trzy zadania, ogółem ułożono 129 zadań.

Przy ocenie układanych przez uczniów zadań zwracałam uwagę na to, czy ustalone w nich dane, szukane oraz warunek odpowiadają wymaganiom podanym w poleceniach zadań 6 i 7. Takie zadania, w których spełniono tylko część tych wymagań, uznawałam za błędne. Oto przykład takiego zadania:

„Mama kupiła szklanki za 190 zł i czekoladę za 50 zł. Ile mama zapłaciła?" - Edyta (20).

(W zadaniu tym wykorzystano tylko wynik działania podanego w zadaniu 7, struktura jego nie jest poprawna.)

(d) „Mama kupiła 8 kompletów talerzy po dwa talerze, to ją kosztowało 256 zł, ale ciocia odkupiła 16 talerzy i oddała pieniądze. W sumie zakup mamę kosztował 240 zł. Trzeba dodać, że 1 talerz kosztował 1 zł" - Konrad (4). (W zadaniu są sprzeczne dane.)

W części zadań ułożonych przez uczniów *brakowało danych informacji*, jak w zadaniu Agaty (1), lub było ich więcej niż trzeba do odpowiedzi na zadane pytanie, np. w zadaniu Konrada.

Niektórzy uczniowie podawali same rachunki - rozwiązania zadań, których treści nie napisali. Na przykład:

„200-50 = 150, 150-70 = 80, 80-10 = 70, 70-20 = 50.
Odp. Zostało mi 50 zł." - Agnieszka (68).

Większość uczniów (61%) podawała odpowiedzi do układanych przez siebie zadań, mimo że tego od nich nie wymagano (z tego 83% uczniów podawało też obliczenia). W typowej sytuacji uczeń w szkole rozwiązując zadania „rachuje" i daje odpowiedź. Rzadko uczeń w klasach ponadpoczątkowych układa zadania.

Zadania ułożone przez samych uczniów dały wiele informacji o ich postępowaniu przy czytaniu treści zadania, ich wiadomości o samym zadaniu, jego strukturze, roli pytań w zadaniu. Zaobserwowałam przykłady preferowania danych liczbowych, pomijania danych lub wprowadzania dodatkowych danych, pomijania lub błędnego ustalania szukanych, danych i warunku zadania.

Duża ilość zadań o nieprawidłowej strukturze treści może świadczyć o małej „świadomości metodologicznej" uczniów, dotyczącej budowy zadania, o małej świadomości roli poszczególnych informacji w zadaniu.

W n i o s k i d o t y c z ą c e z e s t a w u I

Zadania tego zestawu rzeczywiście sprzyjały ujawnianiu się metod postępowania uczniów, które były widoczne zwłaszcza w błędnych rozwiązaniach. Zastanawiająca jest duża ilość błędów w formułowanych przez uczniów zadaniach do danej sytuacji lub do podanej formuły arytmetycznej.

Przy analizowaniu rozwiązań zadań tego zestawu zaobserwowałam następujące metody postępowania uczniów:

(1) preferowanie danych liczbowych; dążenie do wykorzystania wszystkich danych liczbowych, ale też pomijanie niektórych takich danych przy układaniu zadań;

konkretne interpretowanie treści zadania, pomijanie danych lub wprowadzanie dodatkowych danych, ale też odchodzenie od rzeczywistości w układanych zadaniach;

pobieżne czytanie treści zadania, brak też konfrontacji ułożonego zadania z przypisanym mu rachunkiem.

(2) Zapisywanie pomocniczych obliczeń, nawet wtedy, gdy to nie jest potrzebne;

posługiwanie się schematem graficznym do przedstawienia danych (bardzo sporadyczne - widoczne było przede wszystkim w brudnopisach), posługiwanie się symbolami literowymi (też raczej sporadyczne).

(3) Rozważanie tylko jednej możliwości, dążenie do podania tylko jednego wyniku - podawanie przykładu w odpowiedzi na pytanie „jak można?" (zamiast przeglądu wszystkich możliwości);

systematyczne poszukiwanie wszystkich możliwości w odpowiedzi na pytanie „jakie są wszystkie ...?".

(4) Dążenie do wykonywania (często mechanicznego) działań na danych liczbowych;

dążenie do powielania schematu;

dążenie do powtarzania metody postępowania stosowanej przy wcześniej rozwiązywanych zadaniach (traktuję to jako przypuszczenie, za mało obserwacji).

(5) Dążenie do uzasadniania odpowiedzi rachunkiem lub powtarzaniem rozwiązania - dążenie do podawania liczbowej odpowiedzi;

kontrolowanie poprawności rachunku przez wykonywanie działań odwrotnych.

6.3.2. *Zestaw* II

W części A tego zestawu każdy z 71 uczniów podejmował próby rozwiązania każdego zadania, w części B - czterech uczniów nie odpowiedziało na pytanie 3, a dwóch na pytanie 4.

W tabeli 6 przedstawiam ocenę rozwiązań zadań części A tego zestawu, opisaną w kategoriach: rozwiązania poprawne, błędne.

W odpowiedzi na pytanie 1 części B tego zestawu uczniowie wskazywali różne rodzaje podobieństw między zadaniami. Zbiorcze wyniki przedstawia tabela 7.

T a b e l a 6. Procentowe zestawienie wyników części A zestawu II

numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
rozwiązanie: poprawne	82	80	93	97	77	90	92	96
błędne	18	20	7	3	23	10	8	4

T a b e l a 7. Zestawienie odpowiedzi na pytanie 1 części B

we wskazanych zadaniach są podobne	ilość uczniów
dane liczbowe	28
fabuła zadania	21
sposób rozwiązania	19
obliczenia częściowe	24
wynik	48
inne podobieństwa	4
brak podobieństw	4

Tabela 8 zawiera liczby uczniów wskazujących podane pary zadań podobnych w odpowiedzi na polecenie 2 części B. Tabela 9 zawiera liczby uczniów wskazujących pary zadań, które można podobnie rozwiązać, w odpowiedzi na pytanie 3 części B.

T a b e l a 8. Zestawienie odpowiedzi na polecenie 2 części B

numer zadania		2	3	4	5	6	7	8
numer zadania	1	30	61	59	3	1	2	46
	2		20	15	2	3	2	5
	3			61	16	2	4	56
	4				15	1	17	42
	5					55	0	28
	6						7	4
	7							2

Natomiast liczbę uczniów wskazujących, w odpowiedzi na polecenie 4 części B, że rozwiązanie zadania o numerze x jest równocześ-

nie rozwiązaniem zadania o numerze y, można odczytać z tabeli 10.

Niżej, przy omawianiu ustosunkowań, metod postępowania uczniów wobec zadań części A tego zestawu, wykorzystuję odpowiedzi na pytania i polecenia części B.

T a b e l a 9. Zestawienie odpowiedzi na pytanie 3 części B

numer zadania	2	3	4	5	6	7	8
numer zadania 1	8	34	31	0	1	0	11
2	4	4	0	0	0	1	
3	56	3	0	0	8		
4	2	0	4	5			
5	43	0	2				
6	2	0					
7	0						

T a b e l a 10. Zestawienie odpowiedzi na polecenie 4 części B

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8
1		3	27	24	0	0	0	6
2	0		2	1	0	0	0	0
3	1	0		32	0	0	0	1
4	0	0	9		0	0	1	0
5	0	0	0	0		40	0	0
6	0	0	0	0	7		1	0
7	0	0	0	0	0	0		0
8	0	0	2	2	0	0	0	

(1) U s t a l a n i e d a n y c h , s z u k a n y c h o r a z w a r u n k u z a d a n i a

Uczniowie zadawali pytania mogące świadczyć o nieuważnym czytaniu treści zadania - na przykład w zadaniu 1: „Tu jest tylko jedna liczba (345), do czego ją dodać?" (w zadaniu: suma cyfr liczby 345), w zadaniu 2: „Jakie są wymiary ogródka?" (wymiary podane są na rysunku ilustrującym tekst zadania). Nieuważne przeczytanie

treści było prawdopodobnie przyczyną humorystycznej odpowiedzi uczennicy w zadaniu 7:

„Alicja z Agatą nie zdążyły przeczytać książki" - Iwona (41).

Niektóre pytania uczniów wyrażają ich dążenie do upewnienia się, jak dokładnie rozumieć treść zadania - na przykład w zadaniu 5: „Czy mama do każdego słoika dawała tylko cukier i śliwki?", w zadaniu 7: „Jak przez pięć dni tygodnia Agata czytała po 20 stron, to znaczy, że każdego dnia czytała po 20 stron?".

Niektórzy uczniowie chcieli zmienić warunki zadania 7, pytając: „Czy w niedzielę Agata mogła więcej przeczytać?", dążąc chyba do tego, by odpowiedź na pytanie tego zadania była twierdząca; jest to zresztą przykład „życiowej" interpretacji tekstu zadania.

Pytania uczniów do zadania 1: „Czy to trzeba dodać 3+4+5?", „Czy mam dodać te cyfry?", „Czy to dobrze 345•35?", „Czy to ma być 345+35 = 380?" - ukazują, między innymi, ich trudności w przetłumaczeniu języka treści zadania na język operacji matematycznych, które należy tu wykonać; pytanie trzecie i czwarte dotyczy sposobu rozumienia zwrotu „zwiększ 35 razy" (czy trzeba tu dodać, czy pomnożyć?), w pytaniu pierwszym i drugim chodzi o zwrot „oblicz sumę cyfr liczby 345".

W odpowiedzi na pytanie 1 części B niektórzy uczniowie wskazywali podobieństwo danych liczbowych w różnych zadaniach, wszyscy oni dostrzegali je w zadaniach 3 i 4. Na przykład Joanna (50) napisała:

„Zadania 1,2,3,4 są do siebie podobne w tym, że powtarzają się liczby 3, 4 i 5; w zadaniach 1, 3, 4, 5 występuje liczba 35".

21 uczniów dostrzegało podobieństwo fabuł różnych zadań.

Na przykład Olaf (8) stwierdził, że: „Zadania 3, 5, 8 są podobne, bo są ze śliwkami, a zadania 4 i 7 - bo w każdym jest książka".

Poza tym dwóch uczniów wskazywało podobieństwo zadań 5 i 6 oraz 3 i 8 ze względu na sposób sformułowania pytania. Ilustruje to przykład wypowiedzi Agnieszki (68): „Zadania 3 i 8 mają pytanie - ile dostała pieniędzy?"

(2) D o b ó r ś r o d k ó w r o z w i ą z a n i a

Wszyscy uczniowie w brudnopisach wykonywali obliczenia pomocnicze. W tych obliczeniach wszyscy uczniowie klasy IVa33 posługiwa-

li się schematami drzewek. Przy rozwiązywaniu zadania 2, 10 uczniów przerysowało schemat ogródka znajdujący się w treści zadania, nanosząc nowe wymiary.

(3) R o z w a ż a n i e r ó ż n y c h m o ż l i w o ś c i

W brudnopisach 14 uczniów wyraźnie widać podejmowanie różnych prób rozwiązania zadania 1, związanych ze zmieniającą się interpretacją tekstu tego zadania.

Odpowiadając na pytania 1, 3 i 4 w części B, uczniowie wskazywali jedynie przykłady zadań podobnych, nie rozważając prawdopodobnie relacji między innymi zadaniami. Tabela wykorzystana w poleceniu 2 zmusiła uczniów do rozważenia wszystkich par zadań. Stąd liczba podobieństw wskazywanych w odpowiedzi na polecenie 2 (594) jest znacznie większa niż przy poleceniu 1 (367).

(4) D o b ó r . s c h e m a t u r o z w i ą z a n i a

Większość uczniów rozwiązywała zadania tego zestawu (poza zadaniem 1) w uporządkowany sposób, zapisując rozwiązanie jednym wyrażeniem arytmetycznym, stosując dobrze opanowany schemat postępowania.

Także i przy tych typowych zadaniach stosowana przez uczniów metoda postępowania, polegająca na wykonywaniu rachunków na danych liczbowych, nie zawsze była skuteczna; świadczą o tym przykłady rozwiązań w zadaniu 1: „Szukana liczba to 345•35 (lub 345+35)", w zadaniu 5: „słoik kosztuje 81 zł (35+46 = 81)".

Przy poszukiwaniu schematu rozwiązania użyteczne może być, między innymi, dostrzeżenie zadania podobnego ze względu na sposób rozwiązania (analogia metody). W odpowiedzi na pytanie 1 części B ten rodzaj podobieństwa podała prawie jedna czwarta uczniów, najczęściej wskazując podobieństwo sposobów rozwiązania zadań 5 i 6 (13 uczniów) oraz zadań 3 i 4 (11 uczniów). Także i w odpowiedziach na pytania 3 i 4 części B najczęściej wskazywano podobieństwo sposobów rozwiązania tych zadań. Bardzo mało uczniów wskazywało podobieństwo pod tym względem zadań 1 i 3 oraz 1 i 4, mimo że zadania te są izomorficzne w wąskim sensie. Także zaledwie kilku uczniów wskazało podobieństwo rozwiązywania izomorficznych zadań 1 i 2, 2 i 3 oraz 2 i 4. Natomiast 24 uczniów zaznaczyło podobień-

stwo sposobu rozwiązania zadania 8 i zadania 1, 3 lub 4; wszystkie te zadania mają ten sam wynik - 420. Podobieństwo zadań ze względu na wynik było zresztą najczęściej wymienianym rodzajem podobieństwa w odpowiedziach uczniów na pytanie 1.

W odpowiedziach uczniów na pytania 3 i 4 wielu uczniów utożsamiało rozwiązanie zadania z jego wynikiem. Można tu zacytować na przykład wypowiedzi Doroty (13), która w odpowiedzi na pytanie 1 napisała:

„Zadania 1, 2, 3, 4 i 8 (są podobne), bo mają te same cyfry, które się mnoży i dodaje, a oprócz zadania 2 mają ten sam wynik".

W odpowiedzi na pytanie 3, „Które zadania można podobnie rozwiązać?", podała: „Zadania 5 i 6, 1 i 3, 1 i 4, 8 i 1, 8 i 3, 8 i 4", a w odpowiedzi na polecenie 4 napisała:

„Wystarczy rozwiązać zadanie 5, żeby mieć rozwiązanie zadania 6; zadanie 1, żeby mieć rozwiązanie zadań 3, 4 i 8".

Niektórzy uczniowie wskazywali podobieństwo między zadaniami już wtedy, gdy część obliczeń w ich rozwiązaniach pokrywała się. Na przykład:

„Zadania 5 i 6 są podobne, bo powtarza się w jednym i drugim 35·10 i 46·3" - Ewa (23).

Nieliczni uczniowie już w czasie rozwiązywania zadań dostrzegali, że rozwiązania zadań 3 i 4, 5 i 6 są takie same, i zgłaszali się do nauczycielki z uwagami: „Zadania 3 i 4 są takie same". „Zadania 3 i 4 są rozwiązane jednakowo, mają jedno rozwiązanie". „To jest znów to samo!" Jedynie Krzysztof (5) podał od razu w swojej pracy wyniki zadań 3 i 4 pisząc, że obliczenia w nich są takie same jak w zadaniu 1; podobnie postąpił w zadaniu 6, powołując się na zadanie 5. Pozostali uczniowie podawali obliczenia do wszystkich tych zadań, pisząc odpowiednio te same rachunki.

(5) D o b ó r ś r o d k ó w k o n t r o l i

W pracach niektórych uczniów dostrzegałam próby kontroli wyniku przez podanie różnych sposobów rozwiązania zadań 2, 3 i 4, z wykorzystaniem prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Trudno było dostrzec czy uczniowie wykorzystywali zauważone podobieństwa między zadaniami w kontroli ich rozwiązań.

W n i o s k i d o t y c z ą c e z e s t a w u II

Wyniki tego zestawu zadań typowych były wyraźnie lepsze niż wyniki zestawów zawierających zadania nietypowe. Sporo informacji o ustosunkowaniach i metodach postępowania uczniów wobec zadań części A tego zestawu dostarczyły pytania i polecenia części B.

Przy analizowaniu rozwiązań zadań tego zestawu zaobserwowałam następujące metody postępowania uczniów:

(1) Koncentrowanie się na danych liczbowych - wiązanie podobieństwa zadań z występowaniem tych samych danych liczbowych;

dążenie do zmiany warunku zadania, związane z „życiową" interpretacją jego tekstu;

dążenie do zrozumienia treści zadań, ale i nieuważne czytanie tekstu zadań.

(2) Zapisywanie pomocniczych obliczeń, wykorzystywanie drzewek w zapisywaniu obliczeń (u uczniów jednej klasy).

(3) Poprzestawanie na wskazywaniu przykładów w odpowiedziach na pytania i polecenia typu: „Które zadania...?", „Podaj numery zadań...".

(4) Dążenie do wykonywania obliczeń na danych liczbowych - wiązanie podobieństwa rozwiązań zadań przede wszystkim z liczbami (ten sam wynik, częściowe obliczenia), mniej z podobieństwem fabuły.

(5) Wykorzystywanie praw działań w kontroli wyniku obliczeń.

Wielu uczniów utożsamiało rozwiązanie zadania z jego wynikiem. Uczniowie podawali jedynie przykłady zadań, które podobnie się rozwiązuje. Na ogół, mimo dostrzeżenia podobieństwa rozwiązań zadań, uczniowie zapisywali w czystopisie obliczenia (te same) do zadań izomorficznych w wąskim sensie. Trudno było prześledzić, w którym momencie uczniowie dostrzegają podobieństwo rozwiązań zadań: czy w trakcie rozwiązywania, czy dopiero po zapisaniu rozwiązania? Może dostrzegają to podobieństwo już w momencie analizy treści zadania? Przy tej ostatniej możliwości zapis rozwiązania mógłby być środkiem kontroli poprawności wcześniej rozwiązanego zadania. Zapis ten jest chyba jednak spełnieniem wymagań nauczycielki „by były obliczenia".

6.4. Wnioski z badań aspektu behawioralno-poznawczego postawy uczniów wobec zadań

W n i o s k i p o z n a w c z e

Przy przyjętej przeze mnie metodzie badań charakteryzowałam w sposób przybliżony metody postępowania uczniów; poza tym przy doborze zadań nie starałam się o to, by były reprezentatywne do ogółu zadań rozwiązywanych w klasie czwartej. Mam więc świadomość wstępnego, orientacyjnego znaczenia dokonanej przeze mnie charakterystyki postawy badanych uczniów w jej aspekcie behawioralno-poznawczym.

Ustosunkowania, metody postępowania poszczególnych uczniów wobec problemów, które mogą pojawić się w trakcie rozwiązywania zadań matematycznych (zob. rozdział 5), zależą od rodzaju tych zadań; od rodzaju zadań zależy też możliwość ich dostrzeżenia i opisania przez obserwatora.

Poniżej wymienione zostały napotkane metody postępowania uczniów klasy czwartej wobec problemów, jakie mogą pojawić się przy rozwiązywaniu zadań. Obok podano numery zestawu i zadań, w których charakteryzowane metody wyraźniej ujawniały się. Skrót $J/i,k$ oznacza zadania o numerach i, k w zestawie o numerze J.

Metody postępowania uczniów:

(1) Ustalenie danych, szukanych oraz warunku zadania:

(a) dążenie do wykorzystania wszystkich danych liczbowych - I/4, II/1, 2;

(b) preferowanie ważności danych liczbowych - II/1, 3, 4;

(c) dokonywanie zmian w danych zadaniach (np. przyjmowanie dodatkowych danych) - I/1, 2, 3, 4, 5;

(d) realistyczna interpretacja treści zadania - I/3, 4, 5.

(2) Dobór środków rozwiązania:

(e) zapisywanie pomocniczych operacji rachunkowych (potrzebnych lub niepotrzebnych) - I/1, 4, II/1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

(f) stosowanie schematów graficznych - I/3, II/2.

(3) Rozważanie różnych możliwości:

(g) poszukiwanie różnych rozwiązań - I/1,2;

(h) systematyczne poszukiwanie pełnego rozwiązania - I/3,5.

(4) Dobór schematu rozwiązania:

(i) wykonywanie rachunku na danych liczbowych potrzebnego lub niepotrzebnego - I/1, 2, 3, 4, 5, II/1;

(j) dostrzeganie i wykorzystywanie podobieństwa zadań - I/4, II/1, 3, 4, 5, 6.

(5) Dobór środków kontroli:

(k) uzasadnianie poprawności odpowiedzi rachunkiem, kontrola rachunku - I/1, II/7.

Wymienione tu sposoby postępowania uczniów przy rozwiązywaniu zadań zostały zilustrowane przykładami podczas przedstawiania wyników wskazanych zestawów zadań. W wielu przypadkach ujawnienie danej metody postępowania wiązało się z popełnieniem błędu przez ucznia, mniej widoczne było zastosowanie tych metod w poprawnych rozwiązaniach - dotyczy to na przykład „konkretnego" interpretowania treści zadania. Wymienione metody są ze sobą powiązane i w pracach wielu uczniów można było dostrzec równoczesne zastosowanie kilku z nich - dotyczy to na przykład grupy metod: (a), (b), (e), (i), (k).

Podkreślając obserwowaną przeze mnie zależność metod postępowania ucznia od rodzaju zadania przyjmuję, że wymienione metody opisują potencjalny sposób postępowania ucznia. Ujawnienie zastosowania danej metody postępowania w przypadku jednego zadania oznacza tylko, że może być ona zastosowana także i przy innym zadaniu.

Przy wybranej przeze mnie metodzie badań trudno było rozstrzygnąć, czy brak śladu stosowania danej metody postępowania istotnie oznacza, że tej metody nie stosowano; więcej pewności wniosłaby tu indywidualna obserwacja pracy ucznia „głośno myślącego" podczas rozwiązywania zadania.

Zebranie informacji o częstości ujawniania stosowania przez poszczególnych uczniów danej metody postępowania może być wykorzystane do próby oceny stopnia stałości stosowania tej metody. Przy obliczaniu tej częstości brałam pod uwagę tylko te zadania, które powiązałam z możliwością ujawnienia poszczególnych metod; obliczałam, w jakim procencie tych zadań poszczególni uczniowie ujawnili stosowanie danej metody postępowania. Wprowadziłam następującą skalę ocen stopnia stałości stosowania tych metod: ocena -2 odpowiada zastosowaniu danej metody w od 0% do 19% zadań powiązanych z tą me-

todą, ocena -1 - od 20% do 39%, ocena 0 - od 40% do 59%, ocena 1 - od 60% do 79%, ocena 2 odpowiada zastosowaniu tej metody w od 80% do 100% zadań z nią powiązanych.

Oceny te mogą służyć do opisania stopnia stałości stosunku ucznia do stosowania danej metody. Przyjmuję: oceny 2 i -2 oznaczają, że stosunek ucznia do stosowania metody jest stały, wtedy uczeń stale stosuje daną metodę lub jej nie stosuje; oceny 1 i -1 wskazują, że stosunek ten ma pewne cechy stałości, ocena 0 oznacza zaś brak stałości tego stosunku.

W tabeli 11 zestawiłam liczby uczniów, którym przyporządkowałam określoną ocenę stopnia stałości stosowania wyróżnionych metod (przy oznaczeniach metod ze stron 95 i 96). Tabela ta dotyczy wszystkich zadań wykorzystanych w badaniach (w artykule przedstawiłam tylko część tych zadań). Uczniów, którzy z powodu nieobecności nie rozwiązywali więcej niż 50% zadań związanych z wyróżnionymi metodami nie oceniałam, u pozostałych uczniów obliczałam odpowiedni procent w stosunku do zadań związanych z tymi metodami, które rozwiązywali.

T a b e l a 11. Zestawienie liczb ocen stałości stosowania wyróżnionych metod postępowania przez uczniów

ocena	-2	-1	0	1	2	brak oceny
metoda (a)	29	32	-	8	2	5
(b)	16	28	22	8	2	-
(c)	33	24	11	-	-	8
(d)	39	22	5	7	-	3
(e)	5	26	24	14	5	2
(f)	25	36	8	5	-	2
(g)	2	29	19	14	9	3
(h)	11	14	23	15	10	3
(i)	40	18	6	2	1	9
(j)	13	41	13	4	-	5
(k)	18	20	6	17	10	5

W tabeli 12 podałam liczby uczniów, których stosunek do stosowania danych metod jest stały, ma pewne cechy stałości, wykazuje brak stałości.

T a b e l a 12. Zestawienie liczb uczniów mających dany stosunek do stosowania wyróżnionych metod postępowania

stosunek	stały	cechy stałości	brak stałości	brak oceny
metoda (a)	31	40	-	5
(b)	18	36	22	-
(c)	33	24	11	8
(d)	39	29	5	3
(e)	10	40	24	2
(f)	25	41	8	2
(g)	11	43	19	3
(h)	21	29	23	3
(i)	41	20	6	9
(j)	13	54	13	5
(k)	28	37	6	5

Przy interpretacji liczb z tych tabel trzeba brać pod uwagę fakt, że ujawnienie się metod postępowania oznaczonych literami: (a), (b), (c), (d), (i) wiązało się najczęściej z błędami popełnianymi przez uczniów, z próbami stosowania tych metod w sytuacji, gdy nie było to celowe. Przewagę ocen wskazujących na stałość w nie występowaniu lub w rzadkim występowaniu tych metod można więc uznać za pozytywne zjawisko.

Metody oznaczone literami (f), (j) wiążą się z podstawowymi wskazaniami heurystycznymi: „zrób rysunek", „przypomnij sobie i wykorzystaj zadanie podobne". Niestety, metody te nie były w stały sposób stosowane przez poszczególnych uczniów.

Rozkład ocen stałości stosowania metod oznaczonych literami: (e), (g), (h) wskazuje na nie ustabilizowanie w ich stosowaniu, na dużą zależność ich stosowania od rodzaju zadań.

Z tabeli 11 można odczytać różnorodność postaw uczniów, wyraźnie widoczną przy metodach oznaczonych literami (h), (k).

Tabela 12 ukazuje dominowanie stałości lub cech stałości stosunku uczniów do stosowania wyróżnionych metod postępowania. (Uczeń albo często postępuje w określony sposób, albo bardzo rzadko.) Może to świadczyć o dosyć już ukształtowanej i w miarę stabilnej postawie uczniów wobec zadań matematycznych w jej aspekcie behawioralno-poznawczym (postawie pozytywnej lub negatywnej).

Wśród postaw wobec zadań matematycznych badanych uczniów klas czwartych ujawniły się wyraźniej (co nie znaczy, że u większości uczniów i w sposób ustabilizowany):

1. *Automatyczne posługiwanie się pewnym schematem* (z wynikiem pozytywnym lub negatywnym). Najczęściej jest to refleks na pewne bodźce w sytuacjach podobnych (czasem tylko pozornie) do tych, w których stosowano poprzednio dany schemat rozwiązania zadania. Uczeń przejawia taką postawę, gdy na przykład z góry zakłada, że rozwiązanie zadania polega na wykonaniu działań arytmetycznych, nawet wtedy, gdy to jest niepotrzebne. Preferuje dane liczbowe zadania, zaniedbując dokładną analizę jego treści, pomijając inne dane. Kieruje się schematem „proporcjonalności" (pomnożyć lub podzielić) tam, gdzie to nie ma sensu. Stara się wykorzystać wszystkie dane liczbowe, choć zadanie jest otwarte ze względu na ich wybór. Postawa ta przejawiła się w sposobach postępowania (a), (b), (e), (i), (k).

2. *Realistyczne podejście do treści zadania.* Uczeń działa w przekonaniu, że treść zadania powinna być zgodna z rzeczywistością poznaną w własnym doświadczeniu. Eliminuje zatem rozwiązania teoretycznie możliwe, a praktycznie - jego zdaniem - mało prawdopodobne. „Poprawia" lub uzupełnia dane zadania, przy ich życiowej interpretacji.

Postawę tę ujawniły sposoby postępowania (c), (d), (j).

3. *Systematyczność w poszukiwaniu rozwiązania zadania.* Postawa ta ujawniła się szczególnie w toku rozwiązywania zadań kombinatorycznych, rzadziej w toku rozwiązywania innych zadań, ale i tu można ją było obserwować w sposobach postępowania (h), (f), (i), (g

4. *Dostosowywanie się do „kontraktu szkolnego".* Niezależnie od własnego zdania ucznia opinia nauczyciela jest „ostatecznym autorytetem". Uczeń stara się robić to, czego nauczyciel żąda, domyślić się, o co mu chodzi w zadaniu, uwzględnić to, co nauczyciel podkreślał, co usiłował utrwalić, a co nie zawsze w tej samej postaci należało stosować, na przykład w rozwiązaniu zadania nietypowego. Ujawnia się to też w rozumieniu pewnych zwrotów w sensie „szkolnej umowy". Wyraża się też w tym, że uczeń nie odczuwa potrzeby samokontroli, ma mało odwagi i oczekuje ciągle od nauczyciela potwier-

dzenia, zachęty (prawie połowa pytań dzieci rozpoczynała się od słowa „czy": „Czy to dobrze?", „Czy tak trzeba obliczyć?" itp.).

W klasie IV ustalają się już pewne postawy wobec zadań matematycznych w ich aspekcie behawioralno-poznawczym, zarówno pozytywne, jak i negatywne. Dobór zadań i metodyka ich rozwiązywania powinny ten etap uwzględniać w sposób szczególnie wnikliwy. Konieczna jest tu ciągła i wszechstronna obserwacja postaw dzieci, ujawniających się w stosowanych przez nie sposobach postępowania w toku poszczególnych faz rozwiązywania zadania. Należałoby w szerszym zakresie uwzględniać zadania nietypowe, podobieństwa i różnice w strukturze zadań.

Literatura cytowana

B r u n e r, S.J.: 1978, *Poza dostarczone informacje*, PWN, Warszawa.

C i o s e k, M.: 1976, *Dydaktyczne problemy związane z strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych*, Rozprawa doktorska, Kraków.

C h r z a n - F e l u c h, B., Z a w a d o w s k i, W.: 1981, *Matematyka 4*, WSiP, Warszawa.

E r d n i e w, P.M.: 1978, Преподавание математики в школе, Просвещение, Москва.

F r e u d e n t h a l, H.: 1978, *Weeding and Sowing*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht; Holland (Boston, U.S.A.).

G o l d i n, G.A., McC l i n t o c k, C.E. (red.): 1979, *Task variables in mathematical problem solving*, Columbus, OH; ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

G ó r s k a, J. (red.): 1961, *Z doświadczeń nauczycieli matematyki*, PZWS, Warszawa.

K o z i e l e c k i, J.: 1978, *Czynność myślenia*. W: T o m a s z e w s k i, T., Psychologia, PWN, Warszawa.

K r y g o w s k a, A.Z.: 1959, *Uwagi o zadaniach matematycznych rozwiązywanych w szkole*, Matematyka 5, 6, 257-265 i 344-351.

-, 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, t. 1 i 3, WSiP, Warszawa.

-, 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980*, WN WSP, Kraków.

L e g u t k o, M.: 1984, *Postawy uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych*, Rozprawa doktorska, Kraków.

M n i c h, W.: 1980, *Aktywności matematyczne jako kryterium doboru zadań w nauczaniu matematyki*, Rozprawa doktorska, Kraków.

NACOME: 1975, *Conference Board of the Mathematical Sciences National Advisory Committee on Mathematical Education*, Overview and Analysis of School Mathematics Grades K-12, New York.

P o l y a, G.: 1964, *Jak to rozwiązać?* PWN, Warszawa.

-: 1975, *Odkrycie matematyczne*, WNiT, Warszawa.

-: 1975, Математика и правдоподобные рассуждения, Наука, Москва.

Program nauczania początkowego. Klasy I-III, 1979, WSiP, Warszawa.

Program szkoły podstawowej. Matematyka. Klasy IV-VIII, 1984, WSiP, Warszawa.

P u t k i e w i c z, Z.: 1962, *Arytmetyka nie jest trudna*, NK, Warszawa.

R e y k o w s k i, J.: 1973, *Postawy a osobowość*. W: N o w a k, S. (red.), *Teorie postaw*, PWN, Warszawa.

R u d n i a ń s k i, J.: 1967, *Metody pracy umysłowej ucznia*, PZWS, Warszawa.

S c h o e n f e l d, A.H.: *Jak uczyć twórczego rozwiązywania zadań?* W: G ó r a l s k i, A. (red.): 1980, *Zadanie, metoda, rozwiązanie*, z. 3, WNT, Warszawa.

-: 1982, *Measures of problem solving performance and of problem solving instruction*, Journal for Research in Mathematics Education 1.

S e m a d e n i, Z. (red.): 1981, *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1, WSiP, Warszawa.

T r e l i ń s k i, G.: 1980, *Zadania z nadmiarem lub deficytem danych*, Oświata i Wychowanie, wersja E, 1, s. 17-19.

T u r n a u, S., C i o s e k, M., L e g u t k o, M.: 1980, *Matematyka 4*, WSiP, Warszawa.

W i t t m a n n, E.: 1974, *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg-Braunschweig.

EXAMPLES OF FOURTH-FORM PUPILS' BEHAVIOURAL-COGNITIVE ATTITUDES TOWARDS MATHEMATICAL PROBLEMS

S u m m a r y

A student's attitude towards mathematical problems is defined as his (her) internal disposition manifested through handling those problems. Two aspects of attitude were singled out: behavioural-cognitive and emotional-motivational. The article presents examples of attitudes to nonstandard problems, in the first aspect only. These attitudes are characterized by (a) the way of determining the data, unknowns, and conditions of the problem, (b) selection of the means, (c) possible consideration of alternatives, (d) the solution process, (e) the ways of checking the result. The following types of attitudes were found: 1. using of a known scheme, 2. the "realistic" attitude, 3. systematic search for the solution, 4. clinging to the teacher's authority (so-called "school contract").