ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 8 (1987)

ANNA SIERPIŃSKA
Warszawa

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki

WSTĘP

Pojęcie przeszkody epistemologicznej wydaje nam się płodne, potrzebne, a nawet niezbędne w teorii i praktyce nauczania matematyki. Dlaczego?

Guy Brousseau, któremu zawdzięczamy odkrycie tego pojęcia dla dydaktyki matematyki (Brousseau, 1977, 1984), mówi, że pojęcie to pomogło mu znaleźć odpowiedź na pewne pytania, z których dwa zasługują na szczególną uwagę. Pierwsze, to kwestia doboru zadań tak, aby były one adekwatne do wiedzy, która ma być przyswojona. Drugie pytanie dotyczy wiedzy i intuicji uczniów, które, choć niekompletne bądź wadliwe, zasługują na to, by być brane pod uwagę w nauczaniu i z całą powagą dydaktycznie potraktowane. Badania, które prowadzono w tym kierunku, grzeszyły, jak mówi Brousseau, empiryzmem, i w sposób przesadny stosowały zasadę oszczędności do procesów uczenia się i nauczania. Według Brousseau, pojęcie przeszkody epistemologicznej przychodzi z pomocą w rozwiązywaniu tych problemów, gdyż: 1^{o} pozwala w sposób bardziej precyzyjny zidentyfikować to, co jest istotne z poznawczego i społecznego punktu widzenia w materiale nauczania; 2^{o} daje pewne wskazówki w opracowywaniu badań eksperymentalnych, dzięki możliwości wykorzystania analizy historycznej rozwoju pojęć matematycznych; 3^{o} wskazuje miejsca, w któ-

rych warto i nawet trzeba brać pod uwagę dawną wiedzę ucznia; 4° pomaga w wyborze właściwych zadań rozwijających wiedzę ucznia.

Wydaje się jednak, że jest coś więcej w pojęciu przeszkody epistemologicznej. Nie jest to izolowane pojęcie, które pozwala odpowiedzieć na kilka szczegółowych pytań związanych z badaniami i nauczaniem. Z pewnością wyjaśnia ono wiele systematycznie pojawiających się błędów uczniów, ale ponadto z pojęciem tym wydaje się wiązać cały program badawczy z pewną podskórną filozofią matematyki i filozofią nauczania. Ta możliwość rozwinięcia wokół przeszkody epistemologicznej pewnego programu badawczego stanowi właśnie o sile tego pojęcia.

Artykuł ma na celu uzasadnienie tej tezy.

Oto plan artykułu. W pierwszej części będziemy starali się odpowiedzieć na pytanie: Co to jest przeszkoda epistemologiczna (PE)? W dyskusji na ten temat cytuje się często pracę G. Bachelarda (1938). Zaczniemy od podania czterech przykładów. Z tych przykładów wydobędziemy kilka własności pojęcia PE w matematyce (A-D). Nigdzie nie podamy jednozdaniowego określenia PE w matematyce. Zamiast tego próbujemy sformułować kilka istotnych własności PE i przedyskutować pewne trudności w określeniu PE w matematyce takie, jak: (a) Bachelard mówił o PE tylko w okresie przednaukowym; historycy datują okres naukowy matematyki od Starożytności (tu znajdujemy związek między pojęciem PE, a pojęciem paradygmatu w teorii rewolucji naukowych Kuhna i formułujemy własność E); (b) Bachelard mówił o PE tylko w naukach przyrodniczych; matematyka nauką przyrodniczą nie jest (ale nie jest tak odległa od nauk przyrodniczych jak wynikałoby to z prac Dieudonné, na przykład: matematyka jako działalność ludzka ma ważne aspekty empiryczne i społeczne, które są nawet ważniejsze w nauczaniu matematyki; odwołujemy się tu do idei Lakatosa matematyki jako nauki quasi-empirycznej); przedyskutujemy także kilka problemów związanych z adaptacją pojęcia PE w nauczaniu matematyki (mówimy tu głównie o polemikach między Brousseau a Glaeserem oraz formułujemy własność F PE). Na koniec próbujemy odróżnić PE od trudności. Kończymy naszą eksplikację pojęcia PE zarysowaniem historycznego i filozoficznego tła pojęcia PE (idea naukowych programów badawczych jest tu krótko opisana). Przedstawione w tej pierwszej części idee pociągają za sobą pewne implika-

cje dla nauczania matematyki. Mówimy o nich w części drugiej. Implikacje te, to 1^{o} zmiana stosunku nauczyciela do błędów uczniów (błędy muszą być brane poważnie, tym bardziej, iż nie wiemy, czy to, o czym myślimy, że wiemy na temat matematycznego problemu czy metody, jest ostateczne lub prawdziwe w jakimś sensie. Niektóre błędy, szczególnie te, które są związane z przeszkodami, nie mogą być unikane lub omijane, jeżeli ma zostać rozwinięta nowa wiedza, na wyższym poziomie. Trzeba wraz z uczniem dochodzić do źródeł błędu, szukać jego implikacji). 2^{o} Wypływa stąd także konieczność zmiany postawy nauczyciela w stosunku do przekazywanych treści: wiedza, którą przekazuje, jest często wynikiem konstrukcji społecznej, wyboru, negocjacji prowadzonych wśród matematyków. Także w klasie wiedza powinna być negocjowana z uczniami i nauczyciel nie powinien uważać się, ani być uważany przez swoich uczniów, za jedynego posiadacza prawdy. Lekcja powinna przyjąć formę wspólnego badania wraz z uczniami. Jest to jednak postulat bardzo trudny do spełnienia. Zabiera czas i nauczyciel musi brać pod uwagę dawną wiedzę uczniów, traktować ją jako akceptowalną, ale która, być może, będzie musiała być odrzucona jako wadliwa lub niewystarczająca w nowej sytuacji. Oczywiście, nie można robić takich „wspólnych badań z uczniami" w związku ze wszystkim, co ma być nauczone. Niektóre rzeczy trzeba przekazać w tradycyjny sposób. Konieczny jest wybór. I twierdzimy, że sytuacje, w których nie tylko można, ale koniecznie trzeba podjąć ten wysiłek przejścia wraz z uczniami przez ich dawne koncepcje i pomóc im w przebudowaniu ich, to te, w których mamy do czynienia z przeszkodami epistemologicznymi. Przeszkody nie można ominąć. Musi zostać uświadomiona i pokonana. Wypływa stąd cały program badawczy, o którym mówimy w trzeciej części: (1) określić przeszkody epistemologiczne związane z matematyką szkolną; (2) opracować sytuacje dydaktyczne, które pozwalałyby uczniom uświadamiać sobie i pokonywać te przeszkody. W dalszym ciągu rozwijamy tezę, że program ten może stać się programem badawczym w sensie Lakatosa.

1. CO TO JEST PRZESZKODA EPISTEMOLOGICZNA?

1.1. P r z y k ł a d y

Pojęcie nieskończoności od niepamiętnych czasów było źródłem pytań i nie rozstrzygniętych sporów w matematyce. Paradoksy nieskończoności, które bulwersowały Starożytnych, bulwersują i nas dzisiaj. Zrozumienie ich istoty nie jest wcale łatwiejsze w dobie komputerów niż było w dobie kamyków układanych na desce. Matematycy zaś odczuwają potrzebę wyjaśniania ich wciąż na nowo. Od pierwszego wydania książki Bolzano, wydawałoby się zadowalająco wyjaśniającej paradoksy nieskończoności na gruncie analizy, minęły 132 lata, gdy młody matematyk amerykański, Rudy Rucker, w swojej książce *Infinity and the mind* (Rucker, 1982) znów podjął ten temat i potrafił nie tylko coś ciekawego dodać, ale zadał jeszcze kilka pytań, na które wcale niełatwo jest znaleźć odpowiedź.

Różne odmiany paradoksów Zenona pod postacią zagadek kursują także wśród młodzieży szkolnej, jak przekonaliśmy się podczas jednego z naszych seansów eksperymentalnych. Uczniowie mieli, m.in., zastanowić się nad pytaniem:

$$\text{„}1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

Dlaczego?"

Pytanie do skojarzyło im się z zagadką o pojączku, który wdrapuje się na słup dwumetrowy. Pierwszego dnia pajączek przebył 1 m, drugiego dnia połowę tego, co przebył dnią pierwszego, trzeciego dnia - połowę tego, co przebył dnia poprzedniego i tak dalej. Pytanie: kiedy dotrze do celu? Odpowiedź oczekiwana: Nigdy. Nigdy nie dojdzie na szczyt, więc ta suma nigdy nie będzie równa 2. Tu w ogóle nie ma czego uzasadniać. Ta równość jest nieprawdziwa. Wprawdzie będzie się „niesamowicie (213)" blisko 2, ale zawsze pozostanie jakaś „subtelna różnica (312)": „Właśnie tu jest taka subtelna różnica, mimo wszystko, tu jest przecinek dziewięć i mimo że tam jest nieskończona ilość dziewiątek, to chyba jednak będzie mniejsze (312)"; „jak będziemy dodawać, to zawsze nam będzie tego kawałeczka brakować (292)". (Liczby w nawiasach oznaczają numer

kwestii w protokole.) Przyczyną takiej postawy może być traktowanie zapisu a + b jako polecenia wykonania działania, a wtedy suma, o której mowa w pytaniu, rzeczywiście nie daje się obliczyć w skończonym czasie, i wobec tego nigdy w skończonym czasie wynik nie będzie równy 2. Jest to pewna forma nieakceptowania nieskończoności aktualnej, kiedy to cały nieskończony szereg jest dany jako całość, obejmujemy go jedną myślą, i jego suma, czyli wynik operacji przechodzenia do granicy, jest równy 2. Jeśli myślimy o przechodzeniu do granicy jako o pewnym działaniu matematycznym, które ciągom zbieżnym przyporządkowuje ich granice, to potrzebna jest nieskończoność aktualna. Dla procesu przechodzenia do granicy wystarczy nieskończoność potencjalna. Jak wiadomo, dla intuicjonistów, którzy odrzucali nieskończoność aktualną, pojęcie granicy było akceptowalne, ale właśnie jedynie pod postacią potencjalnie nieskończonego procesu. Było to w zgodzie z ich ogólną tezą, że matematyka nie jest wiedzą zebraną w formie wyrażonych w jakimś języku zdań, lecz aktywnością ludzkiego twórczego umysłu (Heyting, 1956).

Mówiąc słowami Cantora, „... istnienie nieskończoności potencjalnej jest jedynie zapożyczone, w tym sensie, że pojęcie nieskończoności potencjalnej zawsze wskazuje na logicznie wcześniejsze pojęcie nieskończoności aktualnej, od której istnienia zależy", a nawet „strach przed nieskończonością jest formą krótkowzroczności, która uniemożliwia ujrzenie nieskończoności aktualnej, chociaż to ona, w swojej najwyższej postaci, stworzyła nas i chroni, a w swoich wtórnych, pozaskończonych formach jest wszędzie wokół nas, a nawet zamieszkuje nasze umysły" (Rucker, 1982). Jednak starożytni, mimo swojego wstrętu do nieskończoności, wyrażającego się nawet w ich określeniu nieskończoności - *apeiron*, mogli sformułować metodę dowodzenia, dziś zwaną metodą wyczerpywania, gdyż wystarczała tu nieskończoność potencjalna. Dzięki niej, omijając nieskończoność i będąc wobec tego po stronie „dobra" (czynimy tu aluzję do list przeciwieństw tworzonych przez pitagorejczyków, w których po jednej stronie było „skończone" i „dobre", a po drugiej - „apeiron" i „złe") mogli Grecy sformułować i ściśle udowodnić wiele twierdzeń, których dziś dowodzilibyśmy metodą rachunku różniczkowego i całkowego.

Jednak dla matematyków, którzy chcieli iść dalej i szybko rozwiązywać problemy fizyki i astronomii, metoda wyczerpywania,

z jej pedantycznym obchodzeniem nieskończoności aktualnej, stała się przeszkodą. Odrzucając arystotelesowski zakaz, matematycy XVII i XVIII w. swobodnie posługiwali się nieskończonością aktualną w postaci stałych nieskończenie małych, które w dogodnym momencie można było w równaniu pominąć, otrzymując gotowy wzór. Ścisłość tych poczynań nie zawsze była bez zarzutu i winą za to obarczono nieskończoność aktualną: w definicji Cauchy'ego pojęcia granicy, nieskończoność potencjalna wystarcza. Od strony formalnej. W istocie jednak Cauchy nie mógł być wolny od aktualnych nieskończoności w swoim pojmowaniu continuum. Przyjęcie tej hipotezy przekonująco wyjaśnia owe sławne „błędy" Cauchy'ego, w szczególności zaś twierdzenie, że granica ciągu zbieżnego funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. I to mimo istniejącego od 1807 r. kontrprzykładu Fouriera: $\cos x - (1/3)\cos 3x + (1/5)\cos 5x - \ldots$ Otóż Robinson zasugerował w swojej *Analizie Niestandardowej* (Robinson, 1967; Davis, 1981, str. 237-254), a Lakatos (1974 i 1978_2) tę myśl rozwinął, że „w historii rachunku różniczkowego i całkowego od Leibniza do Weierstrassa, istniały dwie rywalizujące teorie continuum: teoria leibnizowska, czyli continuum archimedesowe rozszerzone do nie-archimedesowego przez dołączenie nieskończenie małych i nieskończenie wielkich, oraz dziś akceptowana teoria Weierstrassa. Teoria Leibniza była dominująca aż do rewolucji weierstrassowskiej i sam Cauchy szedł całkowicie za tradycją Leibniza. Rewolucyjne w teorii Weierstrassa było to, że dziś znany rachunek różniczkowy i całkowy mógł być w pełni wyjaśniony i dalej rozwijany, opierając się tylko na weierstrassowskich liczbach rzeczywistych, których zbiór jest jedynie szkieletem tego, co Leibniz uważał za liczby rzeczywiste. „Zmienne" rzeczywiste Cauchy'ego przebiegały i weierstrassowskie liczby rzeczywiste nieskończenie małe, i te liczby, które różniły się od weierstrassowskich liczb rzeczywistych o nieskończenie wielkie liczby, i wreszcie liczby nieskończenie małe; późniejsze punkty Weierstrassa były skończonymi punktami Leibniza-Cauchy'ego pozbawionymi swoich nieskończenie małych otoczeń" (Lakatos, 1978_2, str. 47-48). Z tego punktu widzenia Cauchy nie popełnił błędu; on, po prostu, udowodnił zupełnie inne twierdzenie: „o pozaskończonych ciągach funkcji, które są zbieżne w sensie Cauchy'ego na continuum leibnizowskim (ibidem, str. 50)". Kiedy Cauchy mówi: „niech

lim $s_n(x) = s(x)$, gdzie $s_n(x)$ są ciągłe", to chce powiedzieć, że $s_n(x)$ muszą być określone i ciągłe, a ciąg $s_n(x)$ musi być zbieżny nie tylko we wszystkich standardowych punktach Weierstrassa, lecz także we wszystkich punktach Leibniza-Cauchy ego, tzn., że ciąg $s_n(x)$ musi być określony dla n nieskończenie wielkich i funkcje $s_n(x)$ muszą być ciągłe dla nieskończenie wielkich n. Przykład Fouriera nie spełnia tego warunku. I teraz staje się zrozumiałe, dlaczego zasada ciągłości Leibniza wydawała się oczywista i nie wymagała dowodu dla matematyków XVIII w.

Ominięcie nieskończoności aktualnej byłoby więc u Cauchy'ego tylko pozorne.

Zresztą unikanie wielkości aktualnie nieskończonych stawało się coraz trudniejsze. Posłużenie się wyłącznie nieskończonością potencjalną do ścisłego opisu liczb rzeczywistych mogło być dokonane jedynie za cenę wielkiej sztuczności (por. Heyting, 1956).

Do obalenia przeszkody przyczynił się walnie Georg Cantor za pomocą, z jednej strony, wyjaśnienia problemu dotyczącego jednoznaczności przedstawienia funkcji w postaci szeregu trygonometrycznego, z drugiej wskazując na wieloznaczność pojęcia nieskończoności, na istnienie stopni nieskończoności (Rucker, 1982, str. 7-9).

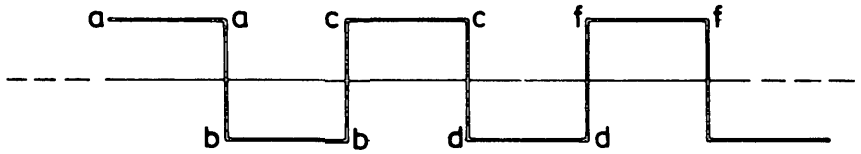
Wspomnieliśmy wyżej o przykładzie Fouriera szeregu $\cos x - (1/3)\cos 3x + (1/5)\cos 5x - \ldots$ Po raz pierwszy w pracach Fouriera szereg ten pojawia się w rękopisie *Memoire sur la propagation de la chaleur* przedstawionym we francuskiej Akademii Nauk 21 grudnia 1807 r. Oto jak Fourier opisuje wykres sumy tego szeregu:

"Rozważymy równanie

$$y = \cos u - \frac{1}{3}\cos 3u + \frac{1}{5}\cos 5u - \frac{1}{7}\cos 7u + \text{etc.}$$

jako równanie linii, której u jest odciętą, zaś y rzędną. Już z poprzednich uwag wynika, że linia ta będzie się składała z oddzielnych części aa, bb, cc, dd, etc., z których każda jest równoległa do osi i równa połowie długości obwodu koła. Te równoległe znajdują się na przemian ponad i poniżej osi w odległości 1, i są połączone odcinkami prostopadłych ab, cb, cd, ed, etc." (W późniejszych wersjach błąd dotyczący odległości od osi jest poprawio-

ny: odległość ta wynosi $\pi/4$.) Według Grattan-Guinnessa (1972, str. 158), Fourier przygotowywał, ale ostatecznie nie przedstawił, dla opisanej wyżej linii następujący diagram:



Podobny diagram był natomiast zawarty w tej wersji, która została prawdopodobnie wysłana do Biota i Poissona (ibidem, str. 182, 184). Diagram towarzyszył tam tekstowi: „Równanie $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x$ + etc. jest równaniem linii nieciągłej mmnnm'm'n'n'm'' etc.

„Ciągłymi" nazywał Fourier funkcje różniczkowalne; nieciągłymi wszystkie inne.

Diagramów tego typu, w których nieciągłości są połączone liniami prostopadłymi jest u Fouriera więcej (ibidem, str. 220, 221) i fakt, że linie te należą do wykresu jest zawsze zaznaczony w tekście.

Można stąd wywnioskować, że 1° sam Fourier nie traktowałby swojego szeregu jako kontrprzykładu dla zasady ciągłości Leibniza, jeżeli traktował swój diagram jako przedstawienie wykresu funkcji; 2° jeżeli powyższą krzywą traktował jako funkcję, to jego pojęcie funkcji różniło się od naszego. Nie byłby w tym zresztą odosobniony: wielu matematyków w tym okresie nazywało funkcją dowolną krzywą (Sziłow, 1965).

A oto komentarz Grattan-Guinnessa (1972): „Ze współczesnego punktu widzenia taka prostopadła linia wskazuje na wielowartościowość, albo nieokreśloność funkcji w danym punkcie; ale jest prawdopodobne, że Fourier pojmował te krzywe jako obiekty geometryczne, dla których 'przyległość' czy spójność była ważniejsza niż jedno-

wartościowość względem ustalonej osi. Jeśli, na wzór Monge'a, wyobrazimy sobie te krzywe jako *brzegi powierzchni zawierającej wszystkie ciągłe krzywe aproksymujące*, to zobaczymy, jak naturalny jest opis Fouriera. Tu, jak wszędzie gdzie indziej, widoczny jest brak dogmatyzmu w podejściu Fouriera do obiektów matematycznych: jako reprezentacja stanu fizycznego, funkcja musi być skończona i jednowartościowa, lecz jej wyrażenie algebraiczne swobodnie może przyjmować nieskończone wartości w trakcie manipulowania nim, zaś jej obraz geometryczny powinien tylko dobrze się zachowywać jako krzywa" (str. 193).

Podkreślona tu koncepcja granicy jako „brzegu powierzchni zawierającej wszystkie krzywe ciągłe aproksymujące" ma sporo związku z tzw. „przeszkodą geometryczną" odnoszącą się do pojęcia granicy (Sierpińska, 1983, Przeszkoda III.1).

1.2. Kilka własności pojęcia przeszkody epistemologicznej w matematyce

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy kilka przykładów przeszkód epistemologicznych związanych z rozwojem pojęć matematyki klasycznej:

1^{o} dopuszczanie w rozumowaniach matematycznych jedynie nieskończoności potencjalnej;

2^{o} zupełna swoboda w operowaniu wielkościami nieskończenie małymi i nieskończenie wielkimi z zastosowaniem do nich praw zachodzących tylko dla wielkości skończonych;

3^{o} utożsamianie funkcji z krzywą;

4^{o} przeszkoda „geometryczna" związana z pojęciem granicy: granica jako brzeg pewnej powierzchni.

Przykłady te ilustrują już pewne cechy przeszkód epistemologicznych:

A. Pojęcie przeszkody epistemologicznej jest pojęciem względnym: przeszkody 1^{o} i 2^{o} są przeszkodami w odniesieniu do analizy klasycznej, ale 1^{o} nie jest przeszkodą w analizie intuicjonistycznej, zaś analiza niestandardowa, wprowadzając pojęcie liczb hiperrzeczywistych, zalegalizowała nieskończenie małe i opracowała tech-

nikę operowania nimi bez obawy o sprzeczność. Dla analizy niestandardowej, być może właśnie odrzucenie nieskończenie małych na rzecz pojęcia granicy stanowiło przeszkodę (takiego przynajmniej zdania jest Rudy Rucker (1982)).

Względność przeszkody wyraża się ponadto odniesieniem do ustalonego etapu rozwoju danej teorii matematycznej.

B. Przeszkody występują parami. Jest charakterystyczne dla przeszkód, iż po odrzuceniu jednej, ryzykuje się wpadnięcie w przeszkodę przeciwną. Przeszkody 1^{o} i 2^{o} stanowią taką parę. Przeszkody 3^{o} i 4^{o} są przeszkodami „geometrycznymi", dla których parę stanowią odpowiednie przeszkody „numeryczne" (przez długi okres w historii funkcje występowały w sposób jawny tylko w postaci tablic).

C. Przeszkoda jest w pewnym okresie rozwoju teorii podporą. Przeszkody są nieuniknione w rozwoju teorii, gdyż na każdym etapie tego rozwoju, wiedza, którą budujemy, jest adekwatna do problemów, których rozwiązaniu służy. Nowe problemy wymagają zmiany narzędzi, odrzucenia pewnych założeń, przyjęcia innych, rewizji dotychczasowej wiedzy. Omijanie przeszkody nie prowadzi do rozwoju teorii, z którą dana przeszkoda jest związana, choć może prowadzić do rozwoju innej, rywalizującej przeszkody. Widzieliśmy to na przykładach 1^{o} i 2^{o}.

D. Przeszkoda epistemologiczna - to nie jest po prostu błąd, nieporozumienie lub brak informacji. Jest to coś, co było elementem pewnej tradycji w pewnym okresie rozwoju matematyki. Jest to element pewnego systemu, i to element ważny, a nie pojęcie, które łatwo daje się odizolować od reszty systemu; jest to raczej jedno z podstawowych założeń; założenie, którego obalenie lub odrzucenie wiąże się z załamaniem całego systemu.

1.3. Problemy związane z określeniem pojęcia przeszkody epistemologicznej w matematyce i w dydaktyce matematyki

(a) *Bachelard mówił o przeszkodach epistemologicznych tylko w okresie przednaukowym; historycy datują okres naukowy matematyki od czasów Starożytności.*

Zauważmy jednak, że własności A-C przeszkody apistemologicznej zilustrowane przykładami z historii matematyki mają swoje odniesienia w pracy Bachelarda (filozof francuski żyjący w latach 1884-1962, który pojęcie przeszkody epistemologicznej wprowadził i uznał za podstawowe w problemach rozwoju myśli naukowej (Bachelard, 1938)).

Oto wspomniane odniesienia:

- Własność A, str. 17: „Pojęcie przeszkody epistemologicznej może być badane w rozwoju historycznym myśli naukowej i w praktyce nauczania. W jednym i w drugim przypadku badanie to nie jest łatwe. W istocie, historia jest z zasady niechętna wszelkiemu osądowi normatywnemu. A jednak trzeba przyjąć *normatywny* punkt widzenia, jeżeli chcemy ocenić skuteczność jakiejść myśli."

- Własność B, str. 20: „Jest zresztą godne uwagi, że przeszkody epistemologiczne pojawiają się zawsze parami. Do tego stopnia, że można by mówić o psychologicznej zasadzie dwubiegunowości błędów. Z chwilą, gdy jakaś trudność okazuje się poważna, można mieć pewność, że obchodząc ją natkniemy się na przeszkodę przeciwną. Taka regularność w dialektyce błędów nie może, rzecz jasna, pochodzić ze świata obiektywnego. Naszym zdaniem, pochodzi ona z postawy polemicznej myśli naukowej w stosunku do wiedzy 'uczonej'. Tak jak w aktywności naukowej, musimy być twórcami, wynalazcami, musimy badać zjawisko z nowego punktu widzenia. Ale jesteśmy zmuszeni uzasadnić nasz wynalazek, i wtedy myślimy o nim krytykując punkt widzenia innych. Z czasem przekształcamy nasze uwagi krytyczne w prawa. Czynimy wysiłki w kierunku zmiany zjawiska tak, aby przeciwstawiało się wiedzy innych badaczy. Tego rodzaju źle pojętą oryginalność znajdujemy przede wszystkim w naukach młodych; powoduje ona tylko wzmocnienie przeszkód przeciwnych."

- Własność C, str. 13-14: "Powracając do pełnej błędów przeszłości, odnajdujemy prawdę w prawdziwej skrusze intelektualnej. W istocie poznajemy przeciwko jakiejś dawnej wiedzy, niszcząc źle zbudowaną wiedzę, pokonując to, co w samym umyśle stanowi przeszkodę dla intelektualizacji (...) Wiedza nabyta wysiłkiem naukowym może także ulegać degeneracji. Pytanie abstrakcyjne i szczere zużywa się; pozostaje konkretna odpowiedź. Odtąd aktywność intelektualna odwraca się i blokuje. Na niekwestionowanej wiedzy odciska

się przeszkoda epistemologiczna. Przyzwyczajenia intelektualne, które były pożyteczne i zdrowe, mogą, na dłuższą metę, stanowić przeszkodę dla badań."

Nieco inaczej jest z własnością D. Według Bachelarda, obecność przeszkody epistemologicznej w pewnej myśli neguje jej wartość jako myśli naukowej. Przeszkody epistemologiczne charakteryzują w rozwoju nauki jej okres przednaukowy. Pole badań staje się nauką z chwilą pokonania przeszkód. Z przykładów, które podaje Bachelard (pochodzą one głównie z rozwoju fizyki) wynika, że przeszkody tkwią w postawach filozoficznych i psychologicznych ludzi, którzy wiedzę tworzą. Dla ilustracji przytoczymy w dalszym ciągu kilka przykładów z Bachelarda.

(α) Stawianie doświadczenia i jego bezpośredniej obserwacji przed i ponad krytyczną analizą. Opieranie się i podporządkowywanie wiedzy świadectwu zmysłów. Pewne konkretne przykłady objawiania się tej przeszkody odnajduje Bachelard w rozwoju nauki o elektryczności: „Czytając liczne książki poświęcone nauce o elektryczności XVIII w., dzisiejszy czytelnik będzie mógł zdać sobie sprawę z trudności, jakie mieli uczeni tego okresu w porzuceniu malowniczości pierwszej obserwacji, w odbarwieniu zjawisk elektrycznych, w uwolnieniu doświadczenia od jego cech pasożytniczych, od jego nieregularnych aspektów. Jasno wtedy ujrzymy, że pierwsze empiryczne uchwycenię zjawisk nie daje nawet ich właściwego rysunku, właściwego opisu, ani nawet opisu uporządkowanego, hierarchicznego" (str. 29).

Bachelard cytuje pogląd Priestleya (1771 r.): „Doświadczenia elektryczne są najbardziej jasne i najprzyjemniejsze ze wszystkich tych, których dostarcza fizyka", wskazując na podstawy filozoficzne jego poglądów: ewidentny i dogłębny empiryzm. Zjawisko wystarczy opisywać tak, jak się je widzi, nie potrzebne jest poszukiwanie praw. Zresztą odkrywanie zjawisk jest procesem całkowicie losowym. W opisie swoich wyników Priestley starannie zaciera wszelkie ślady powiązań teoretycznych, które naprowadziły go na te wyniki. Wszystkie wzory mają być wzorami empirycznymi, tzn. zbiorami oczekujących liczb, które wystarczy podstawić w każdym szczególnym przypadku.

Ta postawa prowadzi do nieświadomości myśli naukowej, tzn. nieświadomości podstaw, na których się opiera. Trzeba wtedy reak-

tywować krytykę i skonfrontować wiedzę z warunkami, które ją powołały do życia, ciągle powracać do podstaw. Żeby naprawdę można było mówić o racjonalizacji jakiegoś doświadczenia, nie wystarczy znaleźć przyczyny dla faktów. Doświadczenie musi być włączone w cały system różnych przyczyn. „Taka teoria racjonalizacji dyskursywnej i kompleksowej ma przeciwko sobie dawne, z góry przyjęte przekonania, potrzebę natychmiastowej odpowiedzi, potrzebę wychodzenia z pewników i słodką wiarę w twierdzenie odwrotne, że wiedza, z której się wyszło jest wiedzą pewną" (str. 41).

(β) „Wiedza ogólna jako przeszkoda dla wiedzy naukowej - wynik myślenia usystematyzowanego". Jest to przeszkoda w pewnym sensie przeciwna do pierwszej: pośpieszne poszukiwanie praw ogólnych. Obserwowanie rzeczywistości w funkcji teorii, którą się przyjmuje za podstawę, przeciwstawia się bezpośredniemu empiryzmowi bez intelektualnego wysiłku organizacji (str. 5, 6, 20). Polega ona na kładzeniu u podstaw kultury naukowej jak największych uogólnień: „U podstaw mechaniki: wszystkie ciała spadają. U podstaw optyki: wszystkie promienie świetlne rozchodzą się po liniach prostych. U podstaw biologii: wszystkie istoty żywe są śmiertelne (...) można zastanawiać się, czy te wielkie prawa stanowią naprawdę myśli naukowe lub, co jest dla nas tym samym, czy są to myśli sugerujące inne myśli. Jeśli jako miarę wartości epistemologicznej tych wielkich prawd weźmiemy ich porównanie z wadliwą wiedzą, którą zastąpiły, to nie ma wątpliwości, że były one stymulujące. Ale już nie są. W istocie, blokują one myśl. Odpowiadają *en bloc*, lub odpowiadają na pytania, zanim pytania zostały postawione (...) I oto wynik poddania się czarowi tej zbyt szybkiej odpowiedzi: dla umysłu przednaukowego czasownik 'spadać' wystarczająco opisuje zjawisko, daje istotę fenomenu spadania. W gruncie rzeczy, tak jak to często mówiono, te ogólne prawa definiują bardziej słowa niż rzeczy" (str. 57).

Przeszkoda ta może objawiać się także przyjmowaniem bardzo ogólnych praw czy podstaw filozoficznych, rozwiązywaniem wszystkich trudności przed odwołanie się do jakiejś jednej, ogólnej wizji świata, jakiegoś ogólnego prawa przyrody. „I tak, w XVIII w. idea Natury jednorodnej, harmonijnej, wszechwładnej zacierała wszystkie osobliwości, wszystkie sprzeczności, wszelką nieprzyjazność doś-

wiadczenia" (str. 83). „Dla umysłu przednaukowego, urok jedności wyjaśnienia zjawisk poprzez jeden rys jest wszechmocny. Oto przykład. W 1786 r. pojawia się książka hrabiego de Tressan. Książka ta pretenduje do wyjaśniania wszelkich zjawisk Wszechświata przez działanie fluidu elektrycznego. Zasadniczą własnością fluidu elektrycznego jest dążenie do równowagi z samym sobą. Odtąd, tam gdzie jest równowaga, jest z konieczności obecność elektryczności" (str. 94).

Jakie wyjście proponuje Bachelard z tych dwóch przeszkód? W przypadku pierwszej przeszkody myśl redukuje się do asymilacji faktu (connaissance en comprehension); w przypadku drugiej - myśl rozszerza wiedzę o zaobserwowanym fakcie (connaissance en extension). Pokonanie obu przeszkód powinno zaowocować myślą empiryczną i twórczą zarazem. Pojęcie, które tego rodzaju myśl będzie tworzyła, powinno mieć moc przekształcania się. Znaczy to, że w wyniku np. konieczności objęcia większej liczby faktów eksperymentalnych, lub rozszerzenia, zorganizowania wiedzy o nich, będzie istniała możliwość rewizji pierwotnej formy i, jeśli zajdzie potrzeba, przekształcenie pojęcia. Pokonanie obu przeszkód pozwala na ciągłe rewidowanie tworzonych pojęć, sprawdzanie ich stosowalności, wcielanie warunków stosowalności w samo znaczenie pojęcia. W tym właśnie tkwi istota nowego racjonalizmu, odpowiadającego silnemu związkowi doświadczenia i rozumu. Klasyczny podział wiedzy na teoretyczną i stosowaną, który oddzielał teorię od jej zastosowań, ignorował tę konieczność wcielania warunków zastosowania w samą istotę teorii (str. 61).

Kolejne przykłady dotyczą przeszkód bardziej konkretnych, wynikających częściowo z dwóch pierwszych, ogólnych przeszkód.

(γ) „Przeszkoda werbalna" polegająca na używaniu do opisu zjawisk metafor odwołujących się do znajomych, swojskich obrazów i odczuć. Np. „powietrze jest gąbką". Stąd wynika, że daje się rozszerzać i sprężać, że jest zdolne do absorbcji substancji płynnych. Bachelard cytuje cały ustęp z Réaumura (1731, str. 281, 'Mémoires de l'Académie Royale des Sciences'): „Zwykle porównuje się powietrze do bawełny, wełny czy gąbki; jest ono jeszcze bardziej gąbczaste niż wszystkie rzeczy, do których można by je porównać. Jest to dobrze pasująca idea, wyjaśniającą, dlaczego powietrze daje się

w znaczny sposób sprężać, dlaczego może być rozrzedzone i pojawiać się w objętościach znacznie większych niż te, w których widzieliśmy je przedtem". Metafory „gąbki" używał także Franklin do wyjaśniania zjawisk elektrycznych: środowisko, w którym płynie prąd można porównać do gąbki (str. 75).

(δ) „Przeszkoda animistyczna", która fetyszyzuje życie: zjawiska biologiczne służą do wyjaśniania zjawisk fizycznych. Poszukuje się podobieństw nie tylko między światem zwierzęcym a światem roślinnym, ale także między światem zwierzęcym a światem minerałów. Np. magnetyzm jest tłumaczony przepływem pewnego płynu w porach magnesu (str. 162). Także przypisywanie szczególnej roli procesowi trawienia i wyjaśnianie zjawisk fizycznych przez ten proces jest objawem tej przeszkody. Bachelard cytuje Hecqueta: „woda, która nie daje się sprężać, wyznacza ciśnienia we wnętrzościach Ziemi i ułatwia trawienie mineralne" (str. 177).

(ε) „Przeszkoda pragmatyczna" - uzasadnianie istnienia zjawisk przez ich użyteczność: „W XVIII w. usprawiedliwienie użytecznością było najbardziej naturalne (...) I tak Voltaire widział jasno sens ruchu rocznego i dziennego Ziemi, dzięki ich użyteczności" (str. 93).

Wg Bachelarda przeszkody (γ), (δ), (ε) są bardzo silnymi przeszkodami w rozwoju nauk przyrodniczych, tym silniejszymi, że odpowiadają intuicji filozofii realistycznej" (str. 82).

W przedostatnim rozdziale Bachelard wskazuje na kilka przeszkód, które wiążą się z podstawami matematycznymi nauk przyrodniczych, a szczególnie fizyki. Mamy tu do czynienia z dwiema przeciwstawnymi grupami przeszkód: „przeszkody wiedzy jakościowej" i „przeszkody wiedzy ilościowej".

(φ) P r z e s z k o d y w i e d z y j a k o ś c i o w e j.

(φ1) Odrzucanie matematyki jako środka opisu zjawisk fizycznych, oddzielanie matematyki od fizyki. Np. Newtonowi zarzucano, że jego fizyka jest zbyt matematyczna czy zmatematyzowana, a zatem niczego nie wyjaśnia (str. 231).

(φ2) Brak poczucia skali wielkości:

Przyczynowe łączenie zjawisk najbardziej odległych (tak jak to robi np. astrologia), przenoszenie praw rządzących mikroświatem na prawa rządzące kosmosem i na odwrót.

- Odmawianie „prawa do zaniedbywania" metodom badań naukowych, podczas gdy w każdym badanym zjawisku jest znaczna liczba okoliczności, które nie mają wpływu na to zjawisko. Np. kolor pocisku nie jest istotny w jego własnościach balistycznych. Prawo to jest szczególnie ważne w dzisiejszej technice: każdy aparat pomiarowy może być opisany przez podanie warunków, które zaniedbuje, i technikę tego zaniedbywania (str. 222).

Bachelard wypowiada następnie myśli, która może być interesująca dla matematyka: „Prawo do zaniedbywania jest, w sposób oczywisty, podstawą rachunku różniczkowego. Tam jest ono naprawdę koniecznością udowodnioną. Dlatego tak dziwne są uwagi Ojca Castel, spóźnionego kartezjańczyka. Zauważa on u Newtona często występujące wyrażenie 'co można zaniedbać' i żywo je potępia, powtarzając w ten sposób w świecie ilości, w którym bezapelacyjnie tryumfuje prawo do zaniedbywania, ataki, które wcale nie są bardziej uzasadnione w świecie jakości" (str. 223).

Niezależnie od powodów, dla których ów Pere Castel potępiał „prawo do zaniedbywania" w rachunku różniczkowym, jest faktem, że sam Newton w *Principiach* odrzucał to prawo jako podstawę swojej analizy, dążąc do zbudowania jej w oparciu o pojęcie „ostatnich stosunków", zbliżone do pojęcia granicy. Zauważał on niebezpieczeństwa stosowania tego prawa: może ono prowadzić do uznawania zbieżności każdego szeregu, którego wyraz ogólny dąży do zera. Prawo to mogło być przyczyną uznania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ przez Eulera.

Chcielibyśmy uznać „prawo do zaniedbywania" za przeszkodę w matematyce klasycznej (Sierpińska, 1983). U podstaw tej przeszkody leży m.in. brak poczucia skali wielkości w świecie wielkości nieskończenie małych.

(Ψ) P r z e s z k o d y w i e d z y i l o ś c i o w e j.

Bachelard wyróżnia tu dwie przeciwstawne przeszkody:

(Ψ1) Matematyzacja zbyt mętna. Oto jej przykład: Encyklopedia (Art. Crystal d'Islande, tekst dotyczący podwójnej refrakcji wiązki promieni przechodzących przez szpat islandzki): „Z tych dwóch promieni jeden jest zgodny ze zwykłym prawem: sinus kąta padania z powietrza do kryształu ma się do sinusa kąta refrakcji jak 5 do 3. Jeżeli zaś chodzi o drugi promień, to załamuje się on według pewnego szczególnego prawa." I to wszystko (str. 226).

(ψ2) Matematyzacja zbyt ścisła lub fałszywie ścisła. Objawem tej przeszkody była tzw. fizyka kartezjańska, którą określano jako fizykę matematyczną bez matematyki. Także - branie pod uwagę siedmiu cyfr po przecinku w obliczeniach przy bardzo nieprecyzyjnie określonych zjawiskach, w rozwiązywaniu niestabilnych układów równań.

Refleksja pedagogiczna Bacheladra: „Zadania maturalne z fizyki stanowią niewyczerpaną kopalnię przykładów tej źle uzasadnionej precyzji w obliczeniach. Większość zastosowań numerycznych prowadzi się bez zastanowienia nad problemem błędu. Wystarczy, żeby jakieś dzielenie nie „wychodziło dokładnie", by kandydat wpadał w panikę. Będzie uporczywie wykonywał niekończące się dzielenia, by znaleźć wynik dokładny. Jeżeli się zatrzymuje, to dlatego, iż wierzy, że wartość rozwiązania mierzy się liczbą cyfr po przecinku, które wyznaczył. Nie zastanawia się, że precyzja wyniku, jeśli przekracza precyzję danych wyjściowych jest niczym innym, jak wyznaczeniem próżni (...) Często, w celu nauczenia zdrowego rachunku przybliżonego dawałem moim uczniom następujące proste zadanie: obliczyć z dokładnością 1 cm średni promień dębu o obwodzie 150 cm. Większość uczniów używała przybliżenia liczby $\pi \approx 3,1416$, co jaskrawo odbiega od możliwej dokładności" (s. 214).

Przykładem zbyt mętnej matematyzacji jest, wskazuje Bachelard, także uproszczone geometryczne widzenie zjawisk, zniewalające intuicję: „I tak, dopóki ograniczamy się do ogólnych sformułowań praw Keplera, można mieć pewność, że będzie się fałszywie zrozumianym. Powodem tego jest, że dla umysłu przednaukowego, o elipsach zakreślanych przez planety myśli się jak o pochodzących od okręgu, który pozostaje formą czystą, naturalną, wartościową (...) elipsa jest okręgiem spłaszczonym, źle narysowanym (...) w takiej intuicji, elipsa jest już perturbacją, rezultatem wypadku. Ta koncepcja jest szczególnie jasna w systemie Nicolasa Hartsoekera, który w *Conjectures physiques* z 1706 r. wiąże eliptyczność orbity z zaburzeniami ziemskiki, analogicznymi do trzęsień ziemi" (str. 232-233).

Z tego naiwnie topologicznego widzenia form geometrycznych wynikają takie geometryczne twierdzenia jak to, które wypowiedział Voltaire (1828): „Okrąg zmieniony w owal nie powiększa, ani nie zmniejsza swojej powierzchni" (str. 233).

W sformułowaniu własności D (str. 12) odwołujemy się do teorii Kuhna rozwoju nauki w procesie następujących po sobie stanów normalnych nauki i rewolucji naukowych (Kuhn, 1962). W czasie stanów normalnych nauką rządzi paradygmat, czyli „ogólnie uznane osiągnięcia naukowe, które przez jakiś czas stanowią modelowe problemy i ich rozwiązania dla pewnej wspólnoty praktyków" (ibidem, str. x). Paradygmat jest osiągnięciem naukowym dostatecznie bezprecedensowym, by na trwałe przeciągnąć na swoją stronę grupę zwolenników, i dostatecznie otwartym, by nowo powstała grupa praktyków miała co rozwiązywać. Znaczy to, że pewne zaakceptowane przykłady rzeczywistej naukowej praktyki, przykłady zawierające prawidła, teorię, zastosowania i oprzyrządowanie jednocześnie, dostarczają modeli, z których wyrastają poszczególne spójne tradycje badań naukowych. Są to tradycje takie jak te, które historycy nazywają „astronomią ptolemejską" lub „astronomią kopernikańską", „dynamiką arystotelesowską" lub „dynamiką newtonowską", „optyką korpuskularną" lub „optyką falową", itp.

Dojrzała nauka charakteryzuje się obecnością paradygmatu. Nie znaczy to, że nie istnieją badania naukowe w okresie preparadygmatycznym nauki, ale w tym okresie można co najwyżej mówić o istnieniu różnych szkół. Jako przykładem, Kuhn posługuje się optyką przed-Newtonowską: „Żaden okres od najdawniejszej Starożytności do końca XVII w. nie wykazywał jakiegoś jednego, ogólnie akceptowanego poglądu na naturę światła. Zamiast tego był cały szereg rywalizujących szkół i podszkół, reprezentujących różne odcienie teorii epikurejskiej, arystotelesowskiej czy platońskiej. Każda z tych szkół czerpała swą siłę z jakiejś szczególnej metafizyki i każda podkreślała, jako obserwację paradygmatyczną, tę grupę zjawisk optycznych, którą najlepiej potrafiła wyjaśnić. Z innymi zjawiskami radzono sobie za pomocą opracowań robionych *ad hoc*, albo pozostawiano je jako ważne problemy do przyszłych badań" (str. 13). Chociaż Kuhn odmawia tym szkołom miana nauki, to przyznaje, że ludzie, którzy te szkoły tworzyli, przyczyniali się istotnie do rozwoju nauki, i każde określenie naukowca, które wykluczałoby ich, musiałoby także wykluczać ludzi tworzących naukę w okresie paradygmatu. A zatem: bez paradygmatu nie ma nauki, chociaż można mówić o działalności naukowej (patrz także Freudenthal, 1978).

W dalszym ciągu Kuhn podaje przykład z historii elektryczności w pierwszej połowie XVIII w., przykład ulubiony także przez Bachelarda. Jest duże podobieństwo w doborze przykładów u obu autorów, trochę inny język opisu i pewne różnice w ocenie. Tam, gdzie Bachelard mówi „stan przednaukowy", Kuhn używa wyrażenia „stan preparadygmatyczny", z tym, że np. Bachelard zalicza Franklina jeszcze do okresu przednaukowego, winiąc go za stosowanie metafory gąbki do wyjaśniania zjawisk elektrycznych, natomiast Kuhn mówi o paradygmacie franklinowskim.

Kuhn twierdzi (str. 15), że pierwsze trwałe paradygmaty w matematyce datują się od czasów prehistorycznych. Dowodzić tego ma fakt, że teksty matematyczne od bardzo dawna były zrozumiałe tylko dla specjalistów. Po prostu: istniał pewien ustalony paradygmat i donosząc o swoich wynikach matematyk nie musiał wykładać od podstaw swojej teorii, gdyż te podstawy były wspólne dla wszystkich matematyków w danym okresie.

Nie ma co mówić, wobec tego, o okresie przednaukowym w matematyce, a skoro Bachelard widzi przeszkody tylko w takim okresie, to nie ma co mówić o przeszkodach w matematyce.

My jednak nie chcemy się zgodzić ze zdaniem, że przeszkody epistemologiczne w rozwoju wiedzy naukowej występują jedynie w okresie poprzedzającym przyjęcie paradygmatu. Oczywiście, żadna z przeszkód, o których mówi Bachelard, poza pewnymi aspektami przeszkód (φ) i (ψ) (str. 17-19) nie daje się bezpośrednio zastosować do wiedzy matematycznej czy działalności naukowej w matematyce. Wydaje się jednak, że w przypadku nauki, której rozwojem od zarania dziejów rządził paradygmat, przeszkód epistemologicznych należałoby szukać, tak jak zaznaczyliśmy to we własności D, w bardziej lub mniej jawnych założeniach, regułach, zasadach matematycznych lub filozoficznych paradygmatu, i to założeniach na tyle mocnych, że odrzucenie paradygmatu wiąże się z odrzuceniem tych założeń. Są to założenia winne niewystarczalności paradygmatu, choć nie muszą być uświadamiane przez ogół praktyków tego paradygmatu.

Prawo do takiego rozszerzenia pojęcia przeszkody epistemologicznej w sensie Bachelarda dają nam uwagi, które zamieścił on w ostatnim, podsumowującym rozdziale. Bachelard wskazuje na istnienie już w latach trzydziestych intuicji takiej teorii rozwoju nau-

ki, jaką w swojej pracy ostatecznie przedstawił Kuhn: chodzi tu o zachętę, sformułowaną przez filozofa Lalande, do systematycznego badania w historii nauki okresów, w których „rozum odczuwa satysfakcję" i okresów, w których „rozum czuje się zakłopotany".

A jednak paradygmaty (a więc i przeszkody epistemologiczne) są nie do uniknięcia w rozwoju nauki: są one budulcem wiedzy i działalności naukowej (Kuhn, 1962, str. 108-109; także str. 43 tego artykułu). Także dla Brousseau jest to ważna, szczególnie w jego zastosowaniu do nauczania, własność pojęcia przeszkody epistemologicznej. Wyraziliśmy to we własności A (str. 12).

Chcielibyśmy więc szukać przeszkód epistemologicznych w matematyce wśród tych nierzadko ukrytych założeń, reguł lub zasad paradygmatu w stanie normalnym nauki.

Poszukiwania te nie są łatwe i mogą prowadzić do frustracji, zauważa Kuhn:

„Mimo zdarzających się dwuznaczności, paradygmaty dojrzałej nauki są dosyć łatwe do odkrycia. Wyznaczenie paradygmatów podzielanych przez pewną wspólnotę praktyków nie jest jednak tym samym, co wyznaczenie podzielanych reguł. Wymaga to kolejnego kroku, i to kroku nieco innego rodzaju. Kiedy historyk podejmuje się takiego badania, musi porównać paradygmaty danej wspólnoty jedne z drugimi oraz z bieżącymi pracami badawczymi. Jego celem w tej pracy jest określenie, jakie dające się wyizolować elementy, jawne lub nie, członkowie tej wspólnoty mogli wyabstrachować ze swoich bardziej globalnych paradygmatów i rozwinąć jako reguły w badaniach. Każdy, kto próbował opisać lub analizować ewolucję jakiejś szczególnej tradycji naukowej, musiał z konieczności poszukiwać tego rodzaju akceptowanych reguł lub zasad (...) Ale (...) z pewnością te poszukiwania były dla niego i trudniejsze, i mniej dające zadowolenia niż poszukiwanie paradygmatów (...) Reguły te z pewnością nie były akceptowane przez wszystkich członków badanej wspólnoty jednakowo, być może nawet były przez niektórych odrzucane. Jeżeli jednak spójność danej tradycji naukowej ma być rozumiana w terminach reguł, to pewna specyfikacja wspólnych podstaw w odpowiedniej dziedzinie jest potrzebna. W rezultacie, poszukiwanie zbioru reguł mogących stanowić podstawy danej tradycji badań naukowych są źródłem nieustającej frustracji" (Kuhn, 1962, str. 43-44).

Przyczyn trudności w odkrywaniu tych reguł i zasad Kuhn proponuje szukać w 1^{o} nieuświadamianiu sobie tych reguł przez członków wspólnoty naukowej pracującej w ramach jednego paradygmatu; ponadto, 2^{o} paradygmat jest pierwotny w stosunku do tych reguł, które mogłyby być jednoznacznie z niego wyabstrahowane: można prowadzić badania w ramach paradygmatu nie będąc świadomym reguł nim rządzących; 3^{o} ten sam paradygmat może być różnie interpretowany przez różne grupy specjalistów praktykujących w nim (ibidem, str. 45-46).

Reguły, założenia i zasady paradygmatu ujawniają się i zostają uświadomione tuż przed i w czasie rewolucji naukowych, w okresach, kiedy paradygmat jest najpierw atakowany, a następnie poddawany zmianom. Kuhn podaje tu przykłady szerokich dyskusji w okresie przejścia od mechaniki newtonowskiej do kwantowej, które dotyczyły samych podstaw, standardów w fizyce. Podobne dyskusje wywoływała asymilacja mechaniki Galileusza i Newtona lub teorii elektromagnetyzmu Maxwella.

Spektakularnym, często przytaczanym przykładem z historii matematyki jest spór między Eulerem a d'Alembertem o pojęcie funkcji, który zaowocował sformułowaniem definicji pojęcia funkcji, choć nie za życia przeciwników w tym sporze. Dyskusja ujawniła wszystkie ukryte koncepcje pojęcia funkcji, którymi posługiwali się matematycy od XVII w., sprzeczności między nimi, niewystarczalność w różnych nowych sytuacjach, które się pojawiły. Debata trwała cały wiek XIX, definicja Dirichleta nie zadowalała wszystkich, matematycy podzielili się na dwa obozy, z których jeden żądał, by określenie funkcji podawało regułę pozwalającą dla każdego x obliczyć odpowiadające mu y, inni uważali, że domaganie się takiej reguły jest zbędne. Dyskusję zamknęła definicja Peano z 1905 r., choć także nie zadowoliła wszystkich (Sziłow, 1965).

Do własności A-D przeszkody epistemologicznej dopiszmy więc jeszcze jedną:

E. Hipotezy-przeszkody w danym paradygmacie czy tradycji naukowej nie muszą być w sposób jawny sformułowane lub nawet uświadomione przez członków społeczności naukowej, która podziela ten paradygmat czy tradycję. Przeszkoda epistemologiczna może ujawnić się w okresie przed lub w trakcie rewolucji naukowej, kiedy dawny paradygmat jest atakowany i krytykowany i szuka się przyczyn sprze-

czności i niewystarczalności. Badane są wtedy podstawy paradygmatu i winna hipoteza może być odkryta. Ale może ona być dopiero odkryta w wielu wieków po odrzuceniu paradygmatu, z perspektywy, która pozwala ogarnąć szerszy obszar problemów.

Jest jedno miejsce w pracy Kuhna, które warto tu zacytować jako dobrze oddające ideę przeszkody epistemologicznej:

„Skoro nowe paradygmaty rodzą się, z konieczności, z dawnych, to zawierają wiele z dawnego słownictwa, aparatu, zarówno pojęciowego, jak manipulacyjnego używanego przez poprzedni paradygmat. Ale rzadko nowy paradygmat posługuje się tymi elementami w tradycyjny sposób. W ramach nowego paradygmatu stare terminy, pojęcia i doświadczenia wchodzą w nowe związki. Nieuniknionym tego rezultatem jest to, co musimy nazwać, choć termin na pewno nie jest dobry, nieporozumieniem pomiędzy rywalizującymi szkołami. Laicy, którzy oburzali się na ogólną teorię względności Einsteina, ponieważ 'przestrzeń nie może ulegać zakrzywieniu' - to nie była rzecz tego rodzaju - nie byli po prostu w błędzie lub nie mieli racji. Nie byli w błędzie także matematycy, fizycy i filozofowie, którzy starali się rozwinąć euklidesową wersję teorii Einsteina. To, co przedtem nazywano przestrzenią, było koniecznie płaskie, jednorodne, izotropowe i niewrażliwe na obecność materii. Gdyby takie nie było, fizyka Newtona nie działałaby. Aby możliwe było przejście do świata Einsteina, cała siatka pojęciowa, której nitkami są przestrzeń, czas, materia, siła, itd. musiała być przesunięta, zmieniona i rozciągnięta na całą przyrodę. Tylko ci, którzy przeszli tę przemianę, lub którym nie udało się jej przejść, mogliby dokładnie odkryć, z czym się zgodzili lub nie zgodzili. Porozumienie ponad rewolucyjnym podziałem jest, z konieczności, częściowe. Rozważmy, jako inny przykład, ludzi, którzy nazwali Kopernika szalonym, ponieważ ogłosił on, że Ziemia jest w ruchu. Nie byli oni po prostu w błędzie lub zupełnie w błędzie. Częściowo to, co rozumieli oni przez 'Ziemię', było: 'ustalona pozycja'. Przynajmniej ich Ziemia nie mogła być w ruchu. I odpowiednio: inowacja Kopernika nie polegała po prostu na poruszeniu Ziemi. To był raczej zupełnie nowy sposób patrzenia na problemy fizyki i astronomii, sposób, który z konieczności zmienił znaczenia zarówno 'Ziemi' jak 'ruchu'. Bez tych zmian koncepcja Ziemi będącej w ruchu jest szalona. Z drugiej

strony, z chwilą, gdy te zmiany zostały dokonane i zrozumiane, tak Descarts jak Huyghens mogli zdać sobie sprawę, że kwestia ruchu Ziemi jest pozbawiona treści dla nauki" (ibidem, str. 148).

Kuhn wskazuje tu inne spojrzenie na błędy, które odkrywamy w historii nauki. Te błędy mogą świadczyć o przywiązaniu do innego paradygmatu, o innym rozumieniu tych samych terminów. Widzieliśmy to w podanych na wstępie przykładach z historii matematyki, szczególnie w analizie „błędów" Cauchy'ego.

Interesująca jest ostatnia uwaga Kuhna: czasami pojęcia lub problemy, na temat których toczą się w czasie rewolucji naukowych wielkie boje, okazują się bez znaczenia w dalszym rozwoju nauki. Przypomina się tu historia pojęcia nieskończenie małej, które wzniecało wiele dyskusji, a które okazało się zbędne dla zbudowania analizy klasycznej. Podobnie stało się z kwestią osiągania czy nie osiągania granicy (Sierpińska, 1983).

(b) *Bachelard mówił o przeszkodach epistemologicznych tylko w naukach przyrodniczych; matematyka nauką przyrodniczą nie jest.*

Bachelard wyłączał matematykę spod piętna przeszkód epistemologicznych. W *La formation de l'esprit scientifique* (1938) Bachelard pisze: „Rozwój wiedzy matematycznej różni się bardzo od rozwoju myśli naukowej w jej wysiłku zrozumienia zjawisk fizycznych. W istocie, historia matematyki jest cudem regularności. Są w niej okresy stagnacji, nie ma okresów błędów. Żadna więc z tez, których bronimy tutaj, nie odnosi się do wiedzy matematycznej" (str. 22).

Istnieje jednak stanowisko filozoficzne, coraz chętniej ostatnio wypowiadane (często zresztą w kontekście badań nad nauczaniem matematyki), które podkreśla empiryczny i społeczny aspekt matematyki jako działalności naukowej[1].

Stanowisko to daje nam prawo rozważania przeszkód epistemologicznych także w matematyce. Określił je Lakatos w książce *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*

(1) Bogato opatrzone cytatami uzasadnienie tego stanowiska i jego implikacje dla nauczania matematyki znajdzie Czytelnik w artykule H.G. Steinera (Steiner, 1983). Ryzykując nawet pewne powtórzenie cytatów, zdecydowaliśmy się na obszerniejsze omówienie poglądów Lakatosa, ze względu na ich głębokie związki z pojęciem przeszkody epistemologicznej i wynikający z nich pewien program badawczy, do omówienia którego zmierzamy.

(Lakatos, 1978$_1$), powołując się na takich myślicieli, jak Russell, Gödel, Weyl, Kalmár, Mostowski i, choć z Popperem polemizuje, to przyznaje, że ideę rozważania badań matematycznych raczej w kontekście odkrycia niż uzasadniania wziął od Poppera właśnie.

Pogląd filozoficzny uznający empiryczny charakter działalności matematycznej traktuje świat wiedzy matematycznej jako świat autonomiczny. Według Poppera, najbardziej typowym przykładem są liczby naturalne:

„Niech mi Kronecker wybaczy, ale zgadzam się z Brouwerem, że ciąg liczb naturalnych jest tworem ludzkiego umysłu. Ale, chociaż stworzyliśmy ten ciąg, to on z kolei tworzy swoje własne autonomiczne problemy. Rozróżnienie między liczbami parzystymi a nieparzystymi nie zostało stworzone przez nas: jest ono niezamierzoną i nieuniknioną konsekwencją naszego tworzenia. Podobnie, liczby pierwsze są oczywiście faktem obiektywnym, i ich autonomia także nie jest zamierzona; a w przypadku liczb pierwszych jest jeszcze bardzo dużo do odkrycia: istnieją przypuszczenia takie jak hipoteza Goldbacha. I te hipotezy, chociaż odnoszą się pośrednio do wytworów naszego umysłu, to dotyczą bezpośrednio problemów i faktów, które w pewnym sensie oderwały się od tego, co sami stworzyliśmy, których nie możemy kontrolować, i na które nie mamy wpływu: są to surowe fakty i prawda ich dotycząca nie jest łatwa do odkrycia (Popper, 1972, str. 131-132)".

Wobec takiej postawy powstaje pytanie: jaki jest związek między matematyką a językiem matematyki? Jest bowiem jasne, że dla Poppera matematyka nie jest tylko formalną grą lingwistyczną, czyli, innymi słowy, że istnieje dla niego coś takiego jak pozajęzykowe obiekty matematyczne, tzn. myśli, czy raczej treści myśli. Otóż dla Poppera język matematyki powstaje jednocześnie i w interakcji z matematycznymi konstrukcjami myślowymi:

„Nie może istnieć konstrukcja myślowa bez stałej krytycznej kontroli i nie może istnieć krytyka bez transpozycji naszych konstrukcji myślowych w postaci językowej, bez traktowania ich jako przedmiotów świata trzeciego. Chociaż świat trzeci nie jest tożsamy ze światem form językowych, to rodzi się on wraz z językiem argumentacji: jest podproduktem języka. To wyjaśnia, dlaczego z chwilą, gdy nasza konstrukcja myślowa staje się problematyką, zostaje

usystematyzowana i zaksjomatyzowana; język także może stać się problematyką, gałęzią konstrukcji matematycznej. Chyba właśnie to chciał powiedzieć prof. Myhill w swojej znanej uwadze: »nasze formalizacje korygują nasze intuicje, zaś nasze intuicje nadają formę naszym formalizacjom«" (Popper, 1972, str. 151-152).

Zasługą Poppera jest to, iż odwrócił on tradycyjny problem logiki indukcyjnej: jak wyprowadzić ogólne prawa z poszczególnych doświadczeń i obserwacji, twierdząc, że teorie naukowe są raczej wynajdywane (invented) jako hipotezy, spekulacje lub przypuszczenia, które są następnie poddawane eksperymentalnym testom, za pomocą których krytycy tych hipotez chcieliby je obalić. Teorie naukowe nie są wyprowadzane indukcyjnie z faktów i nie jest potrzebne uzasadnianie praw naukowych za pomocą praw rozumowania indukcyjnego. Wg Poppera, teorię można uznać za naukową; jeżeli jest falsyfikowalna, tzn. jeżeli istnieje test, który może ją obalić (Davis, 1981, str. 345).

Lakatos próbował wykazać (m.in. w *Proofs and refutations*), że „nieformalna teoria matematyczna jest nauką w sensie Poppera, tzn. że rozwija się w procesie następujących po sobie krytyk i naprawy teorii i przez wysuwanie nowych rywalizujących teorii (co odbiega od dedukcyjnego schematu matematyki sformalizowanej). (...) Matematyka także, tak jak nauki przyrodnicze, jest zawodna, nie jest niepodważalna. Teorie matematyczne nie są nigdy całkowicie wolne od dwuznaczności lub możliwości błędu czy przeoczenia. Wychodząc od problemu lub hipotezy rozpoczyna się jednoczesne poszukiwanie dowodów i kontrprzykładów. Nowe dowody wyjaśniają dawne kontrprzykłady, nowe kontrprzykłady podważają dawne dowody. Dla Lakatosa 'dowód' w tym kontekście nieformalnej matematyki nie oznacza mechanicznej procedury, która niesie prawdę poprzez niezbity łańcuch implikacji od założeń do wniosków. Raczej 'dowodzić' znaczy uzasadniać, wyjaśniać, szukać środków, by hipoteza stała się bardziej prawdopodobna, bardziej przekonująca, stając się jednocześnie dokładniej sformułowana pod naciskiem kontrprzykładów" (ibidem, str. 347). Dowodzenie byłoby więc aktywnością o charakterze społecznym, gdyż potrzebne jest tu uzgodnienie pewnego wspólnego stanowiska, systemu wartości w grupie matematyków, specjalistów w danej dziedzinie.

Autorzy książki *The mathematical experience* (Davis, 1981) znajdują jaskrawy przykład na to, jak mimo wszystko przemożny wpływ na nasze myślenie o matematyce ma ideologia formalistyczna, u samych redaktorów eseju *Proofs and refutations* - Johna Woralla i Ellie Zahara. Otóż redaktorzy ci uznali za konieczne opatrzenie zdania Lakatosa: 'trzeba zarzucić myśl, że nasza dedukcyjna intuicja wnioskowania jest niezawodna' następującym komentarzem:

»To zdanie wydaje nam się mylne i nie wątpimy, że sam Lakatos, który miał wysokie mniemanie o formalnej logice dedukcyjnej, zmieniłby je. Logika pierwszego rzędu doszła do takiej charakteryzacji prawidłowego wywodu, która czyni taki wywód zasadniczo niepodważalnym«. (Po takiej uwadze) nieuprzedzony czytelnik mógłby dojść do wniosku, że dzisiejsza praktyka matematyczna osiągnęła etap, w którym nie ma już miejsca na błąd w decyzji, czy dany dowód jest prawidłowy czy nie. Twierdzą oni (Worall i Zahar), że nowoczesny formalny dowód dedukcyjny jest nieomylny, tak że jedynym źródłem wątpienia o prawdziwości wniosku jest podważenie prawdziwości założeń. Jeżeli patrzymy na twierdzenie, nie jako na stwierdzenie jego tezy, lecz jako na zdanie warunkowe: »jeżeli hipotezy są prawdziwe, to wnioski są prawdziwe«, to w tej warunkowej formie - mówią Worall i Zahar - osiągnięcia logiki pierwszego rzędu czynią tę prawdę niepodważalną. W tym sensie, mówią, teoria »zawodności« Lakatosa jest fałszywa. W mojej opinii, Lakatos ma rację; Worall i Zahar są w błędzie. Co dziwniejsze, ich zastrzeżenie ma swoje korzenie dokładnie w tym błędzie, który Lakatos atakuje - mianowicie w błędzie utożsamiania samej matematyki (czyli tego, co prawdziwi matematycy uprawiają w rzeczywistym świecie) z jej modelem lub reprezentacją w metamatematyce, lub, jeśli wolicie, w logice pierwszego rzędu. (...) Worall i Zahar nie zauważają, że formalne dowodzenie w logice pierwszego rzędu jest działalnością czysto hipotetyczną (poza dowodami dla zabawy w nauczaniu logiki). W rzeczywistości, dowody są ustalane przez consensus specjalistów, ale nawet wśród specjalistów nie ma zgodności opinii, co do poprawności czy pełności dowodu. Wątpliwości są rozwiewane przez przekazywanie i wyjaśnianie dowodu, nigdy zaś przez przełożenie dowodu na język rachunku predykatów pierwszego rzędu. Jeśli twierdzenie jest szeroko znane i używane, jego dowód często studiowany, jeśli wynajdywane są dowody alternatywne,

jeśli twierdzenie ma znane zastosowania i uogólnienia i jeśli twierdzenie jest analogiczne do znanych rezultatów w bliskich dziedzinach, to zaczyna być uważane za »twardą podstawę«. W tym sensie twardą podstawą są arytmetyka i geometria euklidesowa" (Davis, 1981, str. 354).

Dla Lakatosa empiryczny charakter matematyki wyraża się w rodzaju teoretycznych powiązań między teorią mnogości lub innymi teoriami należącymi do podstaw matematyki a, powiedzmy, klasyczną analizą. Powiązania te są „quasi-empiryczne", nie zaś „euklidesowe", jak chciała epistemologia klasyczna. Znaczy to, że zasadniczy przepływ logiczny, to nie transmisja prawdy kanałami dedukcji od aksjomatów do twierdzeń wywiedlnych z aksjomatów, lecz retransmisja fałszu od specjalnych twierdzeń „na dole" („basic statements") do aksjomatów. W tym ujęciu aksjomaty są tylko hipotezami roboczymi, i jeżeli okazuje się, że na gruncie przyjętych aksjomatów któreś ze specjalnych twierdzeń jest fałszywe, to trzeba zmienić aksjomaty.

Mówimy o teoriach euklidesowych lub quasi-empirycznych niezależnie od tego, co płynie w kanałach logicznych. Interesuje nas tylko, jak się ten przepływ odbywa. Jeżeli interesujemy się tym, co płynie w kanałach logicznych, to możemy mówić o teoriach empirycznych lub nieempirycznych. Teoria jest empiryczna, jeżeli jej zdania zasadnicze dotyczą czasoprzestrzeni i wyrażają tzw. „twarde fakty". To one stanowią „potencjalne falsyfikacje" dla teorii empirycznej. Czym zaś są potencjalne falsyfikacje w matematyce? Na pewno są nimi falsyfikacje logiczne, czyli zdania typu $p \wedge \sim p$. Jeżeli akceptujemy pogląd, że formalna teoria aksjomatyczna w sposób niejawny sama określa swoją treść, to oczywiście nia ma innych matematycznych falsyfikacji poza logicznymi. Natomiast, jeżeli przyjmiemy, że teoria formalna powinna być formalizacją pewnej teorii nieformalnej, to powiemy, że jest ona obalona, jeżeli jedno z jej twierdzeń jest sprzeczne z odpowiednim twierdzeniem teorii nieformalnej. Takie nieformalne twierdzenie Lakatos nazywa heurystyczną falsyfikacją teorii formalnej. Na przykład, za nieformalne odpowiedniki teorii formalnych zawierających arytmetykę Lakatos uważa teorię finitystycznych dowodów Hilberta lub konceptualizacje intuicjonistyczne.

Lakatos przyznaje jednak, że pojęcie falsyfikacji heurystycznej w matematyce jest pojęciem bardzo śliskim: w rzeczywistości, falsyfikacja heurystyczna nie zadaje kłamu hipotezie. Ona tylko 'su-

geruje sprzeczność, a „sugestie można ignorować". To jest tylko hipoteza rywalizująca. Ale to nie oddziela matematyki od fizyki tak bardzo, jak by się zdawało. „Zasadnicze zdania" Poppera są w końcu także tylko hipotezami. Podstawową rolą, jaką mają do spełnienia falsyfikacje heurystyczne, jest przesunięcie problematyki badawczej w kierunku problemów ważniejszych, stymulowanie rozwoju ram teoretycznych bogatszych w treść.

Esej Lakatosa *Proofs and refutations* bardzo przekonująco ilustruje ideę matematyki jako nauki quasi-empirycznej w racjonalnej rekonstrukcji historii rozwoju tzw. formuły Eulera dla wielościanów i pojęcia wielościanu w ogóle.

Ilustruje on także drugi aspekt matematyki jako działalności, o którym wspomnieliśmy wyżej, mianowicie jej aspekt społeczny. Lakatos wskazuje na fakt, że często w matematyce definicja jest dobierana tak, by eliminowała niewygodne kontrprzykłady dla twierdzeń, których prawdziwości chciałoby się dowieść („monster-barring definitions"). A to, co chciałoby się, aby było prawdziwe, niekoniecznie musi narzucać się logicznie - to może być sprawa do dyskusji w społeczności matematyków.

(c) *Spory nad pojęciem przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki.*

Jak widzieliśmy w rozważaniach zawartych w punktach (a) i (b), adaptacja pojęcia przeszkody epistemologicznej w matematyce nie jest prostym przeniesieniem. Wymaga to pewnego twórczego wysiłku.

Wysiłek ten został podjęty (Brousseau, 1983; Glaeser, 1981, 1985; Duroux, 1983), ale na razie jesteśmy na etapie zbierania doświadczeń. Nie pora więc jeszcze na formułowanie ostatecznych określeń pojęcia przeszkody epistemologicznej w matematyce. Można co najwyżej przyjmować określenia robocze. Ale chyba rzeczą najważniejszą jest wiedzieć, czego właściwie chcemy od pojęcia przeszkody, jaką rolę ma ono spełniać, jakie własności na pewno powinno mieć, a później można zastanowić się dopiero, które z tych własności wystarczą w określeniu.

Warto także śledzić spory, jakie toczą się wokół istniejących roboczych określeń pojęcia przeszkody epistemologicznej w matematyce. Spory te są na pewno potrzebne - to jest właściwa droga wykuwania pojęć - ale jest w nich kilka nieporozumień, z których trzeba

sobie od razu zdać sprawę i wyeliminować z dalszych dyskusji. Są to:

- Brak rozróżnienia dwóch rzeczy: (i) sformułowania ogólnych własności przeszkody epistemologicznej i (ii) sformułowania warunków, jakie powinien spełniać opis przeszkody epistemologicznej (że np. powinien zawierać opis metod rozwiązywania problemów lub sposobów wyjaśniania zjawisk przed pokonaniem przeszkody i analizę warunków historycznych, w jakich doszło do jej pokonania; na tej podstawie Brousseau zarzuca Glaeserowi, że przyjmuje on za przeszkodę „brak pewnej wiedzy", podczas gdy Glaeser tak ją tylko nazywa, a jej opis spełnia stawiane przez Brousseau warunki. Zresztą określanie przeszkody w terminach „braku pewnej wiedzy" jest zupełnie naturalne, jeśli przyjąć własność A względności przeszkody, odnoszenia jej zawsze do pewnej normy. Ponadto chcielibyśmy uważać za przeszkodę w matematyce np. brak jednolitego pojęcia liczby; właśnie ten brak, a nie rozmaite teorie i metody, które w historii pozwalały matematykom jakoś rozwiązywać problemy mimo tego braku).

- Mieszanie przeszkód epistemologicznych z przeszkodami „dydaktycznymi", tzn. przeszkodami w rozwoju osobniczym wiedzy w sytuacji szkolnej. W tekście Duroux (1983, str. 54) sformułowane są kryteria, jakie powinny spełniać, zdaniem ich autora, przeszkody w procesie nabywania wiedzy w szkole. Brousseau, polemizując z Glaeserem (1983), sprawdza czy przeszkody epistemologiczne związane z pojęciem liczb względnych wykryte przez Glaesera spełniają kryteria Duroux. To prawda, że niektóre przeszkody epistemologiczne odnajdujemy u dzisiejszych uczniów (czasami w nieco zmienionej formie) i te przeszkody interesują nas najbardziej jako dydaktyków, ale nie można tych dwóch pojęć utożsamiać. Wiele przeszkód dydaktycznych ma swoje źródło w specyficznym podawaniu wiedzy przez nauczyciela, w elementaryzacji czy konkretyzacji, lub - jak wolą mówić Francuzi - w transpozycji dydaktycznej z wiedzy „uczonej" do wiedzy szkolnej. (Dlatego w badaniach eksperymentalnych przeszkód epistemologicznych związanych z danym pojęciem matematycznym dobieramy uczniów, którzy nie zetknęli się z tym pojęciem w systematycznym nauczaniu.)

- Traktowanie nauki jako działalności, podczas gdy przeciwnik w dyskusji traktuje ją jako pewien zbiór zdań, teorii czy istniejąc-

cych metod rozwiązywania problemów. Brousseau, upierając się przy twierdzeniu, że przeszkoda jest pewną wiedzą („connaissance"), wyraźnie przyjmuje stanowisko drugie, Glaeser wydaje się skłaniać raczej ku pierwszemu rozumieniu nauki - jako działalności. Obaj przy tym odwołują się do Bachelarda, i nic dziwnego, że znajdują u niego poparcie, gdyż Bachelard oba te aspekty nauki uwzględnił. Np. przeszkodą jest zarówno „opinia, niekwestionowana wiedza, wiedza prowizoryczna", jak też „nie kwestionowanie obiegowych czy głoszonych przez autorytety opinii, brak krytycyzmu, niechęć do stawiania pytań".

Pierwsza z wymienionych tu przeszkód - opinia - została zauważona już bardzo dawno: spora część wywodów Sokratesa w *Teajtetosie* Platona została poświęcona argumentacji za tym. Ale nawet ona może odegrać pozytywną rolę w rozwoju wiedzy, choć nie z tej racji, że jest opinią. Jest ona podporą w tym sensie, że samo jej istnienie każe zadać sobie pytanie o jej źródła, podważyć ją, przeanalizować i wyjaśnić zjawiska, do których się odnosi, i odrzucić treść w niej zawartą lub ją potwierdzić. Zaś umiejętność stawiania problemów jest istotą myśli naukowej; jak twierdzi Bachelard: „Każda wiedza jest odpowiedzią na pewne pytanie. Jeśli nie było pytania, to nie może być wiedzy naukowej" (Bachelard, 1938, str. 14).

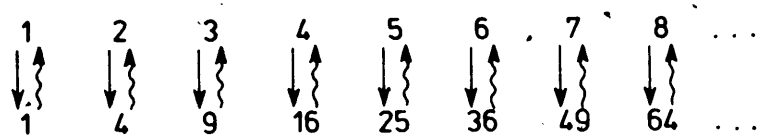
Chociaż wolimy rozpatrywać matematykę przede wszystkim jako pewną twórczą aktywność ludzkiego umysłu, to nie będziemy zajmować się w badaniu przeszkód epistemologicznych w matematyce takimi przeszkodami jak ta w drugim z podanych wyżej przykładów. Przeszkoda ta tkwi w postawach człowieka wobec problemu i jej badanie jest może bardziej tematem badawczym dla pedagoga czy psychologa niż dydaktyka. Dlatego przyjmiemy szóstą własność:

F. Przeszkody epistemologiczne związane z rozwojem danej teorii matematycznej są specyficzne dla tej teorii. Ogólne przeszkody epistemologiczne w matematyce są specyficzne dla matematyki.

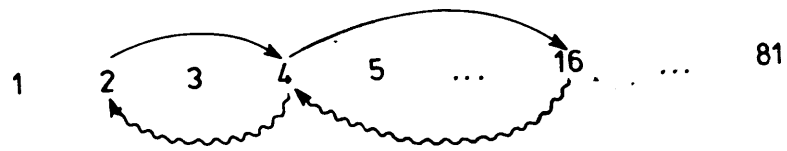
(d) *Trudność a przeszkoda.*

W 14 tomie *Educational Studies in Mathematics* ukazał się artykuł pt. *L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques* (przeszkoda rozszczepienia przedmiotów matematycznych, R. Duval). Chodzi o to, że jeden i ten sam przedmiot matematyczny może być ele-

mentem kilku różnych zbiorów, tzn. może mieć jednocześnie kilka różnych własności. Jeżeli ten element nazywa się a i $a \in X$ oraz $a \in Y$, gdzie $X \neq Y$, to można uważać obiekt a ze zbioru X i obiekt a ze zbioru Y za obiekty różne. Np. liczba kardynalna 4 może być jednocześnie elementem zbioru liczb naturalnych N (i być wtedy następnikiem liczby naturalnej 3) i elementem zbioru kwadratów liczb naturalnych (i być kwadratem liczby naturalnej 2). Przy ustalaniu równoliczności tych zbiorów buduje się bijekcję:



Jeżeli tego rozszczepienia nie zaakceptujemy i będziemy traktować np. 4 w jednym i w drugim zbiorze jako ten sam obiekt, to ten argument nie przekona nas o równoliczności rozważanych zbiorów. Wtedy jest tak, jakby bijekcja była przedstawiona na jednym ciągu liczb naturalnych: wówczas liczba strzałek wychodzących nie jest jednakowa dla wszystkich liczb. Czwórka jest brana dwa razy, dwójka, trójka tylko po razie:



„Zwykła" reguła odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej nie jest respektowana: odpowiedniość jest możliwa jedynie między zbiorami różnych przedmiotów - pisze Duval. „Nie chodzi tu o pewną szczególną trudność równoliczności zbioru ze swoim podzbiorem właściwym. Rozszczepienie danego przedmiotu, praktyka tak samo trywialna i potrzebna jak identyfikacja tego samego przedmiotu w różnych

przedstawieniach czy z różnych punktów widzenia, stanowi przeszkodę, którą część uczniów stale odnajduje w różnych sytuacjach uczenia się".

Zauważmy tu kilka spraw:

1° autor nie nazywa swojej przeszkody „epistemologiczną" i być może w ogóle nie ma na myśli przeszkody w sensie Bachelarda, Brousseau czy innych. Być może używa tej nazwy w sensie potocznym;

2° Duval bada swoją przeszkodę jedynie w sytuacji uczenia się w szkole. Wprawdzie odwołuje się do historii (źródłem rozważanego przykładu jest tzw. paradoks Galileusa) i rozwoju wyrażeń „tyle samo", „mniej", „więcej", „równoliczność", „podzbiór" w odniesieniu do zbiorów nieskończonych (zresztą pisze o tym tylko na marginesie), ale „przeszkody", którą odkrył u swoich uczniów, nie próbuje odnaleźć w historii. Zresztą musiałby szukać w historii matematyków, którzy nie potrafili rozszczepiać obiektów matematycznych, podczas gdy dla Duvala przeszkodą jest właśnie rozszczepianie obiektów matematycznych. To tak, jakby powiedzieć, że przeszkodą w rozwoju pojęcia liczby były liczby niewymierne. Duvalowi nie chodzi chyba o przeszkodę w naszym sensie, lecz u trodność: po prostu trudno jest traktować ten sam obiekt z własnością alfa i ten sam obiekt z własnością beta, gdzie alfa i beta są różne, jako dwa różne obiekty, a także trudno jest zrozumieć istotę liczb rzeczywistych.

W sensie Duvala, na przykład, pojęcie równoliczności byłoby przeszkodą. Dlatego, że jest ono matematycznym odpowiednikiem relacji „mieć tyle samo elementów", zaś wyrażenie „mieć tyle samo elementów" niesie w sobie cały bagaż znaczeń potocznych, nie akceptujących sytuacji, w której część może mieć tyle samo elementów co całość. My powiedzielibyśmy tylko, że matematyczne pojęcie równoliczności jest trudne z tych powodów, zaś za przeszkodę epistemologiczną uznalibyśmy myśl wyrażoną w aksjomacie 5 księgi I *Elementów* Euklidesa: „I całe jest większe od części", gdyż odrzuca ona możliwość rozważania zbiorów nieskończonych skoro ich własnością jest to, iż mogą być w pewnym sensie równe swoim podzbiorom.

W pewnej mierze zgadzałoby się to z charakterystyką pojęcia trudności jako różnego od pojęcia przeszkody, jaką podaje Duroux (1983). Trudność powoduje wyraźny spadek procentu dobrych odpowiedzi u uczniów, powoduje błędy, ale będą to błędy różne w różnych

zadaniach matematycznych i źródła tych błędów mogą być różne. Te źródła to często właśnie przeszkody epistemologiczne lub dydaktyczne związane z danym zagadnieniem. Np. jako jedną z trudności związanych z pojęciem modułu (wartości bezwzględnej) Duroux podaje konieczność badania kilku przypadków przy rozwiązywaniu zadań $(a \geqslant 0, a < 0)$.

1.4. Tło historyczno-filozoficzne pojęcia przeszkody epistemologicznej

Praca Bachelarda (1938), w której wprowadził on pojęcie przeszkody epistemologicznej, jest w istocie tylko przyczynkiem do kwestii linii demarkacyjnej między tym, co naukowe, a tym, co nienaukowe lub pseudonaukowe. Z przytoczonych już wyżej cytatów z Bachelarda wynika, że według niego myślenie naukowe charakteryzuje się przede wszystkim perspektywą naprawionych błędów. Pisze on: „Mówi się często, że hipotezie naukowej, której nie grozi żadne obalenie, niedaleko do tego, by była hipotezą zbędną. Także doświadczenie, które nie naprawia żadnego błędu, które jest prawdziwe po prostu, bez dyskusji, do czegóż ono może służyć? Doświadczenie naukowe jest to więc takie doświadczenie, które przeczy doświadczeniu powszechnemu (...). To ta perspektywa naprawionych błędów charakteryzuje, naszym zdaniem, myśl naukową" (ibidem, str. 10). W przytoczonym cytacie z Bachelarda mamy do czynienia jakby z powołaniem się na ideę falsyfikacjonizmu Karla Poppera, ale próżno by szukać tego nazwiska w cytowanej przez Bachelarda bibliografii.

Dyskusje na temat oddzielenia tego, co naukowe, od tego, co nienaukowe, były szczególnie wzmożone w latach dwudziestych i trzydziestych naszego stulecia. Rewidowano dawne poglądy na ten temat. Falę tę mogły wywołać pewne rewolucje naukowe, które zdarzyły się na przełomie wieków, jak np. odkrycie paradoksów teorii mnogości czy teoria względności, które zachwiały wiarą w istnienie tzw. „wiedzy obiektywnej", na której straży stoi myślenie racjonalne.

Problem jest tak stary, jak stara jest filozofia: cały *Teajtetos* Platona jest niczym innym jak polemiką z istniejącymi poglądami na to, czym jest nauka. Tu właśnie Teajtetos mówi, że określenie, czym jest nauka, jest znacznie trudniejsze od określenia, czym są liczby niewymierne w odróżnieniu od wymiernych (Platon,

Teajtetos, 147b-147c). Pytanie to zadajemy sobie zawsze ilekroć jesteśmy zaangażowani w budowanie nowej nauki (patrz Freudenthal, 1972).

Krytyczny przegląd i propozycje nowych rozwiązań znajdują się w pierwszym tomie zebranych filozoficznych artykułów Imre Lakatosa (1978_3). Jedno z rozwiązań postulowało określenie prawdopodobieństwa teorii na podstawie całego dostępnego świadectwa jego słuszności. Istnieje więc ciągła skala naukowości teorii. Jeśli prawdopodobieństwo teorii jest wysokie, to teoria jest naukowa, jeśli jest niskie lub zerowe, to teoria nie jest naukowa.

Karl Popper argumentował w 1934 r., że prawdopodobieństwo dowolnej teorii, jakim świadectwem by nie dysponowała, jest zerowe. „Wszystkie nasze teorie pozostają przypuszczeniami, hipotezami..." (Popper, 1972, str. 23). Przyjmując takie stanowisko, Popper zadał kolejne pytanie: „Czy można mieć czysto racjonalne powody, by pewne hipotezy uważać za lepsze od innych? (ibidem). I tu Popper zaproponował ideę tzw. „crucial experiments", eksperymentów rozstrzygających lub obserwacji rozstrzygających, które mogą teorię obalić; teoria jest pseudonaukowa jeśli odmawia się brania pod uwagę takiej „potencjalnej falsyfikacji" (ibidem, str. 25).

Lakatos zarzucał Popperowi pewną naiwność, mówiąc, że idea eksperymentu rozstrzygającego daje linię demarkacyjną między metodą pseudonaukową a metodą naukową, nie zaś między teorią pseudonaukową a teorią naukową. To nie rozwiązuje problemu i ignoruje fakt zastanawiającej nieustępliwości teorii naukowych. Naukowcy są twardogłowi. Nie zarzucają teorii tylko dlatego, że fakty jej przeczą. Na ogół, albo wymyślają jakąś hipotezę ratunkową, aby wytłumaczyć to, co nazywają zwykłą anomalią, a jeśli nie udaje im się wyjaśnić anomalii, to ignorują ją i zwracają się ku innym problemom. Historia nauki jest oczywiście pełna opowieści o takich rozstrzygających doświadczeniach, ale te opowieści są fabrykowane w wiele lat po odrzuceniu teorii (Lakatos, 1978_3).

Kuhn zaproponował rozwiązanie, które miało uzupełnić i poprawić myśl Poppera: teorię rewolucji naukowych, o której mówiliśmy wcześniej.

Warto może na marginesie wspomnieć, że niedawno pewien lingwista, H.G. Petrie (1979) zauważył paralelizm między osobniczym roz-

wojem wiedzy a rozwojem nauki w sensie Kuhna, szczególną rolę w rozwoju wiedzy ucznia upatrując w kształcącej roli standardowych problemów wraz z rozwiązaniami, które stanowią jakby esencję teorii. Odpowiedniki takich standardowych problemów wraz z rozwiązaniami w rozwoju nauki Kuhn nazywał „exemplars". Wydaje się, że to właśnie owe „exemplars", a raczej to, co im odpowiada w nauczaniu, ma na myśli Freudenthal, gdy mówi o paradygmacie w nauczaniu matematyki (Freudenthal, 1963). Odkrycie tego paralelizmu nie jest zresztą dziwne. W *Przedmowie* do swojej pracy Kuhn (1962) wymienia prace eksperymentalne Piageta dotyczące rozwoju poznawczego dziecka (etapy rozwoju, proces przechodzenia z jednego etapu do drugiego) wśród prac, które zainspirowały go w rozwijaniu idei rewolucji naukowych.

Słabą stroną teorii Kuhna jest, według Lakatosa, sprawa przejścia od jednego paradygmatu do drugiego. Według Kuhna proces ten ma charakter psychologiczno-społeczny i jest podobny do irracjonalnej zmiany wiary. Przeciągnięcie na stronę nowego paradygmatu wymaga perswazji raczej niż dowodów (Kuhn, 1962, str. 151). Czasami narodowość i reputacja lidera nowej grupy odgrywa zasadniczą rolę (ibidem, str. 152). Z tego powodu, rozwiązanie Kuhna nie jest dla Lakatosa zadowalające: nie dostarcza jasnych kryteriów odróżniania postępu naukowego od naukowej degeneracji.

Lakatos zaproponował rozwiązanie, które miało wypełnić niedostatki teorii Poppera i Kuhna: metodologię naukowych programów badawczych. „Typową jednostką opisową wielkich osiągnięć naukowych jest nie izolowana hipoteza, lecz raczej - program badawczy" (Lakatos, 1978$_3$, str. 4). Lakatos określa swoje pojęcie jako „rekonstrukcję kuhnowskiego socjo-psychologicznego pojęcia paradygmatu w obiektywnym świecie trzecim Poppera"; jest to spojrzenie na paradygmat przez okulary Poppera (ibidem, str. 191).

Program badawczy to cały ciąg teorii T_1, T_2, ... taki, że T_{n+1} powstaje z T_n przez dołączenie nowych zdań lub nowych semantycznych interpretacji zdań z T_n w celu akomodacji pewnej anomalii; ponadto zakłada się, że T_{n+1} zawiera przynajmniej tyle samo treści, co T_n. Taki ciąg teorii nazywa się teoretycznie postępowym, jeżeli każda następna teoria przepowiada nowe, nieoczekiwane dotąd fakty. Jest on także empirycznie postępowy, jeżeli te nowe

fakty są potwierdzone, tzn. jeżeli każda nowa teoria prowadzi do rzeczywistego odkrycia nowych faktów. Program jest naukowy, jeżeli jego ciąg teorii jest przynajmniej teoretycznie postępowy (ibidem, str. 31 i następne). Uznaje się, że program uległ falsyfikacji, jeżeli został wyparty przez rywalizujący ciąg teorii, który tłumaczy sukces swojego poprzednika i wykazuje dalszą moc heurystyczną (ibidem, str. 69). A zatem, nie ma falsyfikacji bez lepszej teorii, lepszego programu badawczego.

Ta idea rywalizujących teorii była obecna także u Kuhna, jednak inne czynniki decydowały tam o zwycięstwie. „Testowanie paradygmatu zachodzi dopiero wtedy, gdy uporczywe niepowodzenie w rozwiązywaniu ważnej zagadki spowodowało kryzys. Ale nawet wtedy zachodzi ono dopiero wtedy, gdy poczucie kryzysu wywołało pojawienie się kontrkandydata na paradygmat. W nauce sytuacja testowania nigdy nie polega, tak jak rozwiązywanie zagadek, na porównywaniu pojedynczego paradygmatu z rzeczywistością. Sytuacja ta polega częściowo na współzawodnictwie między dwoma rywalizującymi paradygmatami o panowanie nad wspólnotą naukową" (Kuhn, 1962, str. 144).

Aby wykluczyć możliwość budowania postępowego ciągu teorii przez dołączanie nieistotnych i pozbawionych związku z teoriami hipotez, Lakatos wprowadził dodatkowe założenie o „ciągłości" ciągu teorii T_1, T_2, ... „Wyrazy takiego ciągu są zwykle powiązane godną uwagi ciągłością, która spaja je w jeden program badawczy. Ta ciągłość - przypominająca kuhnowski »normalny stan nauki« - odgrywa zasadniczą rolę w historii nauki: główne problemy logiki odkrycia naukowego nie mogą być zadowalająco dyskutowane poza ramami metodologii programów badawczych" (Lakatos, 1978$_3$, str. 46).

Istnieje jednak zasadnicza różnica między pojęciem naukowego programu badawczego a ideą stanu normalnego nauki. Dla Lakatosa stan normalny nauki jest właściwie śmiercią nauki. Motorem rozwoju jest współistnienie rywalizujących programów badawczych, „wieczna rewolucja", jak mówił Popper. „Nie można pozwolić na to, by program badawczy stał się czymś w rodzaju kanonu ścisłości (...) Niestety, jest to stanowisko, którego Kuhn wydaje się bronić. Rzeczywiście, to, co on nazywa „normalną nauką", jest niczym innym jak programem badawczym, który zdobył monopol. Ale w istocie programom badawczym rzadko się to udaje, a jeśli się udaje, to jedynie na krótko, mimo

wysiłków niektórych kartezjańczyków, newtończyków, czy wyznawców teorii Bohra. Historia nauki była i powinna być historią rywalizujących programów badawczych (lub paradygmatów), ale nigdy nie była i nie powinna stać się następstwem okresów normalnej nauki: im wcześniej zacznie się rywalizacja, tym lepiej dla postępu" (ibidem, str. 68).

Mimo tych haseł wiecznej rewolucji w nauce Popper przyznawał, a Lakatos zgodził się z nim (ibidem, str. 89), że pewna doza dogmatyzmu w rozwoju nauki jest niezbędna: „Bez niej nigdy nie doszłoby do odkrycia, jakie możliwości daje nowa teoria; trzeba by ją zarzucić zanim jeszcze miałaby szanse ukazać swą siłę. W konsekwencji, żadna teoria nie mogłaby odegrać swojej roli w porządkowaniu świata, w przygotowaniu nas do przyszłych wydarzeń, w zwróceniu naszej uwagi na fakty, których inaczej nie zauważylibyśmy. (...) Dogmatyczna postawa w nauce - która tłumaczy istnienie okresów stabilizacji w jej rozwoju - była opisana przez Kuhna jako główna cecha stanów normalnych nauki. Ale ramy pojęciowe Kuhna do rozprawienia się z ciągłością w nauce są socjo-psychologiczne; moje są normatywne. Patrzę na ciągłość w nauce przez okulary Poppera. Tam, gdzie Kuhn widzi »paradygmaty«, ja widzę także »programy badawcze«" (ibidem, str. 89).

Gdyby nie to założenie ciągłości i potrzeba jednak pewnej postawy dogmatycznej w nauce, to nie byłoby miejsca w metodologii Lakatosa na pojęcie przeszkody epistemologicznej: nie ma miejsca na przeszkody epistemologiczne w nauce, która jest wieczną rewolucją. Przeszkody epistemologiczne gromadzą się w okresach stabilizacji, kiedy posiadane środki wystarczają do rozwiązywania pojawiających się problemów, kiedy istniejące anomalie można jeszcze jakoś wytłumaczyć niewielkim kosztem lub, po prostu, ignorować. W ramach jednego programu badawczego, przy przejściu od jednej teorii do drugiej, coś zostaje zachowane. To coś, to może być jakaś hipoteza czy zasada, niekoniecznie przecież uświadomiona przez ogół praktyków rozwijających dany program badawczy, lecz która jest na tyle mocna, że jej odrzucenie (czy obalenie) sprawia, że nowa teoria nie należy już do danego programu badawczego. Według Lakatosa, do obalenia hipotezy, czy odrzucenia założenia, dochodzi dopiero wtedy, gdy pojawia się nowy. rywalizujący program badawczy. Wobec te-

go Lakatos powiedziałby, że do pokonania przeszkody epistemologicznej nie wystarcza znalezienie kontrprzykładu, odkrycie faktu obalającego hipotezę. Musi pojawić się nowa teoria, która wyjaśniałaby anomalie poprzedniej, zawierała przynajmniej tyle samo treści, i jeszcze przewidywała nowe fakty.

Naukowy program badawczy w sensie Lakatosa charakteryzuje się 1^{o} pewnym „twardym rdzeniem hipotez", zapewniającym „ciągłość", chronionym przed obaleniem przez pewien 2^{o} pas protekcyjny hipotez posiłkowych; 3^{o} heurystyką umożliwiającą rozwiązywanie problemów i dokonywanie odkryć; zaś dobry, tzn. postępowy program badawczy powinien 4^{o} przepowiadać nowe fakty; fakty, których istnienia nie podejrzewały, lub nawet im przeczyły, programy dawniejsze lub rywalizujące.

2. IMPLIKACJE PRZYJĘTEGO STATUSU EPISTEMOLOGICZNEGO MATEMATYKI DLA NAUCZANIA

2.1. Zmiana stosunku nauczyciela do błędów uczniów

Pogląd Bachelarda na nauczanie streszcza się w haśle: „Erreur, tu n'est pas un mal!" (str. 243) (Błędzie, ty nie jesteś złem!). Hasło to wydaje się oczywiste, jest głoszone przez bardzo wielu dydaktyków (znane jest powiedzenie prof. Krygowskiej: „błogosławione błędy"), a jednak niewielu nauczycieli chce je sobie wziąć do serca.

Błąd, szczególnie jeżeli pojawia się uporczywie i konsekwentnie, wymaga szczególnej uwagi nauczyciela. Nie wystarczy powiedzieć uczniowi: „Nie, nie tak, trzeba to robić tak, patrz, jak ja to robię". Są błędy, które są skutkiem istnienia całego systemu pojęć, koncepcji, metod, wyobrażeń, które uczeń sobie wypracował. System ten, często zresztą nieuświadomiony, może znacznie różnić się od tego, który usiłuje przekazać nauczyciel; może on zawierać w stosunku do niego przeszkody epistemologiczne. Wskazana przez nauczyciela „właściwa" droga rozwiązywania zadania nie będzie przez ucznia akceptowana, ponieważ nie będzie zrozumiała w ramach jego systemu pojęć, nie będzie do niego pasowała. Zadaniem nauczyciela jest pomóc uczniowi w uświadomieniu sobie jego własnego systemu pojęć,

w wykryciu istniejących w nim ewentualnych sprzeczności, w poszukiwaniu jego teoretycznych konsekwencji. Może się zdarzyć, że system pojęć ucznia prowadzi do rozwinięcia innej teorii, rywalizującej z tą, do której dąży nauczyciel. Nie mamy bowiem pewności, czy to, co „wiemy" dziś o danym fakcie, jego dzisiejsza interpretacja naukowa, jest ostateczne, prawdziwe w jakimś sensie. Stąd:

2.2. Zmiana stosunku nauczyciela do nauczanego przedmiotu

Nawet jeżeli przyjmujemy istnienie wiedzy obiektywnej, to raczej w sensie jej autonomii, tak jak to rozumiał Popper, niż w sensie „obiektywnej prawdy". Szczególnie trudno mówić o prawdzie w matematyce. Wiedza matematyczna jest wiedzą hipotetyczną nie tylko dlatego, że pewne twierdzenia przyjmuje się w niej bez dowodu. Potrzebny jest więc pewien dystans w stosunku do przekazywanych treści, świadomość tego, iż nie są one niepodważalne, definicje nie zawsze narzucają się logicznie, metody nie są jedynymi możliwymi. Nowe podejście oznacza, że nawet jeżeli uczymy „gotowej matematyki", to nie możemy jej przedstawiać jako zbioru prawd absolutnych, gdyż to, co przekazujemy, jest zawsze wynikiem pewnej konstrukcji społecznej, pewnego wyboru, negocjacji, umowy we wspólnocie matematyków.

Nie chodzi tu o popadanie w drugą skrajność i przyjmowanie całkowicie obojętnej postawy wobec nauczanych treści: nauczyciel w roli jedynie przekazującego wiedzę teoretyczną tworzoną przez innych. W klasie także, tak jak wśród pracujących matematyków, wiedza powinna być negocjowana (wyrażenie pochodzi od Brousseau) z uczniami. Np. wybór definicji nie jest sprawą wyłącznie nauczyciela czy autora podręcznika. To jest wspólna sprawa nauczyciela i jego uczniów. Rozwiązanie zależy od sytuacji, w których uczniom było dane spotkać się z pojęciem, z koniecznością jego użycia. Przez „sytuację" rozumiemy tu nie tylko pewien problem matematyczny, ale także dramaturgię lekcji, na której wypłynął czy został postawiony, a więc pewien kontekst społeczny. Mówiąc zaś o „negocjacji" mamy na myśli prawdziwą negocjację, nie zaś symulowaną - grę w odgadywanie „co nauczyciel ma na myśli". Nauczyciel nie powinien uważać się, ani być uważany przez uczniów, za jedynego posiadacza prawdy której, jeśli nie wyjawia od razu, to bądź przez nauczycielską złośliwość, bądź w wy-

niku konieczności trzymania się (niepisanych) reguł umowy dydaktycznej, która obowiązuje w klasie (patrz „contrat didactique", Brousseau, 1980)[2].

P r z y k ł a d. Rozpoczęłam niedawno (styczeń 1985) próby eksperymentalne sytuacji dydaktycznych w jednym z liceów warszawskich. Sytuacje te mają na celu umożliwienie nauczycielowi (1) wydobycie obecnych u uczniów przeszkód epistemologicznych związanych z pojęciem granicy; (2) spowodowanie ich pokonania. Na jednej z lekcji, mającej formę ogólnej dyskusji, narysowałam na tablicy dwa współśrodkowe okręgi i zapytałam: „Jak wam się wydaje, na którym z tych okręgów jest więcej punktów?". (Pytanie to było źródłem znanego średniowiecznego paradoksu, rozstrzygniętego przez Galileusza.) Pojawiło się w klasie kilka zwalczających się stronnictw:

I. Na obu okręgach jest nieskończoność punktów, więc jest tyle samo i nie ma co dalej się nad tym zastanawiać.

II. Ponieważ punkty są nieskończenie małe więc na obu okręgach jest nieskończoność punktów, ale są to różne jakości nieskończoności; na większym okręgu jest więcej punktów.

III. Na każdym okręgu jest skończenie wiele punktów (ponieważ okrąg jest figurą zamkniętą), wszystkie punkty są jednakowe, więc na większym okręgu jest więcej punktów.

Ostatnie stanowisko było reprezentowane głównie przez jednego ucznia, Jacka. Był on zresztą niezwykle konsekwentny w swoim stosunku do nieskończoności. W poprzedniej dyskusji, na temat liczb niewymiernych, wyraził pogląd, że liczby te są niepotrzebne, są utrudnieniem. Wystarczy ograniczyć się do tych liczb wymiernych, których rozwinięcia dziesiętne są skończone.

Celem tej lekcji było ujawnienie rozmaitych koncepcji kontinuum. Usiłowałam więc nie zajmować żadnego stanowiska, ani słowem, ani też gestem czy tonem, wobec pojawiających się koncepcji. Wszy-

---

[2] Petrie (1979) użył interesującej metafory: klasa przypomina laboratorium, w którym psychologowie zajmują się badaniem nawyków i zwyczajów starego szczura otrzymanego z innego laboratorium. Tymi „badaczami" są uczniowie, zaś starym szczurem - nauczyciel. W gruncie rzeczy uczniowie nie poznają żadnej „wiedzy obiektywnej", lecz po prostu uczą się reakcji nauczyciela na bodźce, których mu dostarczają - odpowiedzi na jego pytania.

stkie starałam się przyjmować jako ciekawe i akceptowalne. W klasie obecny był także nauczyciel, którego stanowisko III oburzało i dawał temu wyraz w tonie zadawanym Jackowi pytań.

(255) Jacek: Ale tu właśnie jest skończona ilość punktów!
(256) Nauczyciel: Ile, no ile?!

I to jest bardzo dobre pytanie; każe ono uczniowie precyzować swoją koncepcję, ale powinno być zadane tonem spokojnym, a nawet obojętnym, nie odzwierciedlającym negatywnego stosunku do koncepcji ucznia. Nie chodzi tu tylko o ukrycie tego negatywnego stosunku ze względów dydaktycznych. On, po prostu, nie powinien być negatywny także z matematycznego punktu widzenia: przecież można przyjąć takie założenie i rozwijać matematykę z pewnym tylko podzbiorem liczb rzeczywistych, tak jak to robi np. analiza numeryczna. I można z uczniem próbować rozwijać tę jego koncepcję, szukać jej konsekwencji, wskazując na różnice z analizą klasyczną, która wychodzi z innych założeń. Na tym polega negocjacja wiedzy z uczniami.

Interesująca jest także koncepcja II; jej ciekawe rozwinięcie teoretyczne można znaleźć w pracy Talla (Tall, 1980). Tall zauważa, że „rozszerzenie pojęcia liczby do liczby kardynalnej jest tylko jednym z możliwych nieskończonych rozszerzeń, a nie absolutną logiczną rzeczywistością, względem której wszystko powinno być oceniane" (str. 273).

Postulat, by nauczyciel angażował się we wspólne badania wraz ze swoimi uczniami, jest oczywiście słuszny i jest głoszony przez wielu znakomitych dydaktyków, jak np. Freudenthal, w postaci haseł: nie gotowa matematyka, lecz matematyzowanie, nie aksjomatyka, lecz aksjomatyzowanie, szukanie struktur ubogich w strukturach bogatych. Lecz rzeczywistość szkolna jest taka, że nauczyciel musi bardzo ostro selekcjonować te treści, w które zainwestuje więcej swojej i uczniów aktywności twórczej.

Powstaje więc kwestia wyboru tego, co ma być przedmiotem wspólnego badania z uczniami, a co tylko podane, wyłożone w tradycyjny sposób. Takie wspólne badanie wymaga od nauczyciela wzięcia pod uwagę wiedzy ucznia, potraktowania jej jako wiedzy akceptowalnej, ale która, być może, będzie musiała być odrzucona. Jest to bardzo kosztowne z punktu widzenia nauczyciela, nie tylko z powodu braku czasu. Brousseau, który od wielu lat walczy o nauczanie w maksymalnym

stopniu problemowe, ma bardzo złe doświadczenia w tym zakresie. Mówi, że nauczyciele nie umieją tego robić, nie potrafią liczyć się z wiedzą ucznia, szczególnie jeśli jest fałszywa, zaadaptowana do innych warunków. Robią, co mogą, by uciec od tego obowiązku, który jest dla nich, jak mówi Brousseau, krzyżem pańskim. Wolą wyłożyć od razu materiał tak, jak chcą by był znany, każą zapomnieć uczniom ich dawną prowizoryczną wiedzę i idą dalej.

Ale oczywiście nie ma sensu w sposób problemowy wprowadzać wszystkiego, czego chcemy nauczyć. Natomiast tam, gdzie nie tylko warto, ale koniecznie trzeba przejść przez tę drogę krzyżową nabitą dawną wiedzą i intuicjami uczniów, to sytuacje, w których mamy do czynienia z przeszkodami epistemologicznymi, o których wiemy, że pozostają niepokonane u dzisiejszych uczniów. Ominięcie zawsze mści się niepełnym lub wadliwym rozwinięciem u ucznia pojęć, o które nam chodzi.

Wynika stąd cały program badawczy dla dydaktyki matematyki.

3. PROGRAM BADAWCZY ZWIĄZANY Z POJĘCIEM PRZESZKODY EPISTEMOLOGICZNEJ

Program badawczy, o którym chcemy tu mówić, stawia sobie za cel: po pierwsze, określić przeszkody epistemplogiczne związane z matematyką szkolną; po drugie, opracować i sprawdzić sytuacje dydaktyczne, w których uczniowie, rozwiązując samodzielnie lub w grupach odpowiednio dobrane problemy, uświadamialiby sobie swoje błędy i ich przyczyny, pokonując przeszkody, a następnie wiedza byłaby negocjowana w ramach całej klasy z nauczycielem.

Podsumowując to, co zostało powiedziane w poprzednich częściach artykułu, sformułujemy założenia, jakie przyjmujemy w dążeniu do tego celu:

1^{o} Przyjmujemy, że człowiek uczy się rozwiązując problemy, i że wiedza, którą w ten sposób buduje, jest adekwatna do tych problemów. Jest więc ta wiedza zawsze tylko lokalnie dobra, prowizoryczna, choć może nam się wydawać ogólną i absolutną prawdą. Przechodząc do innych, ogólniejszych problemów, chcemy zastosować naszą dawną wiedzę. Wypróbowujemy ją, i jeśli jest źle dopasowana do nowej sytuacji, a tak jest często, to musimy ją zrewidować, przebudować, zmienić lub nawet odrzucić (por. Piaget, 1975).

2° Ponadto przyjmujemy tezę o ważnej roli interakcji społecznych w indywidualnym budowaniu wiedzy, w szczególności zaś tezę o roli kooperacji intelektualnej (Piaget, 1958-1960).

Następne założenie mówi o „quasi-empirycznym" charakterze rozwoju matematyki.

3° Przyjmujemy dalej, że w podobny sposób przebiega rozwój historyczny myśli matematycznej. Na każdym etapie swojego rozwoju wiedza matematyczna była adekwatna do problemów, których rozwiązanie stawiała sobie za cel. Motorem rozwoju były nowe problemy, nowe hipotezy i kontrprzykłady, które wskazywały, że dawna wiedza jest niewystarczająca bądź wadliwa i konieczna jest jej przebudowa. Jednak rewidowanie dawnej wiedzy i ewentualne jej odrzucenie jest trudne, gdyż dawne teorie i metody zostały przedtem w pocie czoła wypracowane i przez jakiś czas dobrze funkcjonowały i służyły. Trudno się z nimi rozstać. Ponadto czasami nie jest od razu jasne, dlaczego ta dawna wiedza nie pasuje czy nie wystarcza do rozwiązywania nowego problemu, która hipoteza czy założenie jest „winne". Dzieje się tak dlatego, że nie wszystkie założenia, hipotezy czy zasady funkcjonujące w dawnej wiedzy są jawne, uświadomione. Ich świadomość nie jest zresztą potrzebna, by w danej tradycji działać i tworzyć. Niektóre jednak z tych założeń czy zasad są tak istotne, że ich odrzucenie pociąga za sobą konieczność zmiany całego systemu, całej tradycji. Tego rodzaju hipotezy, założenia lub zasady nazwaliśmy przeszkodami epistemologicznymi.

4° Przyjmujemy, że proces pokonywania przeszkód epistemologicznych ma ważne aspekty społeczne.

Uznając paralelizm filo- i ontogenezy myśli matematycznej (Duda, 1982; Freudenthal, 1983) uważamy, że odkrywanie przeszkód epistemologicznych w historii matemátyki, ich przejawów w indywidualnym rozwoju myśli matematycznej u młodego uczącego się człowieka, a także poszukiwanie sytuacji dydaktycznych sprzyjających uświadamianiu sobie i pokonywaniu tych przeszkód przez uczniów jest ważną dziedziną badań w dydaktyce matematyki.

Jeśli nasz program badawczy rozwinie się w program badawczy w sensie Lakatosa, to powyższe cztery założenia będą zawarte w „twardym rdzeniu hipotez" (hard core). Nasz program jest dopiero pączkujący i trudno byłoby już w tej chwili określić wszystkie je

go hipotezy rdzenne i posiłkowe oraz metody heurystyczne. Jest to program, który bardzo niedawno się narodził. Jest kilka zaledwie prac nawiązujących jawnie do pierwszego punktu wymienionego na wstępie „celu" (Brousseau, 1980-1981; Bouvier, 1985; Cornu, 1980; Glaeser, 1981; Sierpińska, 1983). Znane nam są prace (Berthelot, 1983; Robinet, 1983) budzące jednak wiele zastrzeżeń, pretendujące do realizacji punktu drugiego.

Jeżeli chodzi o hipotezy posiłkowe, to można by tu wymienić teorię sytuacji dydaktycznych Brousseau. Wydaje się ona stanowić poparcie naszego programu, szczególnie przez jej nawiązanie do paralelizmu rozwoju wiedzy „uczonej" i „indywidualnej", przez rolę, jaką przypisuje formułowaniu (zgodną z przytoczonym wcześniej zdaniem Poppera), oraz uzasadnianiu (bliską ideom Lakatosa wyrażonym w jego pojęciu matematyki jako nauki quasi-empirycznej), a także „instytucjonalizacji" wiedzy w klasie, która odpowiada przyjęciu pewnej umowy, konwencji, pewnego paradygmatu i bierze pod uwagę społeczne aspekty matematyki jako działalności.

Oto kilka słów więcej o teorii sytuacji dydaktycznych Brousseau (1977): punktem wyjścia sekwencji sytuacji dydaktycznych jest zawsze problem lub sytuacja problemowa. W pierwszej fazie rozwiązywania, w czasie tzw. „sytuacji działania", uczniowie, poprzez różne aktywności manipulacyjne na przedmiotach konkretnych lub abstrakcyjnych, w toku np. gry, budują pierwsze, często jeszcze nieuświadomione koncepcje pojęć, do których rozwinięcia zmierza cała sekwencja zajęć.

Kolejny typ sytuacji, tzw. „sytuacja formułowania" wynika z potrzeby zakomunikowania komuś o swoim rozwiązaniu. W tej sytuacji dochodzi do formułowania pierwszych koncepcji i jednocześnie ich rewizji, gdy okazują się nieadekwatne. Czasami dochodzi do powrotu do sytuacji „działania" i odbudowy koncepcji.

„Sytuacja uzasadniania" wynika z konieczności obrony swojego stanowiska czy rozwiązania. Mamy tu do czynienia z dowodami i ich odrzucaniem. Wynikiem tej sytuacji powinno być ustalenie wspólnego systemu wartości. Tu także może dochodzić do zmiany pierwotnych koncepcji.

„Instytucjonalizacja" to sytuacja, która wynika z konieczności przyjęcia pewnej wspólnej wiedzy dla wszystkich. Jest to przyjęcie

pewnej umowy, konwencji, kompromisu. I jest to także śmierć problemu.

Istnieją prace eksperymentalne i teoretyczne, które mogą stanowić podstawę heurystyki naszego programu badawczego (Balacheff i Laborde, 1984; Laborde, 1982; Mugny et al., 1976). Szczególnie dobrze przystosowane do badań eksperymentalnych mających na celu wykrycie przeszkód epistemologicznych u uczniów wydają się tzw. „sytuacje eksperymentalne sprzyjające interakcji i komunikowaniu się". Omówienie tej metody i przykład zastosowania można znaleźć w mojej pracy (Sierpińska, 1983). Zwrócona jest tam uwaga na to, że analiza wyników uzyskanych z pomocą tej metody eksperymentalnej powinna odbywać się jednocześnie i w powiązaniu z analizą historyczną.

Powstaje pytanie, czy nasz program ma szanse zostać programem „postępowym", tzn. czy jest zdolny do przewidywania faktów lub wyjaśniania faktów ujawnionych dawniej. Wydaje się, że takie szanse istnieją. Badanie historyczne przeszkód epistemologicznych wraz z analizą wypowiedzi uczniów w czasie rozwiązywania zadań może przyczynić się do zrozumienia błędów zarówno uczniów, jak matematyków w przeszłości. Badania te pozwolą także przewidzieć miejsca w programie nauczania, które wymagają szczególnie starannego opracowania dydaktycznego właśnie z powodu kryjących się za nimi przeszkód epistemologicznych, które uczniowie będą musieli pokonać pod groźbą nieskuteczności jakichkolwiek wysiłków nauczyciela w dalszym nauczaniu.

Nie ma jednak pewności czy nasz program szansę tę zdoła wykorzystać. Jest to bowiem niezwykle trudny program. Po pierwsze, wymaga on pogłębionych studiów historycznych. Nie wystarcza, jak zwróciliśmy na to uwagę wcześniej, badanie obowiązujących w danej epoce paradygmatów. Przeszkody epistemologiczne są często ukryte, nieuświadomione. Trzeba więc docierać do źródeł, przebijać się przez niektóre nazbyt daleko idące „racjonalizacje" historyków matematyki, mających często tendencję do ukrywania błędów matematyków w przeszłości. Podawanie wyników we współczesnej notacji także sprawy nie ułatwia (por. Glaeser, 1984; Lakatos, 1978$_2$; Kuhn, 1962; Waszkiewicz, 1977). Po drugie zaś, wymaga on tworzenia specjalnych sytuacji dydaktycznych, problemów i sytuacji problemowych, które

bądź wydobywałyby na światło dzienne dawne koncepcje i intuicje uczniów świadczące o niepokonaniu przez nich różnych przeszkód epistemologicznych, bądź umożliwiałyby im pokonanie przeszkody. Sprawdzenie, czy przeszkoda została pokonana, także nie jest łatwe; to znowu wymaga doboru odpowiedniej sytuacji problemowej i eksperymentalnej. Opracowanie takich sytuacji, to nie jest tylko sprawa np. analizy warunków historycznych, w jakich doszło do pokonania przeszkody, choć może to być źródło inspiracji. Poza „sytuacjami eksperymentalnymi interakcji i komunikowania się" nie ma właściwie żadnych wskazówek, jak takie sytuacje tworzyć.

Pewnym źródłem informacji o niepokonanych przeszkodach epistemologicznych u dzisiejszych uczniów może być literatura. Jest wiele prac, które donoszą o rozmaitych intuicjach i koncepcjach lub błędach uczniów, które mogą nam przyjść z pomocą. Wzbogacenie analizy wyników tych badań analizą z punktu widzenia przeszkód epistemologicznych może dać bardzo głębokie rezultaty.

Można jeszcze zapytać, jakie są w naszym programie „basic statements" i „potential falsifiers". Zdaniami podstawowymi są z pewnością zdania typu: „to a to jest przeszkodą epistemologiczną i powoduje to takie to a takie błędy". Zdania te są zawsze hipotetyczne, gdyż to, czy dana przeszkoda jest czy nie jest obecna u dzisiejszych uczniów, jest często wynikiem subiektywnej interpretacji eksperymentatora. Istnieje więc możliwość ich falsyfikacji. Siła takiej falsyfikacji wydaje się tkwić w rozwijających się ostatnio badaniach nad sztuczną inteligencją. Ponadto stwierdzenie, że coś jest przeszkodą epistemologiczną w rozwoju matematyki, jest potencjalnie falsyfikowalne poprzez nowe wyniki pogłębionych badań historycznych, odkrycie nowych, nie znanych dotąd faktów historycznych lub nowe spojrzenie na rozwój jakiejś teorii dzięki powstaniu nowej gałęzi matematyki, tak jak to się stało z interpretacją rozwoju rachunku różniczkowego i całkowego w wyniku odkrycia analizy niestandardowej przez Robinsona.

Literatura cytowana

B a c h e l a r d, G., 1938: *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin.

B a l a c h e f f, N. et L a b o r d e, C., 1982: *Langage symbolique et preuves dans l'enseignement mathématique: une approche socio-cognitive*, Psychologie sociale et Developpement cognitif (G. Mugny) Berne, Peter Lang, 1985.

B e r t h e l o t, C. et R., 1983: *Quelques apports de la théorie des situations a l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe Premiere A*, Mémoire DEA, IREM de Bordeaux.

B o u v i e r, A., 1985: *On strategies for teaching*, For the learning of mathematics 5. 1, Montréal.

B r o u s s e a u, G., 1977: *L'étude des processus d'apprentissage en situations scolaires*, Communication de M. Brousseau au Centre for Studies in Science Education, University of Leeds (England, 77-07-06).

-, 1980-1981: *Problèmes de didactique des décimaux*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 1.1 et 1.2, Grenoble.

-, 1983: *Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathématiques*, ibidem. Vol. 4.2, Grenoble.

-, 1984: Wywiad przeprowadzony w czasie Szkoły Letniej z Dydaktyki Matematyki w Orléans, lipiec 1984, przez A. Sierpińską (nieopublikowany).

C o r n u, B., 1983: *Apprentissage de la notion de limite; conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat de 3e cycle de mathématiques pures, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

D a v i s, P.J. and Hersh, R., 1981: *The mathematical experience*, Birkhaüser.

D u d a, R., 1982: *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, Dydaktyka Matematyki 1. PWN, Warszawa.

D u r o u x, A., 1983: *La valeur absolue; difficultés majeures pour une notion mineure*, Petit x, No. 3, Grenoble.

F r e u d e n t h a l, H., 1973: *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dortrecht.

-, 1978: *Weeding and Sowing; preface to a science of mathematical education*, D. Reidel, Dortrecht.

-, 1983: *Implicit philosophy of mathematics history and education*, wykład na Kongresie ICM, Warszawa 1983 (tłumaczenie polskie w Dydaktyce Matematyki, tom 6).

The paper is composed of three parts. The first part is an attempt of an explication of the notion of E: it contains examples of E's, a formulation of some properties of E's, a discussion of the difficulties connected with defining the notion of E in mathematics (e.g.: Bachelard claimed that E's are characteristic of the pre-scientific period only - the historians say that mathematics has been in its scientific period since Antiquity; Bachelard talked about E's in natural sciences only - mathematics is not a natural science). A distinction between difficulty and an E is made. Also, some problems with the applications of the notion in the philosophy of teaching mathematics are formulated. The last section is concerned with the possible historical and philosophical background of the notion of E.

The second part contains a discussion of the implications for teaching mathematics of the philosophy connected with the notion of E: the inevitable change of the teacher's attitude towards his students' errors as well as towards the knowledge he teaches. Much of this knowledge is a result of a social construction, of a choice, of a negociation within a community of mathematicians. In a classroom also, knowledge should be negociated with the students and the teacher should not regard himself nor be regarded by his students as the sole detainer of ultimate truth. A lesson should take the form of a common research made by the students together with their teacher. But this postulate is hard to fulfil. A choice has to be made. And it is claimed that the place where the teacher should be bound to take into account the former knowledge of the students and help them to rebuild it on a higher level - is where there is an E still present in students' minds.

In the third part, a research programme is formulated aiming at determining E's connected with mathematics at school level, devising and testing didactical situations that would help the students to overcome these. The notion of E is claimed to be the key notion of the programme. Main hypotheses: (1) parallelism between onto- and philogenesis of mathematical concepts, and (2) the fundamental role of E's in the development of mathematical thought. Auxiliary hypotheses: (1) Piaget's psychological theories; (2) theory of didactical situations of Brousseau. Heuristic: (to

be developped, but already:) „théorie des situations de communication et d'interaction" developed mainly by the Grenoble research group.