ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 8 (1987)

HEINRICH BAUERSFELD
Bielefeld, R. F. N.

WACŁAW ZAWADOWSKI
Warszawa

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Metafory i metonimie w nauczaniu matematyki *

Często się mówi, że matematyka to jest pewien język. Takie powiedzenia możemy przyjąć tylko jako przenośnię. Rozumiane dosłownie, nie są one prawdziwe. Matematyka to nie jest język. Chociaż występują pewne podobieństwa do języków naturalnych, to jednak występują również głębokie różnice. O obiekty matematyczne nie można sobie nabić guza, obiekty matematyczne są czystymi tworami umysłu. Trudno to komuś opisać, kto tego nie doświadczył, a gdy doświadczył, to i opisywać nie trzeba. Najstarszy opis tej sprawy znajdujemy już u Platona (tłum. Witwicki, 1958, str. 355), i chyba nie ma potrzeby zmieniać tego opisu. Jest on tak świeży i żywy, że można by go użyć i dziś w podręcznikach szkolnych matematyki. To, o czym mówimy w matematyce, można widzieć tylko w myśli. To, o czym mówi się w języku naturalnym, nie podlega takim ograniczeniom.

Matematyka żywa nie jest identyczna z żadnym systemem formalnym, mimo że takie systemy są dla matematyki bardzo ważne i często pełnią dla matematyki rolę nośnika. Nie możemy utożsamić matematyki z metodą logicznego wyprowadzania twierdzeń z przyjętych aksjomatów,

* Artykuł jest poszerzonym nieznacznie przekładem publikacji Bauersfelda i Zawadowskiego (1981), cytowanej w spisie literatury.

mimo że metoda ta gra w matematyce podstawową rolę. Matematyka jest również pewnym przeżyciem intelektualnym, i nie można sobie wyobrazić matematyki bez takiego charakterystycznego dla niej przeżycia.

W tej pracy pragniemy zwrócić uwagę na pewne aspekty matematyki, które nie są, jak dotąd, należycie doceniane, a może nawet niezauważane. Dotyczy to jednak matematyki żywej, *in statu nascendi*, a więc również takiej, z jaką mamy do czynienia przy uczeniu się matematyki, lub gdy obserwujemy rozwój matematyczny dzieci.

Nasze rozważania pozwalają spojrzeć z innej strony na znaną dychotomię Skempa (1970), a mianowicie na przeciwstawienie ukazujące przeciwieństwa zachodzące między rozumieniem relacyjnym a rozumieniem instrumentalnym. Nie widzimy powodu, dlaczego rozumienie związane z wykonywaniem ma być skazane na zajmowanie zaszczytnego drugiego miejsca. Gdyby tak miało być, musielibyśmy przyznać, że sztuka wymaga znacznie mniejszej inteligencji od artysty niż od krytyka, który zaczyna o tej sztuce teoretyzować. Wyczuwamy, że byłaby to podejrzana sprawa. Sztuka wymaga od artysty innego typu inteligencji niż teoretyzówanie o sztuce. Te dwa typy inteligencji raczej się uzupełniają niż wykluczają. Możemy też inaczej spojrzeć na rozumienie komunikowalne (Meissner, 1983, Wachsmuth, 1981).

Rozważania nasze rzucają również pewne światło na to, dlaczego w przekazie matematycznym musimy się godzić na pewne nieformalności, jak również na pewne regularności w występowaniu takich nieformalności.

Rozważania nasze prowadzą do jakobsonowskiej opozycji pomiędzy dwiema podstawowymi figurami myślenia: metaforą i metonimią, które mają ścisły związek z odpowiednimi figurami stylistycznymi w języku. Takie postawienie sprawy wymaga najpierw wyjaśnienia, czym są te dwie figury w matematyce, w matematyce żywej oczywiście, i w rozwoju matematycznym młodych ludzi. Oprócz strony metaforycznej, matematyka ma bardzo bogatą w porównaniu do języka naturalnego budowę metonimiczną. Niezauważanie tego może prowadzić do poważnych pomyłek pedagogicznych i błędów w sztuce.

1. FORMALNA PEDANTERIA, CZY CELNOŚĆ?

Co wybierać, co ważniejsze: formalna dokładność czy soczysta ekspresywność i celność przekazu? Stale przed nami staje to pytanie przy sporządzaniu tekstów dydaktycznych z matematyki, a odpowiedź wcale nie jest jednoznaczna i łatwa. Spróbujmy pokazać ten dylemat na oklepanym przykładzie dzielenia z resztą. W czasopismach związanych z nauczaniem matematyki, nie tylko zresztą w naszym kraju, pokazało się w pewnym okresie dość dużo wypowiedzi potępiających stary szkolny zapis dzielenia z resztą, np.:

$$1234 : 56 = 22 \text{ r. } 2.$$

Potrzeba użycia takiego zapisu pojawia się w nauczaniu szkolnym w pewnym momencie, gdy omawia się dzielenie liczby naturalnej przez liczbę naturalną, i nie trwa długo. Zwykle potem język się wzbogaca i albo interesuje nas tylko całkowita część ilorazu, ale już w zbiorze liczb rzeczywistych, lub reszta, albo w ogóle zapominamy o sprawie na długo. I zwykle w tym krótkim czasie, gdy temat ten wkracza do klasy na lekcjach matematyki, na tablicach szkolnych pojawiają się te staromodne zapisy, mimo sporej energii zużytej na ich zwalczanie przez ich adwersarzy. Dlaczego ten zapis uważa się za niepoprawny - można zrozumieć. Znak równości występujący w tym zapisie jest użyty niepoprawnie (Mąkowski, 1976). Po obu jego stronach mamy rzeczy różne. Jak z tego wybrnąć? Niektórzy mówią - używać innego znaku, mają nawet pomysły - jakiego. Inni mówią, używać innego zapisu, np. $56 \cdot 22 = 1234 \mathrel{\text{L}} 2$, albo $1234 = 56 \cdot 22 + 2$, a czasem $1234 - 2 = 56 \cdot 22$. Wszystkie te dobre rady mają jedną wadę. Polecane zapisy mówią co innego niż ten niepoprawny staromodny zapis. Wprowadzanie jeszcze jednego znaczka do krótkotrwałego użytku także nie jest praktyczne. Prędko się zapomina, co on znaczy, a gdy spotka się dwóch upartych, każdy przyzwyczajony do swojego znaczka, rozpoczynają się niepotrzebne spory. I tak na placu boju zostaje ten staromodny zapis. Czy go zwalczać, czy może dać spokój i zacząć go tolerować, a może nawet polubić? Polubić, znaczy zrozumieć. Spróbujmy zrozumieć, co znaczą te dwie poziome kreski w tym staromodnym zapisie. Te dwie poziome kreski, zgodnie z tym, co chciał nam ktoś przekazać, wcale nie znaczą „równa się"; on tylko

tak napisał, ale chciał przez to powiedzieć „daje wynik". Użył więc takiego znaku, jaki miał pod ręką, a zakomunikował nam to dokładnie, czego i my byśmy właśnie oczekiwali, przecież wiemy dobrze, czego chciał: chciał nam przekazać to, że najbliższą wielokrotnością liczby 56 do liczby 1234 jest 22 razy 56 i brakuje tylko 2, a może to, że 56 mieści się w 1234 22 razy i zostaje 2 reszty. To szkolne użycie znaku równości w niezalegalizowanym znaczeniu „daje wynik" jest tak mocne (a może trzeba powiedzieć, było tak mocne, dopóki na plac boju nie weszli formaliści), że dzisiaj prawie każdy kieszonkowy kalkulator, na klawiszu, który wyraża nasze życzenie „proszę o wynik", ma te dwie równe poziome kreski, łudząco przypominające znak równości.

Podobnych przykładów użycia pewnych znaków w sposób nieoczekiwany, żeby nie powiedzieć niepoprawny albo nielegalny, można by wskazać sporo, i im bardziej się szuka, tym więcej ich się pojawia. Możemy zacząć prostować te niedokładności, ale wtedy pojawiają się nowe w innych miejscach, jakby ktoś chciał zakpić z naszej pedanterii. Spróbujmy przyjrzeć się temu bliżej.

2. METONIMIE W JĘZYKU NATURALNYM

Te przypadki użycia znaków lub grup znaków mają pewne wspólne cechy, które chcielibyśmy tu opisać. Najbardziej uderzającą cechą takiego specjalnego użycia znaków jest to, że nastąpiło jakby przesunięcie referencji, tj. przesunięcie znaczenia użytego symbolu lub przesunięcie nazwy, podczas gdy jest całkowicie jasne, w jakim znaczeniu ten znak lub grupa znaków została użyta. Przekaz nie budzi wątpliwości. Nawet można by powiedzieć, jeżeli przekaz jest na żywo, że między nadawcą a odbiorcą jest swojego rodzaju rezonans, doskonałe porozumienie. Ten rezonans jest na tyle stabilny, że dokonane przesunięcie referencji nie jest w stanie go zakłócić. Jest raczej podkreśleniem tej stabilności. Zręczne przesunięcie referencji daje u odbiorcy efekt skupienia jego uwagi, fokalizacji psychicznej, dającej jakby efekt przygotowania do jakiejś następnej czynności, jakby następnego skoku. Przesunięcie referencji zostało więc użyte jako pewien środek przekazu, a biorąc pod uwagę ekspresywność tego

środka, można by powiedzieć, że mamy do czynienia z pewną figurą stylistyczną (Le Guern, 1973; Malczewski, 1979).

W opisanym przypadku znak równości „=" został użyty właśnie z takim przesunięciem referencji, przesunięciem znaczenia. Z drugiej strony, można by powiedzieć, że użycie tego symbolu nastąpiło z całkowitym zachowaniem ustalonego już znaczenia między nadawcą a odbiorcą. Brakowało tylko odpowiedniego znaku. Odpowiedniego dla potrzeb chwili znaku, takiego, który użyty w tym miejscu sam by się już wyjaśniał. Kłopot jest tylko z zalegalizowaniem tego użycia, a nie z jego znaczeniem.

W języku potocznym tego rodzaju figury stylistyczne występują często. Na przykład: „Podaj mi Kuratowskiego", „Czy czytałeś Rasiową?" Występujące tu przesunięcie referencji jest oczywiste. Nie chodzi o osoby, ale książki napisane przez te osoby. Użyty symbol nie jest wzięty dowolnie, przeciwnie, jakby sam wpada mówiącemu w ręce. Jest po prostu bardzo poręcznym, wyrazistym skrótem.

Takie sposoby wyrażania się mają swoją nazwę. To są metonimie. Metonimie tworzy się na podstawie pewnej relacji „bycia w zasięgu ręki" (Henry, 1971; Le Guern, 1973; Malczewski, 1979), którą nazywamy relacją „styczności" lub „kontygencji", co ma wyrażać pewną okazję i pewien związek między użytym znakiem a znaczeniem, w którym został użyty. Ten związek może pochodzić z rzeczywistej sytuacji lub z sytuacji w „universe of discourse", w świecie dyskursywnym. Ten związek, zgodnie dostrzegany przez odbiorcę i nadawcę, daje styczność, na podstawie której zbudowane są metonimie.

Zobaczmy dalsze przykłady. Gdy mówimy „jakiś głos śpiewał w ogrodzie", to nie głos śpiewał, ale ktoś, kto ten głos wydawał. „Najlepsza szabla w Rzeczpospolitej" - nie chodzi o szablę, ale tego, co nią włada. „Rozmawiałem z Krakowem wczoraj" - nie z Krakowem rozmawiałem, ale z kimś w Krakowie. Związek między Krakowem a tym kimś w Krakowie nie jest utworzony na podstawie podobieństwa, człowiek zwykle nie jest podobny do miasta, ale może być związany z miastem, np. w nim mieszkać, w nim się znajdować. Relacja styczności na ogół nie jest ani podobieństwem, ani analogią. Pewne związki, takie np. jak związek między przyczyną a skutkiem, specjalnie dobrze się nadają za podstawę do utworzenia metonimii. Np. „Co to za tłum?" - „To jest wypadek". To jest oczywiście skutek wypadku, a

wypadek już był. Relacja między naczyniem a jego zawartością jest również źródłem wdzięcznych metonimii: „Buteleczkę? - hm, proszę..." Również wszelkiego rodzaju relacje, które powodują, że coś uważamy za część jakiejś całości, są podstawą specjalnego typu metonimii, które często nazywamy figurami „pars-pro-toto" - część za całość, ale również całość za część, jak np. we wspomnianym wyrażeniu w rodzaju „telefonuje Kraków".

Narzędzie za efekt działania tego narzędzia, instrument muzyczny za dźwięk przez niego wydawany, np. „to są waltornie", narzędzie za kogoś posługującego się tym narzędziem, np. „falszują kontrabasy". Metonimie tworzy się na ogół tak łatwo i tak często bezwiednie, że trudno jest je zauważyć. Gdy pytamy: „Co to jest to *A*?" w jakiejś formułce matematycznej, oczywiście nie chodzi nam o odpowiedź, że jest to pierwsza litera alfabetu, jest to więc metonimia. Przy metonimicznym przesunięciu referencji wykorzystano tu jako relację styczności związek, jaki zachodzi między znakiem a jego znaczeniem. Bardzo dobitnie możemy zaznaczyć tego rodzaju przesunięcie referencji w następującej obrazkowej metonimii:



Tonie oczywiście nie nazwa, a znany statek o tej nazwie w pełni „La Belle Époque", w zderzeniu z górą lodową na Atlantyku.

Podobny mechanizm uruchamia się, gdy czytamy w wierszu Victora Hugo:

„A w Twoim pocałunku świnia miesza się z aniołem."

(„Et dans votre baiser le porc se mêle à l'ange.", La Fin de Satan, Dieu). W jednej z możliwych interpretacji tego wiersza możemy odebrać wrażenie, że chodzi o pomieszanie dobra ze złem, ale w zdaniu, tak jak ono jest zbudowane, mieszanie odnosi się do symboli tych pojęć, anioła i zwierzęcia.

Z grubsza biorąc, różne typy relacji styczności, które mogą służyć za podstawę do tworzenia metonimii; można podzielić na dwie klasy: styczności wytworzone przez sytuację rzeczywistą i styczności kontekstowe. Przesunięcie referencji musi uwzględniać również znaki sąsiadujące, styczne. W portrecie kubistycznym, np. Gertrudy Stein namalowanym przez Picassa, nie trzeba dopatrywać się zbytnio podobieństwa, to schodzi na dalszy plan; na pierwszy plan wysuwa się wzajemna gra lokalnych kontygencji, których stabilność zostaje tylko podkreślona przez lokalne przesunięcia referencji. Również w malarstwie surrealistycznym podstawową relacją jest kontygencja, przeważa więc tam charakter metonimiczny. Przesunięcie referencji jest podstawową figurą słynnych „fajek" Magritte'a, a więc i tu podstawową sztuczką jest metonimia.

3. METAFORY

Dla zupełności obrazu musimy teraz wspomnieć inną figurę stylistyczną, metaforę, która w pewnym sensie jest figurą dualną do metonimii. Zostało to bardzo dokładnie opisane dla języka naturalnego (zob. Jakobson, 1963; M. Le Guern, 1972; A. Henry, 1971). Ta dualność wyraża się szeregiem różnic i przeciwstawień. Najbardziej zadziwiającą różnicą jest to, że metonimie tworzy się, jak również odbiera, zwykle bezwiednie, nieświadomie, jakby automatycznie, od niechcenia, po prostu przychodzą i nasuwają się same. Wykrycie i wskazanie metonimii w czasie rozmowy zwykle powoduje zdziwienie. W przeciwieństwie do tego, metafory prawie zawsze tworzone są świadomie, a często z dużym wysiłkiem intelektu. W przeciwieństwie do metonimii, metafory używane są zwykle wtedy, gdy nadawca chce przekazać pewne treści, mimo że brak mu utartych pojęć i znaków do tego potrzebnych, lub też gdy zrozumienie u odbiorcy musi być dopiero zbudowane, jakby od nowa, nie trafia na wyżłobione już ślady. Również wtedy, gdy nadawca chce zaakcentować jakiś specjalny aspekt, podkreślić pewne mało widoczne w niefiguratywnej formie przekazu własności i brakuje mu odpowiednich słów, czy wyrażeń, czy znaków w zwykle używanym znaczeniu. Taka sytuacja zdarza się często w nauczaniu lub uczeniu się, gdy trzeba wyjść poza poznany już układ po-

jęć i znaków i wykroczyć poza system wspólny dla odbiorcy i nadawcy, używając znaków tylko z częścią ich mocy semantycznej, wynikającą z kontekstu, w którym te znaki zostały użyte, i w nadziei, że odbiorca domyśli się, zgadnie, o jaką część mocy semantycznej chodzi.

W tym sensie metafora jest jakby pierwiastkiem z dwóch wyrażonym w świecie liczb wymiernych; jest lokalną próbą rozszerzenia przyjętego systemu znaków, często z towarzyszącym temu wykroczeniem przeciw prawom i zasadom systemu. Takie sytuacje zdarzają się bardzo często nie tylko w języku potocznym, lecz również w nauczaniu matematyki, a również w matematyce *in statu nascendi*, gdzie raczej wydają się regułą niż rzadkim wyjątkiem.

4. REGULACJA OSTROŚCI OBRAZU

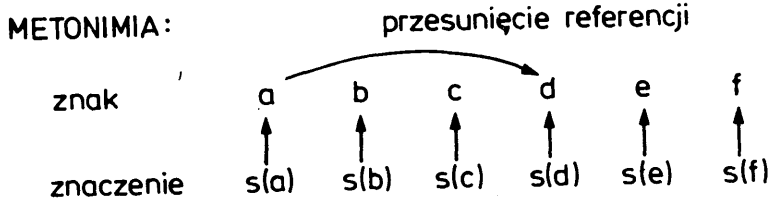
4.1. Jeżeli w ogóle chcemy kogoś czegoś nauczyć, to zwykle chcemy mu jakoś opisać pewne nowe pojęcia lub pokazać pewne nowe zależności, a może struktury - wszystko to w takich terminach, w takim języku, który został przez uczącego się już opanowany. Mówiąc metaforycznie, pomagamy tworzyć nowe jednostki znaczeniowe, zwykle ukazane w szerokim aspekcie powiązań z innymi jednostkami znaczeniowymi. Pod warunkiem oczywiście, że odbiorca odpowiednio zareaguje na takie wyzwanie. Można mieć wtedy wrażenie, że twórcze nastawienie nadawcy udziela się i odbiorcy przekazu.

Natomiast gdy używamy metonimii, to nie zmieniamy jednostek znaczeniowych. Taka zmiana, być może, już się stała, przed chwilą lub wcześniej; metonimia nadaje tylko temu nową lokalną nazwę z towarzyszącym temu charakterystycznym zogniskowaniem uwagi, pewną fokalizacją, skupieniem się na czymś. Ta lokalna nazwa może być nawet chwilę potem zarzucona i zastąpiona inną, lub po prostu zarzucona. Metafora utworzona jest przez podobieństwo lub, mówiąc ogólniej, analogię, metonimia natomiast powstaje przez styczność, kontygencję, pewną tajemniczą relację „bycia pod ręką", krótko mówiąc „by being there" (Mey, 1982), „Vorhandensein".

W metaforze charakterystyczna jest zmiana mocy semantycznej, wybór pewnej części mocy semantycznej znaku, i jakby zapominanie o reszcie, o pozostałej części mocy semantycznej. Moc semantyczna jest wtedy jakby osłabiona, znaczenie bardziej szerokie.

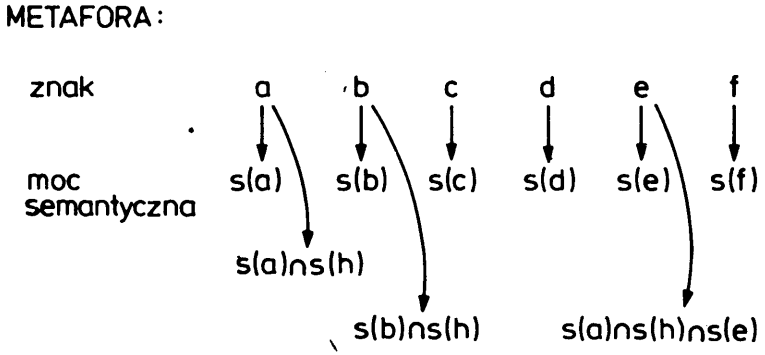
W danym kontekście metafora pojawia się zwykle jako mniej lub bardziej niezwykła kombinacja słów lub znaków, nie pasująca do zwykłej rutyny języka czy tego systemu znaków, o którym mowa. Ta nieregularność, która nie zawsze musi wystąpić, służy odbiorcy jako ostrzeżenie, a może dyskretna wskazówka, dzięki której odbiorca może rozpoznać, że tu znaki zostały użyte figuratywnie.

W figurze metonimicznej użyta jest cała moc semantyczna w niezmienionym składzie, ale jakby innego znaku lub innej grupy znaków. Mówimy dlatego „jakby", że w procesie twórczym, jakim jest uczenie się, zdarza się, że nowe znaczenie, wspólne dla nadawcy i odbiorcy już jest obecne, dzięki na przykład jakiemuś wspólnemu przeżyciu, doświadczeniu, sytuacji, i to nowe znaczenie ma wyraźny charakter jednostki semantycznej, stanowi pewną stabilną całość, odporną na drobne zaburzenia, nie ma natomiast nazwy, nie ma swojego znaku. Ten znak nie może być byle jaki. Musi siedzieć, pasować. Za chwilę zacznie pełnić rolę narzędzia do porozumiewania się. Jeżeli będzie trafny, utrzyma się trochę dłużej. W figurze metonimicznej zachodzi więc przesunięcie referencji i dzieje się to najczęściej podświadomie. Tak jakby jedno słowo przebrało się za inne słowo, jeden znak udawał inny. Nasuwa się tu pewne porównanie do sytuacji, którą mamy, gdy przesuwamy film w rzutniku i nastawiamy na ostrość. Natomiast gdy rzutnik się popsuł i podaje po kilka postrzępionych przeźroczy na raz, przypomina to figurę metaforyczną. Jest to jednak bardzo grube porównanie. Można by spróbować opisane różnice zachodzące między metaforą a metonimią przedstawić graficznie. Na przykład w taki sposób:



Strzałka pokazuje, że użyto w przekazie znaku *d* tam, gdzie w znaczeniu dosłownym powinno być *a*, mówiąc figuratywnie użyliśmy *d*.

W ten sposób powstała figura metonimiczna. Nie zaznaczono natomiast, co było u podstaw tej metonimii leżącą stycznością.



Dla figury metaforycznej schemat ma pokazać osłabianie mocy semantycznej znaku, czy przekazu, tak jakby znak a zapomniał, czy jego znaczeniem jest $s(a)$, czy $s(h)$. Znaczenie figuratywne jest tu więc szersze, rozmyte. Modelem matematycznym opisywanych zależności między metaforą a metonimią może być pewien funktor zapominania, odpowiadający metaforze, którego lewy sprzężony odzwierciedla mechanizm metonimiczny.

4.2. Lingwistyczna opozycja między metaforą a metonimią odzwierciedla dwa rodzaje stanów wewnętrznych, dwa tryby myślenia: tryb metonimiczny i tryb metaforyczny, *modus metonimicus* i *modus metaforicus*. Produkowane znaki są tylko śladami tego.

W językach naturalnych kod jest istotną cechą języka. Zmiana kodu jest również zmianą języka. Stojąca u podstaw języka naturalnego struktura semantyczna, mimo że bardzo ważna, pozostaje jakby w cieniu syntagmy. Współczesny język naturalny jest bardzo mocno związany z jednej strony z kodem akustycznym, a z drugiej z kodem pisanym. Są to dwie różne postacie języka, ale stanowią one jedną całość.

W przeciwieństwie do tego matematyka dąży do uniezależnienia się od tego zakodowania, w którym jest wyrażona. Matematyka jako

przekaz jest bardziej wyidealizowana niż jakikolwiek język naturalny. Możemy mieć nawet wrażenie, że matematyczny przekaz jest czystą strukturą. Jednak struktura jako przekaz musi jechać zawsze na jakimś nośniku o charakterze mniej lub bardziej materialnym. Tak jak kolor. Pojęcie struktury w znaczeniu, którego tu używamy, jest nieodłącznie związane z pojęciem nośnika. Najlepiej opisuje to metafora barwy. Na przykład, aby przekazać, czym jest kolor żółty, trzeba go pokazać, a pokazuje się kolor na czymś. Gdybyśmy w celach przekazu zdefiniowali kolor żółty bardziej formalnie, abstrakcyjnie, posługując się na przykład długością fali światła lub używając opisów słownych zjawisk fizjologicznych towarzyszących postrzeganiu koloru, to odbiorca mógłby to doskonale „zrozumieć", nie dostąpiwszy przy tym ani razu tego przeżycia, jakie daje zobaczenie i widzenie koloru żółtego.

Znaki używane w matematyce mają swoją wyraźną wartość semantyczną. Ta wartość semantyczna nie jest może tak jednoznaczna dla wszystkich matematyków i kompetentnych użytkowników matematyki, jak to jest w przypadku języka naturalnego, ale występuje bardzo wyraźnie.

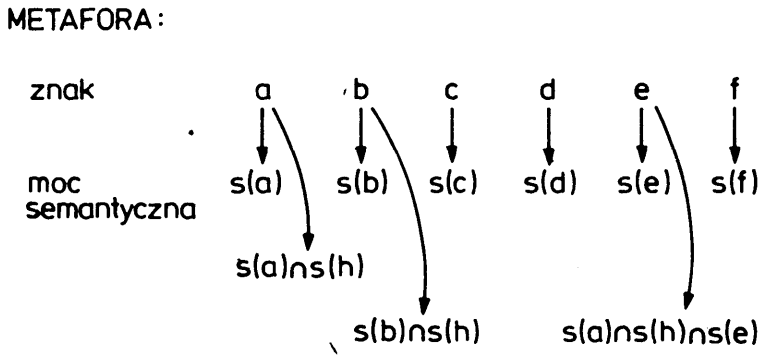
M. Otte twierdzi, że figury metaforyczne występujące w matematyce mają przede wszystkim charakter wizualny. Taki charakter mają „figury" w geometrii, z tym wiąże się tak uporczywie utrzymujący się podział matematyki na geometrię i algebrę. Stąd wywodzi się rola obrazu - płaskiego, jak również przestrzennego - w nauczaniu geometrii, a również rola budowy graficznej znaku matematycznego.

Dlaczego w nauczaniu matematyki musimy wyraźnie zwracać uwagę na te dwie figury myślenia, metafory i metonimie? Dlatego, że wymagają one od nauczającego innego traktowania i służą do innych celów. Zakładamy przy tym jednak, że zależy nam na trafności i celności przekazu, a nie tylko na jego dosłownej, gramatycznej, formalnej poprawności.

5. FIGURY STYLU W JĘZYKU I FIGURY MYŚLENIA A NAUCZANIE MATEMATYKI

Podamy teraz kilka dalszych przykładów, z których powinno być dobrze widoczne przeciwstawienie dosłownego i figuratywnego użycia znaków. Figury metaforyczne są na ogół dużo lepiej rozpoznawane i

W ten sposób powstała figura metonimiczna. Nie zaznaczono natomiast, co było u podstaw tej metonimii leżącą stycznością.



Dla figury metaforycznej schemat ma pokazać osłabianie mocy semantycznej znaku, czy przekazu, tak jakby znak *a* zapomniał, czy jego znaczeniem jest $s(a)$, czy $s(h)$. Znaczenie figuratywne jest tu więc szersze, rozmyte. Modelem matematycznym opisywanych zależności między metaforą a metonimią może być pewien funktor zapominania, odpowiadający metaforze, którego lewy sprzężony odzwierciedla mechanizm metonimiczny.

4.2. Lingwistyczna opozycja między metaforą a metonimią odzwierciedla dwa rodzaje stanów wewnętrznych, dwa tryby myślenia: tryb metonimiczny i tryb metaforyczny, *modus metonimicus* i *modus metaforicus*. Produkowane znaki są tylko śladami tego.

W językach naturalnych kod jest istotną cechą języka. Zmiana kodu jest również zmianą języka. Stojąca u podstaw języka naturalnego struktura semantyczna, mimo że bardzo ważna, pozostaje jakby w cieniu syntagmy. Współczesny język naturalny jest bardzo mocno związany z jednej strony z kodem akustycznym, a z drugiej z kodem pisanym. Są to dwie różne postacie języka, ale stanowią one jedną całość.

W przeciwieństwie do tego matematyka dąży do uniezależnienia się od tego zakodowania, w którym jest wyrażona. Matematyka jako

przekaz jest bardziej wyidealizowana niż jakikolwiek język naturalny. Możemy mieć nawet wrażenie, że matematyczny przekaz jest czystą strukturą. Jednak struktura jako przekaz musi jechać zawsze na jakimś nośniku o charakterze mniej lub bardziej materialnym. Tak jak kolor. Pojęcie struktury w znaczeniu, którego tu używamy, jest nieodłącznie związane z pojęciem nośnika. Najlepiej opisuje to metafora barwy. Na przykład, aby przekazać, czym jest kolor żółty, trzeba go pokazać, a pokazuje się kolor na czymś. Gdybyśmy w celach przekazu zdefiniowali kolor żółty bardziej formalnie, abstrakcyjnie, posługując się na przykład długością fali światła lub używając opisów słownych zjawisk fizjologicznych towarzyszących postrzeganiu koloru, to odbiorca mógłby to doskonale „zrozumieć", nie dostąpiwszy przy tym ani razu tego przeżycia, jakie daje zobaczenie i widzenie koloru żółtego.

Znaki używane w matematyce mają swoją wyraźną wartość semantyczną. Ta wartość semantyczna nie jest może tak jednoznaczna dla wszystkich matematyków i kompetentnych użytkowników matematyki, jak to jest w przypadku języka naturalnego, ale występuje bardzo wyraźnie.

M. Otte twierdzi, że figury metaforyczne występujące w matematyce mają przede wszystkim charakter wizualny. Taki charakter mają „figury" w geometrii, z tym wiąże się tak uporczywie utrzymujący się podział matematyki na geometrię i algebrę. Stąd wywodzi się rola obrazu - płaskiego, jak również przestrzennego - w nauczaniu geometrii, a również rola budowy graficznej znaku matematycznego.

Dlaczego w nauczaniu matematyki musimy wyraźnie zwracać uwagę na te dwie figury myślenia, metafory i metonimie? Dlatego, że wymagają one od nauczającego innego traktowania i służą do innych celów. Zakładamy przy tym jednak, że zależy nam na trafności i celności przekazu, a nie tylko na jego dosłownej, gramatycznej, formalnej poprawności.

5. FIGURY STYLU W JĘZYKU I FIGURY MYŚLENIA A NAUCZANIE MATEMATYKI

Podamy teraz kilka dalszych przykładów, z których powinno być dobrze widoczne przeciwstawienie dosłownego i figuratywnego użycia znaków. Figury metaforyczne są na ogół dużo lepiej rozpoznawane i

nie będziemy ich tu niepotrzebnie mnożyć. Figury metonimiczne natomiast na ogół przechodzą niezauważone, dlatego opisujemy tych przykładów trochę więcej.

5.1. Notację algebraiczną z użyciem liter lub, krótko mówiąc, początki szkolnej algebry wprowadzamy często w następujący sposób. Bierzemy pewną liczbę, powiedzmy a, i pewną liczbę b, i nadajemy znaczenie wyrażeniom, takim jak

$$a+b, \qquad 2a, \qquad 3b, \qquad a+b \text{ razy } c+d \qquad \text{etc.}$$

Co dalej - dobrze znamy. W tym przypadku metonimiczne przesunięcie referencji objawia się tym, że bierzemy litery alfabetu i traktujemy je jak nazwy liczb, jak „liczby", mówimy. I na tej właśnie podstawie wiemy jak dodawać do siebie i mnożyć litery alfabetu. Przesunięcie referencji pozwala nam przenieść lokalnie całą ramę operacyjną z liczb na litery. Ten mechanizm poznawania rachunku literowego jest dla uczącego się przystępniejszy aniżeli formalna definicja pierścienia wielomianów wielu zmiennych. Taka definicja może się pojawić jako zakończenie procesu poznawania pewnego etapu rachunku literowego, ale nie na wstępie. A więc metonimiczne przesunięcie referencji z liczb na litery pozwala nam na nieformalne poznanie pewnych fragmentów rachunku literowego, pewnych fragmentów rachunku w pierścieniu wielomianów wielu zmiennych. Jeżeli zarówno nadawca jak i odbiorca są do siebie dostrojeni, to nie ma, oczywiście lokalnie biorąc, wątpliwości, w jaki sposób „dodawać litery". Ten mechanizm jednak funkcjonuje tylko lokalnie, i wymaga stałego wzmacniania i rozszerzania.

5.2. Czasem przesunięcie referencji pełni zupełnie inną funkcję, po prostu zgrabnie dobranej nazwy dla liczb o pewnych własnościach, dla wyniku pewnej operacji, itp. Tak na przykład jest, gdy dobieramy oznaczenia w następujących przypadkach

n na oznaczenie liczby naturalnej,

p na oznaczenie liczby pierwszej,

r na oznaczenie reszty.

Te nazwy zostały dobrane nie przez podobieństwo, ale na zasadzie styczności, po prostu są „pod ręką". Wybór nie nastąpił tu ani

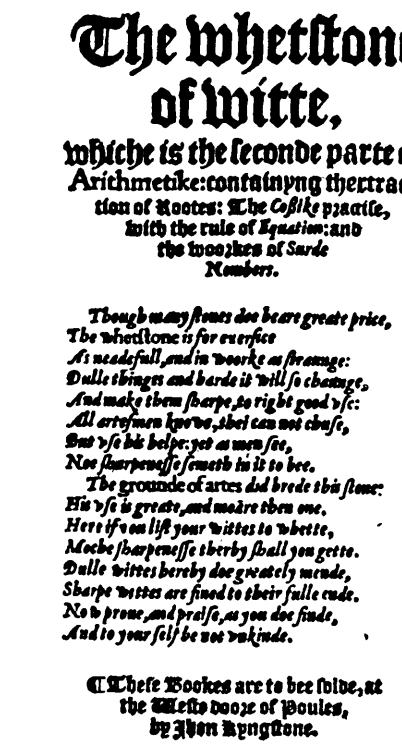
na zasadzie podobieństwa, ani analogii. Litera n nie jest podobna przecież do żadnej liczby naturalnej. Tego typu metonimie są bardzo częste, np. k - liczba krawędzi, w - liczba wierzchołków, s - liczba ścian we wzorze Eulera. Zwykle mówimy: k to są krawędzie, w - wierzchołki, s - ściany, choć często zaraz eliminujemy tę nieformalność stylu, albo celowo jej unikamy. Odbiorca ma jednak wtedy wrażenie, że nadawca niepotrzebnie się męczy.

5.3. Bardzo często stosowaną metonimią jest używanie wartości funkcji $f(x)$ zamiast funkcji f lub, na odwrót, funkcji zamiast wartości funkcji dla pewnego argumentu. Eliminowanie tego rodzaju metonimii, na przykład w wykładzie analizy, mimo że jest teoretycznie możliwe do wykonania, jest tak uciążliwe, tak utrudniające przekaz, że żaden właściwie podręcznik analizy nie może sobie na to pozwolić. Inną formą tego rodzaju metonimii jest nazywanie ciągu przez podanie n-tego wyrazu tego ciągu, np. a_n. W tym oznaczeniu podkreślamy od razu swoje zainteresowanie bardziej wartościami tej funkcji, która jest ciągiem, niż sposobem przyporządkowania, ale wszystkich niuansów nie sposób tu opisać. Żywy język matematyczny analizy należy do najbogatszych źródeł śladów myślenia figuratywnego.

Jedną z ważniejszych rodzajów metonimii w językach naturalnych jest metonimia typu *pars-pro-toto* (część za całość). Ten rodzaj ma nawet swoją specjalną nazwę, taka metonimia nazywa się *synekdochą*. W matematyce wydaje się, że taką rolę przejmuje metonimia, którą można by nazwać „$f(x)$ - pro-f". Towarzyszący temu efekt kondensacji, a może należałoby mówić fokalizacji czy skupienia uwagi, bardzo ładnie opisuje w swoich wspomnieniach Stanisław Ulam (1976), pisząc o Kawiarni Szkockiej i swoich tam rozmowach ze Stanisławem Mazurem: „... czasem siadywaliśmy godzinami w tej kawiarni. Mazur wypisywał jakiś jeden jedyny symbol, albo pojedynczą linijkę, coś w rodzaju $y = f(x)$, na skrawku papieru albo na marmurowym blacie stolika. Gapiliśmy się w ten napis i wymienialiśmy różne pomysły i dyskutowaliśmy. Te symbole przed nami pomagały nam skupić uwagę, jak kryształowa kula." (Ulam, 1976, str. 31.)

Specjalny rodzaj metonimii polegającej na przesunięciu referencji z elementu na zbiór, do którego ten element należy, możemy uważać za przypadek szczególny metonimii $f(x)$-pro-f. I ten rodzaj me-

tonimii, jak się wydaje, gra w matematyce pewną rolę. Natomiast przesunięcie referencji z klasy równoważności na pewien element tej klasy, często w pewien szczególny, kanoniczny sposób, jest bardzo ważnym matematycznym przypadkiem metonimii i należy do bardzo często stosowanych figur i w matematyce, i w dydaktyce matematyki. Również przesunięcie referencji w drugim kierunku, z elementów w pewnym sensie kanonicznych na klasy równoważności zawierające te elementy, jest figurą, która ma swoje miejsce zwłaszcza w dydaktyce matematyki. Wystarczy prześledzić różne sposoby wprowadzania ułamków, żeby się o tym przekonać. W pewnych przypadkach pojęcie szkieletu kategorii może służyć jako model tych sytuacji. Każdy z tych przypadków metonimii jest w pewnym sensie autonomiczny, ma swoje odrębności i jest wart bardziej wyczerpującego zbadania. Spojrzenie na te sposoby realizowania przekazu matematycznego od strony figur myślenia ukazuje pewne nowe aspekty.



The whetstone of witte,

whyche is the seconde parte of Arithmetike: containyng the extraction of Rootes: The Cossike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Numbers.

Though many stones doe beare greate price,
The whetstone is for euerfice
As needefull, and in woorke as straunge:
Dulle thinges and harde it will so chaunge,
And make them sharpe, to right good vse:
All artesmen knowe, thei can not chuse,
But vse his helpe: yet as men see,
Noe sharpenesse semeth in it to bee.
The grounde of artes did brede this stone:
His vse is greate, and moare then one.
Here if ye can lift your wittes to whette,
Moche sharpenesse therby shall you gette.
Dulle wittes hereby doe greately mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Noe prone, and praise, as you doe finde,
And to your self be not vnkinde.

¶ These Bookes are to bee solde, at the Weste doore of Poules, by Iohn Kyngstone.

5.4. Przykładem figury metaforycznej w nauczaniu matematyki może być metafora von Misesa. Opisujemy przy jej użyciu stabilność częstości doświadczalnych z próby, mówiąc, że dążą one do pewnej granicy. Sygnałem tego, że mamy do czynienia z wyrażeniem figuratywnym, jest to, że częstości doświadczalne znane nam są z natury rzeczy tylko jako pewna skończona ilość wyrazów pewnego ciągu, o którym nawet nie można powiedzieć, że jest potencjalnie nieskończony. Mimo stale powtarzających się głosów krytycznych, piętnujących taki sposób wyrażania się, metafora von Misesa wytrzymuje zadziwiająco dobrze próbę czasu i świetnie pełni swą funkcję komunikatywną, mimo że jest tylko figurą stylistyczną.

The Arte

as their woꝛkes doe extende) to diſtinct it onely into twoo partes. Whereof the firſte is, *when one nomber is equalle vnto one other.* And the ſeconde is, *when one nomber is compared as equalle vnto.2.other nombers.*

Alwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaſte denominations, and ſmalleſte ſoꝛmes, beſoꝛe you pꝛocede any farther.

And agayn, if your *equation* be ſoche, that the greateſte denomination *Coſſike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you ſhall tourne it ſo, that the nomber of the greateſte ſigne alone, maie ſtande as equalle to the reſte.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woꝛke.

Notwithſtandyng, foꝛ eaſſe alteratiõ of *equations*. I will pꝛopounde a fewe exãples, bicauſe the extraction of their rootes, maie the moꝛe aptly bee wꝛought. And to auoide the tedioule repetition of theſe woꝛdes: is equalle to: I will ſette as I doe often in woꝛke vſe, a paire of parralleles, oꝛ Gemowe lines of one lengthe, thus: =, bicauſe noe. 2. thynges, can be moare equalle. And noꝛ marke theſe nombers.

1. 14.☉. — .15.▯ = 71.▯.
2. 20.☉. — .18.▯ = .102.▯.
3. 26.☽. — 10☉ = 9.☽ — 10☉ — 21.▯.
4. 19.☉ — 192.▯ = 10☽ — 1088▯ — 19☉
5. 18.☉ — 24.▯. = 8.☽. — 2.☉.
6. 3☽ — 12☉ = 40☉ — 480▯ — 9.☽.

5.5. Ciekawe przykłady możemy czerpać z historii matematyki. Chyba jedną z piękniejszych metafor znanych z historii matematyki jest sposób wprowadzenia znaku równości, jako dwóch poziomych kre-

sek, w tej postaci, jakiej używamy obecnie. Znak ten po raz pierwszy wystąpił w książce *The Whetstone of Witte* Roberta Recorde'a w roku 1557. Był to pierwszy drukowany podręcznik algebry w języku angielskim. Podajemy obok reprodukcję tych kilku zdań, gdzie uzasadniał on tę postać znaku równości. („Now be it, for easie alterti$\tilde{o}$(n) of equations. I will propounde a fewe exa$\tilde{m}$(m)ples, because the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: because noe. 2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers, $14x + 15\varphi = 71\varphi$"). Można to przetłumaczyć następująco: „A teraz do łatwiejszego przekształcania równań. Przedstawię kilka przykładów, ponieważ wyciąganie ich pierwiastków można lepiej wykształtować. A żeby uniknąć nużącego powtarzania tych słów: jest równe: wstawię, czego często sam używam w moich pracach, parę równoległych, czy bliźniaczych linii jednej długości, w taki sposób: $=\!=\!=$, ponieważ żadne dwie rzeczy nie mogą być bardziej równe. A teraz zwróć uwagę na te liczby, 1. $14x + 15\varphi =\!=\!=\!= 71\varphi$." (Dzisiaj zapisalibyśmy to równanie w formie $14x + 15 = 71$, gdyż znak φ odnosił się do jednostki, w której wyrażone były wielkości wiązane równaniem; mogły to być funty, łokcie, uncje etc. My używamy równań inaczej. Równanie wyraża związek między liczbami, a nie wielkościami.) Widać wyraźnie z tych słów, że Robert Recorde chciał użyć znaku przypominającego, przez pewną analogię, o równości. W tych czasach najczęściej zamiast znaku równości pisano słowami „aequatus" albo „aequatum" albo skrót aeq., a Kartezjusz używał innego znaku: $\propto$, bo po prostu taki znak był w drukarni, był często używany w astrologii. Wybór, którego dokonał Recorde był więc oparty na zasadzie podobieństwa, analogii. Figura ma więc charakter metafory. Znak równości ma pochodzenie metaforyczne.

Są również inne ciekawe przykłady, a o figurach stylistycznych w przekazie matematycznym Newtona czy Leibniza można by pisać dużo i długo.

5.6. Przykład znaku równości może nam zwrócić uwagę na pewien dotkliwy niedostatek obecnie używanej szkolnej symboliki algebra-

icznej. Brak mianowicie symbolu oznaczającego operację podstawiania. Brak ten bardzo utrudnia opisywanie procedur rachunkowych. W przeciwieństwie do znaku równości, znak podstawiania musi być asymetryczny i musi wyraźnie sugerować, co zostaje zastąpione czym. Najlepsza byłaby więc strzałka, i aby nie mylić jej ze strzałką oznaczającą przyporządkowanie funkcyjne, powinna to być strzałka skierowana w odwrotnym kierunku, w taki sposób: ⟵. Na przykład wstawiając w miejsce x liczbę r, w miejsce y liczbę πr, możemy przekształcić wzór na pole prostokąta xy, na wzór πr^2:

xy,
$x \longleftarrow r$,
$y \longleftarrow \pi r$,
πr^2.

Symbol := przyjęlibyśmy wtedy za symbol definiowania, np. $f(x) := ax^2 + b$.

Czytelnikowi radzimy w tym miejscu zastanowić się, jak wielką zmianą będzie, gdy do arsenału oznaczeń szkolnej algebry wprowadzimy taki znak podstawiania. Od razu musimy zaznaczyć, że metonimia, mimo że ją się czasem nazywa z polska zamiennią, nie może być uważana po prostu za rezultat pewnej operacji podstawiania. Operacja podstawiania jest pewną ogólnie przyjętą w systemach formalnych w pełni legalną operacją, zgodną z systemem.

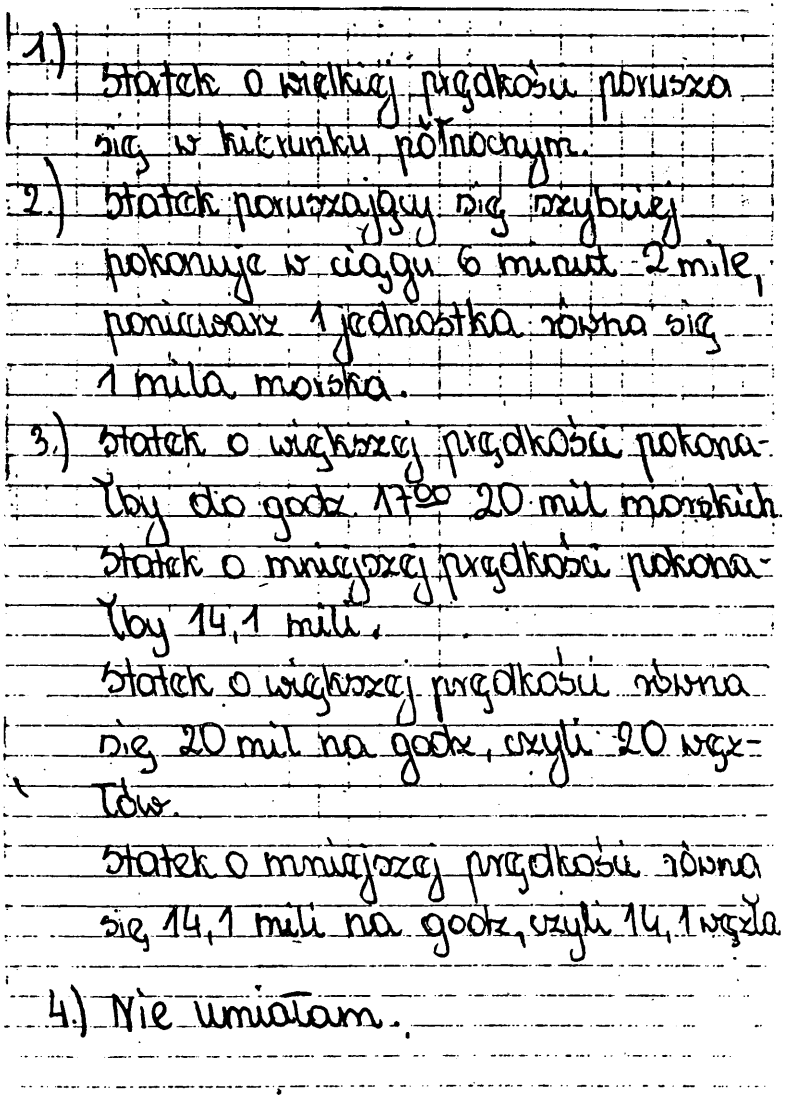
Metonimia, jako figura stylistyczna, z reguły jest w takim systemie pewnym wykroczeniem. W ogóle pojęcie figury stylistycznej odnosi się do języka żywego, a nie do systemu formalnego. W znaczeniu przyjętym przez nas, figury stylistyczne, w szczególności metafory i metonimie, odnosimy nie tylko do języka potocznego, ale również do żywego języka matematyki, a nawet traktujemy te figury jako figury myślenia.

Być może, że pewną klasę metonimicznych przesunięć referencji można by zinterpretować na gruncie języków formalnych. Wydaje się jednak, że wtedy te symbole, które oznaczają zmienne, trzeba interpretować jako dowolne stałe. Jednak nawet taki zabieg może tylko częściowo opisać pewne aspekty związane z pojęciem figury stylistycznej języka żywego.

5.7. Kreska ułamkowa jest przykładem znaku, który, jak się wydaje, powstał przez styczność, tj. na zasadzie użycia tego, co po prostu było pod ręką. Kreska ułamkowa występowała już u Arabów, a do Europy przyszła w czasach odrodzenia. Grecy, Rzymianie i Hindusi nie używali kreski ułamkowej. Z powodu specyficznej postaci znaku, wielkości wyrażone z użyciem kreski ułamkowej nazywano liczbami przełamanymi, stąd „fractions" od słowa frangere, broken numbers, nombres rompus, gebrochene Zahlen, rotti. W roku 1530 Fine używa jeszcze słowa minuta: „De minutis, siue quotis eorundem intergrorum partibus (quas vulgares appellant fractiones)", tj. „O minutach, czyli o wielkościach, które częściami są swoich całkowitości (które prostacy nazywają przełamankami)". Słowo „ułamek" związane było więc z przełamaniem znaku i przedzieleniem tego znaku kreską, natomiast słowo „minuta" miało znaczenie części pewnej całości. (Stąd też „minuta prima", „minuta secunda"). Dzisiejsze znaczenie słowa „ułamek" jest już inne, a słowo „minuta" związane jest z rachubą czasu. Nie mamy jednak żadnego równie pięknego dokumentu, który by tak jasno zaświadczył, jak dla znaku równości, =, jakie było pochodzenie ułamkowej kreski.

5.8. Jako przykład metonimii wzięty ze szkolnej praktyki podajemy reprodukcję kartki z rozwiązaniami pewnego ciągu zadań, z podręcznika „Matematyka 6". Uczniowie klasy 6 szkoły podstawowej mieli zadane do domu przeczytanie stron 96-97 tego podręcznika w charakterze czytanki matematycznej. Następnie mieli coś na temat tej czytanki napisać od siebie i ewentualnie opisać rozwiązania niektórych zadań. Miało to być podstawą dyskusji w klasie. Na osobnej karteczce mieli podać rozwiązania niektórych zadań. Na tej karteczce, którą tu reprodukujemy, widać wyraźnie w punkcie „3)" przykład typowej metonimii: „statek o większej prędkości równa się 20 mil na godzinę, czyli 20 węzłów" (ten i następny przykład podał nam p. Krzysztof Mostowski).

5.9. W czasie dyskusji nad zadaniem, w którym prosimy pewną grupę uczniów z klasy VI szkoły podstawowej o opisanie, w jakim położeniu w stosunku do osi symetrii sierpu Księżyca jest Słońce, jeden z uczniów mówi, że Słońce jest na osi symetrii sierpu Księżyca


1.) Statek o wielkiej prędkości porusza się w kierunku północnym.
2.) Statek poruszający się szybciej pokonuje w ciągu 6 minut 2 mile, ponieważ 1 jednostka równa się 1 mila morska.
3.) Statek o większej prędkości pokonałby do godz. 17[00] 20 mil morskich Statek o mniejszej prędkości pokonałby 14,1 mili.
Statek o większej prędkości równa się 20 mil na godz, czyli 20 węzłów.
Statek o mniejszej prędkości równa się 14,1 mili na godz, czyli 14,1 węzła
4.) Nie umiałam.

zawsze, z wyjątkiem pełni Księżyca, a w czasie pełni jest inaczej, bo wtedy Księżyc i Słońce są równoległe. Najwyraźniej uczeń ten ma dobrą wyobraźnię przestrzenną i myśli dobrze, ale brakuje mu słów. Używa więc zwrotów metaforycznych, używa przenośni, i całkiem nieźle sobie w ten sposób radzi z przekazaniem tego, co myśli.

5.10. Interesujący przykład metonimii otrzymamy, gdy rozmawiając z kimś sformułujemy np. twierdzenie Pitagorasa w takiej formie: „Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych". Gdy następnie zapytamy, dla jakich trójkątów zachodzi twierdzenie Pitagorasa, lub dla jakich trójkątów twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe, bardzo często usłyszymy odpowiedź, że dla prostokątnych. Następuje wtedy metonimiczna fokalizacja uwagi, zwykle podświadoma, na części przekazu. W dosłownej interpretacji jest to oczywiście błąd. Przy ustnym komunikowaniu się, zwykle tego rodzaju figury stylistyczne są akceptowane w sposób zupełnie bezwiedny. (Przykład ten podał nam p. Witold Nitka.) Ten przykład świadczy o tym, że metonimie nie dają się sprowadzić do przypadkowego lub pomyłkowego przywołania nie pasującej ramy operacyjnej (frame) w sensie Minsky'ego (1968).

Z tego, że w zasadzie każdy przekaz może być interpretowany figuratywnie, nie można wnosić, że każdy nonsens jest automatycznie figurą stylu. Do tego, aby pewne wyrażenie stało się figurą stylu, potrzebne jest nie tylko to wyrażenie, ale również pewien odbiorca, który się na taką interpretację zgodzi, taką interpretację zobaczy. To oczywiście zależy od okoliczności, a piękny przykład związany z Elizą Doolittle z *Pygmaliona* i *Elizą* „Weizenbaumówną" opisał J.L. Mey (1982). Zdanie „Prawda jest fałszem" może być w pewnych warunkach metaforą, w innych metonimią, ale pozostawione tylko sobie jest po prostu zwykłym, pospolitym nonsensem.

6. METAFORY I METONIMIE JAKO FIGURY MYŚLENIA

6.1. Rozpatrzmy teraz takie szkolne zadanie „Cegła waży kilo i pół cegły. Ile waży jedna cegła?". Jeżeli x będzie użyte jako nowa lokalna nazwa dla cegły, wtedy mamy typową metonimię z przesunięciem referencji. Możemy sobie teraz wyobrazić wagę, po jednej stronie pewną cegłę, a po drugiej stronie ciężarek kilogramowy i jeszcze pół cegły. Mając ten obraz przed oczyma możemy stosunkowo łatwo napisać przez analogię takie równanie

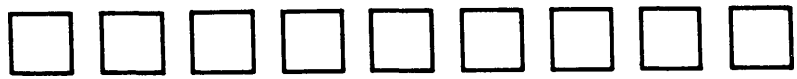
$$x = 1 + \frac{1}{2}x \ .$$

To równanie jest teraz modelem tej sytuacji, którą opisuje zadanie, a figura, której użyliśmy pisząc to równanie, jest metaforą. Analogia jest wyraźna, a towarzysząca temu wizja może być łatwo przedstawiona rysunkowo w formie pewnej wizualizacji. Model jednakże zwykle nie jest tylko opisem przez analogię. Model musi być podatny na pewne manipulacje, dające się w pewien sposób interpretować. Możemy próbować wykonywać takie operacje na modelu, patrząc na tę wagę w wyobraźni. Możemy na przykład odjąć od obu stron tej wagi, w wyobraźni, po pół cegły. Nie wiemy jednak, czy po czymś takim waga będzie nadal w równowadze. Jak mówił pewien uczeń: „ta połowa po drugiej stronie może nie być od tej cegły". Gdy zatrzymamy się właśnie na takim sposobie patrzenia na tę sytuację, może to być przeszkodą w zrozumieniu metody równań. Potrzebna jest dalsza idealizacja, np. możemy myśleć o przeciętnej, średniej cegle, tak aby model, który jest w tym wypadku równaniem, dał się przekształcać. Zakładamy oczywiście, że jeszcze niewiele wiemy o równaniach. Ten opis jest odtworzeniem jednej z takich sytuacji na podstawie dyskusji. Taka idealizacja jest znów związana z osłabieniem mocy semantycznej. Jednak swobodne przekształcanie równania może nastąpić dopiero wtedy, gdy nastąpi całkowite zerwanie referencji znaku x do przedmiotu, w tym wypadku cegły, i nastąpi przesunięcie referencji na liczby. To jest najprostsze i najoperatywniejsze rozumienie metody równań, ale droga do niego wcale nie jest łatwa. Czasem droga ta może być jeszcze dodatkowo skomplikowana brakiem dostatecznie wyrobionego pojęcia liczby. Chociaż przytoczony tu opis jest odtworzeniem sytuacji autentycznej, zarejestrowanej na podstawie obserwacji dyskusji, to wcale nie należy sądzić, że droga od sytuacji lub opisu konkretnej sytuacji do modelu utworzonego za pomocą równania jest zawsze taka sama. Nic podobnego, takich indywidualnych dróg jest bardzo dużo. Jednak efekt końcowy jest pod względem struktury matematycznej na ogół dość zgodny. Związek pojęcia modelu z figurą metaforyczną jest często podnoszony w literaturze; o stronie metonimicznej pojęcia modelu, która decyduje, jakie operacje będą w tym modelu dopuszczalne, często się zapomina. Wydaje się, że metafora jako figura myślenia nie może stanowić jeszcze modelu. Pojęcie modelu związane jest co najmniej z figurą podwójną, metonimia-metafora, lub z ciągiem trzech lub więcej figur, np. metonimia-

-metafora-metonimia. To są chyba minimalne wymagania, które model powinien spełniać.

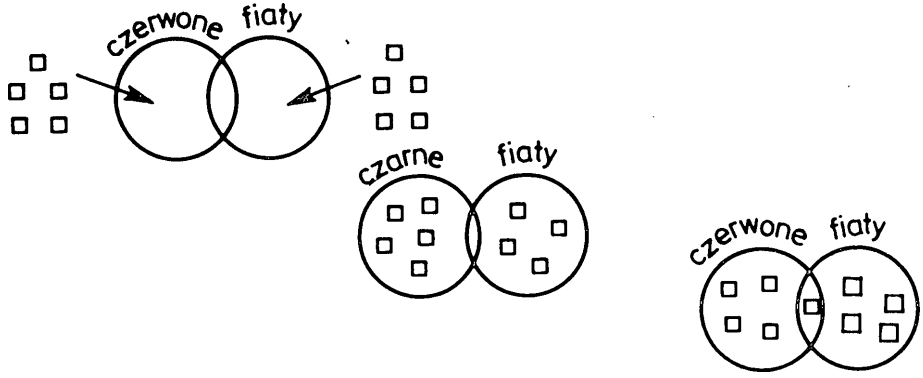
Z literatury znane są przypadki, w których występuje myślenie o zmiennych tak, jakby to były nazwy pewnych przedmiotów. Swego rodzaju fiksacja w tym stanie może usposabiać do wielu pomyłek. Np. tekst „W naszej szkole jest dziesięć razy tyle uczniów co nauczycieli" i fałszywy ale kuszący zapis tego za pomocą równania
10 u = n.

6.2. Podstawowa rola figur metaforycznych i figur metonimicznych występuje na każdym etapie rozwoju matematycznego. Ślady występowania tych dwóch rodzajów figur można wyraźnie obserwować od momentu rozwinięcia się języka naturalnego, ale z pierwszymi krokami na drodze rozwoju matematycznego występuje tendencja do pojawiania się tych figur myślenia również na tym terenie. Rozpatrzmy taki przykład. Wyobrażamy sobie sytuację opisaną zadaniem: „Na parkingu jest 9 samochodów. Pięć jest czerwonych i pięć fiatów. Czy jest między nimi chociaż jeden czerwony fiat?" Nie precyzujemy wieku, w którym możemy użyć takiego zadania. Nie ma to większego znaczenia i nie możemy wskazać żadnych norm, występująca zmienność jest ogromna. Gdy jednak dzieci są już nieco oswojone z techniką diagramów, czy pętli Venna, to jest rzeczą naturalną wybranie jakichkolwiek dziewięciu przedmiotów, które są pod ręką, np. dziewięciu klocków drewnianych



i przyjęcie, że są to samochody na parkingu. Przesunięcie referencji przy takiej reprezentacji jest widoczne, i często się daje obserwować wiele objawów potwierdzających taki mechanizm, np. po sposobie wyrażania się dzieci o tych klockach, które „jadą" do swoich pętli. Nie jest to reprezentacja poprzez podobieństwo, gdyż klocki nie są przecież podobne do aut, ale przez styczność. Klocki (a może inne przedmioty) są po prostu pod ręką. Struktura matematyczna przekazu gubi się jednak, gdy użyjemy do tego małych samochodzików;

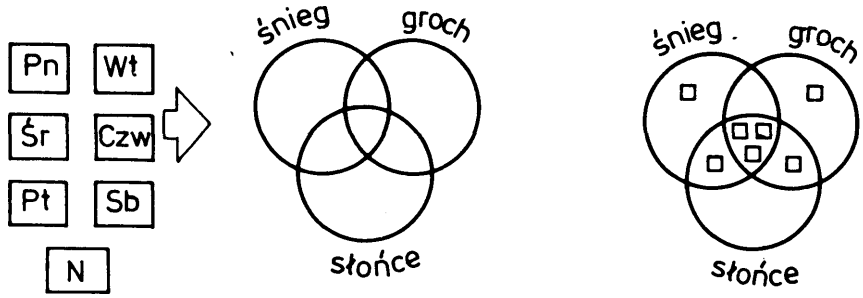
takie „znaki" nie są niemożliwe do użycia, ale ich użycie nie daje charakterystycznej kondensacji, skupienia uwagi, w takim stopniu, jak użycie przedmiotów obojętnych. Dalsze stadia postępowania są zupełnie jasne, chociaż rozwój wypadków może się toczyć różnymi drogami, a jak to z dziećmi, sam proces budowania modelu sytuacji może nie zajść daleko. Rysunkowo przedstawimy pewne etapy, np. w taki sposób:



Rzeczą charakterystyczną dla obserwującego takie zabawy jest jednak to, że klocki, które w początkowym okresie takich zabaw w zbiory same były elementami zbioru klocków, przez przesunięcie referencji - w następnym etapie służą za nazwy elementów innych zbiorów. Możemy użyć zresztą innych słów, i zamiast słów „zbiór", „zbiory" użyć odpowiednio pasujących innych wyrażeń. To nie jest istotne. Istotna jest struktura modelu sytuacji, która odpowiada takim naiwnym zbiorom, można by powiedzieć, takim naiwnym klasyfikacjom. To, że takie klasyfikacje mogą być rozłączne, ale mogą być i nierozłączne, nie jest trudne do zauważenia pod warunkiem, że kontekst jest interesujący.

6.3. Dla porównania rozważmy jeszcze podobny do poprzedniego tekst, ale o dniach tygodnia, nie o samochodach: „W ubiegłym tygodniu było pięć dni, kiedy padał śnieg, pięć dni pogodnych, i pięć razy na obiad była zupa grochowa. Czy były takie dni, w ciągu któ-

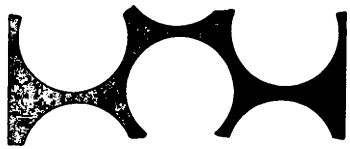
rych było pogodnie, padał śnieg, a na obiad była zupa gruchowa?" Dni tygodnia nie reprezentują się tak łatwo przez klocki, jak samochody. Tu styczność raczej nie występuje. Tego rodzaju naturalnej styczności nie ma. Ale kartki z kalendarza, jeżeli ktoś o nich pomyśli, mogą być źródłem takiej naturalnej styczności. Używając kartek z kalendarza, możemy taką sytuację równie łatwo zanalizować, jak poprzednią. Jest rzeczą naturalną pomyśleć, że kartki z kalendarza to są dni ubiegłego tygodnia i sytuacja może wyglądać na przykład tak:



Kartki z kalendarza nie są podobne do dni tygodnia, ale między tymi kartkami a dniami tygodnia zachodzi relacja styczności. Te kartki, może nie fizykalnie, bo być może już je ktoś spalił w piecu, ale przynajmniej w myśli są „pod ręką". Jakby na chwilę pożyczamy innej nazwy - i model sytuacji zaczyna rosnąć.

6.4. Pies Freudenthala (Freudenthal, 1977) jest pięknym przykładem co najmniej potrójnej figury myślenia. Gdy Bastiaan znalazł kawałek blachy na śmietniku i zobaczył w nim dwa pieski złączone nosami, to niewątpliwie ma to charakter metafory. Gdy następnie spostrzegł, że można zgiąć ten kawałek blachy „pieskom na nosie", wyłapał pewną możliwość wykonawczą, pewne potencjalne, możliwe do wykonania działanie, które w następstwie doprowadza do tego, że powstaje coś podobnego do jednego pieska stojącego na czterech łapkach, o bardzo ładnie wystylizowanej postaci. Po pierwszej metafo-

rze następuje więc metonimia, figura polegająca na przesunięciu uwagi i zobaczeniu, co można dalej, a wykonanie tego, początkowo tylko w myśli, doprowadza do trzeciej figury o charakterze metafory. No i mamy tego pieska, stoi przed nami na czterech łapkach, i niemal macha ogonem. Ale to już jest tylko ślad tego, co się stało.





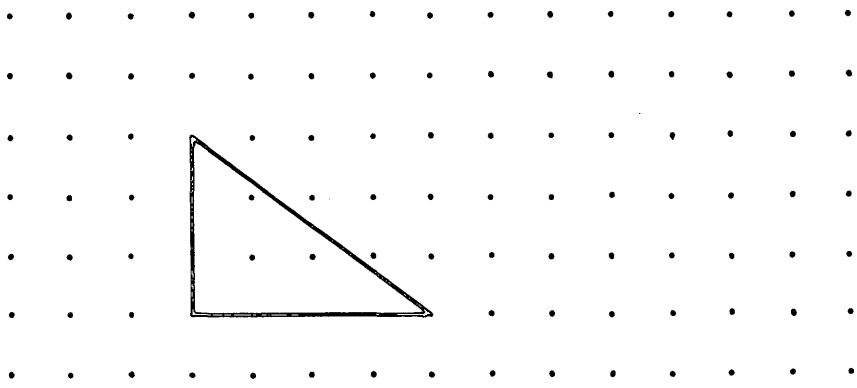
Występujące tu metonimie mają raczej charakter figur myślenia niż figur stylistycznych w języku naturalnym. Styczności występujące w 6.1 mają charakter raczej kontekstowy, natomiast styczności występujące w 6.2, 6.3 i 6.4 mają charakter sytuacyjny.

7. UWAGI KOŃCOWE

7.1. Jakobson mawiał, że w cieniu metafory skrada się metonimia, a w cieniu metonimii stoi metafora, a metafory i metonimie wiązał z przewagą aktywności odpowiednio prawej i lewej półkuli mózgowej. Było to oparte na obserwacji pewnych typowych przypadków afazji, zaburzeń mowy. Takie zaburzenia przy przeciążeniu, gdy wystąpi stres, należą do fizjologicznej normy, np. gdy dziecko z wrażenia zapomni słowa „wilk" i mówi „to wielkie zwierzę". Wykazuje wtedy drobne zaburzenie funkcji referencyjnej i tworzy nową nazwę poprzez podobieństwo lub analogię. Czasem jednak w takich warunkach przesunięcie

referencji może być użyte celowo, „dla odsunięcia niebezpieczeństwa", np. „ale ty mi nie opowiadaj teraz o tym okropnym zwierzu na „w"". Z drugiej strony dobrze znamy z nauczania matematyki przypadki, gdy ktoś pod działaniem stresu może zaledwie wymienić kilka nazw, ale nie jest w stanie ich z niczym sensownym powiązać. To jest wyraźne zaburzenie mechanizmu metaforycznego, „similarity disorder". Nie zauważa się wtedy najprostszych rzeczy, na które się wprost patrzy.

Zwykle mamy do czynienia nie z pojedynczą figurą, ale z całym szeregiem następujących po sobie figur. Rytm wiersza ma charakter metonimiczny i wyznacza pewne punkty stabilne tekstu. Również w tekstach matematycznych możemy odnaleźć podobny mechanizm ułatwiający przekaz, gdy np. porównamy rytm wiersza do tego rytmu, który narzuca nam zwykły geoplan lub kratka zeszytu szkolnego do matematyki. Nie potrzeba, mając taki rytm przed oczyma, dodawać, że np. taki trójkąt ma boki o długości 3 i 4, a kąt między nimi zawarty



jest prosty. To wynika z rysunku. Taki rytm podkładowy przekazu występuje często w nauczaniu matematyki.

W języku potocznym, w wierszu, takie wielokrotne i mieszane figury dają czasem mocne efekty, jak np. we wspomnianym wierszu Victora Hugo. Występuje tam przecież podwójna metonimia w połączeniu z symbolami pochodzenia metaforycznego. Metonimia daje pewną koncentrację uwagi i jakby wyzwala pewną energię. Gdy jest oczywiste, że energia ta nie ma żadnego celowego ujścia, powstaje śmiech, tak jakby wszystko poszło „na masę". Właśnie o takim mechanizmie

mówi Bergson (1977). Matematyka jest szczególnie bogata w przesunięcia metonimiczne, gdy rozważamy język formuł i język wokół formuł (Krygowska, 1977). Być może dlatego matematycy mają pewne szczególne poczucie humoru. Jest to chyba dość ważna cecha rozpoznawcza uzdolnień matematycznych.

Tak więc mamy dwa style, dwa tryby myślenia. W modus metaforicus uwaga skierowana jest na „zrozumienie", zobaczenie czegoś. W modus metonimicus uwaga skierowana jest na zrobienie czegoś, nastawienie jest na zmianę, ruch. Obie figury stylistyczne opisane były już w starożytności. Metafory opisywał Arystoteles, metonimie zaś Cicero. Metonimie, pisał Cicero, służą „dla ozdoby" (ornandi causa). Znajomość tych figur należała zawsze do retoryki, a gdy retoryka znikła jako dyscyplina, trafiły do lingwistyki. Zainteresowanie tymi figurami w dydaktyce matematyki nie powinno dziwić, bo czymże jest dydaktyka matematyki, jak nie *retoryką* matematyki.

7.2. Na osobną uwagę zasługują te kontygencje, które powstają przy różnych linearyzacjach drzew (Blikle, 1966, 1972; Iverson, 1962; Meyers, 1974; Pawlak, 1964, 1965). Dobre wyczucie takich kontygencji jest jedną z cech uzdolnień matematycznych, a przynajmniej przyczynia się wyraźnie do pewnej „gracji" w operowaniu symboliką zgodnie z pewnym celem. Bardzo ciekawe jest porównanie języka zwykłej algebry z językiem programowania APL. Dlatego z APL, że jest to obecnie jedyny język programowania, dla którego takie porównanie ma sens (Iverson, 1968, 1971; Iverson, Falkoff, 1968; Plewicki, 1977). Często dopiero przez porównanie z obcym językiem widzi się pewne specyficzne cechy własnego rodzimego języka. Zwykła „szkolna" algebra bardzo dużo przerzuca na język potoczny wokół formuł. Sprawia to, że pewne kontygencje są mało widoczne w zwykłym zapisie, chociaż się je wyczuwa. APL raczej minimalizuje ten język wokół formuł. W języku APL widać dużo takich symetrii procedur, które w zwykłej notacji giną. Te sprawy najlepiej, jak się wydaje, analizować jest niezależnie od języka. Jednym z narzędzi przy takiej kontygencji kontekstowych może być twierdzenie o linearyzacjach kanonicznych drzewa (Blikle, 1966, 1972). Słowo θεωρημα (theorema) znaczy po grecku „widzenie", „zobaczenie". Jak się wydaje, pierwsze odkrycia matematyczne powstawały nie na zasadzie wywiedl-

ności, ale przez „zobaczenie". Wydaje się, że pierwsze argumentacje matematyczne polegały na pokazaniu pewnych symetrii. Symetria jest szczególnym przypadkiem analogii, ale odnosi się do objektów wyidealizowanych, dla których te fizykalne - rysunki, rzeźby figur przestrzennych - są tylko znakami utworzonymi na zasadzie podobieństwa (Platon, 1958, str. 355). Z historii matematyki możemy wnosić, że pierwsze odkrycia niewymierności - par odcinków niewspółmiernych - powstały na zasadzie wyczucia pewnych kontyngencji i zobaczenia pewnych symetrii w przebiegu pewnych procedur, między innymi procedury naprzemiennego odejmowania (Fowler, 1979).

7.3. W celu teoretycznego opracowania podstaw nauczania matematyki bardzo interesujące byłoby poznanie myśli matematycznych. Tego jednak zrobić się nie da. Możemy jednak obserwować ślady tych myśli, gdy dojdzie do wymiany. W celu wymiany, myśli muszą być sformułowane, zakodowane, przekazane i odebrane. Ostatnio prowadzi się dużo badań polegających na obserwacji takiej wymiany. Te obserwacje czasem są bardzo fragmentaryczne i przypominają raczej napad na pociąg w celu zobaczenia, jak się nim jedzie. Obserwowanie procesu wymiany pomiędzy uczącymi się wymaga umiejętności interpretacji dialogu żywego. Dialog żywy od dialogu formalnego różni się przede wszystkim obecnością figur stylistycznych. Umiejętność interpretowania takich figur jest zatem dla dydaktyki matematyki bardzo ważna. Przeniesienie doświadczeń lingwistycznych na teren matematyki wydaje się rzeczą obiecującą. Pamiętać należy jednak, że takie przeniesienia nie mogą iść za daleko. Matematyka, to nie jest język naturalny. Różnice są wyraźne, ale występują i zbieżności (Thom, 1974, 1981). Obecność figur stylistycznych w języku i figur myślenia w matematyce jest jedną z takich zbieżności, które mogą być warte bliższego zbadania. W języku naturalnym metafory, figury oparte na analogii, są znacznie lepiej poznane i szerzej znane niż figury oparte na styczności, czyli kontygencji, metonimie. W matematyce odpowiednie figury myślenia wymagają jeszcze wielu badań i obserwacji. Wydaje się jednak, że do znanego powiedzenia Banacha, który mówił, że matematyk powinien widzieć analogie, można dodać, że powinien również mieć wyczucie kontygencji.

Literatura cytowana

A d d a, J.: 1975, *L'incompréhension en mathématiques et les malentendus*, Educational Studies in Mathematics, 311-326.

-: 1976, *Difficultés liées a la présentation des questions mathématiques*, ibidem 7, 1/2, 3-22.

-: 1982, *Difficulties with mathematical symbolism: homonymy and synonymy*, Visible Language 16, 205-214.

A r i s t o t e l e s, *Rhetoric III*, ii, 7-10; III, xi, 5.

B a u e r s f e l d, H., Z a w a d o w s k i, W.: 1981, *Metaphors and Metonymies in the teaching of mathematics*, Occasional Paper 11, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, August 1981.

B e r g s o n, H.: 1977, *Le rire, Essai sur la signification du comique*, Félix A l c a n, Paris 1924, w tłumaczeniu polskim: *Śmiech, esej o komizmie*, Wydawnictwo Literackie, Kraków.

B l i k l e, A.J.: 1966, *Investigations in the Theory of Adressless Computers*, Bull. Acad. Polon. Sci.Sér.Sci. Math.Astr.Phys. 14, 203-208.

-: 1972, *Adressless Units for Carrying out Loop-Free Computations*, J.Assoc. Comput. Mach. 19, 136-157.

D o b r z y ń s k a, T.: 1984, *Metafora*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław 1984, ISBN 83-04-01595-1.

F o w l e r, D.H.: 1979, *Ratio in early Greek mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 1, 807-846.

F r e u d e n t h a l, H.: 1977, *Creativity*, Educational Studies in Mathematics 8.

G u t t m e j e r, E.: 1982, *Rozumienie treści symbolicznych przez dzieci z klas III-V, Czytanie ze zrozumieniem*, PWN, Warszawa.

H e n r y, A.: 1971, *Métonymie et Métaphore*, Editions Klincksieck, Paris.

H o f s t a d t e r, D.R.: 1981, *Metamagical Themas, How might analogy, the core of human thinking, be understood by computers?* Scientific American, September 1981, 18-27.

I v e r s o n, K.E.: 1962, *A Programming Language*, Wiley, New York.

-: 1968, *The Role of Computer in Teaching*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics 13, Queens University, Kingston, Ontario.

-: 1971, *Elementary Algebra*, IBM Corporation, Philadelphia.

- and F a l k o f f, A.D.: 1968, *APL 360 User's Manual*, IBM Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y.

J a k o b s o n, R.: 1963, *Essais de linguistique générale*, Editions Minuit, Paris.

K l e i n, F.: 1924, Elementarmathematik v.h. Standpunkte aus, Band I s. 85-86, IV Auflage, Berlin 1924, Sprinser Verlag.

K r y g o w s k a, Z.: 1977, *Zarys Dydaktyki Matematyki*, t. 1-3, WSiP, Warszawa.

L e G u e r n, M., Sémantique de la métaphore et de la métonymie, Librairie Larousse, Paris 1973.

M ą k o w s k i, A.: 1976, Matematyka 29, 228-229.

M a l c z e w s k i, J.: 1979, *Szkolny Słownik terminów nauki o języku*, WSiP, Warszawa.

M a s o n, J., P i m m, D.: 1984, *Generic Examples: Seeing the General in the Particular*, Educational Studies in Mathematics 15, 277-289.

M e i s s n e r, H.: 1983, *How to prove relational understanding*, Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Israel, 76-81.

M e y, J.L.: 1982, *On Being a Model*, Journal of Pragmatics 6, 281-292.

M e y e r s, J.W.: 1975, *A mathematical theory of parenthesis-free notations*, PWN, Warszawa (Ph.D. thesis, Dep. of Computer Science, Stanford University, Stan-CS-74-222, July 1974).

M i n s k y, M.: *K-lines: A Theory of Memory.*

M i n s k y, M.L.: 1968, *Matter, Mind, Models*, w: Marvin Minsky ed. Semantic Information Processing, Cambridge, Mass. M.I.T. Press.

N o w i c k i, P., Z a w a d o w s k i, W.: 1983, *Matematyka 6*, WSiP Warszawa.

O t t e, M.: 1984, *Komplementarität*, Occasional Paper 42, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, January 1984.

-, Z a w a d o w s k i, W.: 1985, *Creativity*, Educational Studies in Mathematics, vol. 16, 95-97.

P a p p e r t, S.: 1980, *Mindstorms*, Basic Books Inc., New York.
P a w l a k, Z.: 1965, *Organizacja maszyn bezadresowych*, PWN, Warszawa.
-: 1964, *Maszyna i Język*, Biblioteczka „Omega" Nr 8, PWN, Warszawa.
P i m m, D.: 1981, *Metaphore and analogy in mathematics, For the learning of mathematics*, vol. 1, 47-50.
P l a t o n (tłum. W. Witwicki): 1958, *Państwo*, t. I, Księga 6, 510DE 305-357.
P l e w i c k i, A.J.K.: 1977, *Język programowania APL/360*, PWN, Warszawa.
R e c o r d e, Robert: 1557, *The Whetstone of Witte*, John Kyngstone, The Westdoore of Poules, London.
S k e m p, R.R.: 1976, *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, Mathematics Teaching 77, December 1976.
T h o m, R.: 1974, *Mathématique Moderne et Mathématique de toujours*, w: *Pourquoi la Mathématique?* Unions Générale d'éditions, Paris.
-: 1981, *Matematyka a rozumienie*, Wiadomości Matematyczne 23, 205-212.
U l a m, S.M.: 1976, *Adventures of a mathematician*, Charles Scribner's Sons, New York.
W a c h s m u t h, I.: 1981, *Two modes of thinking - also relevant for the learning of mathematics?*, For the learning of mathematics 2, 38-45.

METAPHORS AND METONYMIES IN TEACHING OF MATHEMATICS

S u m m a r y

The authors consider the metaphors and metonymies not only as figures of style but also as figures of living thought. They refer to jacobsonian opposition between these figures and their rôle in literature, art, and education. It is shown that these two figures are involved in mathematics and mathematics teaching. Metaphors are related with analogy and often with broad visual imagery. Using metaphors is usually a conscious act. The metonymies are mainly subconscious, with focalisation of attention and they are based on the relation of contiguity and on a shift of reference, giving

strong feeling of close reality. Contrarywise to the situation in natural languages, in mathematics the metonymies are more on the surface and usually are easy to be recognized. The characteristic examples of metonymies are: using equality sign for „the result", or using letters for numbers in school algebra, or using a function value sign for the function. In the course of individual human development such encountered figures often become accepted idioms.

The awareness of the role of figurative thinking in theoretical analysis and in practice of mathematical education is helpful. The interpretation of text and dialogues is then richer and deeper. The art of convincing argumentation especially on primary and junior level depends much more on using figures than it is usually admitted. They are important complement to the formal logical rules of inference.