ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 8 (1987)

dmptm 1982

ZDZISŁAW DYBIEC
Kraków

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O pewnej trudności związanej ze specyfikacją w nauczaniu matematyki

Wśród wielu form aktywności matematycznej, jedną z ważniejszych stanowi specyfikacja. Nasuwa się od razu pytanie: specyfikacja, ale czego? W nauczaniu szkolnym, i to każdego etapu, a także w rzeczywistej twórczości matematycznej, spotykamy wiele rodzajów specyfikacji. Ustalamy zmienne, badamy określone rekurencje, iteracje, rozpoznajemy pojęcia, twierdzenia w jakimś modelu, czy też konstruujemy ich modele, badamy ich szczególne przypadki, specyfikujemy całe teorie, dokonujemy sensownych podstawień w językach różnych komputerów, itp. Proces specyfikacji jest procesem prowadzącym najczęściej od ogółu do szczegółu i mimo iż ma się wrażenie, że jest ono niejako „niższej rangi" niż proces uogólniania, to odgrywa on bardzo dużą rolę kształcącą, kontrolną, dodam także wychowawczą. Propozycje nauczyciela wyszukiwania szczególnych przypadków danego twierdzenia, zadania, podstawianie wyróżnionych wartości, specyfikacja pojęć, mogą mieć charakter odkrywczy. Często odsłaniają istotę przyjętych założeń. Ostrzegają przed powierzchownymi analogiami. Funkcję kontrolną procesu specyfikacji należy naturalnie przyjmować z dużą ostrożnością, zwłaszcza dla ustaleń pozytywnych. Rozumowanie: „relacja S zawarta w $R \times R$ dana wzorem $xSy \equiv x-y \in Q$ jest symetryczna, ponieważ prawdziwa jest implikacja, jeśli $1+\sqrt{2} - \sqrt{2} \in Q$, to także $\sqrt{2}-(1+\sqrt{2}) \in Q$", jest błędne. (Przykład jest banalny, ale równocześnie typowy, zwłaszcza na pewnym etapie nauczania.) Natomiast do kontroli i korekty rozumowania: „jeśli dla danego ciągu $(a_n)_{n \in N}$ spełniony jest warunek $a_{n+1} \neq a_n$

dla każdego n naturalnego, to ciąg ten przyjmuje nieskończenie wiele różnych wartości" może posłużyć specyfikacja: „w ciągu 1,0,1,0,... każde dwa sąsiednie wyrazy są różne i ciąg przyjmuje jedynie dwie wartości". Co więcej, przykład ten pokazuje, że specyfikując pojęcie różnowartościowości funkcji dla ciągu, nie można go zastąpić innym warunkiem równoważnym, który uwzględniałby fakt, że dziedziną rozważanej funkcji jest zbiór liczb naturalnych, jak to można zrobić np. w przypadku pojęcia monotoniczności. Konstruowanie kontrprzykładów jest w swej istocie określoną specyfikacją, a o ich wielostronnych zaletach w kształceniu matematycznym jesteśmy wszyscy głęboko przekonani. Analizowanie sensowności podstawień, dyscyplina wobec przyjętych konwencji, konsekwencje w dokonywaniu ustaleń, badanie ich poprawności, to niektóre z aspektów specyfikacji o charakterze nie tylko poznawczym czy kształcącym. Doceniając rolę specyfikacji w nauczaniu matematyki, pragnę podzielić się z czytelnikami niektórymi spostrzeżeniami dokonanymi w praktyce uczenia, dotyczącymi zagadnień „w szczególności".

Bardzo charakterystycznym zjawiskiem zaobserwowanym wśród uczniów klas uniwersyteckich, innych także, również wśród studentów, jest wyraźny próg przy specyfikacji pojęć, twierdzeń, problemów, zadań dla zbiorów, których elementami są zbiory. Przybliżmy nieco tę hipotezę, posługując się pewnymi przykładami sprawdzonymi w praktyce. Pojęcie kresów podzbiorów zbioru częściowo uporządkowanego jest jednym z ważniejszych pojęć matematycznych. Wyspecyfikowanie tego pojęcia dla zbiorów liczbowych, zbiorów zawartych w $R \times R$ częściowo uporządkowanym, np. leksykograficznie, zawiera zwykły stopień trudności, natomiast bariera pojawia się wówczas, gdy należy je przenieść dla podzbiorów zbioru potęgowego. Zadanie: „Wykazać, że w zbiorze $P(X)$ częściowo uporządkowanym przez relację inkluzji $\inf\{A,B\} = A \cap B$ dla dowolnych zbiorów $A, B \in P(X)$, $P(X)$ oznacza zbiór podzbiorów zbioru X" okazało się zadaniem dostępnym jedynie dla niektórych uczniów. W podejmowanych próbach rozwiązań widoczny był kłopot z oderwaniem myśli od elementów zbiorów A czy B i przeniesieniem jej na A czy B jako elementy zbioru $\{A, B\}$. Prawie zawsze rozumowania zaczynały się tak: „aby α było $\inf\{A, B\}$, to dla każdego $a \in A$, $a \geqslant \alpha$ i dla każdego $a \in B$, $a \geqslant \alpha$". Do rzadkości należała specyfikacja relacji częściowego po-

rządku, oznaczonej w definicji przez $\leqslant$, na tę szczególną w tym problemie inkluzję, mimo iż podawano ją wcześniej jako przykład interesującej nas tu relacji. O kłopotach z przejściem od zbioru X do zbioru $P(X)$ przy specyfikacji pojęcia kresu, świadczą także zapisy $\inf\{A, B\} = \inf\{\inf A, \inf B\}$. Takie same trudności zaobserwowano przy rozwiązywaniu w równoległej grupie analogicznego zadania dla kresów górnych: wykazać, że $\sup\{A,B\} = A \cup B$, dla dowolnych zbiorów $A,B \in P(X)$. Dla wyrazistości obrazu zaznaczmy, że analizowane zadania były rozwiązywane przez uczniów klas pierwszych uniwersyteckich o profilu matematycznym, w których zasadniczo realizuję pogłębiony program klas matematyczno-fizycznych. Po opracowaniu elementów logiki klasycznej i teorii zbiorów, zapoznawaliśmy się z różnego typu relacjami. Kresy zostały zdefiniowane odpowiednio jako najmniejsza majoranta, największa minoranta podzbioru zbioru częściowo uporządkowanego. Badaliśmy różnego rodzaju zbiory i różne w nich relacje i dla ich różnych podzbiorów wyznaczaliśmy zbiory majorant, minorant, kresy, badaliśmy ograniczoność, wyszukiwaliśmy zbiory elementów minimalnych, maksymalnych, elementy najmniejsze i największe. Dużo różnych przykładów analizowaliśmy dla zbioru $R \times R$ ze względu na ładne interpretacje geometryczne. Były także przykłady liczbowe, ale było ich w tym miejscu mniej. Wyraźniej zaakcentowaliśmy kresy zbiorów liczbowych wówczas, gdy porządkowaliśmy wiadomości o liczbach rzeczywistych (aksjomatyka R), oraz przy okazji granic ciągów. Wtedy także specyfikowaliśmy ogólną definicję kresu podzbioru zbioru częściowo uporządkowanego podzbiorów liczbowych i doszliśmy do klasycznych sformułowań. Przy opracowywaniu wspomnianych zagadnień używaliśmy dość rygorystycznych, formalnych zapisów. Naszkicowane tło pozwala przypuszczać, że stopień trudności pojęcia kresu w analizowanym zadaniu został zwielokrotniony specyficzną sytuacją: kresami były zbiory.

Sformułowaną hipotezę potwierdza także zadanie: „Niech X będzie dowolnym zbiorem i niech $A \subset X$ i $B \subset X$, wykazać że zbiór $\{Y \in P(X) : Y \subset A\} \cap \{Y \in P(X) : Y \subset B\} = \{Y \in P(X) : Y \subset A \cap B\}$
grupa równoległa
$\{Y \in P(X) : Y \supset A\} \cap \{Y \in P(X) : Y \supset B\} = \{Y \in P(X) : Y \supset A \cup B\}$".
Podstawowe trudności, które dały się tutaj wyraźnie zauważyć, dotyczyły pytania, co to znaczy być elementem zbioru, np.

$\{Y \in P(X) : Y \subset A\} \cap \{Y \in P(X) : Y \subset B\}$. Odnotujmy kilka uczniowskich myśli w związku z tym zadaniem:

$$"y \in \{Y \in P(X) : Y \subset A\},$$

stąd wynika

$$\{Y \in P(X) : y \in Y \subset A\} = \{Y \in P(X) : y \in Y \Rightarrow y \in A\}",$$

$$"x \in [Y \subset A \cap Y \subset B] \Rightarrow (x \in Y \subset A) \cap (x \in Y \subset B)", \quad "(Y \subset B) \cap (Y \subset A) \subset (Y \subset A \cap B)".$$

Nawet używanie małych liter na oznaczanie zbiorów, wbrew umowie, świadczy o nierozróżnianiu odpowiedniego typu zbiorów. Na znane trudności związane z rozszyfrowaniem formalnego zapisu zbioru zadanego funkcją zdaniową nałożyły się trudności wynikające z faktu, że dziedziną formy definiującej zbiór były podzbiory ustalonego zbioru. Elementami badanych zbiorów były zbiory. Specyfikacja podstawowych pojęć mnogościowych i zapisanie rozwiązań w takiej samej konwencji było dodatkowo utrudnione. (Na 34 rozwiązania poprawnych było 6.) Zadanie rodzaju: „Ustalić związek między zbiorami $P(A \cap B)$ a $P(A) \cap P(B)$, podobnie dla sumy, różnicy, iloczynu kartezjańskiego", „Znaleźć wszystkie elementy zbioru $P(P(P(\{a\})))$" itp. również dostarczają podobnych obserwacji.

Kształcenie umiejętności „widzenia zbiorów" jako elementów jest dość ważne, chociażby ze względu na dobre rozumienie wielu pojęć. Wyróżnianie dla danych zbiorów rodzin podzbiorów tworzących ich rozkłady należy do stylu współczesnej myśli matematycznej. Często rodzinę wyróżnia określona relacja równoważności, a klasa abstrakcji danego elementu względem tej relacji nierzadko definiuje nowe pojęcie. Wektor swobodny, kierunek, orientacja, kąt swobodny, algebraiczne struktury ilorazowe, to tylko niektóre z podstawowych terminów, którym nadanie sensu wymaga operowania zbiorami zbiorów. Rozumienie zapisu danej liczby naturalnej w różnych systemach, to oprócz konwencji także rozkład danego zbioru na pewną rodzinę jego podzbiorów. W zadaniu: „Czy rodzina zbiorów $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$, gdzie X jest zbiorem prostych na płaszczyźnie, natomiast $A_\alpha = \{x \in X: x$ przecina $\alpha\}$ tworzy jego rozkład", podstawową trudność stanowiło uzasadnienie, że $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, jeśli tylko zbiory A_p i A_q nie pokrywają się. Często szło ono w kierunku: „skoro zbiory A_p i

A_q są różne, więc proste p, q nie są równoległe, czyli ich częścią wspólną jest punkt, zatem zbiory te nie są rozłączne, mają bowiem punkt wspólny". Kłopotliwym okazało się przejście od $p \cap q \neq \emptyset$ do $A_p \cap A_q \neq \emptyset$. W pierwszym iloczynie częścią wspólną jest punkt, który nie należy do drugiego iloczynu, jak to sugerowały rozwiązania zdecydowanej większości uczniów. Na marginesie dodam, że drugi model błędu przy rozwiązywaniu tego zadania był następujący. Rodzina $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ nie tworzy rozkładu zbioru X, ponieważ relacja „prosta x przecina prostą y" nie jest równoważnościowa. Jeśli w tym przypadku można dopatrywać się źródła błędnego rozumowania w eksponowaniu rozkładu zbioru za pomocą klas abstrakcji relacji równoważnościowej, to w poprzednim ten argument nie może być brany pod uwagę. Rozumowanie wyraźnie dążyło do uczynienia zadość definicji rozkładu zbioru, a jego realizacja w uczniowskich próbach przemawia za sformułowaną na początku hipotezą.

Anonsując trudności dotyczące specyfikacji pojęć, problemów etc. dla zbiorów, których elementami są zbiory, nie sposób pominąć przykładów, których dostarcza nauczanie o pękach prostych i kierunkach. Tutaj każdy z uczących dysponuje dziesiątkami rozmaitych uczniowskich odpowiedzi, w których uwidacznia się kłopot z rozróżnieniem elementów zbiorów różnych typów. Przytoczmy tutaj niektóre z nich. Na pytanie, co jest sumą mnogościową $(a) \cup (b)$ dwu kierunków, lub ich iloczynem $(a) \cap (b)$, prawie regułą jest odpowiedź „cała płaszczyzna", i to bez względu na wzajemne położenie prostych a, b, bo te proste „wypełnią całą płaszczyznę". Część wspólna kierunku (a) i pęku (A), to w odpowiedzi ustnej pewna prosta b, ale w zapisie $(a) \cap (A) = b$, a więc ten iloczyn to zbiór punktów prostej, a nie zbiór jednoelementowy $\{b\}$. Część wspólna półpłaszczyzny $mA^{\rightarrow}$ i pęku (A) to zbiór pewnych półprostych, część wspólna płaszczyzny $\pi \setminus \{A\}$ (bez wierzchołka pęku) i pęku (A) to też zbiór półprostych. Część wspólna okręgu o środku w punkcie A i promieniu r i pęku (A) jest okręgiem o(A,r), część wspólna okręgu i kierunku to też okrąg, itp. Zauważmy, że w tych ostatnich przykładach znamiona błędu, zarówno w pytaniach, jak i odpowiedziach, są takie same: nierozróżnianie odpowiednich typów zbiorów. Zostały tu naruszone rygory logiczne tworzenia działań mnogościowych. Jeden czynnik iloczynu był podzbiorem płaszczyzny, natomiast drugi pod-

zbiorem zbioru podzbiorów płaszczyzny: $mA \subset \pi$, $o(A,r) \subset \pi$, zaś $(A) \subset P(\pi)$, $(a) \subset P(\pi)$. Dodajmy, iż przy tych pytaniach nauczyciela nie odnotowano żadnych sprzeciwów ze strony uczniów. Pojęcia występujące w zacytowanych tutaj przykładach oznaczamy oraz interpretujemy zgodnie z konwencjami podręcznika [4]. Charakter przytoczonych tutaj błędów jest w pewnym sensie taki sam: zbiór jako element zbioru, w zadaniach zawierających zarówno pęk (A), jak i kierunek (a), mimo iż same te pojęcia w nauczaniu szkolnym definiujemy różnie. Może to jest banalne, ale chcę pewien aspekt tej „różności" wyraźnie podkreślić. Do definicji kierunku trzeba wyróżnić prostą; kierunek stanowi określony zbiór prostych, a więc zbiór zbiorów tego samego typu, przy czym wyróżniona prosta należy do kierunku. Natomiast aby zdefiniować pęk, należy wyróżnić punkt; pęk stanowi określony zbiór prostych, a więc zbiór zbiorów innego typu, a wyróżniony punkt nie należy do pęku. Wiadomo, że pojęcia pęku i kierunku można logicznie ujednolicić, ale wówczas przechodzimy do innej geometrii. W praktyce szkolnej trzeba wiele cierpliwego wyjaśniania, i to w różnych kontekstach i przy różnych okazjach, aby dojść do jasnego rozumienia pojęć pęku i kierunku. Zasadnicze trudności, jakie się tutaj ujawniają, związane są z przejściem od zbioru do zbioru zbiorów. Należałoby jeszcze podkreślić, iż są to trudności zasadnicze ze względu na aktualny styl nauczania geometrii. Bowiem u podstaw pojęć pęku i kierunku leży interpretacja pojęć prostej i płaszczyzny. Proste, płaszczyzny, figury geometryczne interpretujemy jako zbiory punktów, i to jest dla nas aktualnie bardzo naturalne; ale przypomnijmy, że to zaczęło się od nowszych czasów. W ujęciu Euklidesa proste, płaszczyzny nie były zbiorami punktów. W praktyce potwierdzają się tezy Z. Krygowskiej ([1], str. 70 i następne), iż przejście do mnogościowej interpretacji przestrzeni geometrycznej stwarza wiele trudności i nieporozumień. Myślenie mnogościowe wymaga szczególnej dyscypliny w stosowaniu formalnych definicji. Tutaj chcemy wyraźnie podkreślić, że oprócz trudności pochodzących od ujęcia mnogościowego i związanego z nim formalizmu, dodatkowy próg pojęciowy stwarzają zbiory zbiorów.

Stopień nasilenia trudności, które sygnalizujemy w tym artykule, zależą, jak każde inne, od wielu różnorakich czynników. W pracy nad ich pokonywaniem warto pamiętać, iż charakteryzują się one

szczególną natarczywością powrotów. Jeśli nawet w danym momencie nauczania zauważamy zrozumienie i właściwe rozróżniania, to po upływie pewnego czasu lub zmianie kontekstów pojawiają się ponownie, chociaż trzeba dodać, iż w bardziej zróżnicowanej skali. Przeprowadzona wokół tych zagadnień w odpowiedniej chwili praca kontrolna bywa bardzo selektywna.

W praktyce nauczycielskiej różnego szczebla często stajemy przed problemem oceny zdolności abstrakcyjnego myślenia. Jego „zmierzenie" to zagadnienie niesłychanie trudne. Utarły się pewne schematy postępowania. Czasami żądamy uporządkowania „jakiegoś chaosu", przeprowadzenia dyskusji ze względu na określoną własność, parametr, zanalizowania przypadków. Żądamy uzasadnienia istnienia, jednoznaczności, braku jednoznaczności określonych obiektów, niekoniecznie wskazując je efektywnie. Tymi cechami charakteryzują się bardzo często zadania z zawodów olimpiad matematycznych. Dążymy do tego, by tego rodzaju cechy, choć w elementarnym stopniu, miały zadania z przeróżnych egzaminów. Do tych przyjętych schematów dodałabym postawienie problemu, w którym trzeba by operować zbiorami zbiorów.

BIBLIOGRAFIA

[1] Z. K r y g o w s k a, *Zarys dydaktyki matematyki*, część I, WSiP, Warszawa 1979.

[2] -, *Zarys dydaktyki matematyki*, część II, WSiP, Warszawa 1980.

[3] -, *Zarys dydaktyki matematyki*, część III, WSiP, Warszawa 1980.

[4] - i J. M a r o s z k o w a, *Geometria dla klasy I Liceum Ogólnokształcącego*, PZWS, Warszawa 1970.

[5] Z. O p i a l, *Zbiory formy zdaniowe relacja*, WSiP, Warszawa 1976.

[6] H. R a s i o w a, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1971.

[7] Z. S e m a d e n i, *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci*, PWN, Warszawa 1975.

ON SOME DIFFICULTY CONNECTED WITH SPECIFICATION IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

S u m m a r y

The article shows a difficulty of specification of notions, theorems, and problems for sets, elements of which are sets.

The author analyses examples, in which this difficulty is distinctly observed. Those problems were solved by students of mathematical classes in the normal course of teaching.