Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

STEFAN TURNAU
Kraków

dmptm 1982

Matematyka szkolna w latach 1990

W lutym 1986 roku odbyła się w Kuwejcie, pod patronatem Międzynarodowej Komisji Nauczania Matematyki (ICMI), międzynarodowa konferencja na temat będący tytułem niniejszego doniesienia. Wzięli w niej udział przedstawiciele 11 krajów, a mianowicie: A. Al-Dhahir (Kuwejt), Marjorie Carss (Australia), P. Damerow (Berlin Zach.), W. Ebid (Egipt), H. Fujita (Japonia), E. Jacobsen (UNESCO), A.G. Howson (W. Brytania), M. Hussein (Kuwejt), J.P. Kahane (Francja), J. Kilpatrick (USA), E. Lluis (Meksyk), S. Turnau (Polska), D. Wheeler (Kanada), B.J. Wilson (W. Brytania), U. d'Ambrosio (Brazylia).

Jak od razu we wstępie powiedział organizator i przewodniczący konferencji, A.G. Howson, celem tej inicjatywy było nie snucie futurologicznych prognoz, porównywanie i ocena tendencji występujących w różnych rejonach świata, ani też formułowanie zaleceń czy postulatów. Celem było znalezienie i opisanie różnych alternatywnych rozwiązań dla problemów, przed jakimi stoi obecnie nauczanie matematyki, wraz z konsekwencjami - dodatnimi i ujemnymi, zresztą ocena nie zawsze jest tu możliwa - jakie przypuszczalnie pociągnie za sobą przyjęcie określonego rozwiązania. Takie założenie stworzyło uczestnikom klimat pełnej swobody w przedstawianiu idei i projektów, także wysoce kontrowersyjnych lub - przynajmniej z pozoru -

całkowicie utopijnych (jak np. propozycja U. d'Ambrosio zupełnego zniesienia egzaminów z matematyki). W zestawieniu z innymi, oraz opatrzone listą zalet i wad, te skrajne poglądy nabrały waloru naturalnego i potrzebnego dopełnienia, pozwalającego na uzyskanie w miarę kompletnego obrazu perspektyw nauczania matematyki w przyszłości.

Przedstawimy tu wnioski z dyskusji nad wybranymi aspektami zasadniczego tematu, posługując się przy tym głównie wstępną wersją sprawozdania z konferencji, przygotowaną przez A.G. Howsona i B.J. Wilsona.

Obecne programy nauczania matematyki powstały w bardzo szczególnym historycznym i kulturowym kontekście Europy Zachodniej bezpośrednio po dokonaniu się rewolucji przemysłowej. Ci, którzy je tworzyli, mieli na myśli jedynie niewielką mniejszość społeczną, elitę mającą dostęp do szkół ponadelementarnych. W ciągu ostatnich dziesięcioleci to, co kiedyś stworzono dla niewielu, stało się dostępne - czy raczej zostało wmuszone - wszystkim. Co więcej, ten sam program został wyeksportowany do innych krajów świata i potem - już dobrowolnie - zachowany w niewiele zmienionej postaci. Wynikiem tego procesu jest zdumiewająca jednorodność szkolnych programów matematyki w całym świecie. Jednorodność, która bynajmniej nie tłumaczy się uniwersalnym charakterem samej matematyki. Fakt zajmowania przez matematykę uprzywilejowanej pozycji wśród przedmiotów szkolnych usprawiedliwia się bowiem na ogół nie walorami kształcącymi matematyki, ale jej „użytecznością" w pracy i życiu obywatela. W tej perspektywie jednorodność programów musi dziwić. Charakter pracy i dostęp do niej są w różnych krajach bardzo różne, różne są więc także wymagania co do charakteru i poziomu potrzebnych umiejętności i wiadomości w zakresie matematyki; przy tym poziom życia społeczeństw rozciąga się od prostej egzystencji po stechnologizowane życie miejskie. Dla tych, którzy projektować będą programy na lata 1990., stwarza to pilną potrzebę radykalnego przystosowania tych programów do potrzeb każdego narodu oddzielnie.

Powstały przed kilku laty ruch ku „matematyce dla wszystkich" wysunął wiele podstawowych problemów dla dydaktyki matematyki. Sporo już zaproponowano różnych koncepcji programu takiej matematyki. Rozważmy następujące trzy poglądy.

Albo 1. Odrzucamy idealistyczne wyobrażenie, że „prawdziwej matematyki" można uczyć wszystkich. Przedmiot matematyka traci więc swe uprzywilejowane miejsce w kształceniu powszechnym. Pewna elita akademicka będzie się uczyć „prawdziwej matematyki", natomiast większość uczniów pozna jedynie matematykę „użyteczną", i to tylko na lekcjach zatytułowanych „fizyka", „wychowanie techniczne", „ekonomia" itp.

Albo 2. Matematyka powinna nadal stanowić jeden z podstawowych przedmiotów szkolnych, a program jej nauczania powinien zapewnić skuteczność tego nauczania dla wszystkich uczniów. W konsekwencji nowa matematyka szkolna mogłaby różnić się bardzo istotnie od tradycyjnej, a przepaść między matematyką szkolną a „matematyką wyższą" mogłaby jeszcze się powiększyć.

Albo 3. Matematyka zajmuje nadal miejsce jednego z podstawowych przedmiotów szkolnych i

(a) zakładamy z góry, że choć uczyć się jej będą wszyscy, nie wszyscy będą ją rozumieć;

albo

(b) poszczególni uczniowie będą się uczyć różnej matematyki, bądź też tej samej matematyki, lecz w różnym tempie, w zależności od poziomu „uzdolnień" lub od założonych standardów „osiągnięć".

Jak się wydaje, największą liczbę zwolenników ma obecnie stanowisko 3(b). Jak jednak osiągnąć efektywne zróżnicowanie uczniów i programów? Do jakiego stopnia zróżnicowanie jest pożądane i do jakiego stopnia możliwe?

Obecnie funkcjonują w różnych krajach różne systemy różnicowania, które znajdą się na liście możliwych rozwiązań, jaką zaprezentujemy niżej. Jeden z tych systemów (np. w USA) polega na dopuszczeniu dobrowolnej rezygnacji uczniów z uczenia się matematyki w wyższych klasach szkoły średniej. Prowadzi to do bardzo poważnych trudności na skalę masową przy podejmowaniu przez absolwentów szkół średnich studiów wyższych i półwyższych, gdyż na wielu kierunkach matematyka jest obecnie przedmiotem obowiązkowym. Rozstrzygnięcia wymaga więc przede wszystkim problem:

Czy matematyka powinna być przedmiotem obowiązkowym we wszystkich klasach szkoły średniej?

Są dwie możliwe odpowiedzi:

Albo 1. Tak. Oto niektóre konsekwencje tej decyzji:

- zwiększone zapotrzebowanie na nauczycieli (przy tym wysiłek wielu z nich będzie przynosił nikłe efekty);
- żaden uczeń nie będzie swej przyszłej kariery zaczynał z gorszej pozycji przez to, że przedwcześnie porzucił matematykę;
- będzie spełniona zasada równości społecznej;
- w wyższych klasach mogą pojawić się poważne trudności z zapewnieniem motywacji uczniów względem matematyki;
- słabsi uczniowie będą przeżywać poczucie niepowodzenia, wzmagające się aż do momentu opuszczenia szkoły;
- staniemy wobec konieczności zróżnicowania programów i związanych z tym poważnych problemów.

Albo 2. Nie. Wtedy:

- nauczyciele będą zajęci uczeniem tych uczniów, którzy chcą się uczyć matematyki;
- problemy motywacji zostaną zminimalizowane;
- uczniowie słabsi z matematyki będą mogli poświęcić czas na aktywności przynoszące im więcej sukcesu i satysfakcji;
- niektórzy uczniowie będą w przyszłości cierpieć z powodu braków w wykształceniu matematycznym;
- wielkiej ostrożności wymagać będzie decyzja co do optymalnego poziomu, na którym matematyka stanie się przedmiotem do wyboru, oraz co do kryteriów, na podstawie których uczeń otrzyma zgodę na porzucenie matematyki;
- programy innych przedmiotów nauczania będą musiały być tak skomponowane, by zapewniały ciągłą obecność w nauczaniu pewnej „składowej liczbowo-przestrzenno-graficznej" w stosownych dla niej kontekstach.

Jest przy tym oczywiste, że nie może być w programie miejsca na obowiązkową „matematykę" traktowaną jako zbiór reguł i procedur: nauczanie w ogóle, a nauczanie matematyki w szczególności, musi być racjonalne, co znaczy m.in. akcentowanie związków między wiedzą numeryczną a wiedzą o przestrzeni. Z drugiej strony tylko nieliczni uczniowie mogą wynieść korzyści z takiego nauczania matematyki, w którym dominują definicje, aksjomaty i logiczna struk-

Albo 1. Odrzucamy idealistyczne wyobrażenie, że „prawdziwej matematyki" można uczyć wszystkich. Przedmiot matematyka traci więc swe uprzywilejowane miejsce w kształceniu powszechnym. Pewna elita akademicka będzie się uczyć „prawdziwej matematyki", natomiast większość uczniów pozna jedynie matematykę „użyteczną", i to tylko na lekcjach zatytułowanych „fizyka", „wychowanie techniczne", „ekonomia" itp.

Albo 2. Matematyka powinna nadal stanowić jeden z podstawowych przedmiotów szkolnych, a program jej nauczania powinien zapewnić skuteczność tego nauczania dla wszystkich uczniów. W konsekwencji nowa matematyka szkolna mogłaby różnić się bardzo istotnie od tradycyjnej, a przepaść między matematyką szkolną a „matematyką wyższą" mogłaby jeszcze się powiększyć.

Albo 3. Matematyka zajmuje nadal miejsce jednego z podstawowych przedmiotów szkolnych i

(a) zakładamy z góry, że choć uczyć się jej będą wszyscy, nie wszyscy będą ją rozumieć;

albo

(b) poszczególni uczniowie będą się uczyć różnej matematyki, bądź też tej samej matematyki, lecz w różnym tempie, w zależności od poziomu „uzdolnień" lub od założonych standardów „osiągnięć".

Jak się wydaje, największą liczbę zwolenników ma obecnie stanowisko 3(b). Jak jednak osiągnąć efektywne zróżnicowanie uczniów i programów? Do jakiego stopnia zróżnicowanie jest pożądane i do jakiego stopnia możliwe?

Obecnie funkcjonują w różnych krajach różne systemy różnicowania, które znajdą się na liście możliwych rozwiązań, jaką zaprezentujemy niżej. Jeden z tych systemów (np. w USA) polega na dopuszczeniu dobrowolnej rezygnacji uczniów z uczenia się matematyki w wyższych klasach szkoły średniej. Prowadzi to do bardzo poważnych trudności na skalę masową przy podejmowaniu przez absolwentów szkół średnich studiów wyższych i półwyższych, gdyż na wielu kierunkach matematyka jest obecnie przedmiotem obowiązkowym. Rozstrzygnięcia wymaga więc przede wszystkim problem:

Czy matematyka powinna być przedmiotem obowiązkowym we wszystkich klasach szkoły średniej?

Są dwie możliwe odpowiedzi:

Albo 1. Tak. Oto niektóre konsekwencje tej decyzji:

- zwiększone zapotrzebowanie na nauczycieli (przy tym wysiłek wielu z nich będzie przynosił nikłe efekty);
- żaden uczeń nie będzie swej przyszłej kariery zaczynał z gorszej pozycji przez to, że przedwcześnie porzucił matematykę;
- będzie spełniona zasada równości społecznej;
- w wyższych klasach mogą pojawić się poważne trudności z zapewnieniem motywacji uczniów względem matematyki;
- słabsi uczniowie będą przeżywać poczucie niepowodzenia, wzmagające się aż do momentu opuszczenia szkoły;
- staniemy wobec konieczności zróżnicowania programów i związanych z tym poważnych problemów.

Albo 2. Nie. Wtedy:

- nauczyciele będą zajęci uczeniem tych uczniów, którzy chcą się uczyć matematyki;
- problemy motywacji zostaną zminimalizowane;
- uczniowie słabsi z matematyki będą mogli poświęcić czas na aktywności przynoszące im więcej sukcesu i satysfakcji;
- niektórzy uczniowie będą w przyszłości cierpieć z powodu braków w wykształceniu matematycznym;
- wielkiej ostrożności wymagać będzie decyzja co do optymalnego poziomu, na którym matematyka stanie się przedmiotem do wyboru, oraz co do kryteriów, na podstawie których uczeń otrzyma zgodę na porzucenie matematyki;
- programy innych przedmiotów nauczania będą musiały być tak skomponowane, by zapewniały ciągłą obecność w nauczaniu pewnej „składowej liczbowo-przestrzenno-graficznej" w stosownych dla niej kontekstach.

Jest przy tym oczywiste, że nie może być w programie miejsca na obowiązkową „matematykę" traktowaną jako zbiór reguł i procedur: nauczanie w ogóle, a nauczanie matematyki w szczególności, musi być racjonalne, co znaczy m.in. akcentowanie związków między wiedzą numeryczną a wiedzą o przestrzeni. Z drugiej strony tylko nieliczni uczniowie mogą wynieść korzyści z takiego nauczania matematyki, w którym dominują definicje, aksjomaty i logiczna struk-

tura wiedzy; tak rozumiana matematyka także nie powinna być obowiązkowa na żadnym poziomie nauczania.

Wróćmy teraz do pytania:

Czy różnicować programy? Czy można zapewnić różne programy nauczania dla różnych grup uczniów tak, by uzyskać akceptację wszystkich zainteresowanych tym problemem? Oto kilka możliwych rozwiązań:

Albo 1. Brak zróżnicowania programu. W rezultacie:

- rzeczywiste zróżnicowanie będzie polegać na rozumieniu matematyki przez jednych i nie rozumieniu jej przez innych uczniów;
- trzeba będzie zapewnić dodatkowe zadania lub pomoc dla najzdolniejszych;
- uniknie się decyzji, wśród nich wielu chybionych, kto ma co robić;
- uniknie się konfliktów w stosunkach nauczyciela z rodzicami;
- słabsi uczniowie nie będą sobie radzić z narzuconym im tempem uczenia się i zgubią się, prędzej czy później;
- pojawią się trudności z panowaniem nad klasą;
- nauczanie w bardzo zróżnicowanej klasie stawiać będzie duże wymagania nauczycielowi.

Albo 2. Zróżnicowanie tradycyjne (na poziomie szkół, oddziałów, grup uczniów czy indywidualnych uczniów). Jego skutki to:

- łatwiejsza praca nauczyciela w stosunkowo jednorodnej klasie;
- większe szanse powodzenia każdego ucznia, który uczy się według odpowiedniego dla siebie programu;
- zróżnicowanie nauczycieli według kwalifikacji, wynagrodzenia i statusu społecznego;
- piętno niezdolnych dla tak sklasyfikowanych uczniów i ich izolacja społeczna;
- trudności z dokonaniem obiektywnej selekcji, wobec nieuchronności różnych presji społecznych;
- napięcia między szkołami, uczniami i różnymi działami systemu oświatowego;
- konsolidująca status społeczny i zachowawcza względem struktur społecznych rola szkoły;
- łatwiejsza dla państwa manipulacja siłą roboczą.

Albo 3. Zróżnicowanie ze względu na potrzeby przyszłego zawodu. Konsekwencje tego rozwiązania byłyby m.in. następujące:

- kryterium zróżnicowania miałoby szeroką akceptację społeczną;
- program, według którego pracowałby uczeń, niekoniecznie odpowiadałby jego uzdolnieniom matematycznym, z wyjątkiem pewnej korelacji między przyszłym zawodem a ogólną sprawnością umysłową;
- różnicowanie musiałoby być odłożone do ostatnich lat nauki, kiedy przyszły zawód ucznia daje się już określić; prawie na pewno byłoby to za późno, by zapobiec zagubieniu uczniów słabszych i zanudzeniu zdolnych.

Jak więc widać, zróżnicowanie nauczania matematyki jest zagadnieniem ogromnie skomplikowanym, przy tym trudności są tym większe, im niższy szczebel szkoły. Tylko bardzo nieliczne państwowe szkoły zapewniają jakieś zróżnicowanie na poziomie klas początkowych, jeżeli nie liczyć grup wyrównawczych dla najsłabszych i dodatkowych zajęć dla najzdolniejszych. A tymczasem jest sprawą ogromnej wagi, by dzieci mające słabe wyniki w nauce nie przepadały bez nadziei na wyrównanie braków wskutek zmuszania ich do pracy w zbyt szybkim tempie, a także by najlepsi nie byli skazani na przerabianie niezliczonych ćwiczeń. Potrzebne są więc zróżnicowane materiały dydaktyczne, dostosowane do potrzeb różnych grup. Duże nadzieje pokłada się w nowej technologii. Tymczasem zaś rośnie niebezpieczeństwo, że kalkulatory, mikrokomputery i inne środki będą zarezerwowane tylko dla najzdolniejszych. Taka polityka byłaby katastrofalna w skutkach, pozbawiając większość uczniów wszystkich korzyści, jakie dają aktywności z użyciem tej technologii. Jej rosnąca dostępność może istotnie pomóc w uelastycznieniu programów nauczania.

Wspomnijmy na koniec o jeszcze jednej ważnej formie zróżnicowania programu w najwyższych klasach: tematach do wyboru, uzupełniających obowiązujący wszystkich materiał podstawowy. Taki program o strukturze modularnej mógłby prowadzić do zerwania z tradycyjnym podziałem godzin, przyporządkowującym na każdą lekcję każdej klasie jednego nauczyciela. W ostatnich klasach uczniowie mogliby uczyć się w dobrze wyposażonej pracowni matematycznej, przy czym poza pewną liczbą normalnych lekcji pracowaliby sami, z możliwością korzystania z konsultacji u dyżurujących nauczycieli.

Wiele czasu poświęcono na konferencji wymianie poglądów dotyczących treści nauczania. Przeżywamy obecnie okres pewnego wycofywania się z pozycji opanowanych przez reformy z lat 1960. W niektórych krajach obserwuje się częściową rezygnację z podkreślania strukturalnych i dedukcyjnych aspektów matematyki: podejścia mnogościowego, struktur algebraicznych i ujęcia aksjomatycznego. Tendencje te szczególnie silne piętno wywierają na geometrii szkolnej.

Geometria dedukcyjna zniknęła zupełnie z wielu programów, w innych pozostała, lecz nie wydaje się, by z większym sukcesem i pożytkiem dla uczniów niż „Elementy" Euklidesa, które zastąpiła. Tymczasem w ciągu ostatnich trzech dziesięcioleci, po uwolnieniu się z gorsetu tradycyjnego ujęcia, wypracowano masę różnorodnych przykładów i sytuacji geometrycznych stwarzających możliwość dobrego zrozumienia przez uczniów przestrzeni i elementarnych figur (np. materiały IOWO w Holandii i SMP w Anglii). Także wprowadzenie programowania w języku LOGO stworzyło zupełnie nowe możliwości eksperymentowania przez uczniów w zakresie geometrii. Pozostał jednak nie rozwiązany problem przejścia od aktywności kształtujących intuicyjne „wyczucie" przestrzeni, aktywności zaliczających się do fizyki raczej niż matematyki - do „myślenia geometrycznego" w sensie tradycyjnym. Jednocześnie w wyniku ostatnich zmian programowych nielicznej grupie najzdolniejszych uczniów udostępniono narzędzia algebraiczne, które pozwalają uprawiać geometrię w sposób systematyczny, łatwy i skuteczny, choć może mniej elegancki i mniej dający okazji do inwencji twórczej.

Argumenty przeciwne stosowaniu metod algebraicznych w geometrii mają długą historię. Simson w XVIII wieku uważał te metody za niewiele lepsze od „mechanicznie wyuczonych czynności", które uczeń wykonuje „bez żadnej idei" dla „otrzymania wyniku pozbawionego sensu". Podobne obiekcje dla poparcia geometrii Euklidesa na początku wieku XIX wysuwali Ohm w Niemczech i Whewell w Anglii. Powtórzył je ostatnio Thom wskazując, że algebra jest bogata w „syntaktykę" lecz uboga w „znaczenie", gdy z geometrią jest na odwrót. Syntaktyki łatwo się uczyć i łatwo z niej egzaminować. A ponieważ geometria jest uboga w syntaktykę, pytania egzaminacyjne z geometrii dzielą się z grubsza na takie, które wymagają zwykłej reprodukcji, i takie, do których potrzeba wysokiego poziomu wiedzy. Toteż ucznio-

wie i nauczyciele wolą lekceważyć geometrię i koncentrować się na „bardziej opłacalnej" algebrze.

Tak więc ci, którzy będą tworzyć programy szkolne na lata 1990. staną, jak się wydaje, wobec potrójnej alternatywy:

Albo 1. Odrzucamy przekonanie, że geometria powinna i może być traktowana w szkole jako zorganizowany dedukcyjnie s y s t e m wiedzy, gdzie znajomość pojęć i faktów jest podyktowana po prostu ich przynależnością do systemu. Pozostanie ona w programie tylko źródłem doskonałych tematów do inicjowania aktywności uczniów na różnych poziomach. Wówczas:

- wielowiekowa tradycja zostanie przerwana i część matematyki szkolnej, która pobudzała twórczość i wyobraźnię, utracona;
- większość uczniów będzie miała mniej okazji do frustracji, ponieważ myślenie twórcze kierowane wyobraźnią jest dostępne tylko nielicznym;
- nauczanie „dowodzenia" na poziomie szkolnym ulegnie poważnemu ograniczeniu. (Powinno to spowodować przebudowę kształcenia uniwersyteckiego, nie zaś tylko narzekania, że „uczniowie przychodzą na uniwersytet zupełnie nie rozumiejąc istoty dowodu".)

Albo 2. Nadal usiłujemy uczyć geometrii ujętej w system aksjomatyczny lub pseudoaksjomatyczny, czy to oparty na „zmodyfikowanym" ujęciu Euklidesa, czy na przykład na teorii przekształceń. Konsekwencją takiego wyboru będzie prawdopodobnie to, że

- tylko nieliczni uczniowie będą mogli sprostać wymogom intelektualnym takiego ujęcia, a jeszcze mniej spośród nich zdoła docenić wartości tej „gry";
- ci nieliczni będą nagrodzeni wprowadzeniem w takie aspekty myślenia matematycznego, których nie da się przekazać na poziomie szkolnym (a może w ogóle) za pośrednictwem żadnej innej dziedziny matematyki.

Albo 3. Do programu matematyki wprowadzamy „wyspy" geometrii w postaci lokalnych systemów dedukcyjnych. Pozwoli to

- zachować coś z dawnego ducha geometrii szkolnej;
- wykorzystać wspaniały zasób przykładów i ćwiczeń, nagromadzony w ciągu dziesięcioleci;
- wpoić sens dowodu i związków dedukcyjnych;

- nie utracić wielu prowokujących problemów, doskonale nadających się dla młodych zdolnych matematyków.

Czy jednak nauczyciele zechcą poświęcać czas takim „wyspom", leżącym raczej na uboczu programu, a przy tym z pewnością trudnym ze względu na wymagany tu odmienny sposób myślenia?

Ostatni rozdział sprawozdania z konferencji nosi ten sam tytuł, co temat ostatniej jej sesji: Procesy zmiany. Gdy bowiem widzimy konieczność zmian w nauczaniu matematyki oraz pożądane kierunki tych zmian, pojawia się zasadniczy problem:

Jak urzeczywistnić zmiany?

Szkoła i nauczanie zmieniają się nieustannie; jednak to, co w nich najbardziej chcielibyśmy zmienić - postawy, praktyka nauczania, treści programu - uparcie pozostają takie same. Mimo ogromnego doświadczenia reform drugiej połowy dwudziestego wieku i ich analiz w literaturze, wciąż nasza wiedza na temat strategii skutecznego przeprowadzania zamierzonych zmian w nauczaniu matematyki jest niewielka. Jest przy tym oczywiste, że trudności i koszty reformowania szkoły są coraz większe, m.in. dlatego, że systemy szkolne stały się ogromne. Z drugiej strony świat stoi obecnie wobec tak trudnych i zasadniczych problemów, że wołania o reformę szkoły są zaledwie słyszane przez polityków i władze. Dlatego perspektywy urzeczywistnienia tak bardzo potrzebnych zmian w nauczaniu matematyki są odległe, zapewne daleko przekraczające rok 2000.

SCHOOL MATHEMATICS IN THE 1990s

S u m m a r y

This is a report of an ICMI Symposium on the above theme, held in Kuwait in February 1986; the report is partly based on Proceedings written by A.G. Howson and B.J. Wilson.