Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

dmptm 1982

Mathématiques - terminale D (IREM, Strasbourg)

W jaki sposób należałoby uczyć matematyki w szkole średniej? Które zagadnienia wybrać oraz w jaki sposób je prezentować, biorąc pod uwagę typ szkoły, profil klasy? Czy, a jeśli tak, to gdzie i w jaki sposób uwzględniać wzrost znaczenia pewnych metod czy nawet całych gałęzi matematyki (na przykład obecnie komputerów i informatyki)? Jaki - w rezultacie - powinien być podręcznik do matematyki dla danego typu szkoły czy klasy? Problemy te - zwłaszcza w momencie wkraczania reformy nauczania do polskich szkół średnich - budzą powszechne zainteresowanie. Wydaje się, że w takiej sytuacji warto byłoby również przyjrzeć się próbom ich rozwiązywania poza granicami naszego kraju. Zaprezentuję tu jeden z podręczników używanych we francuskich klasach licealnych: „Mathématiques - terminale D", opracowany pod patronatem IREM w Strasburgu (1983). Moje spostrzeżenia - w nawiązaniu do poruszonych na wstępie problemów - będą dotyczyły:

- programu nauczania,
- budowy podręcznika,
- uwzględnienia specyfiki klasy: sygnalizowanie licznych zastosowań prezentowanych dziedzin matematyki w innych jej dziedzi-

nach, a przede wszystkim poza matematyką; uwagi na temat przygotowania do matury,

- wyraźnego wpływu coraz powszechniejszego stosowania komputerów i informatyki na sposób ujęcia treści nauczania.

I. P r o g r a m n a u c z a n i a k l a s y m a t u r a l n e j - sekcja D (6 godzin matematyki tygodniowo).

1. Ciągi liczbowe (definicja, zbieżność, własności ciągów, badanie ciągów spełniających relację $u_{n+1}=f(u_n)$, przykłady ciągów spełniających warunek $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$, zastosowanie ciągów do opisu zjawisk ewolucyjnych w ekonomii i w biologii).

2. Funkcje liczbowe (funkcje logarytmiczne, wykładnicze, potęgowe, uzupełnienie wiadomości związanych z ciągłością i granicą funkcji, funkcje ciągłe na przedziale, funkcja odwrotna do ciągłej na przedziale i ściśle monotonicznej, uzupełnienie wiadomości o pochodnych, badanie przebiegu zmienności funkcji, porównywanie szybkości wzrastania pewnych funkcji, na przykład wykładniczej i potęgowej).

3. Rachunek całkowy (definicja całki oznaczonej funkcji ciągłej, własności całki, przybliżone metody obliczania całki, liczne zastosowania, przykłady równań różniczkowych).

4. Funkcje wektorowe i kinematyka (funkcja wektorowa zmiennej rzeczywistej o przeciwdziedzinie $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, różniczkowanie funkcji wektorowych, kinematyka punktu - ruch na płaszczyźnie).

5. Liczby zespolone (ciało liczb zespolonych, interpretacja geometryczna, moduł, sprzężenie, liczby zespolone o module 1, postać trygonometryczna, translacja $z \to z + \lambda$, obrót $z \to e^{i\varphi} \cdot z$).

6. Algebra liniowa (znane są już definicje przestrzeni wektorowej i przekształcenia liniowego - tu rozważane są przestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^n$; operacje w $\mathbb{R}^n$, baza kanoniczna, podprzestrzenie, macierz przekształcenia liniowego - z wyłączeniem rachunku macierzowego, układy równań liniowych rozwiązywanych dzięki operacjom na liniach macierzy).

7. Kombinatoryka. Statystyka. Rachunek prawdopodobieństwa. (statystyka - ciąg dalszy; kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa - wprowadzenie: analiza licznych sytuacji, gdzie interweniuje przypadek - budowa schematów probabilistycznych, zmienna losowa).

Jest to jedynie skrót zamieszczonego w podręczniku programu. Należy poza tym dodać, że prawie zupełnie nie ma szczegółowych wskazówek co do sposobu realizacji programu; zaznacza się nawet, że o wyborze zagadnień oraz o sposobie ich ujęcia zadecyduje nauczyciel. Natomiast wiele spośród twierdzeń oznaczonych jest jako „spostrzeżenia", tzn. program nie wymaga ich dowodzenia, kładąc szczególny nacisk na ich znaczenie w matematyce, a przede wszystkim na zastosowania.

II. B u d o w a p o d r ę c z n i k a. Treści nauczania podzielone zostały na 20 rozdziałów, przy czym zagadnienia z poszczególnych działów programu nawzajem przeplatają się, czego przykładem może być wspólny rozdział poświęcony ciągom rekurencyjnym i równaniom różniczkowym - dzięki pierwszym otrzymuje się model zjawisk, gdzie ewolucja następuje skokami, dzięki drugim - w sposób ciągły. Większość rozdziałów rozpoczyna się od informacji, o czym będzie tu mowa, do jakich wcześniejszych wiadomości i umiejętności się tu nawiązuje, czemu będą służyły nabyte tu wiadomości i umiejętności, oraz w jaki sposób będą prezentowane (np. ze względu na przygotowanie algorytmu i programu komputerowego). Każdy z rozdziałów podzielono na pewne fragmenty związane z kolejno wprowadzonymi pojęciami (np. moduł liczby zespolonej, własności sprzężenia itp.), zawierające przy końcu parę typowych, prostych ćwiczeń ułatwiających zrozumienie i zapamiętanie. Dopiero na końcu całego rozdziału znajduje się obszerny wybór zadań - poklasyfikowanych rozmaicie - w zależności od tematu. Klasyfikacja ta wiąże się bądź z wprowadzanymi w rozdziale zagadnieniami, bądź z różnymi typami zastosowań. Czasem wyróżnione i wydzielone są zadania-tematy maturalne.

Wśród zadań znajdują się często takie, których rozwiązanie nie jest zbyt trudne do wykonania (dzięki szczegółowym wskazówkom) i których istota polega na dostrzeżeniu pewnej użytecznej metody, np. przy sumowaniu. Oto przykład takiego zadania:

(a) Obliczyć $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ i $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p$.

(b) Obliczyć pochodną funkcji $x \to \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p$.

(c) Obliczyć na tej podstawie $\sum_{p=1}^{n} pC_n^p$ i $\sum_{p=1}^{n} (-1)^p C_n^p \cdot p$.

(d) Obliczyć analogicznie $\sum_{p=2}^{n} p(p-1)C_n^p$.

Na uwagę zasługują też liczne przykłady badania przebiegu zmienności funkcji. Najwięcej jest zadań-zastosowań: w matematyce, fizyce, ekonomii, biologii itd.

III. U w z g l ę d n i e n i e s p e c y f i k i k l a s y, dla której podręcznik jest przeznaczony.

1. Jest to klasa przygotowująca się do matury.

Autorzy przypominają o tym już w skierowanym do ucznia wstępie podręcznika. Starają się dodać otuchy przyszłemu maturzyście i przede wszystkim udzielić mu parę rad. Podkreślają szczególną rolę rzucających się w oczy w czasie przedegzaminacyjnego wertowania podręcznika rysunków oraz wiadomości umieszczonych w ramkach. Jeden z rysunków - na przykład - podkreślając rolę rachunku różniczkowego przy badaniu przebiegu zmienności funkcji ilustruje, jak złudne może być czasami rysowanie wykresu funkcji na podstawie kilku czy kilkunastu punktów otrzymanych za pomocą np. kalkulatora. Wiadomości sformułowane w ramkach uważa się na najistotniejsze ze względu na zastosowania.

Autorzy zachęcają czytelnika do założenia sobie specjalnego zeszytu i samodzielnego rozwiązywania zadań z podręcznika (jest ich dużo, są różne, a wiele spośród nich zaczerpnięto z zestawów zadań maturalnych - z różnych miast Francji, Republiki Środkowo-afrykańskiej, Kanady itp.). Zamieszczone są też drobne wskazówki dotyczące technicznej strony prac maturalnych.

2. Jest to klasa o profilu matematyczno-przyrodniczym.

Warto tu chyba podkreślić, że podręcznik został opracowany przez zespół pracowników Uniwersytetu Ludwika Pasteura oraz Akademii (klasyczno-technicznej) w Strasburgu.

Zdecydowałam się wyróżnić sześć dostrzegalnych w podręczniku aspektów interdyscyplinarnych:

2.1. Podręcznik zawiera obszerne rozdziały poświęcone wyłącznie zastosowaniom, np. zastosowanie rachunku całkowego (obliczanie objętości pewnych typów brył, masy, momentu bezwładności, wyznaczanie środka grawitacji, moc - energia, prędkość - droga), kinematyka (zastosowanie funkcji wektorowych), linearyzacja za pomocą zmiany zmiennych (zastosowanie statystyki).

2.2. Zagadnienia teoretyczne prezentuje się często od razu na zasadzie przygotowania narzędzia użytecznego w dziedzinach pozamatematycznych. Na przykład teoria funkcji wektorowych rozwijana jest na tle przyszłych zastosowań fizycznych, zaś przykłady ciągów określonych rekurencyjnie dotyczą między innymi ich zastosowań przy opisie zjawisk ewolucyjnych, np. w ekonomii czy biologii.

2.3. Gdzie indziej tradycyjnie, po omówieniu w pewnym matematycznym kontekście danego pojęcia, twierdzenia, metody itp. następuje seria zastosowań. Czasami zawarte są one jeszcze w tzw. części teoretycznej, np. w rozdziale o przekształceniach liniowych prezentowane jest zastosowanie tych przekształceń w ekonomii (opis zapotrzebowania na pewne materiały będące - w określonych ilościach - składnikami produkowanych w przedsiębiorstwie wyrobów). Częściej pokazane są poprzez zadania ze zbioru na końcu rozdziału, np. badanie przebiegu zmienności funkcji opisującej oprocentowanie wkładu pieniężnego, szacowanie ilości zwierząt żyjących dziko na podstawie maksimum prawdopodobieństwa itp. Należy tu wspomnieć o prezentowanych zastosowaniach zagadnień w innych dziedzinach matematyki, np. liczb zespolonych do uzyskania wartości funkcji trygonometrycznych pewnych kątów. Oto przykład:

Z a d a n i e. (a) Rozwiązać w zbiorze C liczb zespolonych równanie

$$z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$$

- w sposób algebraiczny,
- w sposób trygonometryczny.

(b) Wywnioskować stąd, jakie są wartości $\cos\frac{\pi}{12}$ i $\sin\frac{\pi}{12}$.

2.4. Czasem o praktycznej użyteczności studiowanych pojęć możemy się jedynie domyślać; np. zastosowanie liczb zespolonych do opisu obwodów elektrycznych:

K o n s t r u k c j a F r e s n e l a: Rozważmy rodzinę funkcji zdefiniowanych następująco: $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, gdzie ω jest ustalone. Każdej funkcji przyporządkowuje się liczbę zespoloną $z=Ae^{i\varphi}$ (przedstawienie Fresnela).

Tu następuje szereg ćwiczeń w poszukiwaniu liczb zespolonych przyporządkowanych danym funkcjom, później sumie pewnych funkcji i iloczynowi funkcji przez liczbę, pochodnej funkcji. Po tym - zadanie:

Przez j oznaczmy liczbę zespoloną przedstawiającą natężenie na krańcach dipola, a u - odpowiednio napięcie. Wyznaczyć liczbę zespoloną z taką, że u=zj w następujących przypadkach:

(a) dipol jest opornikiem R,

(b) dipol jest zwojnicą bez oporu, z indukcją własną L,

(c) dipol jest kondensatorem o pojemności C.

2.5. Podręcznik zawiera wiele wskazówek dotyczących praktycznych obliczeń, których wynik powinien charakteryzować się po prostu dostatecznie dobrym przybliżeniem. Przykładem może tu być omówienie przybliżonego obliczania całek metodą prostokątów (wraz z szacowaniem błędów), czy też np. przekształcanie wzoru na obliczanie ilości kombinacji do postaci dogodnej ze względu na obliczenia za pomocą kalkulatora. Zaś w definicji logarytmu dziesiętnego czytamy:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\cdot \ln x \ .$$

I obok $M \approx 0{,}43$!

IV. W p ł y w k o m p u t e r ó w i i n f o r m a t y k i na sposób ujęcia treści nauczania.

1. Dzięki kalkulatorom i komputerom możliwe jest sprawne wykonywanie skomplikowanych nawet rachunków. Wymaga to z kolei przekształcenia schematu rachunków ze względu na działanie maszyny. Dlatego też podręcznik między innymi uczy, jak redukować liczbę operacji, sugeruje, aby planować je tak, by rachunki nie dotyczyły zbyt dużych liczb oraz prezentuje pewne sposoby rozszerzania prostego zakresu działania kalkulatora. Na przykład wzór na ilość kombinacji

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

zostaje przekształcony do postaci

$$C_n^p = \frac{n}{p} \times \frac{n-1}{p-1} \times \ldots \times \frac{n-p+1}{1}$$

(podkreśla się, że przy postaci

$$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \ldots \times \frac{n-p+1}{p}$$

czynniki byłyby znacznie większe).

Wśród ćwiczeń dotyczących permutacji zbioru n-elementowego znajduje się zadanie:

Aby móc otrzymywać n! dla dużych wartości n można podzielić każdy czynnik przez 10 i obliczyć iloczyn

$$0,1 \times 0,2 \times 0,3 \times \ldots \times (n/10).$$

Wyraź ten iloczyn w zależności od n! i zbadaj rozszerzenie się możliwości wyznaczania n!

2. Sugeruje się użycie kalkulatorów przy obserwowaniu zbieżności funkcji i ciągów, zwłaszcza określonych rekurencyjnie, np.:

Z a d a n i e 1. Niech

$$f: x \to \frac{3x+1}{5x-2},$$

(a) Obliczyć $f(0,41)$, $f(0,401)$, $f(0,400001)$, $f(0,4+10^{-8})$.

(b) Niech $p=10^{-99}$. Czy $f(0,4+p)$ przekracza zakres możliwości kalkulatora?

(c) Obliczyć $f(0,4-100p)$.

Z a d a n i e 2. (Obliczanie $\sqrt{2}$ metodą babilońską).

(a) Niech $a=\sqrt{2}$. Pokazać, że $a=\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$.

(b) Rozważmy funkcję $f: x \to \frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$ i ciąg u zdefiniowany przez $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 1$.

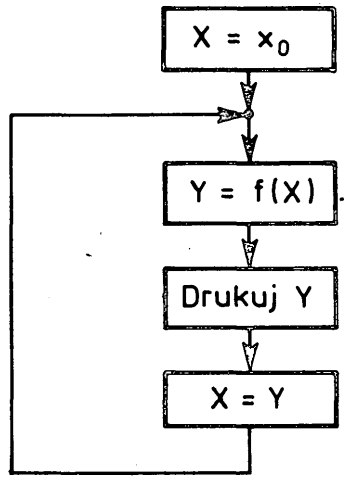
Wykazać, że ciąg u jest zbieżny. Jaka jest jego granica?

(c) Podać przybliżenie $\sqrt{2}$ z dokładnością do 10^{-7}, wykorzystując ciąg u. Porównać z wartością otrzymaną wprost za pomocą kalkulatora.

3. Możliwość zastosowania kalkulatora pozwala i wręcz zachęca do rozwiązywania w przybliżeniu pewnych problemów (często wręcz nie do rozwiązania na innej drodze). Przykładem może być wspomniane już przybliżone obliczanie całek.

4. Przy rozważaniu zagadnień z zakresu rachunku prawdopodobieństwa potrzebny jest czasem ciąg losowo (ale z równym prawdopodobieństwem pojawienia się) wybranych liczb. Nie jest zbyt wygodne np. wielokrotne losowanie kuli z urny - kalkulator dostarczyć może symulacji takiego procesu. Poniższa procedura służy właśnie temu celowi, jeśli tylko odpowiednio dobierzemy funkcję f (np. $f(x) = ax - [ax]$) oraz wartości dla a i x_0.

Np. $a = 997$, $x_0 = 147$ (spełnienie wymaganych warunków sprawdzone jest za pomocą serii testów).



Należałoby na końcu koniecznie wspomnieć o podejmowanych w podręczniku licznych zabiegach, których celem jest wstępna nauka

elementów informatyki: konstruowanie algorytmów, przedstawianie ich za pomocą organigramów (oraz przeciwnie - odczytywanie treści algorytmów z organigramów, między innymi poprzez eksperymentowanie z kalkulatorem), przykłady programów komputerowych LSE. Wiąże się z tym dobór odpowiedniej metody rozwiązywania danego problemu: w podręczniku przykładem jest wybór tzw. „metody czynnika głównego" dla rozwiązywania układów równań liniowych, tzn. sprowadzania układu do takiej postaci, by jego macierz główna miała tzw. postać schodkową, np.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Omawiany podręcznik przedstawia z pewnością interesującą koncepcję matematyki w szkole średniej z punktu widzenia praktycznych zastosowań jej elementów.

Agnieszka Demby (Gdańsk)