ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 3 (1984)

MARIANNA CIOSEK
Kraków

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Odkrycie i formułowanie twierdzenia oraz definiowanie nowego pojęcia przez dzieci 10-letnie i 11-letnie

1. UWAGI WSTĘPNE

Artykuł ten poświęcam sprawozdaniu z postaw i zachowań uczniów czwartej i piątej klasy obserwowanych w toku ich pracy w cyklu lekcji na temat cechy podzielności przez 3 i w cyklu lekcji na temat pojęcia figury wypukłej.

Dokumentacja tego sprawozdania i przedstawionej w artykule analizy obejmuje pisemne prace dzieci oraz protokóły z lekcji prowadzone równocześnie i niezależnie przez trzy osoby. Dotyczą one normalnych sytuacji lekcyjnych w klasie, w której toczą się bardzo żywe, spontaniczne dyskusje, w której dzieci przyzwyczajone sa do swobodnego wypowiadania się, co prowadzi niejednokrotnie do tego, że wypowiadają się razem głośno i spierają się agresywnie. Z tego powodu protokóły nie mogą oddawać w pełni tego, co się w toku lekcji dzieje w każdym szczególe. Skoncentrowane jednak na zadaniu uchwycenia postaw dzieci i ich zachowań, ujawniają najważniejsze momenty i stanowią pewną podstawę do analizy tych zachowań i postaw w określonych już dokładniej sytuacjach.

Jest to możliwe właśnie dlatego, że nauczanie matematyki w obserwowanych klasach jest ukierunkowane na stymulowanie wszechstronnej, matematycznie twórczej aktywności dzieci. Ich

swoboda i spontaniczność umożliwia obserwatorom zorientowanie się w rzeczywistych ich reakcjach. Uczeń bowiem, który czegoś nie rozumie, natychmiast żąda wyjaśnienia; jeżeli się z czymś nie zgadza, natychmiast protestuje; jeżeli ma jakiś pomysł, natychmiast chce go przekazać innym. To eliminuje - przynajmniej w pewnej części - nieujawnione, przemilczane, nawet ukrywane nieporozumienia, tak częste na lekcjach prowadzonych tradycyjną metodą pseudodialogu w postaci pytań nauczyciela i odpowiedzi ucznia powołanego do odpowiedzi. Swobodna dyskusja między samymi uczniami, w której uczestnicy działają na równych prawach, jest dla obserwatora niezwykle bogatym materiałem badawczym. Podkreślam to, ponieważ mimo metodologicznych słabości takiej obserwacji naturalnego toku lekcji, może być ona źródłem wstępnej informacji o postawach i zachowaniach uczniów w określonych sytuacjach problemowych; ta informacja z kolei może być wykorzystana w podejmowaniu już ściślejszych i łatwiejszych metodologicznie badań w mniejszych grupach lub w badaniach klinicznych. Tak właśnie traktuje przedstawione tu sprawozdanie z przebiegu lekcji i jego analizę.

Uwzględniam w obu omawianych przypadkach dwie części: sprawozdanie z przebiegu lekcji oraz analizę pewnych wyróżnionych w tym procesie momentów. W opisie przebiegu lekcji używam czasem liczby mnogiej, mówiąc np. „uczniowie wyjaśniają..., aprobują..., odrzucają..." itp. Znaczy to, że w danym momencie różni uczniowie zabierają głos, wypowiadając w różnych formach opinie zbieżne, inni zaś przeciw tym opiniom nie protestują. Opinie te przedstawiam w skrócie w sposób syntetyczny, nie zawsze jest bowiem możliwe rozpisanie ich na liczne głosy, wyrażone słowem lub nawet nie werbalnie.

Tematyka lekcji była narzucona przez obowiązujący program. Dlatego poza dyskusją pozostawiam problem, czy jest ona najlepiej dobrana do wieku i zainteresowań dzieci. Sądzę jednak, że prawie każdy temat nie przekraczający trudnością możliwości dzieci, może być ujęty problemowo i wykorzystany w sposób kształcący i aktywizujący uczniów.

2. CYKL LEKCJI NA TEMAT CECHY PODZIELNOŚCI PRZEZ 3 - ODKRYWANIE I FORMUŁOWANIE TWIERDZENIA, KLASA CZWARTA, WIEK DZIECI - 10 LAT

2.1. Przebieg pracy uczniów

2.1.1. Etap pierwszy - pojawienie sie problemu i spontaniczne propozycje uczniów odnoszące się do cechy podzielności przez 3. Dzieci grają parami w grę, w której posunięcie pionka zależy od tego, czy pewna liczba jest podzielna przez 2 (przy kolejnych ruchach występują różne liczby z zadanego zbioru liczb). Cecha podzielności przez 2 jest uczniom znana. Ta sama gra ze zmianą warunku na podzielność przez 5. Cechę podzielności przez 5 uczniowie znają. Ta sama gra ze zmianą warunku na podzielność przez 3. Cechy podzielności przez 3 uczniowie nie znają.

W pierwszych dwóch przypadkach gra przebiega szybko i sprawnie, w trzecim - poszczególne grupy pracują w różnym tempie, niektóre z nich nie kończą gry w przewidzianym czasie.

Interwencja nauczyciela: Jak radziliście sobie w toku gry? Uczniowie stwierdzają, że w trzecim przypadku za każdym razem trzeba było wykonywać dzielenie z resztą przez 3. To bardzo długo trwa, ale można sobie zadanie ułatwić, stosując prostsze sposoby.

Propozycje uczniów w kolejności ich przedstawiania w dosłownym brzmieniu:

(1) "Przez 3 są podzielne te liczby, których ostatnia cyfra jest 3 lub 6",

(2) "3 jest dzielnikiem każdej liczby, która ma ostatnią cyfrę podzielną przez 3",

(3) "Jak każdy składnik liczby jest podzielny przez 3, to cała liczba jest podzielna przez 3.
Na przykład: $3 \mid 66120$, bo $3 \mid 60000$; $3 \mid 6000$ i $3 \mid 120$".

(4) "Jak któryś składnik liczby nie jest podzielny przez 3, to cała liczba nie jest podzielna przez 3.
Na przykład: $3 \mid 3000$ i $3 \mid 12$, ale $3 \nmid 100$, więc $3 \nmid 3112$".

(5) "Jak każda z cyfr liczby jest podzielna przez 3, to liczba jest podzielna przez 3".

Spontaniczna dyskusja i krytyka tych propozycji. Dzieci odrzucają szybko dwie pierwsze, podając kontrprzykłady: Liczba 23 ma ostatnią cyfrę 3, ale 3 nie jest dzielnikiem 23; 3 jest dzielnikiem 9, ale 3 nie jest dzielnikiem 79; 3 jest dzielnikiem 6, ale nie jest dzielnikiem 16.

Sposób (3) uznają uczniowie za poprawny. Dla sprawdzenia, jak ten sposób jest przez nich rozumiany, nauczyciel poleca zastosowanie go do liczb, które wystąpiły w pierwszej części lekcji. Dzieci wymieniają liczby: 30, 39, 42 600, 6390, 96, 129. Przykłady te wskazują na szczególne rozumienie terminu "składnik" liczby (do czego jeszcze powrócimy w dalszym ciągu).

Autorowi propozycji (4) zarzucają koledzy, że nie ma racji, bo np.: $3 \nmid 20$ i $3 \nmid 1$, ale $3 \mid 21$, dodając przy tym: "mogę przedstawić liczbę jako sumę dwóch składników, z których żaden nie jest podzielny przez 3, a mimo to liczba może być podzielna przez 3".

Główny i owocny konflikt. Propozycja (5) - podana przez Piotra - to przedmiot najbardziej gorącej dyskusji, podjętej i prowadzonej do pewnego momentu w ogóle bez interwencji nauczyciela. Jeden z uczniów stwierdza: "Piotr nie ma racji, bo np. 3 jest dzielnikiem liczby 24, choć 3 nie jest ani dzielnikiem liczby 2, ani liczby 4". Ale Piotr broni swojej propozycji. "Weźmy np. liczbę 93 6369" - mówi - "przecież od razu widać, że gdybyśmy wykonali dzielenie tej liczby przez 3, otrzymalibyśmy resztę 0; podobnie będzie z innymi liczbami, których cyframi są tylko liczby 3, 6 lub 9". "Dobrze" - mówi jeden z przeciwników - "ale dlaczego liczba 24 jest podzielna przez 3, chociaż żadna z jej cyfr nie jest podzielna przez 3". Piotr upiera się, że na pewno ma rację, nie umie jednak sam poradzić sobie z odparciem zarzutu.

Interwencja nauczyciela - wyjaśnianie sytuacji konfliktowej. Tu dopiero interweniuje nauczyciel, bo oczywiście pojawił się trudny problem typu logiczno-językowego. W rozmowie wyjaśnia się, jak naprawdę należy rozumieć propozycję Piotra. Wyróżnia się w niej i zapisuje na tablicy dwa warunki. Pierwszy z nich - (a): każda cyfra liczby jest podzielna przez 3, drugi - (b): ta liczba jest podzielna przez 3.

Ustala się, że zastosowanie do jakiejś liczby propozycji (5) polega przede wszystkim na sprawdzeniu warunku (a), tzn.

na sprawdzeniu, czy każda jej cyfra jest podzielna przez 3. Jeśli tak jest, to wiemy na pewno, że spełniony jest warunek (b), a więc że ta liczba jest podzielna przez 3.

Nauczyciel pyta: Czy liczba 24 spełnia warunek Piotra? Niektóre dzieci twierdzą, że warunek nie jest spełniony - argumenty przytaczane kolejno sprowadzają się do stwierdzenia: bo przecież cyfry liczby 24 nie są podzielne przez 3, a mimo to liczba ta jest podzielna przez 3.

Nauczyciel odwołuje się więc do innego przykładu. Opowiada następującą historyjkę. Dwaj koledzy, Grzegorz i Konrad - zbieracze widokówek - zawarli następującą umowę: jeśli któryś z nas będzie w innym mieście co najmniej 2 dni, przyśle drugiemu widokówkę. Za jakiś czas Konrad bawił w Warszawie przejazdem tylko przez kilka godzin i przesłał Grześkowi widok Zamku Królewskiego. Czy możemy powiedzieć, że Konrad nie dotrzymał umowy? - pyta nauczyciel. Uczniowie reagują z całą pewnością, wyjaśniając, że to wcale nie jest sprzeczne z umową. Konrad nie dotrzymałby umowy, gdyby przebywał w Warszawie np. przez tydzień i nie wysłał koledze kartki.

Powróćmy do warunku Piotra - mówi nauczyciel. Jaki przykład obaliłby ten warunek? Reakcja jest bardzo żywa - kilku uczniów wypowiadá się natychmiast. Wypowiedzi można łącznie streścić w sposób następujący: To chyba będzie podobnie jak w przykładzie umowy Grześka i Konrada. Musielibyśmy wskazać liczbę, której każda cyfra byłaby podzielna przez 3, a mimo to liczba ta nie byłaby podzielna przez 3. Ale takich liczb nie ma, bo przecież, gdybyśmy wykonali dzielenie przez 3 liczby, której wszystkie cyfry są podzielne przez 3, to zawsze otrzymamy 0 jako resztę, a więc ta liczba będzie podzielna przez 3.

Nauczyciel nazywa propozycję Piotra twierdzeniem. Podkreśla, że nie można tego twierdzenia rozumieć w taki sposób; warunek (b) spełniają tylko takie liczby, które spełniają warunek (a). Właśnie liczba 24 jest przykładem liczby, która spełnia warunek (b), choć nie spełnia warunku (a). Należy więc to twierdzenie rozumieć tylko tak: jeśli wiemy o liczbie, że każda jej cyfra jest podzielna przez 3, to wiemy już na pewno, że jest to liczba podzielna przez 3.

Zaakceptowanie warunku (5) z pewnym zastrzeżeniem. Ostatecznie wszystkie dzieci godzą się na to, że wypowiedź Piotra jest

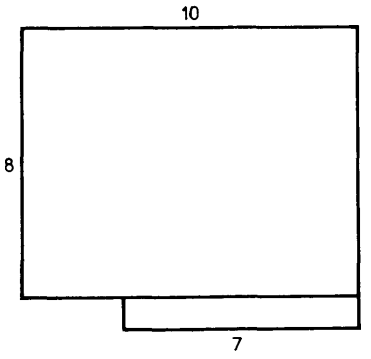
prawdziwa, ale niektórzy dodają, że to twierdzenie nie rozstrzyga o podzielności przez 3 każdej liczby; dobrze byłoby znać warunek podobny do tego, który decyduje o podzielności liczby przez 2: jeśli cyfra w rzędzie jedności liczby jest podzielna przez 2, to liczba jest podzielna przez 2, a jeśli cyfra w rzędzie jedności nie jest parzysta to liczba nie jest podzielna przez 2.

2.1.2. Etap drugi - odkrycie przez uczniów cechy podzielności przez 3. Na drugiej z kolei lekcji uczniowie otrzymują zadanie:

Narysować w zeszycie figurę składającą się z 87 kratek. Sprawdzić, czy można ją wyłożyć płytkami składającymi się z trzech kratek.

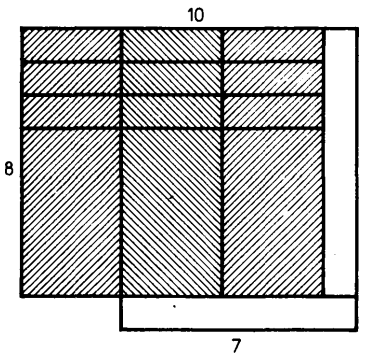
(Na wcześniejszych lekcjach dzieci poznały pewną konwencję budowania figury o zadanej liczbie kratek, omówioną w podręczniku (Turnau, 1979)).

Uczniowie rysują tę figurę (rys. 1), a następnie rozkładają ją rozmaicie na figury trzykratkowe. Nie ma jednak w tym postępowaniu żadnej metody.



Rys. 1

Interwencja nauczyciela: proponuje wspólny sposób wykładania figury, ilustrując go na tablicy: najpierw wyłożymy pierwszy rządek dokąd się da, potem drugi, trzeci... Kontynuując to postępowanie dzieci otrzymają poniższy rysunek



Rys. 2

Nauczyciel proponuje umowę: nie wypełnioną jeszcze część figury nazywać będziemy "korytarzykiem", a liczbę kratek w nim zawartych - "długością korytarzyka". Dzieci zauważają, że długość korytarzyka liczby 87 wynosi 15, a więc że ten korytarzyk także da się wyłożyć płytkami złożonymi z trzech kratek. Nauczyciel pyta: czy liczba 87 jest podzielna przez 3 ? Odpowiedź "tak" niektórzy uczniowie uzasadniają, niezależnie od wykonanego rysunku, tym, że reszta z dzielenia liczby 87 przez 3 wynosi 0, inni zaś twierdzą: "nie trzeba wykonywać dzielenia, bo wiemy, że figurę złożoną z 87 kratek da się wyłożyć płytkami złożonymi z trzech kratek, a więc 87 jest podzielna przez 3".

Odkrycie klasycznej cechy podzielności przez 3 w przypadku liczb dwucyfrowych. Uczniowie poszukują długości korytarzyków kilku innych liczb dwucyfrowych, zapisując rezultaty w tabelce, np.:

Liczba	Długość jej korytarzyka	Liczba jest podzielna przez 3 (tak, nie)
91	10	nie
75	12	tak

Interwencja nauczyciela: przedstawcie liczby z drugiej kolumny tabelki tak, by widać było sposób obliczania długości ich korytarzyków.

Uczniowie pracują samodzielnie, nieliczni korzystają jeszcze z indywidualnej pomocy nauczyciela.

Na pytanie: od czego zależy podzielność liczby przez 3, dzieci dają odpowiedzi, których sens sprowadza się do stwierdzenia: podzielność liczby przez 3 zależy od tego, czy długość korytarzyka tej liczby jest czy nie jest liczbą podzielną przez 3; długość korytarzyka liczby oblicza się sumując liczbę dziesiątek i liczbę pozostałych jedności.

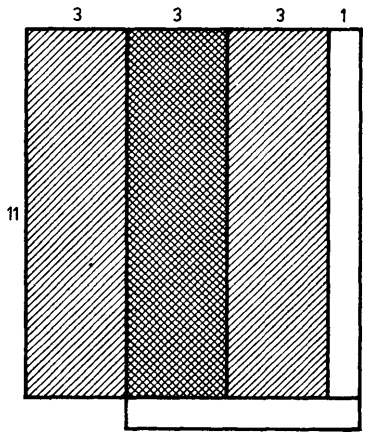
Odkrytą własność dzieci stosują do kilku liczb dwucyfrowych.

2.1.3. Etap trzeci - różne sposoby badania podzielności przez 3 liczby trzycyfrowej (lekcja trzecia). Uczniowie rozwiązują samodzielnie zadanie: Zbadać, czy liczba 117 jest podzielna przez 3. Niezależnie od poprawności uzyskanych odpowiedzi można wyróżnić trzy sposoby rozwiązywania tego zadania:

(1) wykonywanie dzielenia z resztą,
(2) tworzenie sumy cyfr liczby,
(3) stosowanie metody korytarzyków.

Ostatni z tych sposobów reprezentuje następujące rozwiązanie.

Po wykonaniu rysunku (rys. 3) uczeń pisze: " Liczba 117 jest podzielna przez 3, ponieważ długość korytarzyka wynosi 18 krateczek, a liczba 18 jest podzielna przez 3. Korytarzyk ma długość 18 krateczek dlatego, że w liczbie 117 jest 11 dziesiątek, a wypustka ma 7 krateczek".



Rys. 3

Dyskusja nad tymi sposobami. Autorzy sposobu (2) wyjaśniają, że postępowali podobnie jak w poprzednich przypadkach: o podzielności liczby decydowała długość korytarzyka, która była sumą cyfr liczby.

Postępujący wg sposobu (3) protestują, wyjaśniając za pomocą rysunku, że długością korytarzyka liczby 117 jest liczba 11 + 7, a nie jak twierdzą poprzednicy, liczba 1 + 1 + 7. Zwracają uwagę, że interesuje nas nie cyfra dziesiątek, a liczba, która wskazuje, ile wszystkich dziesiątek "znajduje" się w danej liczbie; dla liczby dwucyfrowej liczba dziesiątek i cyfra dziesiątek są takie same, natomiast dla liczb trzycyfrowych i większych tak nie jest. Dzieci po dyskusji odrzucają sposób (2) jako niepoprawny, akceptując sposób (3). Stosują go do kilku liczb większych niż dwucyfrowe.

Nauczyciel nie interweniuje w tej dyskusji, która toczy się dokoła subtelnego problemu, bo sposób (2) prowadzi do twierdzenia prawdziwego, ale otrzymano go na niepoprawnej drodze.

2.1.4. Etap czwarty - ogólne sformułowanie klasycznej cechy podzielności przez 3 (lekcja czwarta). Przy dużej - w tym przypadku - interwencji nauczyciela uczniowie poszukują długości "skróconych korytarzyków" liczb trzy i więcej cyfrowych, zgodnie z propozycją podręcznika (Turnau, 1979).

Po wspólnym przeanalizowaniu kilku przykładów formułują twierdzenie:
Jeśli długość skróconego korytarzyka liczby jest podzielna przez 3, to liczba ta jest podzielna przez 3; jeśli długość skróconego korytarzyka liczby nie jest podzielna przez 3, to liczba ta nie jest podzielna przez 3. Długość takiego skróconego korytarzyka jest sumą cyfr liczby.

2.1.5. Etap piąty - dyskusja nad poznanymi sposobami badania podzielności liczb przez 3 (druga część lekcji czwartej, część lekcji piątej). Uczniowie rozstrzygają o podzielności przez 3 tych liczb, którymi zajmowali się na pierwszej lekcji z omawianego cyklu. Na ogół stosują ostatni z poznanych sposobów - sumowanie cyfr liczby.

Interwencja nauczyciela: zbadać podzielność przez 3 liczb: 96999666996636, 630092415, 24369.

Dzieci zaczynają dodawać cyfry pierwszej z tych liczb. Szybko się jednak zniechęcają, stwierdzając, że to bardzo żmudne, bo liczba ma dużo cyfr.

Nauczyciel zachęca: a może dałoby się tu zastosować inny sposób? Na to Piotr stwierdza z satysfakcją: "a ja od razu widzę, że ta liczba jest podzielna przez 3". Po chwili inny uczeń zauważa: "rzeczywiście - Piotr stosował swoje twierdzenie". Jeden z uczniów przypomina to twierdzenie. Klasa zgadza się z odpowiedzią Piotra.

Z dwoma pozostałymi przykładami uczniowie radzą sobie szybciej. Stwierdzają, że zasady Piotra nie można tu zastosować, ale obliczenie sumy cyfr jest tu łatwe. Niektórzy dodają, że "można też rozkładać te liczby na części", z których każda jest podzielna przez 3.

Na zakończenie tego cyklu lekcji uczniowie wymieniają poznane sposoby badania podzielności przez 3 i dyskutują nad nimi, odpowiadając na pytania: który z nich jest uniwersalny, który łatwy w stosowaniu, co decyduje o tym, który z nich w danej sytuacji stosować itp.

2.2. Analiza postaw dzieci

Zanalizujmy postawy uczniów, towarzyszące im rodzaje aktywności oraz trudności występujące na każdym z etapów opracowywania omawianego tematu.

2.2.1. Etap pierwszy. Gra, od której zaczęła się lekcja, uświadomiła wielu uczniom, że ogólny schemat badania podzielności - algorytm dzielenia - jest czasem niewygodny. Klasa podjęła próbę poszukiwania innych sposobów. Możemy powiedzieć, że gra wyzwoliła u uczniów, a mająca po niej miejsce dyskusja ujawniła spontaniczne próby zmiany niewygodnego schematu na prostszy, na łatwiejszy w stosowaniu.

Dzieci tworzyły nowe warunki dotyczące podzielności przez 3 i sformułowały ich - jak pamiętamy - pięć. Nie wszystkie powstały na tej samej drodze; towarzyszyły im różne postawy uczniów. Te postawy można ująć w dwie główne kategorie. Jedna z nich to transfer oparty na bezkrytycznie stosowanej analogii, druga - to rozumowanie w nowej sytuacji nie odwołujące się do analogii.

Przyjrzyjmy się dokładniej każdej z tych postaw.

Warunek (1) oraz w pewnym sensie jego uzupełnienie - warunek (2) powstały na drodze naturalnej ich analogii do cech podzielności przez 2 i 5. Prawdopodobnie uczeń przypomniał sobie te cechy, dostrzegając ich podobieństwo, co w konsekwencji doprowadziło do powstania schematu ogólniejszego: przez daną liczbę a są podzielne te liczby, których cyfra jedności jest podzielna przez a. Ten schemat powstał więc w wyniku bardzo ryzykownego uogólnienia typu indukcyjnego. Jego specyfikacja zaś ($a = 3$) daje warunki sformułowane w klasie jako propozycje (1) i (2).

Uogólnienie przez analogię i transfer przez analogię odgrywa ogromną rolę heurystyczną w matematycznej twórczości na każdym poziomie pod warunkiem, że sformułowane w wyniku takiego uogólnienia czy transferu twierdzenie traktuje się jako hipotezę wymagającą sprawdzenia. W obserwowanej sytuacji jednak tak nie było. Ani autor warunku (1), ani autor warunku (2) nie traktował swej propozycji jedynie jako pewnej hipotezy, którą należy poddać weryfikacji.

Inną postawę wykazali uczniowie, którzy po wysłuchaniu tych propozycji samorzutnie wskazywali konrtprzykłady. Ci właśnie uznali warunek (2) za hipotezę, którą poddali badaniu, polegającemu na sprawdzaniu - zgodnie z wymienionym kryterium - podzielności przez 3 różnych liczb. Natrafili wśród nich na takie, których cyfra jedności jest podzielna przez 3, a mimo to liczba nie jest podzielna przez 3. Gdybyśmy sformalizowali tok rozumowania dzieci, to stwierdzilibyśmy, że ci uczniowie prowadzili już poprawne wnioskowanie według schematu:

$$\frac{\bigvee_x \sim W(x)}{\sim \bigwedge_x W(x)}$$

Oczywiście było to rozumowanie "poprzez konkret", które jest czymś innym niż rozumowanie formalne. Niemniej obserwowane fakty nasuwają wniosek, że przynajmniej w niektórych szczególnie temu sprzyjających sytuacjach i przy organizowaniu procesu nauczania opartego na wszechstronnej aktywności uczniów, dzieci dziesięcioletnie uświadamiają sobie już, iż dla wykazania fałszywości twierdzenia wystarczy podać dlań kontrprzykład.

Warunek sformułowany w klasie jako trzeci z kolei, "Jak każdy składnik liczby jest podzielny przez 3, to cała liczba jest podzielna przez 3", jest twierdzeniem prawdziwym przy odpowiedniej interpretacji terminu "składnik".

Przykład podany przez ucznia na zastosowanie tego twierdzenia: $3 \mid 66120$, bo $3 \mid 60000$, $3 \mid 6000$ i $3 \mid 120$ wyjaśnia, jak rozumiany był ten termin. Jeśli przedstawimy liczbę A w postaci

$$A = a_i \cdot 10^i + a_{i-1} \cdot 10^{i-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_o,$$

to przez "składnik" tej liczby uczeń rozumiał liczbę postaci $a_k \cdot 10^k$ $(0 \leq k \leq i)$ lub sumę typu

$$a_s \cdot 10^s + a_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \ldots + a_{s-r} \cdot 10^{s-r} \quad (r \leq s \leq i).$$

Takie, a nie jakiekolwiek inne przedstawienie liczby A w postaci sumy kilku liczb podzielnych przez 3, może wyjaśnić genezę twierdzenia (3). Rozumowanie ucznia mogło przebiegać w następujący sposób: W początkowej fazie lekcji badał podzielność przez 3, stosując algorytm dzielenia. Wśród rozpatrywanych liczb znalazła się taka, że przy dzieleniu jej przez 3 pewne reszty pośrednie oraz ostatnia były równe 0. Oczywiście, liczba była podzielna przez 3 (np. 66 120). Uczeń uświadomił sobie, że podobnie będzie dla innych liczb, tzn. jeśli w zapisie dziesiętnym liczby da się wyróżnić takie części, że każda z nich określa liczbę podzielną przez 3 (wtedy reszty pośrednie przy dzieleniu wynoszą 0), to dana liczba jest podzielna przez 3.

Tak więc własność dostrzeżona na przykładzie została prawidłowo uogólniona - w wyniku prawidłowego przeniesienia rozumowania - na dowolną liczbę. Oczywiście, "prawidłowo" nie oznacza tu "formalnie". Niemniej tkwi w tym rozumowanie o dużym już stopniu ogólności.

Następny warunek (4), jak pamiętamy, został wypowiedziany bezpośrednio po sformułowaniu twierdzenia (3), niejako na jego tle. Twierdzenie (3) ma postać zdania: Jeśli W_1, to W_2, gdzie W_1 oznacza warunek: każdy składnik danej sumy jest podzielny przez 3, W_2 - warunek: dana suma jest podzielna przez 3. Wypowiedź (4) jest zdaniem postaci: Jeśli nie zachodzi W_1, to nie zachodzi W_2, a więc jest twierdzeniem przeciwnym do twierdzenia (3) i w danym przypadku fałszywym.

Jednak autor omawianego warunku mógł go rozumieć także w inny sposób:

(4') Jeśli przedstawię jakąś liczbę jako sumę kilku składników, z których wszystkie z wyjątkiem jednego są podzielne przez 3, to liczba nie jest podzielna przez 3.

To ostatnie zdanie jest oczywiście prawdziwe. Za taką interpretacją wypowiedzi (4) przemawiałoby to, że wśród liczb, któ-

rych podzielność przez 3 uczniowie badali na lekcji, występowały tylko liczby spełniające założenie twierdzenia (4').

W obserwowanej sytuacji w klasie, niestety, nie sprawdzono, jak autor warunku (4) rozumiał go naprawdę. Faktem jest, że nie protestował przeciw zarzutom kolegów. Nie musi to jednak świadczyć o tym, że wypowiedzianego przez siebie zadania nie rozumiał w tym pozytywnym jego aspekcie - jako twierdzenia (4'). Dyskusja była zbyt żywa; być może, nie będąc przygotowany na tak szybki atak, uczeń nie podjął obrony swoich racji. Nauczyciel mógł wkroczyć z interwencją w odpowiednim momencie dyskusji, np. sugerując uczniom zbadanie podzielności przez 3 liczb 365, 3111, 72391 itd., w ten sposób, by przedstawiali je w postaci sumy liczb, z których pewne są podzielne przez 3. Być może uświadomiłoby to, że niewielka zmiana w sformułowaniu zadania (4) prowadzi do twierdzenia prawdziwego (4'), pozwalającego na szybkie rozstrzyganie o niepodzielności pewnych liczb przez 3. Ten moment nie został jednak właściwie na lekcji wykorzystany.

Zatrzymajmy się z kolei nad twierdzeniem (5), wypowiedzianym przez Piotra. I tu, podobnie jak w przypadku twierdzenia (3), punktem wyjścia było najprawdopodobniej stosowanie algorytmu dzielenia. W trakcie wykonywania dzielenia przez 3 liczby, której każda cyfra była podzielna przez 3, uczeń zauważył, że nie tylko kilka pierwszych, ale wszystkie do końca reszty pośrednie są równe 0, a więc liczba jest podzielna przez 3. Uświadomił sobie, że będzie tak dla każdej liczby, której wszystkie cyfry są podzielne przez 3. Tak więc twierdzenie: "Jeśli każda cyfra liczby jest podzielna przez 3, to liczba jest podzielna przez 3" powstało w wyniku prawidłowego uogólnienia rozumowania przeprowadzonego dla jednego przykładu.

Jak pamiętamy, początkowo uczniowie nie chcieli uznać tego twierdzenia. Dlaczego? Można tu wskazać dwa przypuszczalne powody.

Jeden z nich - natury logicznej - wiąże się z błędnym rozumieniem implikacji. Zapiszmy ją jako warunek: $(a) \Rightarrow (b)$, gdzie (a) oznacza własność: "każda cyfra liczby jest podzielna przez 3", (b) "liczba jest podzielna przez 3".

Przypomnijmy - uczniowie podali przykład liczby, która spełnia własność (b), nie spełniając (a). W opinii większości klasy był to dowód na to, że konkretne zdanie mające schemat $(a) \Longrightarrow (b)$ nie jest prawdziwe. Podany przykład dowodzi oczywiście tylko tego, że zdanie $(b) \Longrightarrow (a)$ jest fałszywe, czego uczniowie wcale nie zauważali. Wypowiedzi uczniów przemawiałyby za tym, że rozumieją oni zdanie: "jeżeli ..., to ...", a więc zdanie typu $p \Longrightarrow q$, jako równoważność $p \Longleftrightarrow q$. Potwierdzają to także i inne doświadczenia szkolne.

Drugi powód nieporozumienia w związku z rozważanym twierdzeniem ma inne podłoże, już nie kategorii logiczno-językowej. Dzieci nie tyle chyba myślały o tym, że wypowiedź Piotra jest zdaniem fałszywym, co za wszelką cenę chciały zbudować warunek rozstrzygający absolutnie o podzielności każdej liczby przez 3, a więc warunek konieczny i wystarczający. Piotr sformułował natomiast warunek, który da się zastosować tylko do niektórych liczb - warunek wystarczający. Według dzieci, ten warunek był "nieprawdziwy", bo nie rozwiązywał ich problemu w całości.

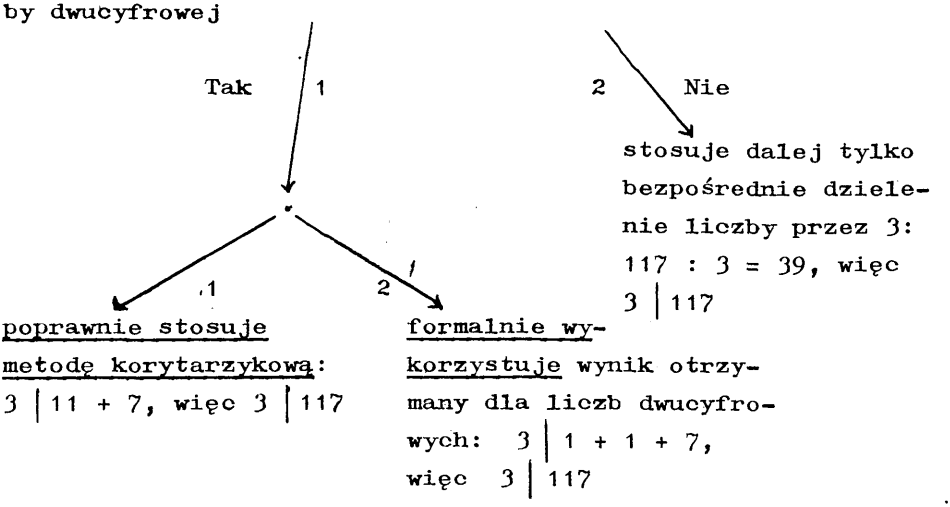
Konflikt miał więc charakter bardzo złożony.

2.2.2. Etap drugi. W tym etapie uczniowie odkrywali cechę podzielności przez 3 za pomocą tzw. metody korytarzyków.
W pierwszej fazie zajmowali się liczbami dwucyfrowymi. Badanie podzielności liczby przez 3 zostało sprowadzone do zbadania, czy pewną figurę geometryczną odpowiadającą tej liczbie da się wypełnić inną figurą, odpowiadającą liczbie 3. Rozwiązanie zadania arytmetycznego zastąpiono więc rozwiązaniem pewnego prostszego, bo związanego z widzeniem, z oglądem. Ta wizualizacja zagadnienia sprawiła, że dzieci szybko sformułowały pierwszą regułę: o podzielności liczby przez 3 decyduje długość jej korytarzyka - jeśli długość korytarzyka jest liczbą podzielną przez 3, to liczba jest podzielna przez 3; jeśli zaś długość korytarzyka nie jest podzielna przez 3, to liczba nie jest podzielna przez 3.
W ten sposób dzieci dostrzegły od razu - jednym chwytem myśli - warunek konieczny i wystarczający podzielności przez 3.

W dalszym ciągu klasa odkryła, od czego zależy długość korytarzyka liczby. Niektórzy uczniowie po przeanalizowaniu jednego przykładu, inni kilku przykładów przewidywali długość korytarzyków dla kolejno rozpatrywanych liczb, już bez wykonywania geometrycznej interpretacji liczby. Tłumaczyli: w pionowej części korytarzyka będzie tyle kratek, ile dziesiątek w liczbie, bo z każdej dziesiątki zostaje jedna kratka, natomiast w poziomie tyle, ile jedności.

Tak więc zależność pomiędzy liczbą a długością jej korytarzyka, dostrzeżoną w szczególnych przypadkach, uogólniły dzieci przez wgląd w metodę postępowania, czyli dokonały uogólnienia rozumowania.

2.2.3. Etap trzeci. Postawy uczniów wobec zadania "Zbadać podzielność przez 3 liczby 117", którego rozwiązywanie było przedmiotem pracy klasy w trzecim etapie, można charakteryzować uwzględniając sposób wykorzystania przez nich lub niewykorzystania poprzednio zdobytej wiedzy. Ilustruje tę charakterystykę drzewo przedstawione na rysunku 4



Rys. 4

Drogę 2 charakteryzuje brak spontanicznego powiązania doświadczeń i zdobytej na ich podstawie wiedzy z nowym zadaniem, przejawiający się w stosowaniu utartego, starego schematu - szukania reszty z dzielenia liczby przez 3. Uczeń obierający tę drogę postępuje tak, jak gdyby drugi etap pracy (metoda korytarzykowa) w ogóle nie pozostawił w jego umyśle żadnego śladu. Może to znaczyć, że uczeń czuje się jeszcze niepewnie w nowym materiale lub nie uświadomił sobie możliwości wykorzystania nowych wiadomości. Jest prawdopodobne, że mógłby to zrobić, gdyby nauczyciel wyraźnie zażądał od niego zastosowania poznanej ostatnio metody postępowania, ale nauczyciel celowo tego nie zrobił.

Porównajmy teraz drogi 1-1 oraz 1-2. Druga z nich charakteryzuje się stosowaniem klasycznego kryterium (suma cyfr), pierwsza przeciwnie - niestosowaniem tego schematu. Gdybyśmy oceniali tylko końcowy rezultat pracy dziecka, uznalibyśmy, że w pierwszym przypadku uczniowie podali od razu właściwe rozwiązanie, w drugim tylko się do niego przybliżyli. Ale są to tylko pozory. Właśnie uczniowie, którzy stosowali schemat o sumie cyfr, nie postępowali poprawnie, gdyż bezkrytycznie, bezpodstawnie uogólnili na wszystkie liczby naturalne rezultat, do jakiego doprowadziła metoda korytarzykowa w odniesieniu do szczególnej klasy liczb - liczb dwucyfrowych. Nie pamiętali jednak o metodzie, która do tego rezultatu doprowadziła. Natomiast postępowanie 1-1 świadczy o tym, że część uczniów zrozumiała - bo odpowiednio zastosowała - właśnie samą metodę korytarzykową. Ci uczniowie, w odróżnieniu od tych, którzy obrali drogę 1-2, uogólnili to, co było istotne w rozważanych w poprzednim etapie przykładach, bo uogólnili metodę, a nie tylko dla liczb dwucyfrowych uzyskany pierwotnie rezultat - a priori nie wiadomo, czy możliwy do szerszego zastosowania.

Etap czwarty był w znacznym stopniu sterowany przez nauczyciela. Ponieważ zajmujemy się spontanicznymi reakcjami uczniów, nie będziemy go tu analizować.

W etapie piątym uczniowie stosowali poznane twierdzenia o podzielności przez 3. Naturalną tendencją uczniów było stosowanie jednego, ostatnio poznanego klasycznego schematu (suma cyfr), choć dysponowali również innymi twierdzeniami.

Przypomnienie i wykorzystanie innych warunków o podzielności zostało zainicjowane przez nauczyciela, przez podanie takich przykładów liczb, do których stosowanie klasycznego schematu było żmudne. Uczniowie dostrzegli, że postawienie sobie pytania o możliwość zastosowania innych warunków pomaga zracjonalizować postępowanie.

W zakończeniu tej części sprawozdania chcę podkreślić jeszcze bardzo mocno trzy sprawy, które były już poruszane w opisie lekcji i w analizie postaw dzieci, ale które warto może szczególnie uwypuklić.

1. Pierwsza z nich dotyczy naturalnego rozumienia przez uczniów równoważności. Głównym celem zrelacjonowanych tu zabiegów dydaktycznych było zrozumienie przez uczniów cechy podzielności przez 3 jako warunku koniecznego i wystarczającego. Twierdzenie to pojawiło się w kontekście innych twierdzeń, które wyrażały jedynie warunki wystarczające. Już w pierwszym etapie, gdy uczniowie spontanicznie formułowali twierdzenia, a potem nad nimi dyskutowali, uświadomili oni sobie, że żaden z tych warunków uznanych za zdanie prawdziwe nie rozstrzyga w pełni o podzielności przez 3, ponieważ liczba może być podzielna przez 3, choć nie spełnia danego warunku.

Obserwowaliśmy wyraźną dążność uczniów do tego, aby poszukiwane twierdzenie wyrażało warunek konieczny i wystarczający. Dzięki metodzie korytarzyków uczniowie odkryli twierdzenie takiego typu, jakiego oczekiwali, mianowicie:

jeśli (p) suma cyfr liczby jest podzielna przez 3, to (q) liczba jest podzielna przez 3; jeśli natomiast ($\sim$p) suma cyfr nie jest podzielna przez 3, to ($\sim$q) liczba nie jest podzielna przez 3.

Tak więc równoważność postaci $p \Longleftrightarrow q$ rozumieli uczniowie w sposób naturalny jako koniunkcję

(1) $p \Longrightarrow q$ i $\sim p \Longrightarrow \sim q$.

Oczywiście, z formalnego punktu widzenia koniunkcja (1) jest równoważna koniunkcji

(2) $p \Longrightarrow q$ i $q \Longrightarrow p$.

Jednak ta równoważność nie była rozumiana jako koniunkcja (2). Dla ucznia klasy czwartej w danej sytuacji implikacja $q \Longrightarrow p$, a więc warunek konieczny podzielności przez 3, nie jest użyteczny, a więc nie rysuje się w jego myśli. Z faktu, że liczba jest podzielna przez 3, uczeń nie wyciąga żadnych wniosków, ponieważ jego zadaniem jest właśnie zbadanie, czy liczba jest podzielna przez 3. Traktowanie natomiast równoważności $p \Longleftrightarrow q$ jako koniunkcji (1) jest naturalne, bo jest operatywne: własność - suma cyfr liczby jest podzielna przez 3 - staje się dla ucznia kryterium zawsze w pełni rozstrzygającym o podzielności liczby 3.

Obserwacja ta wskazuje, jak bardzo na to, co nazwać możemy logiką dziecka w wieku 10 lat, wpływa szczególna sytuacja problemowa i społeczna, w której działa. Oczywiście, psychologia rozwojowa ogólnie te zagadnienia wyjaśnia, ale w procesie nauczania matematyki istotne jest docieranie do myśli dziecka w każdym ogniwie tego procesu, z uwzględnieniem specyfiki matematycznego myślenia.

2. Druga uwaga dotyczy oceny ucznia jedynie na podstawie obserwowanego tylko od zewnątrz wyniku jego pracy. To oczywiście nie wystarcza, konieczne jest dotarcie do drogi, która go doprowadziła do tego rezultatu. Ujawnienie tego mechanizmu wykazuje często, że choć rezultat jest obiektywnie poprawny, to nie musiał on powstać w wyniku poprawnego rozumowania. Brak reakcji nauczyciela na to jest szczególnie niebezpieczny ze względu na utrwalane stopniowo nawyki nieprawidłowego myślenia. Bywają też sytuacje odwrotne: rozumowanie może być poprawne, a jedynie sformułowanie wyniku nie jest trafne i można je odczytać niezgodnie z intencją ucznia.

Język matematyczny ucznia nie jest w pełni wykształconym językiem matematyka. Niedocieranie do sensu wypowiedzi dziecka uwikłanego w nieudolnej formie może być równie niebez-

pieczne dla rozwoju jego myślenia, co uznawanie poprawności wypowiedzi za dowód poprawności myślenia.

Przed dydaktyką matematyki staje ważne i trudne zadanie dopracowania się metod, umożliwiających nauczycielowi orientację w tym, co i jak uczeń naprawdę myśli, szczególnie ważną w toku uczenia się matematyki, procesu niezwykle skomplikowanego i subtelnego.

3. Warto też jeszcze raz podkreślić rolę wizualizacji w ujęciu przez dziecko jednym chwytem myśli pewnych prawidłowości. Geometryczna interpretacja arytmetycznych związków jest w tym zakresie nieocenionym zabiegiem nie tylko heurystycznym, ale nawet przybliżającym ujęcie formalne. Stały przekład z jednego języka na drugi ma tu szczególne znaczenie.

3. CYKL LEKCJI NA TEMAT FIGURY WYPUKŁEJ - FORMUŁOWANIE I STOSOWANIE DEFINICJI, KLASA PIĄTA, WIEK DZIECI - 11 LAT

3.1. Przebieg pracy uczniów

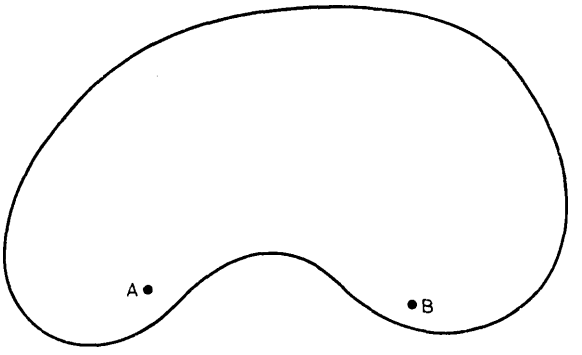
Praca nad tym pojęciem w klasie składa się z trzech faz.

3.1.1. Faza pierwsza - Intuicyjne zarysowanie pojęcia.

Po narysowaniu na tablicy poniższej figury (rys. 5), nauczyciel objaśnia uczniom, że przedstawia ona obszar państwa krasnoludków. Obszar ten jest zupełnie płaski - nie ma na nim jezior, rzek, ani gór. Krasnoludki chcą podróżować z miasta do miasta najkrótszą drogą - wprost. Czy to państwo jest bezpieczne?

Uczniowie odpowiadają: Oczywiście nie, ponieważ idąc najkrótszą drogą, np. z miasta A do miasta B (jeden z uczniów zaznacza tę drogę na rysunku), krasnaludek musi wyjść poza obszar swojego państwa, a to może być niebezpieczne.

Następnie uczniowie otrzymują polecenie narysowania obszaru państwa, które ich zdaniem jest bezpieczne. W zeszytach uczniów pojawiają się tylko znane im figury geometryczne: koła, trójkąty, prostokąty oraz inne czworokąty wypukłe.



Rys. 5

3.1.2. Faza druga - Próby określenia przez uczniów figury bezpiecznej. W następnej fazie pracy wysiłek uczniów jest kierowany przez nauczyciela do zmatematyzowania ich intuicji związanych z zasugerowanym im wstępnie pojęciem. W tej fazie aktywność uczniów przybiera różne formy i realizuje się w czterech etapach.

3.1.2.1. Etap I - Listy do kolegi nieobecnego na lekcji. Nauczyciel zwraca uwagę uczniom na to, że przedstawiali obszar państwa na rysunku jako figurę geometryczną, miasto zaś jako punkt i proponuje, by w dalszym ciągu zamiast "obszar państwa" mówić "figura", zamiast "miasto" - "punkt". Sugeruje, by każdy uczeń napisał do nieobecnego na lekcji kolegi wyjaśnienie, co to jest figura bezpieczna i co to jest figura niebezpieczna.

Dzieci pracują indywidualnie lub parami; pod koniec lekcji przekazują swoje kartki nauczycielowi.

Zebrany materiał uwidocznił trzy różne sposoby wyjaśnień podanych przez uczniów.

Sposób 1. Uczeń stara się odpowiedzieć na pytanie, czym może być figura bezpieczna poprzez przykłady:

1.1. "Figurę, która łączy się z czterema lub trzema odcinkami zamkniętymi albo jedną linią zamkniętą w kształcie koła, nazywamy figurą bezpieczną".

Sposób 2. To próba ogólnego określenia, z odwołaniem się do innego pojęcia, które wydaje się uczniowi bardziej znane. Oto przykłady:

2.1. "Figura bezpieczna to taka figura, na obwodzie której występują zagłębienia".

2.2. "Figura niebezpieczna nie może być figurą wypukłą. Figura bezpieczna to jej przeciwieństwo".

Oprócz wymienionych w tych przykładach terminów "zagłębienie", "figura wypukła", uczniowie użyli także innych. Pełne ich zestawienie podaje poniższa tabelka:

Figura bezpieczna	Figura niebezpieczna
ma kształt owalny	jego przeciwieństwo
jest równa	jest nierówna
nie ma wgłębień	ma wgłębienia
jest wypukła	jej przeciwieństwo
nie ma zagłębień	ma zagłębienia
nie ma załamań	ma załamania

Sposób 3. Ostatni sposób wyjaśnienia charakteryzuje się tym, że zawiera już bliższy matematycznemu opis pierwotnej operacji, którą zasugerował nauczyciel w początkowej fazie. Niektóre z opisów tego rodzaju nie są jeszcze całkiem poprawne logicznie (z powodu trudności w wyrażaniu kwantyfikatora), inne można już uznać za poprawne, uwzględniając wiek uczniów (11 lat). Reprezentują ten sposób podane niżej opisy (cytowane dosłownie z zachowaniem interpunkcji i ortografii):

3.1. "Figura niebezpieczna jest to figura której odcinki wychodzą za pole danej figury.
Figura nazwana bezpieczną jest taka której odcinki nie wychodzą za pole figury tylko mieszczą

się w niej".

3.2. "Figura niebezpieczna jest taka że są możliwości aby linie łączące 2 punkty na obwodzie wychodzą poza obręb danej figury.
Figura bezpieczna jest taka że przy każdej możliwości linie łączące 2 punkty na obwodzie nie wychodzą poza obręb danej figury".

3.3. "Figura bezpieczna jest to figura w, której dwa punkty połączone odcinkiem nie wychodzą za granice figury. To znaczy nie ma możliwości, aby odcinek wychodził za granice figury.
Figura nie bezpieczna jest to figura w której dwa punkty połączone odcinkiem mają możliwość wychodzić poza granice figury (odcinki)".

Na uwagę zasługuje jeszcze jeden opis odpowiadający sposobowi 3 - jest sformułowany jakby czynnościowo, jego redakcja jest nieporadna, ale widać w nim wyraźne dążenie autora do oddania kwantyfikatora "dla każdego":

3. "Figura bezpieczna jest wtedy, gdy narysujemy dwa punkty i połączymy je odcinkiem prostej, a ta linia prosta nie będzie wychodzić poza jej granicę. Jeżeli odcinek nie wychodzi poza granice, to rysujemy odcinek na granicy, a jeżeli i wtedy nie wychodzi to następny i rysujemy, póki nie wyjdzie, a jeżeli i wtedy nie wyjdzie to figura jest bezpieczna".

3.1.2.2. Etap II definiowania - wymiana korespondencji między uczniami. Na początku drugiej z kolei lekcji nauczyciel rozdaje uczniom kartki pisane na lekcji poprzedniej, ale nie ich autorom. Uczniowie mają zapoznać się z treścią wypowiedzi, napisać swoje uwagi, pytania, podkreślić błąd czy niejasność. Po uwagach czytającego kartka wraca do jego autora, ten z kolei ustosunkowuje się do tych uwag i posyła ją do ponownego czytania. Przez kilkanaście minut kartki krążą tam i z powrotem, a uczniowie modyfikują i wyjaśniają między

sobą opisy.

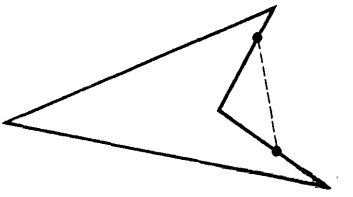
Wyniki pracy uczniów w tym etapie zilustrujemy przykładami pełnych, dosłownych tekstów kartek. Literą A oznaczymy tekst pisany przez autora opisu, literą K - uwagi komentatora.

Przykład 1. (Opis figury bezpiecznej przygotowany przez dwóch uczniów, wspólny komentarz także pary uczniów).

A. Figurę, która łączy się czterema lub trzema odcinkami zamkniętymi albo jedną linią zamkniętą w kształcie koła, nazywamy figurą bezpieczną.

K. Do G.Ł i Z.R.

4 odcinkami - nie, oto uzasadnienie



A. Poprawa w tekście:
Figurę, która łączy się czterema odcinkami o kątach prostych lub trzema odcinkami zamkniętymi, albo jedną linią zamkniętą w kształcie koła, nazywamy figurą bezpieczną.

K. Teraz jest dobrze
M.J.
K.H.

A. Ha Ha Ha to był chwyt matematyczny chcieliśmy zobaczyć czy wpadniecie że to jest źle.

Przykład 2.

A. 1. Figura niebezpieczna może być łamaną.
2. Figura niebezpieczna nie może być figurą wypukłą.
3. Figura niebezpieczna nie może mieć kształtu owalnego, nie może być kołem, prostokątem, trójkątem, czworobokiem, sześcianem.
4. Figura bezpieczna to jej przeciwieństwo.

K. Marcinie i Fabianie wytłumaczcie nam, co to jest figura łamana. Nie znamy pojęcia figura łamana. Z resztą wypowiedzi zgadzamy się.

A. Figóra łamana jest to figura zbudowana z odcinków ze sobą połączonych. Jeśli stanowią one obwód zamknięty figurę nazywamy łamaną zamkniętą.

K. Nie zrozumiałem drugiego punktu.
(tu ze względu na brak czasu już odpowiedzi niestety nie było).

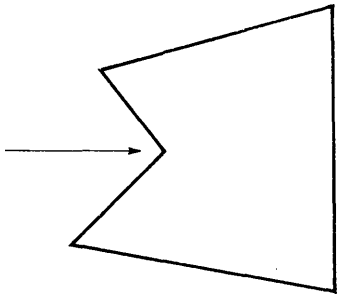
Przykład 3.

A. Figura niebezpieczna to taka figury, która ma wgłębienia. Figura bezpieczna nie ma wgłębień.

K. Piotrek, wytłumacz nam, co to jest wgłębienie.

A. Niewiem dlaczego to niezrozumieliście. Wgłembienie jak sama nazwa wskazuje jest to jakgdyby cieśnina, a zresztą jest najprostsze słowo jakie może być, dziwię się że nie zrozumieliście

WGŁEMBIENIE



Przemyślcie co to jest wgłembienie i mam nadzieję, że to zrozumiecie.
PRZEMYŚLCIE ! ! !

K. Piotrek my wiemy co to jest wgłębienie ale ty nam napisałeś bardzo niejasno i trudno jest to zrozumieć.

Zwróćmy uwagę na komentarze do opisów z przykładów 2 i 3: ... " wytłumaczcie nam, co to jest figura łamana. Nie znamy pojęcia figura łamana" oraz "... wytłumacz nam, co to jest wgłębienie". Uwidacznia się w nich już pewne odczucie uczniów na temat wymogów stawianych definicji: nowe pojęcie powinno się określać za pomocą pojęć, które są nam już znane.

Na pierwsze z postawionych powyżej pytań autor opisu stara się odpowiedzieć przez próbę określenia pojęcia łamanej za pomocą pojęcia odcinka.

Odpowiedź na pytanie, co to jest wgłębienie, ma inny charakter - uczeń objaśnia użyty przez siebie termin najpierw

przez odwołanie się do terminu geograficznego "cieśnina" (występuje tu pomyłka - chodzi raczej o "zatokę"), następnie zaś przez pokaz, wskazuje figurę z "wgłębieniem".

3.1.2.3. Etap III definiowania - dyskusja ogólna opisów podanych przez poszczególnych uczniów. Nauczyciel proponuje następnie ogólną dyskusję w klasie na temat poszczególnych opisów. Prosi o głośne odczytanie opisu, podającego przykłady figur bezpiecznych (opis 1.1, str.). Uczniowie zwracają uwagę na to, że same przykłady nie wystarczą, bo "jeśli weźmiemy figurę, której nie ma wśród wymienionych przykładów, to nie wiemy, czy zaliczyć ją do figur bezpiecznych czy niebezpiecznych". Dodają, że powinien być jakiś warunek, który decydowałby o tym, czy figura jest bezpieczna. Nauczyciel czyta więc jedną z wypowiedzi, reprezentującą drugi sposób opisu (przykład 2.1, str.). I to określenie klasa uznaje za niezadowalające, ponieważ termin "załamanie" nie jest matematyczny i może być różnie rozumiany.

Poszukajmy więc takiego opisu, który nie ma tej wady - mówi nauczyciel. Jeden z uczniów czyta określenie 3.2 (str. 29) Inny zauważa, że zwrot "punkty na obwodzie" nie jest odpowiedni, bo powinniśmy mówić o wszystkich punktach figury, a nie tylko o punktach na obwodzie (pisząc "obwód", uczeń myśli o brzegu figury).

Z kolei jeden z uczniów czyta wypowiedź 3.3, uznając ją za najlepszą z dotychczasowych i dodając, że trzeba tylko zgrabniej to ująć, np. tak: "Figura bezpieczna jest to figura, dla której nie ma możliwości, aby odcinek łączący jej dwa punkty, wychodził poza jej granice".

Zwróćmy uwagę, że na tym poziomie nauczania ostatnio zacytowany opis można by już uznać za definicję figury wypukłej.

Nauczyciel kontynuuje jednak ten proces, organizując następny etap pracy nad definiowaniem pojęcia.

3.1.2.4. Etap IV definiowania - istotna interwencja nauczyciela. Na początku trzeciej z kolei lekcji - przez dobór odpowiednich ćwiczeń - uczniowie przypominają sobie warunek na to, by zbiór A zawierał się w zbiorze B. Nauczyciel sugeruje po tym wstępie, by uczniowie jeszcze raz sformułowali

warunek na figurę bezpieczną. Tym razem jednak ma wystąpić w nim zwrot "jest zawarty w ... ".

Uczniowie otrzymują informację, że w matematyce figurę bezpieczną nazywa się tak, jak zaproponował to jeden z uczniów w początkowym opisie, mianowicie figurą wypukłą, natomiast figurę niebezpieczną nazywa się figurą niewypukłą.

Po tych uwagach jeden z uczniów proponuje następującą definicję:

"Figura wypukła jest figurą, w której odcinek łączący dwa jej punkty, zawiera się w niej".

Inny uczeń stwierdza, że to nie jest poprawna definicja, ponieważ w figurze niewypukłej też można wskazać odcinki zawierające się w niej.

Ostatecznie uczniowie sformułowali następujące definicje, może jeszcze nie najbardziej poprawnie w przypadku I, ale już z rozumieniem kwantyfikatora.

I. Figura jest wypukła, jeżeli odcinek łączący dwa jakiekolwiek punkty tej figury, zawiera się w niej.

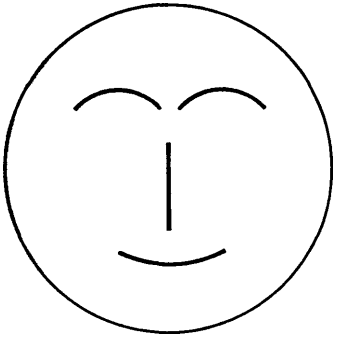
II. Figura jest niewypukła, jeżeli można wskazać dwa takie punkty tej figury, że odcinek łączący je nie zawiera się całkowicie w tej figurze.

Na tym zakończyła się faza definiowania, choć nie zakończyło się opracowanie pojęcia. Wystąpiła jeszcze faza stosowania definicji.

2.1.3. Faza trzecia. Nauczyciel prosi uczniów o podawanie przykładów figur wypukłych i takich, które nie są wypukłe oraz o uzasadnienie swojego sądu na podstawie definicji. Pojawiają się przykłady, które uczniowie wymieniali w pierwszej fazie pracy.

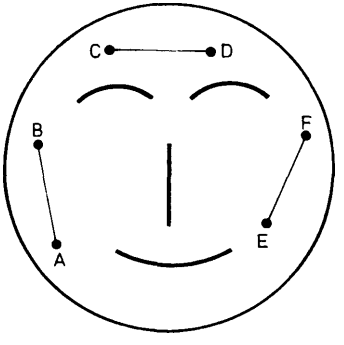
Nauczyciel pyta: a co powiecie o odcinku? Uczniowie wykonują rysunki w swoich zeszytach, pracują indywidualnie i po chwili odpowiadają zgodnie: "To też jest figura wypukła". Swoją odpowiedź uzasadniają poprawnie.

Zbadajmy, czy ta figura (rys. 6) jest wypukła - proponuje nauczyciel - z koła usunięto zbiory punktów zaznaczone na rysunku pogrubioną kreską.



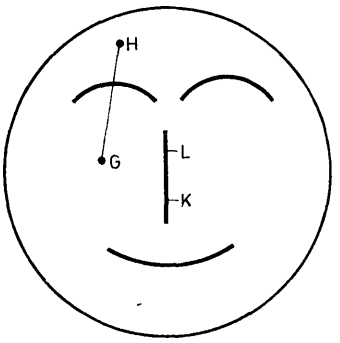
Rys. 6

Odpowiedź nie pojawia się od razu. Nauczyciel prowokuje badanie tej figury; zwraca uwagę na to, że odcinek $\overline{AB}$ zawiera się w tej figurze, to samo jest z odcinkami $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ (rys.7). Czy to jest figura wypukła?



Rys. 7

Teraz klasa ożywia się. Jeden z uczniów rysuje z satysfakcją odcinek $\overline{GH}$ (rys. 8), dodając: " a ten odcinek wychodzi jednym punktem z figury". Inny rysuje odcinek $\overline{KL}$ i komentuje: "a ten odcinek całkowicie jest poza figurą". "Tak"- stwierdza jego kolega - "ale punkty K i L nie należą do naszej figury. A my mamy brać punkty z figury i dopiero łączyć je odcinkiem".



Rys. 8

Teraz już wielu uczniów wskazuje takie punkty należące do figury, że odcinek, którego te punkty są końcami, nie zawiera się w figurze. Ta figura jest niewypukła - stwierdzają uczniowie.

Nauczyciel zachęca: podajcie inne ciekawe figury, które nie są wypukłe oraz takie, które są wypukłe.

Wśród wypukłych wymienili uczniowie między innymi: prostą, pas, kulę. Wśród niewypukłych pojawiły się: łamana, okrąg, koło bez środka, odcinek bez środka itp.

Badanie, czy dana figura jest wypukła, przeprowadzali uczniowie przy różnych okazjach, także w następnych klasach.

3.2. Analiza postaw uczniów

Obserwacja aktywności uczniów w toku formułowania definicji figury wypukłej nasuwa następujące uwagi dotyczące ich postaw wobec postawionego im problemu.

1. Obserwujemy w różnych sytuacjach szkolnych uwarunkowanie uczniów przez konwencjonalne figury geometryczne. Zaobserwowaliśmy także to samo w toku analizowanych lekcji. Nauczyciel przyjął za punkt wyjścia figurę geometryczną (obszar państwa), nie mającą kształtu żadnej z figur standardowych, z którymi dzieci miały przede wszystkim do czynienia w toku nauki elementów geometrii. Przykłady podawane przez dzieci natomiast nie wychodziły poza zakres tych figur. Nawet wtedy, gdy uczeń sięgał jak gdyby do uogólnienia, wiążąc pojęcie

"figury bezpiecznej" z "owalem", "wypukłością", lub "zagłębieniem", konkretyzował te pojęcia w bardzo wąskiej dziedzinie utworów geometrycznych. Te fakty sygnalizują nam pewne, niezamierzone przez nauczyciela, uwarunkowania, którym warto się bliżej przyjrzeć z różnych punktów widzenia.

2. Analizując spontaniczne definicje podawane przez dzieci wyróżniliśmy trzy kategorie proponowanych określeń. Możemy jednak spojrzeć na nie i od innej, bardzo istotnej w rozwoju pojęć geometrycznych, strony. Warunek "bezpieczności" sugerowany przez nauczyciela miał charakter lokalny mimo, że miał być spełniony przez wszystkie pary punktów należących do figury. Autorzy dwóch pierwszych definicji dążyli natomiast do tego, aby własność "bezpieczności" ująć od razu globalnie w kategorii kształtu. Dopiero dalsza dyskusja doprowadziła dzieci do przyjęcia definicji, w której nie było mowy o kształcie. Ten proces od globalnego ujęcia przez analizy lokalne do teoretycznej geometryzacji przestrzennych doświadczeń dziecka Z. Krygowska uważa za istotny proces kształcenia w dziedzinie geometrii[1].

3. Nauczyciel wyszedł od przykładu ilustrującego figurę niewypukłą. Okazało się to bardzo szczęśliwym zabiegiem, co można stwierdzić na podstawie natychmiastowej reakcji uczniów. Łatwiej bowiem dostrzec "anomalię" niż regułę. Dzieci dochodzą w tym przypadku do reguły przez wykluczanie anomalii. G. Papy proponuje doprowadzenie uczniów do samodzielnego zdefiniowania ciągłości funkcji przez obserwację wykresów i różnych przykładów funkcji nieciągłych (Papy, 1968). Figura wypukła staje się, jak mówią dzieci, "przeciwieństwem figury niewypukłej", funkcja ciągła w punkcie - "przeciwieństwem funkcji nieciągłej w tym punkcie". Obserwujemy ten efekt w toku przedstawianych tu lekcji. Warto chyba tę sprawę głębiej przeanalizować na podstawie już bardziej wnikliwie zorganizowanych badań, np. klinicznych.

(1) Tę ideę analizowała Z. Krygowska w referacie wygłoszonym na Konferencji CIEAEM we Włoszech: Pallanza, 3.VIII.1981r.

4. Mogłoby się wydawać, że dzieci 11-letnie nie są jeszcze zdolne do formalnego stosowania definicji w przypadku, gdy jej stosowanie wymaga przezwyciężenia pewnych nawyków lub skojarzeń z językiem codziennym. Można więc było przypuszczać, że definicja wypukłości wysnuta z obserwacji obszarów ilustrowanych rysunkami przeszkodzi uczniom w zastosowaniu definicji figury wypukłej do odcinka. Okazało się, że uczniowie nie mieli w tym zakresie trudności. Trzeba tu jednak podkreślić, że dzieci te nie po raz pierwszy postawiono w takiej sytuacji - już w klasie czwartej sprawy podobne kilkakrotnie wyjaśniano.

Natomiast pewne zahamowanie zaobserwowano w zastosowaniu definicji do przykładu zilustrowanego na rys. 6. Tu kształt globalny figury sugerował wypukłość. Stwierdzenie, że figura jest niewypukła, wymagało analizy lokalnej. Impuls wyszedł od nauczyciela. Był to impuls przez "prowokację". Wskazał on bowiem odcinki zawierające się całkowicie w figurze. Dzieci zareagowały prawidłowo na tę "prowokację" i dalej już stosowały definicję, nawet z pewnymi subtelnościami (przypadek, gdy końce odcinka nie należą do figury).

Zwróćmy uwagę na to, że we wstępnym przykładzie nauczyciel celowo rozważył specjalną figurę - w sensie topologicznym obszar, którego brzegiem jest krzywa zamknięta ciągła. Wszystkie przykłady, które uczniowie podawali zarówno przed, jak i bezpośrednio po sformułowaniu definicji, były wyraźnie tylko figurami o tej specjalnej własności. Tak więc definicja sformułowana przez uczniów była za szeroka w stosunku do tych obiektów, które świadomie próbowali scharakteryzować opisem. Sam proces definiowania nie spowodował jeszcze rozszerzenia w świadomości uczniów zakresu pojęcia figury wypukłej z obszarów również na inne figury geometryczne, które nie są obszarami. Dopiero zastosowanie warunku definicyjnego do nieuwzględnionych wcześniej figur, zasugerowanych wcześniej przez nauczyciela, uświadomiło uczniom to, że ich opis obejmuje także i takie figury, o których zupełnie nie myśleli, formułując ten opis. Stosowanie definicji spowodowało rozszerzenie zakresu pojęcia figury wypukłej na wszystkie i tylko te figury

geometryczne, które spełniają warunek definicyjny.

Te obserwacje ujawniają, że na stosunkowo niskim poziomie nauczania można obserwować wzajemne związki między wyobrażeniami obiektów geometrycznych i ich definicjami w pewnej mierze już formalnymi. Definicja jest dla dziecka nadaniem wspólnej nazwy pewnym obiektom wraz z opisem, który je wyróżnia wśród innych obiektów. Pierwotne wyobrażenie jest punktem wyjścia w naturalnym procesie definiowania. Stosowanie zaś definicji jest już aktem w dużej mierze formalnym, ale ten akt może wzbogacić pierwotne wyobrażenie. Jednocześnie dziecko uświadamia sobie konwencjonalność nazwy występującej w definicji.

5. Powrócę jeszcze do pewnego zagadnienia, które już poruszałam omawiając poprzedni cykl lekcji - do problemu języka ucznia i związku jego wypowiedzi z tym, co myśli. Mieliśmy przykład (przykład 3, str. 31), gdy uczeń zupełnie nieudolnie wyraził myśl o dużym kwantyfikatorze, który należało uwzględnić w definicji. Bez wniknięcia w główną ideę tego, co chciał uczeń wyrazić, nauczyciel odrzuciłby wypowiedź ucznia jako nieprawidłową. Na odwrót - przyjęcie tej wypowiedzi przez nauczyciela sprzyja rozwijaniu odwagi intelektualnej ucznia, który nie boi się - w sposób, jaki mu jest dostępny - przekazywać swoich myśli. Warto podkreślić, że ten nieudolny język jest czasem w toku komunikowania się uczniów bardziej dla nich zrozumiały, bardziej nasycony intuicjami niż precyzyjny język nauczyciela.

6. Bardzo ważną rolę w drugiej fazie opracowywania pojęcia figury wypukłej odegrało wzajemne porozumiewanie się uczniów. Dzięki dyskusji między uczniami kształtowało się wstępne pojęcie definicji i jej rygorów. W toku dyskusji uczniowie już jawnie wyrażali warunek poprawności definicji: jeśli chcemy, by była ona rozumiana przez innych, musimy używać terminów już dla innych zrozumiałych.

Dyskusja w trzecim i czwartym etapie definiowania doprowadziła do uściślenia wcześniejszych opisów przez uwypuklenie kwantyfikatorów, a więc stała się jednym z etapów prematematycznego kształtowania pewnych elementów logiki. Widzieliśmy na konkretnym przykładzie, że proces uczenia się matematyki

jest procesem społecznym, w szczególności definiowanie pojęcia matematycznego ma taki charakter. J. Confrey (1981) analizując charakterystyki pojęcia, stwierdza między innymi, że pojęcie odgrywa rolę zarówno indywidualną (private), jak i społeczną (public). Podkreśla, że w nauczaniu matematyki powinno się uwzględniać obydwie role pojęcia. W analizowanej tu sytuacji tak właśnie było: początkowe opisy figury wypukłej podawane przez uczniów były właśnie odbiciem ich indywidualnego lub ustalonego tylko w pracy dwójki uczniów rozumienia pojęcia, natomiast późniejsza bogata dyskusja na temat tych opisów prowadziła do ustalenia wspólnego, zbiorowego jego rozumienia obowiązującego dla wszystkich w klasie.

UWAGI KOŃCOWE

Jakie miejsce należy przyznać z punktu widzenia metodologii badań w dydaktyce matematyki obserwacjom przedstawionym w tym artykule ? W uwagach wstępnych już tę sprawę poruszaliśmy. tutaj uzupełnimy jeszcze te uwagi.

Proces dydaktyczny jest wielowątkowy, wieloaspektowy, a jego swobodna obserwacja nie skoncentrowana na wyizolowanym z tego skomplikowanego nurtu problemie nie daje jeszcze podstawy do metodologicznie poprawnych rozwiązań szczególnych zagadnień. Taka jednak obserwacja żywego procesu nauczania - uczenia się matematyki w naturalnych warunkach szkolnych może i powinna stanowić przede wszystkim źródło szczegółowych problemów oraz hipotez, którymi warto i trzeba się zająć w sposób już metodologicznie w szczegółach precyzyjnie zorganizowany- i w tym sensie jest to obserwacja pewnej sytuacji problemowej, której analiza prowadzi do wyizolowania pewnych wątków oraz sformułowania pewnych pytań. Wstępna analiza obserwowanych sytuacji, którą przedstawiliśmy, sugeruje między innymi cztery kompleksy problemów istotnych w badaniach dydaktycznych.

1. Pierwszy kompleks to logika dziecka w wieku 10 i 11 lat. Czwarta i piąta klasa szkoły podstawowej jest okresem przejściowym między prematematycznym a bardziej systematycznym nauczaniem w ogóle i matematyki w szczególności. Jest to bardzo ważny etap kształtowania się elementów logiki. Na tym

poziomie wprowadza się już definicje, formułuje twierdzenia, w których występują zwroty wyrażające kwantyfikatory, zwroty "jeżeli ..., to ...", "wtedy i tylko wtedy", "i", "lub" itp. Opisane w tym artykule sytuacje wskazują, że dzieci mogą rozumieć te zwroty inaczej niż nauczyciel, a w związku z tym zmuszanie dziecka do wyuczenia się tych zwrotów bez właściwego ich rozumienia może być bardzo szkodliwe. Należałoby zbadać, czym w zakresie elementów logiki dziecko spontanicznie rozporządza i jak je spontanicznie wyraża, a co jest możliwe do rozwinięcia z interwencją nauczyciela. Wprawdzie psychologia rozwojowa w zarysie ustala prawa rozwoju logiki dziecka, wyróżnia pewne charakterystyczne etapy tego rozwoju, ale w badaniach z dydaktyki matematyki, nie lekceważąc takich teorii, chcemy bliżej wniknąć w ten proces w konkretnych sytuacjach matematycznych, z uwzględnieniem tych wszystkich uwarunkowań, w których przebiega uczenie się matematyki w grupie klasowej. Dla przykładu ważne byłoby uzyskanie - poprzez szczegółowe badania dydaktyczne - odpowiedzi na pytania:

- Jak w naturalny sposób rozumie dziecko 10- i 11-letnie implikację, równoważność, warunek konieczny i wystarczający?
- W jaki sposób w naturalnym języku dziecka wyrażane są kwantyfikatory?
- Jak w myśli dziecka rozwija się pojęcie definicji i stosowane sposoby definiowania obiektów matematycznych?
- Jaką rolę w rozumowaniu dziecka odgrywa rozumowanie przez analogię i co charakteryzuje sposób uogólniania przez analogię w zastosowaniu do konkretnych twierdzeń matematycznych?

2. Drugi kompleks problemów, wymagający szczegółowych badań dotyczy społecznych aspektów uczenia się matematyki, obserwowanych i analizowanych nie "w ogóle", ale w konkretnych sytuacjach problemowych, z uwzględnieniem ich zróżnicowania tematycznego (odkrywanie twierdzenia, formułowanie twierdzenia, jego uzasadnianie, definiowanie, konstruowanie algorytmu itp.). W szczególności, na przykład:

- Jaką rolę odgrywa dyskusja w zespole klasowym w tych różnych sytuacjach?

- Jak przebiega proces akceptacji, odrzucenia lub transformacji indywidualnie wypracowanej przez jednostkę propozycji, hipotezy, przez grupę uczniów lub cały zespół klasowy?

3. Trzeci kompleks problemów, który nasuwa obserwacja omawianych lekcji wiąże się z nauczaniem geometrii i jej zastosowaniami:
- Jaką rolę odgrywa wizualizacja geometryczna matematycznych treści w nauczaniu arytmetyki? Chodzi tu przede wszystkim o konstruowanie i badanie przydatności niebanalnych, niestandardowych środków wizualizacji do ujmowania tych treści przez wgląd tam, gdzie rachunek może przesłaniać sens pojęć i utrudnić dziecku rozumienie istotnych związków.
- Jak kształtuje się w myśli dziecka pojęcie figury geometrycznej jako zbioru punktów? Jaką rolę odgrywa w tym rozwoju ujęcie globalne (przez kształt) i analiza lokalna własności figury ujmowanej mnogościowo?
- Jak na rozumienie pojęcia figury geometrycznej wpływa dominacja standardowych figur geometrycznych w nauce geometrii? Czy ta dominacja jest i jak dydaktycznie uzasadniona?

4. Obserwacja postaw i zachowań dzieci w toku omawianych lekcji wskazuje na możliwość zainteresowania uczniów 10- i 11-letnich teoretycznymi problemami typu matematycznego. W związku z tym nasuwa się pytanie:

Czy słuszne jest twierdzenie, jak się sądzi, udowodnione badaniami pedagogicznymi, że dzieci w wieku 10-11 lat interesują się przede wszystkim zagadnieniami związanymi z ich otoczeniem, ze zjawiskami bliskimi ich codziennemu życiu? Tezę tę przyjmuje się za podstawę konstruowania tematyki problemów rozwiązywanych przez uczniów w tym wieku. Czy nie należałoby tezę tę jeszcze weryfikować, a nie przyjmować za obowiązujący dydaktyka dogmat pedagogiczny? Wydaje się bowiem, co ilustruje sprawozdanie z przebiegu omawianych lekcji, że zaintersowania dzieci nie są czymś a piori danym, ale że można je ukierunkować rozmaicie i rozwijać dość wcześnie

w szerokim zakresie, obejmującym również problemy teoretyczne, jeżeli tylko uczenie się matematyki, zarówno indywidualne, jak i zbiorowe, zostanie w odpowiedni sposób zorganizowane.

LITERATURA CYTOWANA

J. CONFREY, Concepts, Processes and Mathematics Instruction, For the learning of mathematics, An International Journal of Mathematics Education, vol. 2 num. 1, july 1981, str. 8-12.

G. PAPY, Le premier enseignement de l'analyse, Presses universitaires de Bruxelles, 1968.

S. TURNAU, M. CIOSEK, M. LEGUTKO, Matematyka 4, WSiP, Warszawa, 1979.

DISCOVERING AND FORMULATING A THEOREM AND DEFINING A NEW MATHEMATICAL CONCEPT BY TEN- AND ELEVEN-YEAR-OLD CHILDREN, ILLUSTRATED BY TWO CYCLES OF LESSONS IN THE FOURTH AND FIFTH FORMS

SUMMARY

The present paper is an account of attitudes and behaviour of pupils of the fourth and fifth forms, observed at work in the cycle of lessons on the attribute of divisibility by three and in the cycle of lessons on the concept of a convex figure. The author presents her account in a form of a description of a series of real classroom situations, which, taken together, form a rich source of problems deserving keen attention of specialists in teaching methods.

The analysis of children's activities shows that even at this early age they are capable of forming correct generalizations, though very often they make use of analogies, often false ones. Using counter examples, they spontaneously

refute false theorems. Some pupils understand a conditional sentence "if... then..." as a statement of equality. The role of geometrical interpretation in understanding arithmetical relationships directly by insight has been revealed. The problem of logic and language, connected with the natural spontaneous way of expressing their thoughts by children, has been given attention too. The importance of a free discussion among children has also been stressed.

Three levels of attitudes have been discerned in the course of work on defining new concepts: the children have tried defining by examples, defining by connecting a given concept with concepts from everyday life and expressing it in everyday language, and have made attempts at a more formal kind of defining. It has been observed that the children have already some idea of that a correct definition should be like, what formal conditions should be fulfilled: they know that a new concept has to be defined by means of such concepts which are already known. It has been noticed that children tend to define geometrical figures first according to their global vision (shape), but pass to formulating an accurate definition only after the local analysis of the attributes of a given figure. Also in that cycle of lessons the importance of discussion can be seen, especially as the way of becoming aware of some elements of logical reasoning. Some limitation of geometrical imagination has been notices, which can be seen in domination of children's imagination by stereotype figures, known to them from experience, over the figures they encounter only while learning arithmetic or geometry.

The situations observed in those two cycles of lessons present, according to the author, several problems: they show the logic of ten- and eleven-year-olds, that is, of children in the period of transition from pre-mathematics to a systematic course of mathematics, observed in specific mathematical situations and applied to problems referring to abstract mathematical objects; the role of geometrical visualization of arithmetical and geometrical content at

various levels of instruction; the role of a spontaneous discussion; the comparison of a global vision of a geometrical figure and its local analysis according to the concept of a set; the problem of theoretical interests of children at that age, and many others.