ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 3 (1984)

MAŁGORZATA ĆWIK
Kraków

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zdegenerowany formalizm w myśleniu niektórych uczniów szkoły średniej

1. CEL I PRZEBIEG BADAŃ

Niniejszy artykuł zawiera sprawozdanie z niewielkiego fragmentu szerszych badań, prowadzonych na temat roli tzw. "ciągłej" kontroli w procesie nauczania matematyki. Stanowi on także przyczynek do badań nad problemami nauczania matematyki uczniów słabych, którym poświęca się ciągle zbyt mało uwagi. Te dwie grupy problemów są ściśle związane ze sobą, ciągła bowiem kontrola pełni szczególnie ważną rolę w procesie uczenia się matematyki przez takich właśnie uczniów.

Ciągła kontrola jest organizowanym przez nauczyciela konsekwentnym, stałym, wielostronnym zdobywaniem informacji dotyczących nie tylko stanu wiedzy i umiejętności uczącego się, ale umożliwiających w pewnej choćby mierze wgląd w istotę i przyczyny jego trudności, błędów, blokad w myśleniu oraz ocenę słuszności i skuteczności własnych koncepcji, zabiegów dydaktycznych na podstawie obserwacji reakcji ucznia na te zabiegi.

Ciągła kontrola jest istotnym elementem pozytywnego sprzężenia zwrotnego aktywności nauczyciela z aktywnością ucznia. W szczególności, informacje o tym, jak uczeń myśli, zdobyte w odpowiednim jeszcze momencie, dostatecznie wcześnie, mogą pomóc nauczycielowi w zapobieganiu,utrwalaniu i narastaniu różnych nieporozumień pojęciowych i luk w wiadomościach, prowadzących często bez jego natychmiastowej interwencji, do nieodwracalnych już następnie skutków, z których jednym jest "zdegenerowany formalizm". Prezentowany tu fragment badań ilustruje takie, w dużej mierze już utrwalone deformacje.

Zajmujemy się w tym fragmencie sytuacją następującą. W pisemnym zadaniu kontrolnym, tzw. zadaniu klasowym, badani uczniowie popełniają błąd w przekształceniu algebraicznym. Jeżeli błąd pojawia się w pracy ucznia sporadycznie, nauczyciel opierając się tylko na tekście pisanym nie może rozstrzygnąć, czy to jest pomyłka czy istotny błąd. W toku lekcji poświęconej poprawie zadania tradycyjnie omawia się przede wszystkim błędy występujące najczęściej. Najbardziej aktywni są wtedy uczniowie, którzy błędu nie popełnili. Oni pokazują innym, jak go trzeba poprawić. Nauczyciel nie dowiaduje się w tym momencie niczego o genezie, istocie i uporczywości błędu popełnionego przez ucznia słabego.

Fragment badań, który tu omawiam, miał na celu uzyskanie w jednej z takich sytuacji danych pozwalających na bardziej wnikliwą analizę pewnych błędów. Starano się uzupełnić ograniczone informacje odczytane z tekstu pisanego w toku bezpośrednich rozmów z wszystkimi uczniami, którzy te błędy popełnili. W rozmowach wzięło udział 12 uczniów drugiej klasy licealnej pod koniec roku szkolnego. Rekrutowali się oni z trzech klas o profilu ogólnym, prowadzonych przez trzech nauczycieli. Uczniów tych zakodowano liczbami od 1 do 12. Pewne elementy ich szkolnej charakterystyki przedstawia tabela 1.

W rozmowie z uczniem, przed poprawą zadania w klasie, starano się dotrzeć do istotnego charakteru błędu, dlatego prowadzono ją tak, aby uczeń sam sprecyzował i poprawił ten błąd. Przed przeprowadzeniem wywiadu poinformowano uczniów o temacie rozmowy, która będzie dotyczyć rozwiązanego przez

Tabela 1

Nr	Czy powtarzał(a) kl. II?	Ocena z matematyki I semestr kl. II	II semestr kl. II	Czy przeszedł (przeszła) do kl. III?	Opinia nauczyciela
1	nie	ndt	dst	tak	zdolna, niesystematyczna w pracy
2	nie	dst	dst	tak	przeciętnie zdolna, pracowita
3	nie	dst	dst	tak	przeciętnie zdolna, pracowita
4	tak	dst	dst	tak	niezdolny, niepracowity
5	nie	dst	dst	tak	przeciętnie zdolna, niepracowita
6	nie	dst	db	tak	zdolny, niepracowity
7	nie	ndt	dst	nie	przeciętnie zdolny, niepracowity
8	nie	dst	dst	tak	zdolny, niepracowity
9	nie	dst	dst	tak	mało zdolna, pracowita
10	nie	ndt	dst	tak	zdolny, niepracowity
11	nie	dst	dst	tak	przeciętnie pracowita i przeciętnie zdolna
12	tak	ndt	dst	tak	zdolna, niepracowita

nich zadania. Zapewniono ich, że informacje uzyskane w czasie wywiadu będą wykorzystane tylko do badań mających na celu ulepszanie nauczania, w czym ich szersze wypowiedzi mogą pomóc. Rozmowa odbywała się w swobodnej atmosferze, uczniowie wypowiadali się chętnie.

Aby w rozmowie być przez uczniów dobrze zrozumianym, używano celowo żargonu uczniowskiego i nie przywiązywano wagi do ścisłości. Na przykład, mówiono "pierwiastek" zamiast "pierwiastek kwadratowy", bo w tekście występowały tylko pierwiastki kwadratowe. Nie formułowano założeń. Używano także obiegowych zwrotów podręcznikowych, mimo że można mieć w tym zakresie wiele zastrzeżeń co do ich wieloznaczności. Doświadczenie dowodzi bowiem, że mówienie takim żargonem sprzyja nawiązaniu z uczniem kontaktu, umożliwiającego wgląd w istotę rzeczy. Z drugiej strony jednak, jak wykażemy w analizie protokółów wywiadów, żargon nie tylko uczniowski, ale i podręcznikowy, może prowadzić do poważnych nieporozumień.

Rozmowę zorganizowano na temat błędów o schematach:

(a) $\sqrt{a - bc} = \sqrt{a} - \sqrt{bc}$;
(b) $\sqrt{a - bc} = \sqrt{a} - b\sqrt{c}$;
(c) $\sqrt{a^2 + b} = a \cdot \sqrt{b}$.

Błędy (a), (b) popełniło 11 uczniów obliczając granicę funkcji

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 - ax - x}}$$ (gdzie a było równe 4,9,5,8).

Sześciu z nich napisało

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 - ax - x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x - \sqrt{ax} - x},$$

czterech

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 - ax - x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x - \sqrt{ax} - x},$$

a jeden

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 - ax} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x - a\sqrt{x} - x}.$$

Jedna uczennica iloraz różnicowy funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ dla $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ obliczyła w następujący sposób:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{9 + 4} - \sqrt{4 + 4}}{-2 - 3} = \frac{3\sqrt{4} - 2\sqrt{2}}{-2 - 3}.$$

Zwróćmy uwagę na to, że błędy te uczniowie popełniają przy okazji rozwiązywania zagadnień z rachunku różniczkowego, które wymagają zaawansowania pojęciowego i algorytmicznego, w szczególności, jeżeli chodzi o prawa działań, pojęcie pierwiastka, wzory skróconego mnożenia. W materiale szkolnym kilkakrotnie już do tych problemów powracano, przy czym występujące tu przekształcenia algebraiczne uczniowie wykonywali często. Również z pojęciem liczby niewymiernej, w szczególności z sensem takich symboli, jak $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ uczniowie spotykali się poprzednio w klasie ósmej szkoły podstawowej, a w klasie pierwszej licealnej pojęciem liczby niewymiernej zajmowano się już bardziej systematycznie.

Uczniowie, którzy popełnili błąd (a), nie zastanawiali się nad dziedziną otrzymanej po przekształceniu funkcji. Żaden z nich nie zauważył, iż niemożliwe jest obliczenie jej granicy dla x zmierzającego do minus nieskończoności. Granicę tę obliczali błędnie. Tę sprawę jednak wyłączyłam z badania.

W rozmowach z 12 uczniami skoncentrowałam się więc na powtarzającym się w kilku wariantach błędzie polegającym na "rozdzieleniu pierwiastka sumy" oraz na błędzie dotyczącym "pierwiastka iloczynu".

Wywiad rozpoczynano od dania uczniowi do wglądu rozwiązanego przez niego zadania, w którego tekście podkreślone były błędne fragmenty. Uczeń miał czas na analizę tego, co napisał, i jeżeli sam spontanicznie błędu nie poprawiał, proponowano mu dalej wyjaśnienie, w jaki sposób przekształcił on funkcję, której granicę obliczał. Pytano np.: "Objaśnij, w jaki sposób przeszedłeś od tego ... do tego ..." oraz pro-

szono o sprawdzenie, czy to jest poprawne, np. "sprawdź, czy to ... jest dobrze". Jeżeli uczeń powoływał się na jakieś "prawo", pytano go: "Jak byś mnie przekonał, że to prawo zachodzi?", "Sprawdź, czy napisane przez ciebie twierdzenie jest prawdziwe", "Jak sprawdzisz, czy to twierdzenie jest prawdziwe?", "W jaki sposób uzasadnisz, że przejście od tego ... do tego ... jest poprawne?", itp. Tak więc w toku rozmowy uczeń najpierw miał sobie uświadomić, jakie czynności wykonał przekształcając dane wyrażenie, następnie zaś zbadać, czy te czynności wykonał poprawnie.

Rozmowy nagrywano na magnetofonie, prowadzący badania rozporządzał też wszystkimi notatkami uczniów. Pozwoliło to na dokładne odtworzenie przebiegu rozmowy w postaci ścisłego protokołu, stanowiącego podstawę analizy i wysnutych z niej wniosków. W toku omawiania tych rozmów wskazuję wypowiadającego się ucznia, cytując w nawiasie numer mu przyporządkowany według tabeli 1.

Oto dosłownie z protokołu cytowane fragmenty odpowiedzi na niektóre pytania w stosunku do przekształceń typu:

$\sqrt{x^2 - ax} = x - \sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$ lub $\sqrt{x^2 - ax} = x - \sqrt{a} \cdot x$ lub $\sqrt{x^2 - ax} = x - a\sqrt{x}$.

1. (6) "Ze względu na to, że to jest pod pierwiastkiem, no więc tutaj pierwiastek z x^2 to jest x, pierwiastek z $9x$ to jest $3\sqrt{x}$. Tak spod pierwiastka wyciągnąłem i mam $x-3\sqrt{x}$".
2. (4) "Po prostu ja bezpośrednio tę liczbę wyjąłem spod pierwiastka. Wyciągnąłem z $9x$ i wyszło mi $3x$ i z x^2, x". "Po prostu ten pierwiastek redukuje tę potęgę".
3. (1) "Wyciągnąłem pierwiastek, aby się jego pozbyć. Znalazłem takie wyrażenie, które podniesione do kwadratu daje to, co jest pod pierwiastkiem".
4. (3) "Z tego trzeba było wyciągnąć pierwiastek ... Tak po kolei wyciągałem ze składników, które znajdują się pod pierwiastkiem ... $\sqrt{x^2 - y^2} = x - y$, bo

jeżeli podniesiemy po kolei do kwadratu, to otrzymamy $x^2 - y^2$". "Jest takie prawo, które mówi, że pierwiastek z różnicy równa się różnicy pierwiastków".

5. (2) "To jest po prostu wyciągnięcie spod pierwiastka i gdybym znowu wciągnęła pod pierwiastek, to mi wyjdzie to samo".
6. (8) "Po prostu spierwiastkowałem sobie to, co miałem pod pierwiastkiem. Stosowałem wzór - pierwiastek z różnicy równa się różnicy pierwiastków".

Analizując te i inne wypowiedzi uczniów można było stwierdzić, że nie mieliśmy do czynienia z pomyłkami, tylko z rzeczywistymi głęboko sięgającymi nieporozumieniami. Żaden z uczniów sam z własnej inicjatywy nie wyjaśnił, na czym polegał zasygnalizowany mu przez podkreślenie w tekście błąd. Do próby wyjaśnienia skłoniło ich dopiero pytanie prowadzącego badania.

Zaobserwowano następujące reakcje na polecenie sprawdzenia poprawności wykonanego przekształcenia:

1. Dwaj uczniowie (1, 10) z własnej inicjatywy stosowali definicję pierwiastka, prawidłowo podnosili dwumian do kwadratu i poprawnie wyciągali wnioski; tym uczniom łatwo było uświadomić błąd i w trakcie dalszej rozmowy do błędu tego już nie powracali.
2. Dwóch innych uczniów (6, 7) zaproponowało sprawdzenie przez podstawienie numerycznych wartości za zmienne. Uczniowie ci też poprawnie z wyników podstawienia korzystali i obalali napisaną równość. Jednakże obydwaj w ciągu dalszej rozmowy badając (na polecenie osoby przeprowadzającej wywiad), na podstawie definicji pierwiastka, czy prawdziwa jest równość $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, dali odpowiedź pozytywną, bo popełniali błąd w operacji odwrotnej, a więc rozumowali: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$.
Jeden z nich (6) mówił: "Gdyby to było prawo, to $a - b$ równałoby się $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ do kwadratu, a tak jest $a - b =$

a - b". Zatem sprzeczność między wnioskiem z podstawienia numerycznego i rzekomym prawem nie skłania tego ucznia do żadnej refleksji. Drugi (7) tak samo popełnia błąd w podnoszeniu do kwadratu różnicy, ale w toku rozmowy samodzielnie go poprawia. Pomimo tego przy końcu rozmowy na pytanie, jaki błąd popełnił w zadaniu, odpowiada "powinno być pierwiastek z $x^2 - 4x$ równy jest $x - 2\sqrt{x}$" i zapisuje "$\sqrt{x^2 - 4x} = x - 2\sqrt{x}$", a nie jak napisał w zadaniu $\sqrt{x^2 - 4x} = x - 4\sqrt{x}$. W istocie rzeczy więc uczeń powraca do jednego z popełnionych błędów (pierwiastkowanie sumy), poprawiając tylko inny (pierwiastek iloczynu).

3. Pozostałych siedmiu uczniów nie proponowało żadnego sposobu sprawdzenia, korzystali oni natomiast z sugestii osoby przeprowadzającej wywiad, "skorzystaj z definicji pierwiastka", "w jaki sposób przekonasz kogoś, że $\sqrt{36} = 6$", itp. i wtedy dopiero stosowali dla sprawdzenia definicję. Dwaj z nich (5, 8) poprawnie podnosili dwumian do kwadratu i prawidłowo wyciągali wnioski. Inni (3, 4, 2, 9) sprawdzając popełniali błąd w operacji odwrotnej (potęgowanie sumy). Na przykład, uczennica (3) uważa twierdzenie, z którego korzystała, za prawdziwe, chociaż odwołuje się do definicji, "bo jeżeli podniesiemy do kwadratu po kolei, to otrzymamy ..."
Uczennica (2) uznaje zapis $\sqrt{x^2 - 4x} = x - 2\sqrt{x}$ za poprawny, ponieważ "to jest po prostu wyciągnięcie spod pierwiastka i gdybym znowu wciągnęła pod pierwiastek, to mi to samo wyjdzie".

Zdarzają się inne uzasadnienia. Uczeń (4) na pytanie: "jak mógłbyś sprawdzić, czy $\sqrt{x^2 - 9x} = -2x$?", (co napisał), odpowiada: "po prostu rozwiązałbym równanie"; zapisuje "$\sqrt{x^2 - 9x} = x - 3x = -2x$". "Wyciągnąłem liczbę spod pierwiastka i już sprawdziłem". Tok myślenia tego ucznia przedstawiamy dalej dokładniej, cytując większe fragmenty protokółu.
Uczniowie (3, 4) ostatecznie poprawnie pokazali, że nie jest prawdą $\sqrt{x^2 - y^2} = x - y$ (3) i nie jest prawdą

$\sqrt{x^2 - 4x} = x - 2x$ (4), nie umieli odpowiedzieć jednak na pytanie, jak sprawdzić, czy $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Uczniowie ci dysponowali odpowiednimi wiadomościami, umieli wyjaśnić, dlaczego $\sqrt{81} = 9$, można więc sądzić, że rozumieli definicję pierwiastka, ale nie umieli jej wykorzystać przy zmienionym zapisie symbolicznym.

Uczennica (11) na polecenie sprawdzenia, czy $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$, pisze $\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^4 - b^4} = a^2 - b^2$, ale związku tego rachunku z postawionym jej pytaniem nie umie wyjaśnić.

Analiza wywiadów ujawnia u większości badanych nie tylko brak elementarnych wiadomości, ale także chaos ich myśli, nieumiejętność wyciągania wniosków, przeprowadzenia nawet krótkiego rozumowania, co jest powodem kilkakrotnego w toku rozmowy powrotu do tego samego błędu, mimo, że za każdym razem wydawało się, że badany zrozumiał, na czym błąd polegał i umiał go poprawić. Takie "kołowanie" szczególnie uderzające wystąpiło u trzech uczniów (9, 12, 4). Wszys ko to składa się na myślenie, które za Z. Krygowską nazywamy "zdegenerowanym formalizmem" (1977). Dla dokładniejszego zilustrowania tego, jak przejawia się "zdegenerowany formalizm" zacytuję obszerne fragmenty trzech protokołów odtworzonych z taśm magnetofonowych, w których to zjawisko wystąpiło w sposób szczególnie jaskrawy, (jakkolwiek i u innych uczniów też je obserwowaliśmy). Protokoły zredagowano w dwóch kolumnach, w pierwszej odnotowano wypowiedzi prowadzącego badania (P), w drugiej wypowiedzi ucznia (ustne i pisemne - U). Niektóre z wypowiedzi uczniów podkreślono, bo jak sądzę, są one szczególnie wyraźnym sygnałem "zdegenerowanego formalizmu". Podkreślono też niektóre wypowiedzi prowadzącego badanie dla zwrócenia uwagi na możliwe nieporozumienie, tkwiące w samym żargonie matematyki szkolnej, który sprzyja tej degeneracji.

Fragmenty protokołu z rozmowy z uczennicą (9):

P	U
1. Uzasadnij w jaki sposób doszłaś od tego ... $\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2-9x}-x}\right)$ do tego ... $\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-3x-x}\right)$.	Wyciągnęłam pierwiastek z x^2, to jest x, wyciągnęłam pierwiastek z 9, to jest 3, czyli x odjąć 3x $\sqrt{x^2-9x} = x-3x$.
2. Jak możesz inaczej zapisać $\sqrt{9\cdot 2}$?	$\sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18}$.
3. Tutaj jakoś inaczej obliczałaś $\sqrt{9x}$, bo z 9 obliczyłaś pierwiastek, a z x nie. Napisałaś $\sqrt{x^2-9x} = x-3x$.	- - -
4. Inaczej wyciągasz pierwiastek z 9 · 2 niż z 9 · x. $\sqrt{9\cdot2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2}$, a $\sqrt{9x} = 3x$.	Nie mogę napisać tylko 3, bo skąd mi się x weźmie?
5. Jak sprawdzisz, czy prawdą jest, że $\sqrt{9x} = 3x$	- - -
6. Czy $\sqrt{9\cdot2} = 3\cdot2$? Czy $\sqrt{18} = 6$?	Nie, bo z tego wyciągnęłam pierwiastek (wskazuje 9), a z tego (wskazuje 2) nie.
7. A tu może być $\sqrt{9x} = 3x$?	Wydaje mi się, że nie mogę zostawić tego x, muszę go tak wyciągnąć.
8. Tutaj obliczyłam $\sqrt{18}$ twoim sposobem: $\sqrt{18} = \sqrt{9}\cdot2 = 3\cdot2 = 6$. Mówisz, że to nie jest prawdą. Dlaczego?	Dlatego, że 6 razy 6 równa się 36, a nie 18.
9. No to sprawdź, czy $\sqrt{9x} = 3x$	$(3x)^2 = 3x\cdot 3x = 9x^2$
10. Czy to ... (wskazanie na $\sqrt{9x} = 3x$) jest dobrze?	Stąd wynika, że nie, tutaj jest 9x, a tutaj $9x^2$
11. Jakoś mówisz to bez przekonania.	No, bo mnie się wydawało, że dobrze robiłam, że $\sqrt{9x} = 3x$, bo nie można

napisać, że to jest 3, to byłoby nieprawdą, tylko 3x musi być, nie może być coś innego.

12. Jaka liczba podniesiona do kwadratu daje $9x$?
$\sqrt{9x} = A$; $A^2 = 9x$

- - -

13. Jaką liczbę trzeba podnieść do kwadratu, aby otrzymać $9x$?

To chyba będzie coś ze wzorami skróconego mnożenia.

14. Jaką liczbę trzeba podnieść do kwadratu, aby otrzymać 15 ?

Nie da się takiej liczby obliczyć.

15. A żeby dostać dwa

Nie ma takiej liczby

16. A znasz liczbę $\sqrt{2}$?

Tak, jest to przekątna kwadratu o boku jeden.

17. Jest to długość przekątnej kwadratu o boku jeden. Podnieś $\sqrt{2}$ do kwadratu !

$(\sqrt{2})^2 = 2$

18. Jaka liczba podniesiona do kwadratu da ci $9x$?

Na przykład, $3x$, $3x$ razy $3x$: $3x \cdot 3x = 9x^2$.

19. Chcesz mieć $9x$, a nie $9x^2$!

Nie wiem.

20. Pomogę ci, oblicz $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, gdy $x \geq 0$.

x.

21. Jaka liczba podniesiona do kwadratu daje $9x$?

$3x$.

22. $3x$ podniesione do kwadratu równa się $9x^2$; tak obliczyłaś przed chwilą

$3\sqrt{x}$.

23. Twierdzisz, że $\sqrt{x^2-9x} = x - 3\sqrt{x}$

Tak!

24. Ogólnie, że $\sqrt{A^2 - B^2} = \ldots$

równa się $A - B$ (pisze: $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$).

25. Powiedziałaś; $\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$. Sprawdź, czy zapisane przez ciebie twierdzenie jest prawdziwe

Jest, bo $(A - B)^2 = A^2 - B^2$

26. Co to znaczy podnieść do kwadratu? — Wymnożyć przez siebie (pisze: $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$)
27. No to, czy twierdzenie $\sqrt{A^2-B^2} = A - B$ jest prawdziwe? — Jest prawdziwe.

W dalszej części rozmowa "kołuje" dokoła tych samych stwierdzeń. Prowadzący rozmowę odwołuje się więc do weryfikacji numerycznej.

33. Niech $A = 5$, $B = 4$. Oblicz $\sqrt{25 - 16}$. — $\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$.
34. A korzystając z twojego twierdzenia o rozdzielaniu pierwiastka, jaki otrzymasz wynik? — $\sqrt{26 - 16} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 5 - 4 = 1$.
35. Który wynik jest prawdziwy? — 3.
36. A więc $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$? Czy to twierdzenie jest prawdziwe? — Właściwie z tego wynika, że nie.
37. A z czego wynika, że tak? — Było takie twierdzenie, że pierwiastek z liczby podniesiony do kwadratu daje nam liczbę podpierwiastkową.
38. Ale, czy z tego twierdzenia wynika, że $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$? — No nie.
39. Dlaczego? — - - -
40. Zastosuj to prawo, $(\sqrt{A})^2 = A$, do tego ... Co powinniśmy otrzymać podnosząc $A - B$ do kwadratu, gdyby to twierdzenie było prawdziwe? — Gdy podniosę $(A - B)$ do kwadratu, to otrzymam $A^2 - B^2$.
41. Podnieś $(A - B)$ do kwadratu, zapisz! — (pisze: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$).

42. Czy twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ jest prawdziwe?

To będzie prawdziwe.

43. Cały czas na ten temat rozmawiamy!

$A^2 - B^2$ możemy zapisać w postaci $(A - B)^2$, a to możemy zapisać jak $A^2 - 2AB + B^2$, bo jeżeli mamy jakąś różnicę liczb do kwadratu, to jest pierwsza liczba do kwadratu minus druga liczba do kwadratu.

44. Oblicz $(A - B)^2$!

$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

45. Skąd wiesz, że tak jest? Przed chwilą mówiłaś, że $(A - B)$ do kwadratu to jest A do kwadratu minus B do kwadratu, a teraz piszesz $A^2 - 2AB + B^2$?

Pomyliłam się przedtem.

46. Twoje rozumowanie było takie: to prawo jest prawdziwe, ponieważ $(A - B)$ do kwadratu to jest $A^2 - B^2$.

Ja pomieszałam: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

47. Udowodnij ten wzór!

\- - -

48. Wyprowadź wzór, wiedząc, co to znaczy podnieść do kwadratu!

$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

49. Cały czas koncentrowaliśmy się na tym, czy prawdziwe jest twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$. Co możesz na ten temat powiedzieć?

Jeśli mamy $\sqrt{A^2 - B^2}$, to możemy to rozpisać $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2}$, a pierwiastek z A^2 to jest A, a z B^2 to jest B: $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2} = A - B$.

50. Podstaw $A = 5$, $B = 3$ i oblicz $\sqrt{A^2 - B^2}$ oraz $A - B$!

$\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.
$A - B = 5 - 3 = 2$.

51. Czy 4 równa się 2 ?

Nie, $4 \neq 2$.

52. Skorzystałaś z tego twierdzenia; czy otrzymałaś równość? — Nie

53. Czy to prawo jest prawdziwe? — Nie, bo nie otrzymaliśmy tych samych liczb. To twierdzenie nie jest prawdziwe.

54. Podsumujmy naszą rozmowę. Twierdziłaś w trakcie rozmowy, że twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ jest prawdziwe. Przekonałaś się, że nie. Dlaczego? — Bo podstawiłam liczby i nie wyszła lewa strona równa prawej. Teraz już rozumiem, ale wcześniej mi się wydawało, że $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2} = A - B$.

Fragmenty protokołu rozmowy z uczennicą (12)

P	U
1. Przeczytaj tekst zadania, popatrz na swoje rozwiązanie. (Wskazanie odpowiedniego fragmentu tekstu zadania kontrolnego, błędy są podkreślone: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{9+4} - \sqrt{4+4}}{-2-3} = \frac{3\sqrt{4} - 2\sqrt{2}}{-2-3}$).	To było zadanie na iloraz różnicowy. Tu należało podstawić wartości. To była niespodziewana kartkówka, nie powtarzałam tego w ogóle. Za czym doszłam do tych wzorów, wykoncypowałam, co tam trzeba zrobić i jak, to po prostu był koniec lekcji.
2. Skąd otrzymałaś tę równość?	Już nie pamiętam.
3. W tekście masz $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Nie zgadzają się dane. Czy zadania nie odpisywałaś? Gdybyś odpisała, nasza rozmowa nie miałaby sensu, nie byłaby to rozmo-	Nie, nie odpisywałam; to zadanie było ostatnim zadaniem. Nie pamiętam dlaczego tak zrobiłam, tak podstawiłam, ale wtedy z całą świadomoś-

mowa na temat twoich błędów.

4. Rozwiąż więc zadanie, które miałaś w tekście, przyjmując $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

cią robiłam źle.

$$\frac{\sqrt{4 + 1} - \sqrt{9 + 1}}{-2 - 3} = \frac{2\sqrt{2}}{-5} = \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{4}}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{10}}{-5}$$

(kolejno skreśla $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{4}$, zostawia $2\sqrt{2}$).

Dwa razy dwa jest cztery, więc tu powinno być dwa pierwiastki z czterech, nie chyba cztery pierwiastki z dwóch.

5. Na jakiej podstawie chcesz tak napisać?

Chciałam wyciągnąć coś przed pierwiastek. Chciałam pod pierwiastkiem zostawić to, z czego się nie da wyciągnąć pierwiastka, a wyciągnąć to, z czego się da wyciągnąć pierwiastek. Czyli w przypadku czterech byłby pierwiastek równy dwa, stąd zostałby jeden, stąd $\sqrt{4 + 1} = 2\sqrt{1}$, ale to nie może być.

Prowadzący badanie przyjmuje, że "to nie może być"; wyraża sąd: nie jest prawdą $\sqrt{5} = 2\sqrt{1}$, a więc wykonane przekształcenie nie jest poprawne. Chce jednak dokładniej wyjaśnić, jak uczennica myśli w innym kontekście, tj. w związku z błędem popełnionym w zadaniu kontrolnym, dlatego w dalszym ciągu rozmowy powraca do tego zadania.

7. Skąd otrzymałaś z ... to ... (pokaz: $\frac{\sqrt{9 + 4} - \sqrt{4 + 4}}{-2 \quad -3}$,

Też na tej samej zasadzie. Wyciągnęłam pierwiastek

$\frac{3\sqrt{4} - 2\sqrt{2}}{-2 \quad -3}$,

powrót do zapisu w zadaniu kontrolnym).

z dziewięciu, trzy, i zostało mi cztery, czyli $3\sqrt{4}$. Tak samo tutaj, z czterech dwa; znaczy - nie wiem na jakiej podstawie rozumowania, błędnego zresztą.

8. Błędnego, tylko dlaczego ono jest błędne?

\- - -

9. Gdzie jest błąd?

Tutaj w tym wyciąganiu

10. Jakbyś mnie przekonała o tym, że tutaj jest błąd?

\- - -

11. Czemu równa jest liczba $3\sqrt{4}$?

Można również wyciągnąć pierwiastek z czterech, czyli mamy trzy razy dwa, to jest sześć.

12. Czemu jest równy $\sqrt{9 + 4}$?

Wyciągnę pierwiastek z 9, czyli trzy pierwiastki z czterech, tutaj również się da wyciągnąć pierwiastek, czyli trzy razy dwa równa się też 6:

$\sqrt{9 + 4} = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

13. To samo zrobiłaś za pierwszym i drugim razem. Popatrz, masz tutej pierwiastek z liczby dziewięć plus cztery. Co masz pod pierwiastkiem?

Mam znak plus.

14. Czyli co masz zrobić z tymi liczbami?

Dodać.

15. No to dodaj!

No tak, no właśnie dodałam, ale mi nie wychodziło więc zaczęłam częściowo.

16. Co ci nie wychodziło?

No po prostu nie mogłam wyciągnąć z trzynastu

pierwiastka, tylko w przybliżeniu.

17. Pierwiastek z trzynastu jest tak samo dobrą liczbą jak pierwiastek z dwóch.

Tak, ale ja chciałam jeszcze bardziej doprowadzić do prostszej postaci.

18. Który rachunek jest poprawny: $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $\sqrt{9+4} = 3\sqrt{4} = 6$?

Trzeba najpierw dodać, oczywiście. Ten pierwszy jest dobry.

W dalszym ciągu toczy się rozmowa na temat definicji pierwiastka oraz twierdzenia o pierwiastku z iloczynu; po tej dyskusji uczennica zadaje nagle spontaniczne pytanie powracając do równości $\sqrt{5} = 2\sqrt{1}$, o której poprzednio twierdziła "to nie może być" (wypowiedź 5).

31. Przepraszam, chciałam zapytać, czy to było prawdą, to co jest tutaj, wyciągałam pierwiastek, to było $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1}$, wyciągnęłam dwa, dwa pierwiastki z jednego. Czy można tak zapisać?

32. Sama odpowiedz na to pytanie.

\- - -

33. Napisałaś, że pierwiastek z 5 to jest pierwiastek z czterech plus jeden, a to jest dwa pierwiastki z jeden.

Tak na pewno nie jest, nie myślałam o tym.

34. A o czym?

W ogóle nie przypominam sobie, jaki tok rozumowania w ogóle miałam przed chwilą. Po prostu przypuszczałam, że zrobię źle i czy zrobię w taki sposób czy w inny sposób zły, to jest wszystko jedno. Fak-

tycznie ja się zorientowałam potem, że ja to mogę pododawać. Ja się po prostu nie douczyłam, nie powtórzyłam sobie. Czyli to jest źle, tak?

35. Sama postaraj się odpowiedzieć na to pytanie.

- - -

36. Ile w przybliżeniu wynosi $\sqrt{5}$?

Dwa i coś.

37. Około 2,2. A $\sqrt{1}$?

- - -

38. $\sqrt{1}$?

Jeden czterdzieści jeden. Nie, przepraszam, jakieś coś koło pół. Nie zaraz, zaraz.

39. Jaka liczba podniesiona do kwadratu daje jeden?

- - -

40. Jaka liczba podniesiona do kwadratu daje jeden?

Coś koło zera i dwie dziesiąte.

41. Zero dwie dziesiąte razy zero dwie dziesiąte ... setne

zero cztery - - - Jakaś mała liczba cząstkowa. Nie przepraszam, cztery i coś chyba

42. Cztery do kwadratu.

Szesnaście, nie - chyba zero i cztery dziesiąte.

43. Jest to taka liczba, która podniesiona do kwadratu daje jeden.

No, nie ma takiej liczby. W przybliżeniu można określić ... Nie! jeden! samo jeden!!! Jeden podniesione do kwadratu daje jeden.

44. Nie potrafię wskazać przyczyny, dlaczego tak trudno było ci znaleźć pierwiastek z jedynki.

Jestem straszliwie roztargniona. W ogóle nie jestem matematykiem, jestem humanistą, nienawidzę matematyki.

45. Doszłaś do wniosku, że tak $(\sqrt{5} = 2\sqrt{1})$ być nie może. Pierwiastek z 5 jest w przybliżeniu równy 2,2, a $2\sqrt{1}$ to jest ... Pierwiastek z pięciu nie jest równy dwa, bo dwa podniesione do kwadratu nie równa się pięć.

Dwa

46. $\sqrt{9 + 4}$ równa się ...

$\sqrt{13}$

47. Nie jest to liczba równa ...

$3\sqrt{4}$

48. Dlaczego?

\- - -

49. $\sqrt{13} \neq 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2$, bo gdy 6 podniesiemy do kwadratu, nie otrzymamy 13. Natomiast $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3$, $\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$.

50. Jak ci się wydaje, czy możesz zapisać inaczej wyrażenie $\sqrt{x^2 + 4}$?

Tak, to jest dwa pierwiastki z x^2, bo $x^2 + 4$ to jest $4x^2$, a więc to jest $2\sqrt{x^2}$, to jest $2x$, $\sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{x^2} = 2x$.

51. Powiedziałaś: $4 + x^2 = 4x^2$. Oblicz wartość wyrażenia $4 + x^2$ oraz $4x^2$, dla $x = 5$!

x^2 plus cztery to jest 29; 4 razy 25 to jest sto.

52. Czy $4x^2 = 4 + x^2$?

No, nie!

53. Czy prawdą jest, że $\sqrt{x^2 + 4} = 2x$

Nie można tak zapisać, to jest oddzielne wyrażenie, to są dwa odrębne człony, których nie można dodać. No to, jak trzeba było rozwiązać ?

54. Trzeba było obliczyć iloraz różnicowy funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_1 = -2$,

$x_2 = 3$:

$$\frac{\sqrt{4+1} - \sqrt{9+1}}{-2 \qquad -3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{10}}{-5} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{-5}$$

Dalej można było jeszcze przekształcić ...

Napisać $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$ to się równa pierwiastek z 7 (pisze $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{7}$).

55. Skąd wzięłaś 7 ?
Pięć dodać dwa.

56. Gdzie masz znak dodawania?
Dodałam zamiast mnożyć !

57. Można było wyłączyć $\sqrt{5}$ przed nawias $\frac{\sqrt{5}(1 - \sqrt{2})}{-5}$
I tak zostawić ?

58. Tak!

59.
A to zadanie, co ja robiłam?

60. Trzeba było zostawić w postaci $\frac{\sqrt{13} - \sqrt{8}}{-3 \quad -2}$ ewentualnie napisać zamiast 8, $2\sqrt{2}$, bo $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Nie wiedziałam, że można zostawić pierwiastek z trzynastu !!!

Fragmenty protokołu rozmowy z uczniem (4)

P U

1. Objaśnij w jaki sposób doszedłeś od tego ...

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9x} - x}$$

do tego ...

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x - 3x - x} \; ?$$

Wyjąłem liczbę spod pierwiastka

2. Co to znaczy "wyjąć" liczbę spod pierwiastka?

Wyciągnąłem liczbę spod pierwiastka, to znaczy skróciłem tę liczbę o połowę. Nie, to źle zrobiłem!

3. Co to znaczy skrócić liczbę o połowę?

Podzielić przez dwa, tu nie dzieliłem przez dwa.

4. Na jakiej podstawie napisałeś więc $\sqrt{x^2 - 9x} = x - 3x$?

$\sqrt{x^2 - 9x} = -2x$. Po prostu ja bezpośrednio tę liczbę wyjąłem spod pierwiastka. Wyciągnąłem z $9x$ pierwiastek i wyszło mi $3x$ i z x^2, x. Z tego powodu wyszła mi taka liczba, myślałem, że tak można zrobić.

5. I dalej tak uważasz?

Tak.

6. Sprawdź, czy poprawnie przekształciłeś?

\- - -

7. Jak możesz sprawdzić, czy $\sqrt{x^2 - 9x} = -2x$?

Po prostu rozwiązałbym to równanie: $\sqrt{x^2 - 9x} = x - 3x = -2x$.

8. Jakie równanie?

Wyciągnąłem liczbę spod pierwiastka i już sprawdziłem.

9. Jak przekonasz kogoś, że $\sqrt{81} = 9$?

Wymnożę: $9 \cdot 9 = 81$.

10. $\sqrt{81} = 9$, bo $9^2 = 81$. Jak możesz sprawdzić, czy $\sqrt{x^2 - 9x} = -2x$?

Powinienem podnieść $-2x$ do kwadratu i otrzymać $x^2 - 9x$. Czyli to jest źle, błędnie wyciągnąłem spod pierwiastka.

To stwierdzenie nie wyjaśnia jeszcze, na czym błąd polega. Równość $\sqrt{x^2 - 9x} = -2x$ otrzymano popełniając dwa błędy $\sqrt{x^2 - 9x} = \sqrt{x^2} - \sqrt{9x}$ i $\sqrt{9x} = 3x$. W dalszym ciągu rozmowy prowadzący badania chce je odizolować. Uczeń poprawia błąd $\sqrt{9x} = 3x$; następnie przechodzi się do analizy błędu drugiego.

11. A gdyby było $\sqrt{x^2 - 9x} = x - 3\sqrt{x}$, bo $\sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$, a nie $3x$? Czy byłoby dobrze?

Tak najpierw wyciągam jeden składnik, potem drugi.

12. Sprawdź, czy $\sqrt{x^2 - 9x} = x - 3\sqrt{x}$.

\- - -

13. Przed chwilą sprawdzaliśmy, czy $\sqrt{x^2 - 9x} = -2x$.

$(x - 3\sqrt{x})^2 = x^2 - 2 \cdot 3x\sqrt{x} + 9x$.

14. Jaki wniosek?

Nie to samo.

15. Skorzystałeś z fałszywego twierdzenia. Uzupełnij, jakie to było twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2}$...

$= A - B$

16. Dlaczego to twierdzenie jest fałszywe?

Ja uważam, że to jest prawdą, nie, to nie jest prawdą, bo tu jeszcze powinno się napisać, nie - to jest prawdą!

17. Twierdzisz, że dla dowolnych A, B taki związek zachodzi?

Tak zachodzi.

18. Przekonaj mnie o tym.

\- - -

19. Sprawdź, czy $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ dla $A = 5$, $B = 2$.

$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = 5 - 2 = 3$.

Po prostu ten pierwiastek redukuje tę potęgę.

20. Oblicz $\sqrt{A^2 - B^2}$ oraz $A - B$, dla $A = 5$, $B = 2$

$\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

$A - B = 5 - 2 = 3$;

to się temu nie równa.

21. Jaki wniosek wyciągasz co do prawdziwości tego twierdzenia?

Czyli nie da się tego wyciągnąć, bo gdy wyciągam, to zostaje reszta.

22. Nie wiem, o jaką resztę ci chodzi. Jaki wniosek wyciągasz co do prawdziwości tego twierdzenia?

Spod pierwiastka daje się wyciągnąć te liczby, które są, które się daje podnieść do drugiej potęgi.

23. Czy $\sqrt{21}$ nie da się podnieść

Da się tylko, że, czyli

do potęgi drugiej?[1]	ta liczba podniesiona do potęgi drugiej musi się równać swojej wielokrotności.
24. Nie za bardzo wiem, o co ci chodzi. Czy twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ jest prawdziwe?	To zależy
25. Od czego?	- - -
26. Popatrz, w jaki sposób sprawdziłeś, czy $\sqrt{x^2 - 9x} = x - 3\sqrt{x}$!	Podnosiłem do kwadratu.
27. Podnieść do kwadratu różnicę A - B, zapisz to !	A - B do kwadratu, to jest A kwadrat minus B kwadrat. (pisze: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$).
28. Co możesz teraz powiedzieć o wzorze $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$?	Jest nieprawdziwy.
29. Dlaczego?	Bo gdy podniesiemy do kwadratu, to te liczby są różne.

W dalszym ciągu powoływać się będę na wypowiedzi jednego z tych trzech uczniów wskazując jego numer (zarazem numer protokółu) oraz numer wypowiedzi przedzielone średnikiem, np. (4;5) oznacza wypowiedź o numerze 5 z protokołu 4.

Każdego ucznia w toku rozmowy próbowano doprowadzić między innymi do stwierdzenia przez niego samego, że popełnił błąd oraz do uświadomienia sobie przez niego samego, na czym się opierał popełniając błąd i do uzasadnienia przez niego samego, że ta podstawa jest błędna. Nasuwały się dwie możliwości: (a) podanie kontrprzykładu numerycznego obalającego napisaną przez ucznia tożsamość, (b) odwołanie się do rachunku algebraicznego opartego na definicji pierwiastka kwadratowego. Każda z tych dróg okazywała się w pewnych momentach

[1] Nie zrozumiano intencji ucznia.

zawodna. Na przykład, uczeń mając "sprawdzić" własne twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ przez podstawienie $A = 5$, $B = 2$, pisze: $\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = 5 - 2$, i mówi: "Po prostu ten pierwiastek redukuje tę potęgę" (4;19). Przykład numeryczny nie staje się kontrprzykładem, bo uczeń stosuje swoje fałszywe twierdzenie także w rachunku numerycznym.

Dla większości badanych uczniów twierdzenie $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ jest twierdzeniem prawdziwym. Niektórzy, stosując definicję pierwiastka do wyrażenia $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$, otrzymują $(A - B)^2 = A^2 - B^2$, co nie pozostaje w sprzeczności w pewnych przypadkach ze znanym im wzorem $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, który również zapisują. Uczniowie ci uważają więc, że może być równocześnie $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ i $(A - B)^2 = A^2 - B^2$."To zależy", mówi uczeń (4), "$A^2 - B^2$ możemy zapisać w postaci $(A - B)^2$, a to możemy zapisać jak $A^2 - 2AB + B^2$, bo jeżeli mamy jakąś różnicę liczb do kwadratu, to jest pierwsza liczba do kwadratu minus druga liczba do kwadratu"(9;43). To przekonanie można było obalić przez podstawienie numerycznych wartości, bądź pokazać, że równość $A^2 - B^2 = A^2 - 2AB + B^2$ jest równoważna alternatywie $A = B \vee B = 0$. W rozmowie z uczniami tego nie zrobiono, koncentrując się tylko na obaleniu tożsamości $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ przez podstawienie numeryczne.

Po przeprowadzeniu rozmów indywidualnych, dziewięciu (1,2, 3,4,5,6,9,10,11) spośród dwunastu uczniów uczestniczących w badaniach rozwiązywało kontrolne zadania. W każdym z nich była okazja do popełnienia błędu tego samego typu, co w przedyskutowanym poprzednio zadaniu klasowym.
Oto teksty zadań:

Z1. Zapisz iloraz różnicowy funkcji

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ $\quad x_0 = a$, $x_1 = 2a$

Z2. Mając dane odcinki $\bar{a}$, $\bar{b}$ $(a > 0, b > 0)$, skonstruuj odcinek $\bar{x}$: $x = \sqrt{a^2 - 2b^2}$.

Z3. Oblicz długość jednego boku prostokąta, wiedząc, że długość przekątnej równa się $6a$ $(a > 0)$, długość drugiego boku $2b$ $(b > 0)$.

Z4. Oblicz długość boku prostokąta, gdy długość przekątnej wynosi $5a$, a długość drugiego boku $3a$ $(a > 0)$.

Z5. Czy prawdą jest, że:

(a) $\bigwedge_{a,b \in R} \sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b$?

(b) $\bigwedge_{a,b \in R} \sqrt{b^2 - 3a^2} = b - 3a$?

(c) $\bigwedge_{x,y \in R} \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} = |2x - y|$?

(d) $\bigwedge_{a,b \in R} \sqrt{4a^2 - b} = 2a - \sqrt{b}$?

(e) $\bigwedge_{a,b \in R} \sqrt{9a^2 + 16b^2} = 3a + 4b$?

Odpowiedzi uzasadnij.

Z6. Oblicz granicę $\lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 3x} - 3x}$.

Czterech spośród uczniów $(1,3,5,6)$, z którymi prowadzono rozmowę, nie popełniło już w tych zadaniach błędów analizowanych w toku tej rozmowy. W pięciu zadaniach pojawiły się one znowu, w dwóch $(4,9)$ w sposób jaskrawy zmasowane.

Zilustruję to cytując dosłownie rozwiązania zadań uczniów (4) i (9), z którymi przeprowadzoną rozmowę przedstawiłam poprzednio we fragmentach. Uczennica (12) zadania kontrolnego nie pisała. Uczennica (9) w serii zadań kontrolnych nie powtórzyła popełnionego w zadaniu szkolnym błędu dotyczącego pierwiastka z iloczynu $(\sqrt{ab} = a\sqrt{b})$, natomiast ponownie i konsekwentnie popełnia błąd polegający na rozdzielaniu pierwiastka z sumy. Przytoczę dokładnie jej tekst.

Z1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ $x_1 = 2a$, $x_o = a$
$x \in R$

$$\frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4} - \sqrt{a^2 + 4}}{2a - a} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2} + 2 - (a + 4)}{2a - a} = \frac{a\sqrt{2} + 2 - a - 4}{a} = \frac{a\sqrt{2} - a - 2}{a}.$$

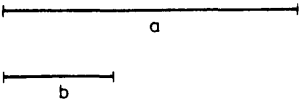
Z2. Dane: Szukane:

a - odcinek $\bar{x}$ - odcinek, gdy $x = \sqrt{a^2 - 2b^2}$

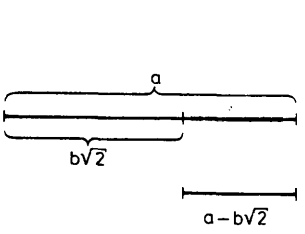
b - odcinek

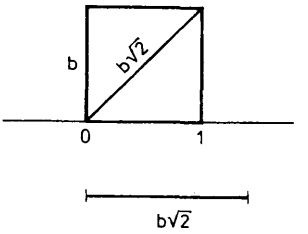
$\bar{x} = \sqrt{a^2 - 2b^2}$

$\bar{x} = a - b\sqrt{2}$



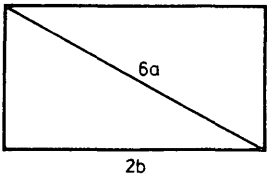
$\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ = przekątna kwadratu o boku równym 1

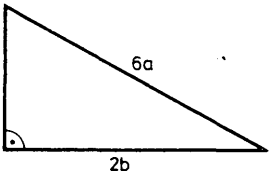




Opis konstrukcji.

1. Obieram dwa odcinki $(\text{aby } \bar{a} > \bar{b})$.
2. Odejmuję odcinek $b\sqrt{2}$ od odcinka $\bar{a}$; otrzymany odcinek jest szukanym odcinkiem x: $x = \sqrt{a^2 - 2b^2}$.
3. dł. przekątnej prostokąta = 6a
   dł. 1 boku = 2b 2. bok prostokąta = ?





$a^2 + b^2 = c^2$,

$a = x$, $b = 2b$, $c = 6a$,

$x^2 + (2b)^2 = (6a)^2$,

$x^2 = (6a)^2 - (2b)^2$,

$x = \sqrt{(6a)^2 - (2b)^2}$,

$x = 6a - 2b$.

Drugi bok tego prostokąta wynosi $6a - 2b$.

Z5. 1. $\sqrt{4a^2 - 9b^2} \stackrel{?}{=} 2a - 3b$.

Czy jest prawdą że $\bigwedge_{a,b \in R} \sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b$?

$2a - 3b = 2a - 3b$.

Jest prawdą dla każdego $a,b \in R$ zachodzi równość między obiema stronami tego równania, gdyż $\sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b$, jeżeli obierzemy dowolne a i b, to otrzymamy równość między lewą i prawą stroną tego równania gdyż one są równe.

2. $\sqrt{b^2 - 3a^2} \stackrel{?}{=} b - 3a$ czy $\bigwedge_{a,b \in R}$ jest prawdziwe to równanie?

$\sqrt{b^2} = b$

$b - \sqrt{3a^2} \neq b - 3a$ nie jest prawdą, że $\bigwedge_{a,b \in R}$ zachodzi równość między stroną lewą i prawą tego równania, gdyż $\sqrt{3a^2}$ nie jest równy $3a$, jeżeli obierzemy dowolne dwie liczby i podstawimy do wzoru, to nie otrzymamy równości między lewą i prawą stroną.

3. $\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} = |2x - y| \quad \bigwedge_{x,y \in R}$,

$\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} = 2x - \sqrt{4xy} + y$.

Z6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 5x} - 4x} = \dfrac{5}{\sqrt{x_n^2 - 5x_n} - 4x_n} =$

$= \dfrac{5}{x_n - \sqrt{5x_n} - 4x_n} = \dfrac{5}{-\infty + \infty + \infty} = \dfrac{5}{0}$ ".

Uczeń (4) nie popełnia błędu dotyczącego pierwiastka z iloczynu, natomiast popełnia błąd typu $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ oraz wiele innych błędów, tworząc nowe reguły dla rozwiązania w jego rozumieniu zadań.

Z1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \qquad x \in R$

$x_o = 2a \qquad x_1 = a$

$$u = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x_o^2 + 4}}{x - x_o} = \frac{(x + 2)^2 - (x_o + 2)^2}{x - x_o} =$$

$$= \frac{(x^2 + 4x + 4) - (x_o^2 + 4x_o + 4)}{x - x_o} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 - x_o^2 - 4x_o + 4}{x - x_o} = \frac{x^2 - x_o^2 + 4x - 4x_o + 8}{x - x_o} =$$

$$= \frac{(x - x_o)(x + x_o) + 4(x - x_o) + 8}{x - x_o} = \frac{(x - x_o)(x + x_o) + 12}{x - x_o}$$

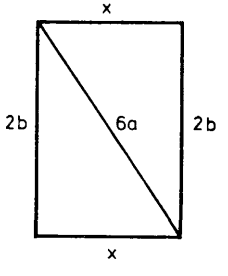
$$= (x + x_o) + 12 = a + 2a + 12 = 3a + 12.$$

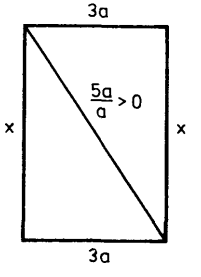
Z2. $x = \sqrt{a^2 - 2b^2}$

$$x = (a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + (2b)^2 = a^2 - (2b)^2 - 4ab =$$

$$= (a + 2b)(a - 2b) - 4ab$$

Z3.





$$x = \frac{2b}{6a} \qquad x = \frac{3a}{5}$$

Z5. a) $\sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b$ tak

b) $\sqrt{b^2 - 3a^2} = b - 3a$ nie

$\sqrt{b^2 - 3a^2} = b - \sqrt{3a^2}$

c) $\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} = |2x - y|$ nie

$\sqrt{2x - y} = |2x - y|$ nie

$\sqrt{2x - y} = \sqrt{2x} - \sqrt{y}$

d) $\sqrt{9a^2 + 16b^2} = 3a + 4b$ tak

$\sqrt{4a^2 - b} = 2a - \sqrt{b}$ tak

aby wyciągnąć sumę lub różnicę spod pierwiastka wyciągamy każdy składnik

Z6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 16x} - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{x - 4 - x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 16x} - x}$, bo $\frac{-3}{\sqrt{(-\infty)^2} - \infty - \infty} =$

$= \frac{-3}{\infty} = 0$

Przypomnijmy końcowe wypowiedzi tych dwóch uczniów w rozmowie na temat błędu $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Uczennica (9) zgadza się na to, że $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2}$ nie jest twierdzeniem prawdziwym, "bo podstawiłam liczby i nie wyszła mi lewa strona równa prawej. Teraz już rozumiem, ale wcześniej mi się wydawało, że $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2} = A - B$".

Uczeń (4) mówi o wzorze $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$: "Jest nieprawdziwy, bo gdy podniesiemy do kwadratu, to te liczby są różne". Zadanie kontrolne uczniowie ci pisali w dwa tygodnie po przeprowadzeniu wywiadów. Rozwiązanie tego zadania świadczy o uporczywości błędu. Uczennica (9) stosuje błędne twierdzenie $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ konsekwentnie w każdej z możliwych sytuacji. Rozumie, co to jest tożsamość, pisze bowiem: "Jest prawdą dla każdego $a,b \in R$ zachodzi równość między stronami tego równania, gdyż $\sqrt{4a^2 - 9b^2} = 2a - 3b$, jeżeli obierzemy a i b, to otrzymamy równość między lewą i prawą stroną".

Jest więc dalej przekonana o prawdziwości twierdzenia $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Prawdopodobnie automatyzm rozdzielności jakiegokolwiek działania względem jakiegokolwiek innego, wraz z automatyzmem znoszenia znaku pierwiastka przez znak potęgi, jest silniejszy niż rozumowanie, którego słuszność poprzednio uznała. Uczeń (4) postępuje podobnie w niektórych przypadkach, ale już mniej konsekwentnie, bo popełnia jeszcze inne rażące błędy. Uświadomienie błędu, które nastąpiło dwa tygodnie wcześniej, nie przyniosło więc w tych przypadkach pozytywnego rezultatu.

Można oczywiście zakwestionować sens zajmowania się takimi skrajnymi przypadkami. Sądzę jednak, że właśnie takim przypadkom warto się bliżej przyjrzeć. Zwróćmy bowiem uwagę na następujące momenty. Wszyscy trzej uczniowie (4), (9), (12) przeszli do klasy 3 liceum, ich oceny musiały więc stanowić wystarczającą do tego podstawę. Uczennicę (12) nauczyciel uznaje nawet za zdolną. Uczennica (9) w zadaniu kontrolnym po przeprowadzeniu wywiadu wykazała znajomość pewnych twierdzeń i konstrukcji (twierdzenie Pitagorasa), nie jest jednak zdolna uwolnić się od pewnych błędnych skojarzeń. Myślenie ucznia (4) zaś stanowi przykład "zdegenerowanego formalizmu" w innych aspektach, do czego powrócę w dalszym ciągu. Sądzę, że analiza nieporozumień występujących w sposób jakby zagęszczony u uczniów słabych (ale - przypomnijmy - zasługujących jeszcze w opinii szkoły na miejsce w 3 klasie liceum), jest celowa. Tu bowiem zjawiska u innych sporadyczne, ukazują nam się w postaci szczególnie jaskrawej.

Przyjrzyjmy się jeszcze w ramach tego sprawozdania, jak ci i inni z badanych uczniów argumentowali zapisaną przez siebie błędną tożsamość. Można wyróżnić tutaj cztery typy takich uzasadnień. Pierwszy to wyraźne powołanie się na fałszywe twierdzenie. Na przykład uczeń (6) mówi: "Zastosowałem rozłączność", uczeń (7) wyraźnie zapisuje jako twierdzenie tożsamość $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, uczeń (8) argumentuje: "stosowałem wzór: pierwiastek z różnicy równa się różnicy pierwiastków", uczennica (3) uznaje tożsamość $\sqrt{x^2 - y^2} = x - y$,

bo "Jest takie prawo, które mówi, że pierwiastek z różnicy równa się różnicy pierwiastków".

Drugą grupę uzasadnień błędnej tożsamości stanowią argumenty odwołujące się do "znoszenia się" znaku pierwiastka ze znakiem potęgi oraz "odwrotności" pierwiastkowania względem potęgowania, bez względu na strukturę algebraiczną wyrażenia podpierwiastkowego. Na przykład, "Było takie twierdzenie, że pierwiastek z liczby podniesionej do kwadratu daje nam liczbę podpierwiastkową" (9;37), "Po prostu ten pierwiastek redukuje tę potęgę" (4;19), "To jest po prostu wyciągnięcie spod pierwiastka i gdybym znowu wciągnęła, to mi wyjdzie to samo" (2).

Trzeci rodzaj uzasadnień charakteryzuje się przekonaniem, że "inaczej być nie może". I tak, uczennica (9) uzasadniając tożsamość $\sqrt{9x} = 3x$ mówi: "Wydaje mi się, że nie mogę zostawić tego x, muszę go tak wyciągnąć" (9;7), " $\sqrt{9x} = 3x$, bo nie można napisać, że to jest 3, to byłoby nieprawdą, tylko 3x musi być, nie może być coś innego" (9;11).

Do czwartej grupy zaliczymy wypowiedzi, w których uczniowie zastępują uzasadnienie napisanej tożsamości lub równości numerycznej opisem czynności, które wykonali, aby ją otrzymać, wskazując czasem cel, który sobie stawiali wykonując przekształcenia. Uczeń (4) wyjaśnia: "Po prostu ja bezpośrednio wyjąłem spod pierwiastka". Podobnie uczeń (8): "Po prostu spierwiastkowałem sobie to, co miałem pod pierwiastkiem". Uczennica (12) pisze $\sqrt{9 + 4} = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$, i po dyskusji wyjaśnia: "No po prostu nie mogłam wyciągnąć z 13 pierwiastka tylko w przybliżeniu" (12;17), "... ja chciałam jeszcze bardziej doprowadzić do prostszej postaci" (12;18).

Do pierwszej grupy zaliczyliśmy więc wypowiedzi oparte na fałszywym, ale poprawnie stosowanym twierdzeniu $(\sqrt{A^2 - B^2} = A - B, \quad (A - B)^2 = A^2 - B^2)$; drugą stanowią wypowiedzi oparte w zasadzie na prawdziwym twierdzeniu, ale źle stosowanym: $\sqrt{A^2} = |A|$, więc $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ (uczniowie pomijali we wzorze bezwzględną wartość). Wypowiedzi trzeciej i czwartej grupy już do teorii się nie odwołują.

2. ZDEGENEROWANY FORMALIZM

Dział matematyki szkolnej zwany algebrą, zgodnie z programem polskiej szkoły nie jest tym, co w matematyce - nauce nazywa się algebrą formalną. Algebra szkolna jest bowiem nauką o liczbach rzeczywistych, o pewnych funkcjach zmiennej rzeczywistej przyjmujących wartości rzeczywiste (wielomiany, ułamki algebraiczne) i o pewnych równaniach oraz ich układach określanych i rozwiązywanych w dziedzinie liczb rzeczywistych. Nie jest to więc nauka o ogólnych strukturach algebraicznych. Niemniej istotną rolę odgrywa w tej dziedzinie rachunek już w dużej mierze formalny. W toku wykonywania tego rachunku uczeń nie musi uświadamiać sobie znaczenia symboli, mimo że mają one dlań tylko jedną interpretację jako symbole liczb. Tu właśnie występuje podstawowa różnica między rozumowaniem w algebrze szkolnej, a większością rozumowań w geometrii szkolnej, gdzie znaczenie symbolu odgrywa najczęściej istotną rolę.

To oderwanie od znaczenia prowadzi jednak u uczniów słabszych do zjawiska, które Z. Krygowska nazywa "zdegenerowanym formalizmem". Wyraża się on "... w istocie rzeczy w bezmyślnej »byle jakiej« manipulacji symbolami, która jest czymś zupełnie innym niż poprawny formalizm, polegający też na manipulacji symbolami, ale zgodnej z rygorystycznie stosowanymi regułami" (Krygowska 1977, str. 101).

Zdegenerowany formalizm to między innymi tak silne oderwanie reguł manipulacji od znaczenia symboli, że:

- odwołanie się do tego znaczenia przestaje odgrywać rolę środka kontroli poprawności rachunku,
- występuje zjawisko tworzenia "w razie potrzeby" własnych reguł, często uparcie w dalszym ciągu zakotwiczonych w myśleniu, doraźnie stosowanych, opartych na różnych skojarzeniach, a nie na znaczeniu symboli ani na formalnej dedukcji.

Poprawny formalizm wymaga dużego zdyscyplinowania myślenia i zdolności do strukturalnego organizowania wielu czysto formalnych elementów teorii. Tym nie rozporządza uczeń, w szczególności uczeń słabszy. Dlatego w myśleniu takiego

ucznia w miarę narastania i trudności w operatywnym opanowaniu podstawowej dla rachunku algebraicznego wiedzy, pojawić się może formalizm zdegenerowany. Jeżeli nauczyciel uświadomi sobie to zbyt późno, zwalczenie tej degeneracji może się stać już niemożliwe lub co najmniej bardzo trudne.

Postawy niektórych uczniów ujawnione w toku przedstawionych tu badań wyraźnie o tym świadczą. Uczennica (9) godzi się na to, że $\sqrt{9 \cdot 2} \neq 3 \cdot 2$, bo $\sqrt{6^2} \neq 18$, ale uparcie twierdzi, że $\sqrt{9x} = 3x$, bo "nie mogę zostawić tego x, muszę go tak wyciągnąć" (9;6,7).
Obserwujemy tu obie cytowane cechy postawy określonej zdegenerowanym formalizmem. Znaczenie symbolu, przypomniane jej przykładem numerycznym, nie ma istotnego wpływu. Chęć przedstawienia wyrażenia $\sqrt{9x}$ za wszelką cenę w prostszej postaci skłania uczennicę do zastosowania "własnej reguły", przy czym o tym, jaka to reguła, decyduje wizualna strona zapisu symbolicznego (x nie może zniknąć, nie może być tylko 3). Ta sama uczennica stwierdza rachunkiem numerycznym, że $\sqrt{25 - 9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$, ale to nie przeszkadza jej twierdzić dalej, że $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ (9;34,42). Trzeba manewr numerycznego podstawienia kilkakrotnie powtarzać, aby wreszcie doprowadzić do stwierdzenia: "Teraz już rozumiem, ale przedtem mi się wydawało, że $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2} = A - B$ (9;54). Jak słabe było to "zrozumienie", ujawniło zadanie kontrolne, w którym ta sama uczennica stosowała konsekwentnie wzór $\sqrt{A^2 - B^2} = A - B$ przy każdej możliwie okazji.

Motorem działania uczniów badanych w trakcie rozwiązywania zadań była często chęć doprowadzenia za wszelką cenę wyrażeń do "najprostszej postaci". Termin "najprostsza postać" nie ma jednak sensu ścisłego. Dla uczennicy (12) na przykład najprostszą postacią wyniku rachunku numerycznego jest liczba wymierna, wyjątek stanowi $\sqrt{2}$. O liczbie $\sqrt{9 + 4}$ mówi: "No właśnie dodałam, ale mi nie wychodziło, więc zaczęłam częściowo" (12;15), uzasadniając tak rachunek $\sqrt{9 + 4} = 3\sqrt{4}$ (wyciąga "co się da" przed pierwiastek według wzoru $\sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{b}$).

Oczywiście, zapisanie wyniku jakiegoś rachunku w postaci np. $\sqrt{16}$ nie zadawalałoby nauczyciela. Należałoby uzupełnić ten zapis równością $\sqrt{16} = 4$ i jako odpowiedź podać 4, a nie $\sqrt{16}$. Podobnie "nieeleganckim" wynikiem rachunku byłby zapis $\sqrt{8}$. Należałoby go uzupełnić: $8 = 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ jest bowiem "prostszą postacią" zapisu liczby niż $\sqrt{8}$. Dlaczego? Uczennica (12) wyraża więc zdziwienie, że "można zostawić $\sqrt{13}$" podając wynik rachunku (12;61).

Badani uczniowie dla otrzymania rozwiązania w "najprostszej postaci" tworzą własne reguły, będące wynikiem różnych skojarzeń. Obliczając granicę funkcji $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 - ax} - x}$ $(a = 4,9,5,8)$, uczniowie dążyli więc przede wszystkim do tego, aby otrzymać wzór bez pierwiastka. Wyjaśniają na przykład: "Wyciągnęłam pierwiastek, aby się jego pozbyć" (1), "Z tego trzeba było wyciągnąć pierwiastek" (3). Dla tych i niektórych innych uczniów znaki: $+$, $-$, $\sqrt{}$ są znakami operacji, którą trzeba wykonać, aby otrzymać "najprostszą postać". Mnożenie między literami nie ma znaku, mnożenie nie pełni więc roli takiego operatora. Jednomian jest więc "najprostszą postacią". Ale już $\sqrt{x^2 + 4}$ budzi wątpliwość. Tu trzeba wykonać potęgowanie, dodawanie, pierwiastkowanie; działania są wyraźnie wskazane. Uczennica (12) wykonuje je więc, pisząc $\sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{x^2} = 2x$, otrzymując z satysfakcją najprostszą możliwie postać wyrażenia.

Zauważamy tu więc pewną obserwowaną przez wielu dydaktyków postawę uczniów wobec symboli obiektów matematycznych. Już dla ucznia wprowadzanego w elementy arytmetyki $9 + 4$ nie jest symbolem liczby, lecz wyraża polecenie wykonania rachunku. $9 + 4$ to jeszcze nie liczba, liczbą jest 13. Wiąże się z tym poważny problem dydaktyczny. Z jednej strony, chcielibyśmy, aby symbolika miała dla ucznia charakter operatywny, algorytmiczny, z drugiej, aby uczeń równocześnie interpretował ją pojęciowo. Równość $9 + 4 = 13$ powinien już mały uczeń rozumieć dwojako: "gdy do liczby 9 dodam liczbę 4, otrzymam liczbę 13", oraz symbol "$9 + 4$ i symbol 13 oznaczają tę samą liczbę". W procesie nauczania zachowanie

tej równowagi między algorytmiczną i pojęciową interpretacją symbolu jest istotne i wymaga wnikliwej kontroli tego, jak uczeń myśli w toku posługiwania się symboliką. Gdy tej kontroli braknie, pojawia się szybko w aktywności ucznia zdegenerowany formalizm. Ujawniają go co krok dziwaczne wręcz rachunki. Na przykład, uczennica (2) pisze:

$$\frac{\sqrt{4a^2 + 4} - \sqrt{a^2 + 4}}{2a - a} = \frac{(2a + 2)\sqrt{a} - (2 + a)\sqrt{a}}{a} =$$

$$= \frac{(2a + 2 - 2 - a)\sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Uczeń (10) stwierdza: $\sqrt{a^2 - 2b^2} = a - \frac{1}{2}b$.

Szczególnie rażące jest oderwanie od znaczenia i tworzenie takich "własnych reguł" w rozwiązywaniu zadań geometrycznych, w których uczeń korzysta z rysunku. W zadaniu kontrolnym zorganizowanym po przeprowadzeniu rozmów z uczniami, uczennica (9) stosuje twierdzenie Pitagorasa, "pierwiastkuje" błędnie różnicę kwadratów, otrzymując wynik sprzeczny z oczywistym twierdzeniem, że suma dwóch boków trójkąta jest większa od boku trzeciego. Nie konfrontuje jednak rezultatu rachunku z geometryczną rzeczywistością.

Uczniowie (4) i (2) natomiast nie stosują twierdzenia Pitagorasa, poznanego w szkole podstawowej, omawianego dokładnie po raz drugi w liceum, ale opierają się na "własnych wzorach".

Uczeń (4) - cytowaliśmy tekst jego rozwiązania - długość jednego boku prostokąta przyrównuje do stosunku przekątnej do drugiego boku tego prostokąta. W innym zadaniu, mając daną długość przekątnej równą 5a, upraszcza sobie rachunek, pisząc, że długość tej przekątnej jest równa $\frac{5a}{a} = 5$. Podobnie wymyślne wzory na długości przekątnej i boku prostokąta wypisują uczennice (2) i (5). Prawdopodobnie uczniowie ci zajmując się funkcjami trygonometrycznymi na lekcjach geometrii bezpośrednio poprzedzających badania kojarzyli wszystkie problemy związane z trójkątem prostokątnym z wyznaczaniem jakichś stosunków między bokami tego trójkąta. Konfrontacja z geome-

tryczną rzeczywistością, ze znaczeniem symboli nie mogła tu odegrać żadnej roli, bo takiej konfrontacji nie było. Transfer poprzez formalny tylko rachunek zdegenerowanego formalizmu z algebry do geometrii - to już bardzo zaawansowany stan takiej degeneracji.

Pewne wypowiedzi uczniów robią wrażenie zupełnie przypadkowych. Uczennica (12) obliczając iloraz różnicowy przekształca $\sqrt{4+1}$ bezmyślnie żonglując symbolami liczb; otrzymuje wyniki: $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{4}$, $2\sqrt{2}$. Pierwszy z nich zapewne jest rezultatem następujących czynności: rozłożenia liczby 5 na dwa składniki ($5 = 2 + 3$) oraz "wyciągnięcia" przed pierwiastek liczby 2 przy pozostawieniu 3 pod pierwiastkiem. Skąd otrzymała potem $2\sqrt{4}$, $2\sqrt{2}$, nie wiadomo - wyniki te nie pozostają w żadnym widocznym związku z $\sqrt{4+1}$.

Zauważamy również błędne skojarzenia pierwiastka ze zmniejszaniem liczby. Uczennica (12) zapytana o pierwiastek z jednego odpowiada, że jest on równy: "jeden czterdzieści jeden", "coś koło pół", "coś koło zero i dwie dziesiąte", "jakaś mała liczba cząstkowa", "cztery i coś", "zero cztery dziesiąte". Uczennica ta nie kontroluje poprawności tych wyników, pomimo sugestii ze strony prowadzącego wywiad w formie pytania: "Jaka liczba podniesiona do kwadratu daje jeden?". Po podaniu tych wielu bezsensownych wyników, nagle zostaje olśniona i mówi: "Jeden, samo jeden! Jeden podniesione do kwadratu daje jeden". Jest to dla niej odkryciem. Z pewnych jej wypowiedzi, jak też z komentarza ucznia (4): "wyciągnąłem pierwiastek, to znaczy skróciłem tą liczbę o połowę" można wnioskować, że dla niektórych uczniów pierwiastek z liczby kojarzy się z jej zmniejszaniem, w szczególności $\sqrt{1}$ to dla uczennicy (12) "jakaś mała liczba cząstkowa".

Większość z badanych uczniów nie rozumie pojęcia liczby niewymiernej. Uczniowie ci akceptują liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ być może dlatego, że znają ich interpretację geometryczną: "pierwiastek z dwóch to przekątna kwadratu o boku jeden" (9;16). Dla niektórych $\sqrt{13}$, $\sqrt{15}$ itp. to nie są liczby, znak $\sqrt{\ }$ jest tu symbolem operatora, który należy dopiero jakoś zastosować dla otrzymania liczby w ich rozumieniu.

Ustalenie istoty i przyczyn takich błędów jest trudne i wymaga bardzo różnych i wnikliwych obserwacji ucznia w toku rozwiązywania przez niego zadań. Prezentowane w niniejszym artykule wyniki badań nie dają jeszcze wystarczającej podstawy do wyodrębnienia i wyjaśnienia w sposób jednoznaczny wszystkich takich przyczyn i specyficznych trudności, jakie napotykają badani uczniowie. Można jednak sformułować hipotezę, że dwa czynniki wpływają w sposób istotny na powstawanie i utrwalanie "zdegenerowanego formalizmu" w myśleniu uczniów:

- brak w procesie nauczania profilaktyki (zapobiegania błędom) oraz
- brak właściwych warunków do przeprowadzania ciągłej i wnikliwej kontroli, jak uczeń myśli, ze względu na zbyt liczne klasy i za obszerny program nauczania w stosunku do czasu przeznaczonego na jego realizację.

Te dwie sprawy bezpośrednio się ze sobą wiążą. Brak warunków do ciągłej i wnikliwej kontroli prowadzi do tego, że nauczyciel nie uświadamia sobie dobrze trudności uczniów i możliwości degeneracji ich matematycznej myśli, w konsekwencji nie stosuje w odpowiednim czasie odpowiednio zorganizowanych zabiegów dydaktycznych mających na celu zapobieganie temu procesowi degeneracji. Hospitacje lekcji szkolnych i analiza podręczników świadczą o tym, że tak jest rzeczywiście.

Zagadnienia te analizowała już ćwierć wieku temu Z. Krygowska (1955, 1956). W tym zakresie nic się nie zmieniło od tego czasu, mimo zmian w programach nauczania. Należałoby podjąć szerokie i wnikliwe badania na temat źródeł, form, rozwoju zdegenerowanego formalizmu z jednej strony i metodyki zapobiegania mu, z drugiej.

PUBLIKACJE CYTOWANE

KRYGOWSKA, Z.: Zarys dydaktyki matematyki, ozęść 2, WSiP, Warszawa 1977.

KRYGOWSKA, Z.: O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry, Matematyka 4 (37), (1955), str. 21-32.

KRYGOWSKA, Z.: O niebezpieczeństwach formalizmu w nauczaniu algebry w szkole, Matematyka 4 (42) (1956), str. 15-26.

DEGENERATED FORMALISM IN THE THINKING PROCESS OF SOME PUPILS OF SECONDARY SCHOOL

Summary

The paper presents results of small fragment from much wider research on the role of the so-called "permanent checking" in the process of teaching mathematics.

A written test is not usually sufficient for appraisal of the errors made by pupils when it comes to estimating how essential those errors are, and to defining their source and type. The aim of the investigation presented in this paper is an attempt to analyse some of the errors, and is based on supplementing the limited information obtained from the written work itself by the information gained in an oral interview with the leaner himself. The investigation concerned twelve learners, attending grade 2 of a secondary school (16 year old), whose overall progress in mathematics was evaluated by the teacher as fair and who obtained passing grades in mathematics at the end of the school year.

The research has been conducted in the following way: the learners were given a written test and then they were interviewed freely about their errors. The errors investigated have concern wrong algebraic transformations such as:

$$\sqrt{x^2 - ax} = x - \sqrt{ax}, \quad \sqrt{x^2 - ax} = x - \sqrt{a} \cdot x,$$
$$\sqrt{x^2 + y} = x\sqrt{y}.$$

The attitude displayed by some of the learners in the course of the investigation show very clearly that a poor learner has not got the mental discipline and the skill of organizing structurally many - often formal - elements of the theory at his disposal, which are necessary for conducting algebraic operations. As the difficulties in the efficient mastering of the basic knowledge and skills necessary for conducting the algebraic operations grow, there may appear in the thinking process of the learner a phenomenon called "degenerated formalism" by A. Z. Krygowska. It appears, among other things, in such a wide rift between the rules of manipulation and the meaning of symbols that:

- referring to the meaning of symbols no longer plays its role as means of checking the correctness of the operation,
- there occurs a phenomenon of creating "at need" one's own rules which become persistently fixed in the learner's mentality, are occasionally used, and are based on various associations and not on the meaning of symbols or formal deduction.

If the teacher is not aware of this, the later overcaming the said "degeneration" may become impossible, or at least very difficult.

The results presented here are not sufficient as yet to pinpoint and explain exhaustively all the difficulties encountered in the algebraic operations of the type considered, by the learners taking part in the investigation. A hypothesis can be formulated, though, that at least two factors contribute to arising and fixing this "degenerated formalism" in the thinking process of the learners:

- the lack of preventive treatment in the didactic process,
- the lack of proper conditions for constant and clearsighted checking on how learner thinks.