dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 3 (1984)

ADAM PŁOCKI
Kraków

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Konkretny eksperyment i proces wstępnej matematyzacji w propedeutyce probabilistyki

1. WPROWADZENIE

Idee probabilistyczne stają się powoli ważnym i ciekawym elementem kształcenia matematycznego. Z uwagi na włączenie elementów rachunku prawdopodobieństwa do programów kształcenia ogólnego (co spowodowane jest coraz szerszym wkraczaniem idei probabilistycznych do nauki i praktyki) pilną sprawą staje się wypracowanie właściwych koncepcji dydaktycznych propedeutyki probabilistyki.

Początki nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole muszą mieć szczególny charakter. Wynika to z pewnej specyfiki pojęć probabilistycznych, a także ze szczególnego charakteru wnioskowań probabilistycznych.

Empiryczne podstawy rachunku prawdopodobieństwa, empiryczne podłoże pojęć probabilistycznych wyznaczają konkretnej czynności szczególną rolę i szczególne miejsce w początkach nauczania rachunku prawdopodobieństwa. Ważnym czynnikiem w rozwoju właś-

ciwych intuicji związanych z tworzeniem się pojęć probabilistycznych jest odpowiednio zorganizowana konkretna czynność oraz problematyka inspirowana przez konkretne eksperymenty. Wynika stąd ważne miejsce, jakie w rozwijaniu aktywności uczniów zajmować powinny konkretne przedmioty, konkretne przyrządy losujące. Ich zestaw bywa na ogół skromny: moneta i kostka sześcienna do gry. O urnie z kulami już się raczej tylko mówi. Talię kart uważa się niesłusznie za przyrząd niestosowny do nauczania szkolnego.

Proces przejścia od konkrętu do abstrakcji w rachunku prawdopodobieństwa utarło się ilustrować na przykładzie rzutu kostką i rzutu monetą. Natychmiast po zastąpieniu konkretnej kostki idealnym sześcianem, konkretnej monety monetą idealną, dopasowuje się do tych konkretnych eksperymentów losowych klasyczny model probabilistyczny, przyjmując, że "prawdopodobieństwo każdego wyniku rzutu kostką równa się $\frac{1}{6}$", że "prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki wynosi $\frac{1}{2}$". Taką koncepcję wprowadzenia pojęcia prawdopodobieństwa przyjęto w większości podręczników z matematyki (także i w [10], [19] i [20]). Analiza danych empirycznych służy w takiej koncepcji do weryfikacji tego, jak klasyczny model probabilistyczny, skonstruowany w istocie a priori dla rzutu konkretną kostką czy konkretną monetą, jest modelem właściwym. Gromadzenie danych empirycznych służy więc do weryfikacji zgodności matematycznego modelu z rzeczywistością, a nie do szacowania, do pewnej estymacji tego modelu.

W kształtowaniu trudnych pojęć probabilistycznych szczególną rolę może odegrać oparte na danych empirycznych szacowanie modelu probabilistycznego. Tej roli estymacji nie docenia się w koncepcjach rachunku prawdopodobieństwa dla szkoły.

Zarówno wiek ucznia rozpoczynającego naukę elementów probabilistyki, jak i współczesne tendencje w kształceniu matematycznym przemawiają za przyjęciem postulatu, iż etap propedeutyczny w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa ma być wprowadzeniem ucznia w proces stopniowej matematyzacji konkretnych i jednocześnie szczególnych w swym charakterze sytuacji. Rodzące się na tle konkretnych czynności (a także na tle czynności wyobra-

żonych, pomyślanych, którym konkretne stopniowo ustępują miejsca) sytuacje problemowe mogą dostarczać dobrego surowca do ukazywania metody matematycznej. Te walory sytuacji związanych ze zjawiskami losowymi nie zawsze są właściwie doceniane w nauczaniu matematyki.

Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza koncepcji propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa adresowanej do ucznia w wieku 10-13 lat, tworzonej i weryfikowanej w trakcie prowadzonych przez autora lekcji w szkole i prezentowanej we fragmentach w cyklu programów telewizyjnych dla nauczycieli w latach 1978-1980.

Komentowana niżej koncepcja propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa różni się zasadniczo od już opracowanych koncepcji dydaktycznych początków nauczania probabilistyki (por. [1], [5], [6], [7], [8], [10], [18], [20], [21], [22], [23]). Odróżnia ją przede wszystkim:

(a) charakter obiektów i zjawisk, od których rozpoczyna się nauczanie probabilistyki i które zostają poddawane procesowi wstępnej schematyzacji już na pierwszych lekcjach (w myśl tej koncepcji pierwsze intuicje związane z pojęciami probabilistycznymi kształtowane są w trakcie analizy konkretnych zjawisk, dla których rzuty kostkami, rzuty monetami czy losowania kul z urny są modelami symulacyjnymi);

(b) pewna złożoność pierwszych eksperymentów losowych, od analizy których rozpoczyna się obcowanie ucznia z nieco dlań egzotycznym "światem przypadku" (na ogół lista tych eksperymentów ogranicza się do pojedynczego rzutu monetą, pojedynczego rzutu kostką, a więc do prostych, jednoetapowych eksperymentów losowych; w tej koncepcji wychodzi się od złożonych, wieloetapowych eksperymentów);

(c) odsunięcie na drugi plan klasycznych modeli probabilistycznych (treści probabilistyczne towarzyszące bardziej złożonym, wieloetapowym eksperymentom losowym, dla których określenie a priori modelu probabilistycznego nie jest albo łatwe, albo możliwe, są bogatsze niż w przypadku analizy rzutu

monetą czy kostką; trywialność tych ostatnich uznana została w tej koncepcji za pewien ich mankament, jeśli chodzi o interesy nauczania matematyki);

(d) pewien priorytet, jaki oddano wnioskowaniom a posteriori w kształtowaniu pojęć probabilistycznych (oparte na danych empirycznych szacowania modelu probabilistycznego dla danego konkretnego eksperymentu losowego stanowią w tej koncepcji ważny etap wprowadzania i kształtowania pojęć, a także ważny fragment procesu ukazywania metody matematycznej);

(e) pełniejsze wykorzystanie bogatszych w problematyce probabilistycznej treści matematycznych (do analizy i opisu sytuacji związanych z omawianymi na lekcji eksperymentami losowymi proponuje się użycie funkcji, grafów, układu współrzędnych, trójkąta Pascala itp.);

(f) większa rola przypisana konkretnej czynności rozumianej tu zarówno w kontekście przeprowadzania konkretnych eksperymentów przy użyciu konkretnych przyrządów losujących (monet, kostek, talii kart, deski Galtona, butelki do losowania, kuli itd.), jak i w kontekście rysowania grafów, pomagających w analizie i opisie konkretnych czy też pomyślanych sytuacji losowych;

(g) szczególna rola przypisana symulacji probabilistycznej, wykorzystanie różnych jej form przy analizowaniu zjawisk losowych i w procesie konstruowania matematycznego modelu dla tych zjawisk (chodzi tu o naśladowanie jednych konkretnych eksperymentów losowych innymi, jak i o symulowanie przebiegu pewnych eksperymentów losowych błądzeniem po grafie stochastycznym);

(h) pojawienie się elementów kombinatoryki nie przed, ale w trakcie rozważań probabilistycznych (zjawiska losowe towarzyszące grom inspirują dopiero pewne problemy kombinatoryczne w trakcie poszukiwania odpowiedzi na pytania rodzące się na tle tych zjawisk), rola kombinatoryki jest w tej koncepcji wyraźnie ograniczona z powodu odebrania priorytetu modelom klasycznym;

(i) wykorzystywanie odkrywanych różnymi metodami analogii w różnych sytuacjach losowych do wnioskowań i ocen o charakterze probabilistycznym.

2. DOŚWIADCZENIE LOSOWE CZYLI EKSPERYMENT LOSOWY JAKO KONKRETNE ZJAWISKO. MODEL SYMULACYJNY. MODEL PROBABILISTYCZNY. ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA NA ZBIORZE SKOŃCZONYM

Przedmiotem rachunku prawdopodobieństwa jest konstruowanie tak zwanych modeli probabilistycznych oraz formułowanie odnoszących się do tych modeli twierdzeń.

Program rachunku prawdopodobieństwa dla szkoły ograniczony jest z wielu powodów do tak zwanych skończonych modeli probabilistycznych (zwanych także modelami dyskretnymi, albo ziarnistymi).

Dyskretnym modelem probablistycznym nazywamy parę (Ω, p), gdzie Ω jest niepustym i skończonym zbiorem, a p określoną na nim funkcją o wartościach liczbowych i spełniającą układ następujących warunków

(r1) $p(\omega) \geq 0$ dla każdego $\omega \in \Omega$,

(r2) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Zbiór Ω nazywajmy przestrzenią albo zbiorem wyników. W konkretnych sytuacjach będzie on bowiem zbiorem kodów wszystkich możliwych wyników konkretnego eksperymentu losowego. W probabilistyce zbiór Ω nazwano przestrzenią zdarzeń elementarnych, a jego elementy zdarzeniami elementarnymi. Z pewnych powodów (głównie natury dydaktycznej) nazywajmy elementy zbioru Ω wynikami.

Funkcję p nazywa się rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω, a jej wartość dla elementu ω ze zbioru Ω - prawdopodobieństwem wyniku ω.

Jeśli dla każdego ω z s-elementowego zbioru Ω jest

$p(\omega) = \frac{1}{s}$, to rozkład p nazywamy klasycznym, a parę (Ω, p) klasycznym modelem probabilistycznym.

W literaturze probabilistycznej modelem probabilistycznym nazywa się parę (Ω, P), gdzie P jest funkcją określoną na rodzinie $\mathcal{S}$ wszystkich podzbiorów zbioru Ω o wartościach rzeczywistych i spełniającą układ następujących warunków:

(p1) $P(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{S}$,

(p2) $P(\Omega) = 1$,

(p3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla wszelkich A i B należących do $\mathcal{S}$ i takich, że $A \cap B = \emptyset$.

Funkcję P nazywa się prawdopodobieństwem, podzbiory zbioru Ω zdarzeniami, a wartość funkcji P dla podzbioru A zbioru Ω prawdopodobieństwem zdarzenia A.

Nietrudno zauważyć, że jeśli p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω, to funkcja P określona na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru Ω następującym przepisem (wzorem):

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \quad \text{dla każdego} \quad A \subset \Omega,$$

spełnia układ warunków (p1), (p2) i (p3).

W prezentowanej tu koncepcji propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa przyjęto drogę dojścia do pojęcia prawdopodobieństwa P (jako nieujemnej, addytywnej i unormowanej funkcji na rodzinie wszystkich podzbiorów skończonego zbioru Ω) poprzez pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa.

Każdą funkcję X odwzorowującą skończony zbiór Ω w zbiór liczb rzeczywistych nazywamy zmienną losową.

Symbolem $\{X=a\}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, oznaczamy zbiór (zdarzenie) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$, a przez $P(X=a)$ prawdopodobieństwo tego zdarzenia. Liczbę $P(X=a)$ nazywa się prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa X przyjmuje wartość a.

Jeśli $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$, to zbiór $\{(a_j, P(X=a_j)) : j = 1,2,\ldots,t\}$ nazywamy rozkładem zmiennej losowej X. Rozkład zmiennej losowej X jest funkcją określoną na zbiorze $X(\Omega)$, jej wartości są nieujemne i suma tych wartości dla wszystkich elementów zbioru $X(\Omega)$ wynosi 1.

Wartością oczekiwaną albo nadzieją matematyczną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X) = \sum_{j=1}^{t} a_j P(X=a_j).$$

Nietrudno wykazać, że jeśli p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ a X określoną na tym zbiorze zmienną losową, to

$$E(X) = \sum_{k=1}^{s} X(\omega_k) p(\omega_k).$$

Przytoczone wyżej definicje podstawowych pojęć probabilistycznych cechuje pewna statyczność. Nie uwzględniają one istotnych operacji, które do takiego, a nie innego określenia tych pojęć doprowadziły. Żadna z powyższych definicji nie zdradza, z czego dane pojęcie się wywodzi, jaki jest jego rodowód, skąd wzięła się taka, a nie inna nomenklatura. Nie jest to jednak zadaniem matematycznej definicji.

Statyczność powyższych definicji jest ich poważną wadą dydaktyczną. Przyjęte natomiast słownictwo (nazewnictwo) sugeruje pewien rodowód tych pojęć, pewien ich związek z otaczającą nas rzeczywistością. Używamy potocznie słów: "prawdopodobny", "mało prawdopodobne", "prawdopodobieństwo", "bardzo prawdopodobne", "tak samo prawdopodobne". Zwrot "wartość oczekiwana" także ma w potocznej mowie jakiś konkretny sens. W stwierdzeniu "oba wyniki rzutu monetą są tak samo prawdopodobne" ukryty jest sąd o równych szansach zakończenia się rzutu monetą zarówno jednym, jak i drugim z możliwych wyników.

Etymologia użytych w powyższych definicjach nazw nie może być w nauczaniu bez znaczenia. W procesie kształtowania pojęć

probabilistycznych, a zwłaszcza we wstępnym etapie tego procesu, będziemy wszak odwoływać się do tych potocznych znaczeń, tak, jak w procesie kształtowania pojęć geometrycznych odwołujemy się najpierw do konkretnych obiektów używając ich potocznych nazw (koło, kąt, odcinek, miara itp).

Od formalnych definicji rozpoczyna się w istocie uniwersytecki wykład rachunku prawdopodobieństwa. Wpływ tego wykładu na dydaktyczne koncepcje probabilistyki dla szkoły widoczny jest w wielu szkolnych podręcznikach (zob. [12], [19], [20]), w których na jedną z pierwszych lekcji rachunku prawdopodobieństwa proponuje się określenie prawdopodobieństwa, by natychmiast proponować uczniowi zadania na obliczanie prawdopodobieństw różnych zdarzeń.

Teoria probabilistyczna wyrosła z empirii, stając się matematycznym modelem zespołu faktów empirycznych dostrzeżonych w specyficznych zjawiskach otaczającej nas rzeczywistości. Pojęcia probabilistyczne powstawały w procesie matematyzacji konkretnych sytuacji i odkrytych w nich stosunków ilościowych i jakościowych. Ujmując rzecz w znacznym uproszczeniu, można przyjąć, że proces konstytuowania się teorii probabilistycznej rozpoczął się w stuleciu XVII; jej formalna konstrukcja rozwija się od momentu sformułowania przez Kołmogorowa układu aksjomatów na początku naszego stulecia. Ten inspirowany przez gry hazardowe, problematykę demograficzną i ubezpieczenia społeczne etap tworzenia się probabilistyki jako działu matematyki był okresem kształtowania się pojęć probabilistycznych, był etapem konstrukcji matematycznego schematu dla pewnego układu stosunków wykrytych w otaczającej nas rzeczywistości.

Proces tworzenia się teorii probabilistycznej w ciągu wieków przypomina swoim charakterem proces powstawania geometrii jako teorii matematycznej, której obiektami są abstrakcyjne twory (punkt, prosta, figura), a które powstawały w procesie idealizacji rzeczywistych obiektów, w procesie matematyzacji stosunków i relacji zachodzących pomiędzy tymi obiektami.

Wydaje się właściwe, aby w nauczaniu ten naturalny proces powstawania teorii probabilistycznej w trakcie matematyzacji

konkretnych sytuacji i zjawisk otaczającego nas świata został odtworzony. Wymaga to doboru właściwej problematyki, odpowiednich przykładów konkretnych zjawisk i sytuacji nadających się do takiego procesu i dostosowanych do poziomu, na jakim odbywa się nauczanie.

Rachunek prawdopodobieństwa bywa przedstawiany w nauczaniu szkolnym jako gotowa, już zaksjomatyzowana teoria matematyczna ([19]). Z uwagi na cele nauczania matematyki, a także z uwagi na to, iż rachunek prawdopodobieństwa dostarcza dobrych przykładów metody matematycznej, nauczanie probabilistyki w szkole powinno być procesem ukazywania uczniowi, co i jak się matematyzuje, zamiast ukazywania gotowej, zmatematyzowanej teorii.

Praktyczne zastosowania metod probabilistycznych dostarczają nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa pewnych motywacji. Ważnym elementem tych praktycznych zastosowań jest dopasowywanie do konkretnego zjawiska z otaczającej nas rzeczywistości odpowiadającego mu modelu probabilistycznego, by następnie móc odnoszące się do tego modelu pojęcia i twierdzenia odnieść do tamtej konkretnej sytuacji i sformułować wynikające stąd wnioski. Interpretacja i zastosowania, o jakich tu mowa, towarzyszy na przykład procesowi weryfikowania pewnych hipotez.

Pojęcia probabilistyczne należą do trudniejszych pojęć matematycznych. Wynika to z pewnej specyfiki obiektów i sytuacji, z których te pojęcia się wywodzą. Szczególnie więc ważne być musi w naczaniu to, z jakich spostrzeżeń wywodzą się pierwsze poglądowe wyobrażenia związane z pojęciami probabilistycznymi.

"Szczególny charakter pojęć i wnioskowań probabilistycznych, praktyczna ich rola, a także rola, jaką mogą one odgrywać w kształceniu matematycznym, wyznaczają dydaktyce zadanie właściwego organizowania drogi od konkretu do matematycznej abstrakcji w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa. Dobór i organizacja konkretnych czynności ucznia inspirujących i motywujących problematykę probabilistyczną na lekcji i to czynności poprzedzających operację abstrakcyjną, jak i tej operacji towarzyszących, jest szczególnie ważnym elementem procesu nauczania probabilistyki.

Konstruując dla układu rzeczywistych stosunków odpowiedni model matematyczny, a także interpretując i stosując teorię matematyczną w problemach natury praktycznej (a więc przechodząc od rzeczywistości do jej teoretycznego modelu oraz od modelu do rzeczywistości) dokonujemy istotnych uproszczeń, abstrahujemy od nieistotnych aspektów rzeczywistej sytuacji. Zdolność do takiej schematyzacji jest szczególnie ważna w stosowaniu metod probabilistycznych w praktyce. Ten etap procesu matematyzacji jest także ważny, gdy chodzi o kształtowanie pojęć probabilistycznych na lekcji, w zrozumieniu zarówno ich roli, jak i ich istoty.

W prezentowanej tu koncepcji propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa konkretne zjawiska z otaczającej ucznia rzeczywistości poddawane są procesowi schematyzacji i wstępnej matematyzacji, stając się stopniowo modelami pewnych abstrakcyjnych, wyidealizowanych eksperymentów losowych. Punktem wyjścia do wielu rozważań są konkretne, wzięte z otaczającego nas świata zjawiska. W pierwszej fazie nauczania probabilistyki uczniowie uczą się te zjawiska w pewien sposób upraszczać, schematyzować. Upraszczanie, wybieranie najistotniejszych z probabilistycznego punktu widzenia aspektów, celowe pomijanie rzeczy nieistotnych - to proces jakby wstępnej obróbki, proces schematyzacji tych konkretnych zjawisk. Schematyzacja ta prowadzi od konkretnego eksperymentu losowego do tak zwanego modelu symulacyjnego, a więc innego konkretnego eksperymentu losowego, przeprowadzanego na ogół za pomocą konkretnych przyrządów losujących (kostek, monet, talii kart, deski Galtona itd.). Poprzez idealizację samego przyrządu losującego (jej istotą jest najczęściej abstrahowanie od nieistotnych asymetrii tego przyrządu) dostajemy wyidealizowany, abstrakcyjny, pomyślany eksperyment losowy, dla którego rozkład prawdopodobieństwa daje się bez trudu określić a priori.

Model symulacyjny stanowi w tej koncepcji propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa ważny etap pośredni pomiędzy konkretnym zjawiskiem losowym, a odpowiadającym mu modelem probabilistycznym. Rolę przypisaną w tej koncepcji modelowi symula-

cyjnemu na drodze od konkretu do abstrakcji można by porównać z rolą rysunku w nauczaniu geometrii.

Odwoływanie się do konkretnej rzeczywistości w nauczaniu matematyki, interpretowanie pojęć matematycznych na konkretach uważa się nieraz za pewną wulgaryzację matematyki. Niektórzy matematycy stanowczo sprzeciwiają się przykładom, w których konkretne przedmioty i zjawiska są ilustracją abstrakcyjnych pojęć matematycznych. Wykłady teorii prawdopodobieństwa ograniczają listę przykładów doświadczeń (eksperymentów) losowych, którymi ilustruje się pojęcia i twierdzenia probabilistyczne, do rzutów monetami i rzutów kostkami (i to w domyśle od samego początku chodzi o idealne, symetryczne, nie istniejące w rzeczywistości przedmioty).

W niektórych dydaktycznych koncepcjach probabilistyki pojęcia i twierdzenia probabilistyczne ilustruje się przykładami zjawisk i sytuacji podobnych do zjawisk i sytuacji z naszego rzeczywistego świata, ale zachodzących w abstrakcyjnym, wyidealizowanym kraju. Takim wyidealizowanym "państewkiem probabilistycznym" jest Sykinia w dydaktycznych koncepcjach probabilistyki Arthura Engela ([3], [4]). Istotą tej idealizacji jest określanie a priori rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorach wyników eksperymentów losowych rozważanych w tym abstrakcyjnym świecie. Bohaterami akcji rozgrywających się w tym "probabilistycznym państewku" są myszy, żuki czy też osy, które zachowują się jak idealne kostki, monety czy urny z kulami (błądząca po krawędziach sześcianu mysz z takim samym prawdopodobieństwem może z wierzchołka skierować się tą lub inną krawędzią; spośród m os znajdujących się w układzie pokój-ogród, na który wychodzi otwarte okno tego pokoju, jedna i tylko jedna z os zmienia w danej jednostce czasu pomieszczenie, a prawdopodobieństwo dla każdej z os wynosi $\frac{1}{m}$ itp). Problemy i zadania rodzące się na tle akcji rozgrywających się w tym "państewku" przypominają problemy i zadania geometryczne, w których wielkości i relacje zadane są a priori. Zadania te służą jednak bardziej ilustracji wprowadzonych już pojęć czy twierdzeń niż ich wprowadzaniu.

W wielu innych podejściach do szkolnego rachunku prawdopodobieństwa przykłady i zadania także dotyczą już gotowych, wyidealizowanych sytuacji opisanych jednak w terminologii konkretnych zjawisk i wydarzeń ze świata rzeczywistego. W jednych przykładach mówi się o strzelcu, który trafia do celu z prawdopodobieństwem p, w innych o agregacie, który w danym przedziale czasowym zawodzi z prawdopodobieństwem q itp. (por. [19]).

W przedstawionej tu koncepcji pojęcia i twierdzenia probabilistyczne wywodzą się z konkretnych sytuacji i kształtowane są w procesie matematyzacji takich rzeczywistych wydarzeń, jak rozkład rodzynków w babkach w trakcie mieszania i dzielenia ciasta z rodzynkami na równe części, łowienie ryb na identyczne przynęty przez kilku wędkarzy itd. Takie konkretne zjawiska dostarczają pierwszych spostrzeżeń i pierwszych wrażeń kształtujących intuicyjne podstawy trudnych pojęć probabilistycznych. Zjawiska te dostarczają pierwszych konkretnych modeli dla pojęć i twierdzeń probabilistycznych.

Etap schematyzacji, od której zaczyna się analizowanie tych konkretnych zjawisk z probabilistycznego punktu widzenia, a także etap wstępnej matematyzacji dostrzeganych przy tej okazji stosunków i relacji, traktuję jako ważny moment w kształceniu intuicji probabilistycznych "... dostrzegając w świadomym doborze przez ucznia uproszczeń i konwencji bardzo istotne wartości kształcące nie tylko jego myślenie w ogóle, ale i głębsze rozumienie matematycznych pojęć..." ([9]).

Jednym z celów nauczania elementów rachunku prawdopodobieństwa w szkole jest rozwój zdolności widzenia rachunku prawdopodobieństwa jako teorii dotyczącej wyidealizowanych modeli probabilistycznych, a więc teorii, której pojęcia są równie abstrakcyjne, jak pojęcia geometryczne, czy algebraiczne, ale równocześnie zdolności widzenia tych pojęć w kontekście ich rzeczywistych modeli.

3. PROPEDEUTYKA PROBABILISTYKI W NAUCZANIU MATEMATYKI JAKO ETAP SCHEMATYZACJI KONKRETNYCH ZJAWISK ORAZ ETAP WSTĘPNEJ MATEMATYZACJI STOSUNKÓW DOSTRZEGANYCH W TRAKCIE KONKRETNEJ CZYNNOŚCI

Komentowana w tej pracy dydaktyczna koncepcja propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa obejmuje następujące treści:

I rok nauki (klasa IV): Eksperyment losowy jako konkretne doświadczenie losowe. Zdarzenie pewne. Zdarzenie niemożliwe. Zdarzenie prawdopodobne. Zdarzenia mniej i bardziej prawdopodobne. Konstruowanie modeli symulacyjnych opartych na prostych przyrządach losujących (kostki, monety, talia kart).

II rok nauki (klasa V): Gromadzenie, porządkowanie i przedstawianie danych statystycznych. Częstość zdarzenia. Zdarzenia mało prawdopodobne. Zdarzenia bardzo prawdopodobne. Jakościowe oceny a priori i a posteriori prawdopodobieństw różnych zdarzeń. Wnioski wynikające z identyczności modeli symulacyjnych.

III rok nauki (klasa VI): Zbiór wyników eksperymentu losowego. Wynik sprzyjający danemu zdarzeniu. Zdarzenie jako zbiór. Suma zdarzeń. Iloczyn zdarzeń. Zdarzenia rozłączne. Zdarzenia jednakowo prawdopodobne. Klasyczny model probabilistyczny jako rezultat idealizacji pewnego modelu symulacyjnego. Pierwsze wnioski a priori na temat ilościowej oceny prawdopodobieństwa. Zmienna losowa jako funkcja.

Z wyjątkiem haseł dotyczących modeli symulacyjnych i zmiennej losowej, treści te pokrywają się w zasadzie z probabilistycznymi hasłami programu matematyki w klasach IV, V i VI przedstawionego w pracy [16].

Koncepcja realizacji powyższych haseł probabilistycznych powstawała w trakcie prowadzonych przez autora lekcji w klasach IV, V i VI na terenie Krakowa i Warszawy. Jej tworzeniu towarzyszyć musiały próby ustalenia odpowiedzi na następujące pytania:

a) Dlaczego wprowadzamy rachunek prawdopodobieństwa do szkolnej matematyki?

b) Co chcemy, a co można osiągnąć realizując na lekcjach matematyki powyższe hasła probabilistyczne?
c) Jaka powinna być rola elementów probabilistyki na tym etapie nauczania w kształceniu matematycznym?
d) Jak inspirować i jak motywować pierwsze problemy o charakterze probabilistycznym na lekcjach matematyki?
e) Jak integrować te rozważania z resztą szkolnej matematyki?

Etap propedeutyczny w nauczaniu probabilistyki ma stanowić naturalne wprowadzenie ucznia w świat przypadku, jako w świat nowych idei, nowych pojęć i nowych obiektów, a zarazem nowych metod opisywania i badania otaczającej nas rzeczywistości. Ma to być szczególny etap kształtowania pojęć i pewnych intuicji.

Poprzez odpowiednią organizację aktywności ucznia, poprzez właściwie dobrane sytuacje problemowe uczeń powinien na tym etapie nauczania oswoić się z nowym typem wniosków i ocen, a także z nową terminologią, z pewną specyfiką języka probabilistyki. Propedeutyka ma być wprowadzeniem w liczbową ocenę prawdopodobieństwa, w pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa i w pojęcie modelu probabilistycznego.

Jednym z głównych celów wytkniętych nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa w okresie propedeutycznym według przedstawionej w tej pracy koncepcji jest rozwijanie zdolności odkrywania pewnych analogii w sytuacjach losowych w trakcie schematyzacji tych sytuacji oraz zdolności konstruowania dla konkretnych eksperymentów losowych odpowiednich modeli symulacyjnych, grafów do symulowania ich przebiegu, a przede wszystkim zdolności formułowania odpowiednich wniosków wynikających ze wspomnianych analogii.

3.1. Pierwszy krok w "świat przypadku". Ocena wstępnej wiedzy probabilistycznej ucznia

Początek procesu kształtowania pojęć probabilistycznych wcale nie przypada na pierwsze lekcje rachunku prawdopodobieństwa.

Uczeń w klasie czwartej dysponuje pewnym zasobem intuicji i pewnym doświadczeniem probabilistycznym, wyniesionym z otaczającej go rzeczywistości. Wpływ tej rzeczywistości jest oczywiście o wiele skromniejszy niż ten, jaki ta rzeczywistość wywiera na rozwój intuicji geometrycznych czy też arytmetycznych.

Są jednak okazje do stykania się poza lekcją matematyki z problematyką probabilistyczną. Inspirują ją popularne wśród dzieci gry losowe. Pewną rolę w oswajaniu ucznia z problemami o charakterze probabilistycznym, a także ze specyfiką języka probabilistyki,a w pewnym stopniu także z wnioskowaniami probabilistycznymi, odgrywa popularny w świecie dorosłych totolotek, loterie fantowe, gry w karty czy też coraz modniejsze (i to nie tylko w świecie dorosłych) stawianie pasjansów.

Problemy: jakimi wstępnymi intuicjami probabilistycznymi dysponuje uczeń w momencie rozpoczynania nauki rachunku prawdopodobieństwa, jakim dysponuje on zakresem słów do wyrażania pewnych sądów o charakterze probabilistycznym, jak on te sądy formułuje i jak je argumentuje, jakie popełnia przy tym błędy i co jest ich podłożem, jak i jakie błędne intuicje wpływają na formułowanie fałszywych wniosków - nie doczekały się jeszcze u nas właściwych opracowań, pomimo, iż od wielu lat elementy rachunku prawdopodobieństwa są integralną częścią nauczanej w szkole matematyki.

Inspiracją do pierwszych rozważań na tematy probabilistyczne są następujące problemy, przed którymi stawiam uczniów na kilku pierwszych lekcjach matematyki w klasie IV:

1. Przed rozpoczęciem meczu piłkarskiego sędzia podrzuca do góry monetę. Dlaczego on to robi? Czy jest to jakiś przesąd?
2. Sędzia jest już na boisku, ale - jak się nagle okazało - nie ma przy sobie ani grosza. Ma jednak kostkę sześcienną do gry. Czy ta kostka pozwoli sędziemu wybrnąć z sytuacji, w jakiej się znalazł? W jaki sposób?
3. Czy zamiast monety sędzia mógłby wykorzystać do rozpoczynania meczu talię kart? Ile kart i jakie wystarczą do tego?

4. Czy do rozpoczynania meczu piłkarskiego można by wykorzystać cztery asy z tej samej talii kart?
5. Tuż przed losowaniem liczb w totolotku zepsuła się maszyna losująca. Czy talia kart mogłaby w takiej sytuacji zastąpić maszynę losującą? W jaki sposób za pomocą talii kart przeprowadziłbyś losowanie liczb w totolotku, jeśli losuje się 6 spośród 49 liczb?
6. Zaproponuj, jak jeszcze przeprowadzić losowanie 6 liczb w totolotku, jeśli nie może zrobić tego maszyna losująca.
7. Z grupy 49 osób uczestniczących w zebraniu trzeba wybrać jedną, która będzie to zebranie protokołować. Nikt nie chce tego robić na ochotnika. Jak przeprowadzić wybór protokolanta, aby o tym kto nim zostanie zadecydował wyłącznie przypadek i aby każdy z 49 uczestników zebrania miał przy tym równe szanse?
8. Czy talia kart (lub jej część) pomoże wylosować protokolanta zebrania, o jakim mowa w poprzednim pytaniu?
9. Jakie są różnice pomiędzy losowaniem liczb w totolotku a losowaniem końcówki banderoli?
10. Za chwilę telewizja będzie transmitować losowanie totolotka. Czy tę transmisję można wykorzystać do ustalenia wylosowania osoby do protokołowania?
11. Jakie jest podobieństwo pomiędzy grą w "Chińczyka" (zwaną także grą "człowieku nie irytuj się") a grą w totolotka?
12. W grze w fanty za różne potknięcia uczestnik oddaje w zastaw różne przedmioty. Na końcu trzeba te przedmioty wykupić. Wszystkie zgromadzone przedmioty (czyli fanty) wkłada się do pudełka. Po ustaleniu, w jaki sposób będzie teraz wykupywany fant (fant można wykupić, jeśli jego właściciel wygłosi wiersz bądź zaśpiewa piosenkę, bądź rozwiąże jakieś zadanie matematyczne itp.), losuje się z pudełka fant, który tym właśnie sposobem ma wykupić jego właściciel. Prowadzący grę mając zakryte oczy miesza fanty w pudełku i na chybił trafił wybiera jeden. Czy ów fant został wylosowany? Czy każdy fant miał równe szanse?

13. Jak zorganizować losowanie jakiegoś fantu (dając każdemu równe szanse), jeśli w pudełku jest 6, 13, 52, 49 przedmiotów?
14. Zginęła ci kostka sześcienna do gry, a chcesz zagrać w chińczyka. Jaki inny przedmiot (przyrząd losujący) może w tej sytuacji zastąpić kostkę?
15. Masz tylko monetę. Trzeba wylosować jeden spośród s przedmiotów (różnych w dotyku), dając każdemu równe szanse. Jak to zrobić, gdy s=4, s=8, s=16?
16. Trzeba wylosować jeden z trzech przedmiotów: a, b i c, dając każdemu jednakowe szanse.
    Paweł zaproponował następującą metodę: Rzućmy dwiema monetami. Jak wypadną same orły - to zabierzmy przedmiot a, jak same reszki - to przedmiot b, a jak wypadnie i orzeł i reszka - to zabierzmy przedmiot c.
    Czy ten pomysł jest dobry? Wyjaśnij dlaczego tak uważasz?
17. Gaweł zaproponował inny sposób losowania jednego spośród trzech przedmiotów. - Rzućmy monetą - mówi Gaweł. Jak wypadnie orzeł, to zabiorę przedmiot a, jak reszka - to przedmiot b. Rzućmy monetą jeszcze raz. Jak wypadnie orzeł, to zabiorę przedmiot wylosowany przed chwilą, a jak wypadnie reszka - to zabiorę przedmiot c.
    Czy Gaweł dał każdemu z przedmiotów równe szanse? Dlaczego?
18. Jak za pomocą monety przeprowadzić losowanie jednego spośród trzech przedmiotów, aby żaden z nich nie był uprzywilejowany ani dyskryminowany?
19. Masz dwie kulki czarne i jedną białą. Mieszasz kulki i nie patrząc na nie wyciągasz dwie, czyli losujesz dwie kulki. Albo obie są czarne, albo jedna jest biała i jedna czarna. Czy oba te przypadki są tak samo możliwe (tak samo prawdopodobne)?
20. Losujesz 2 kulki z zestawu 4 kulek, 3 czarnych i 1 białej. Znów mamy tu dwie możliwości: albo obie kulki czarne, albo jedna biała i jedna czarna. Czy obie te możliwości są jednakowo prawdopodobne?

21. Rzucasz trzema monetami. Interesujesz się, ile wypadło reszek. Są zatem 4 możliwości: 0 reszek, 1 reszka, 2 reszki i 3 reszki. Czy każdy z tych przypadków jest tak samo możliwy?
22. Gaweł zaproponował Pawłowi następującą grę: - Ja rzucę dwiema kostkami, żeby zobaczyć, ile wypadło łącznie oczek. Ale zanim to zrobię - mówi Gaweł do Pawła - ty spróbuj to przewidzieć. Wpisz tę liczbę na kartce. Wygrasz, jeśli ci się uda to przewidzieć.
Paweł ma więc prawo postawić na jeden z wielu możliwych wyników rzutu dwiema jednakowymi kostkami. Ile jest takich wyników? Czy są takie, na które warto stawiać? Rzuć wiele razy dwiema kostkami. Czy dostrzegasz coś ciekawego? Czy i w jaki sposób takie spostrzeżenie mógłby w grze wykorzystać Paweł?
23. Ty jesteś uczniem. Twoim przeciwnikiem w grze ma być prowadzący lekcję. Obaj gracie w szachy. Możesz zagrać z nim albo w szachy, albo w chińczyka. Na którą z tych gier zdecydujesz się i dlaczego?

W większości z tych problemów chodzi o konstruowanie przyrządu losującego generującego klasyczny rozkład prawdopodobieństwa na zbiorach o danych liczbach elementów. W innych chodzi o rozstrzyganie, czy generowany przez dany przyrząd losujący rozkład prawdopodobieństwa jest klasyczny (jak np. w pytaniach 16, 17, 19, 20, 21, 22).

Część z tych problemów zostaje omówiona na lekcji. Niektóre nadają się na zadanie domowe.

3.2. Konkretna czynność i pierwsze wnioski o charakterze probabilistycznym. Oceny a posteriori. Pierwszy etap schematyzacji i pierwsze oceny a priori

Nauka o liczbie poprzedzona jest w nauczaniu arytmetyki w szkole konkretnymi czynnościami, w toku których rozwiązuje się

zadania o charakterze jakościowym. Oceny jakościowe (a więc oceny typu: mało, dużo, mniej, więcej, tyle samo) wprowadzają ucznia w późniejsze oceny ilościowe.

Ilościowe oceny prawdopodobieństwa zdarzenia także powinny być poprzedzone w nauczaniu szkolnym ocenami jakościowymi, a więc ocenami typu: to zdarzenie jest mało prawdopodobne, to zdarzenie jest bardzo prawdopodobne, zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż zdarzenie B, te dwa zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.

Pierwsze oceny o charakterze probabilistycznym w omawianej tu koncepcji propedeutyki probabilistyki oparte są na wynikach konkretnej czynności. Oceny te dotyczą zdarzeń związanych z konkretnymi eksperymentami losowymi przeprowadzanymi za pomocą konkretnych przyrządów losujących. Jakościowe oceny prawdopodobieństwa a posteriori uwypuklają częstościowy aspekt prawdopodobieństwa, ukazują rodowód tego pojęcia, a także istotę pierwszych wnioskowań probabilistycznych (na podstawie częstości zdarzenia w eksperymentowaniu już przeprowadzonym formułuje się wnioski na temat szansy zajścia tego zdarzenia w przyszłości).

Klasa może szybko dostarczyć wyników bardzo wielu powtórzeń tego samego eksperymentu losowego, pozwalających formułować właściwe wnioski. Oto jak organizuję konkretne eksperymentowanie i jak do opisu konkretnych sytuacji losowych oraz stosunków i relacji w nich zauważalnych angażuję na lekcji symbolikę i język matematyki:

Na jedną z pierwszych lekcji w klasie IV każdy z uczniów przynosi 6 jednakowych kostek do gry. Uczeń potrząsa wszystkimi kostkami, a potem rozrzuca je na stół. Interesuje nas, na ilu kostkach wypadły poszczególne liczby oczek. Uczniowie proponują najpierw różne sposoby kodowania wyników takiego konkretnego eksperymentu losowego. Uwaga uczniów skupiona zostaje na dwu opisanych słowami na tablicy zdarzeniach:

A: wypadną wszystkie liczby oczek,

B: taka sama liczba oczek wypadnie na co najmniej dwu kostkach.

Każdy z uczniów rozstrzyga, które z wypisanych na tablicy zdarzeń zaszło w trakcie rzucania przez niego kostkami. Pojawia się przy tej okazji zwrot "wynik sprzyja zdarzeniu".

Istotnė jest tu odkrycie, że wynik każdego rzutu i że każdy wynik rzutu sprzyja albo zdarzeniu A, albo zdarzeniu B.

Pierwsze jakościowe oceny prawdopdobieństwa tych zdarzeń inspiruje i motywuje na lekcji prosta gra. Za chwilę prowadzący lekcję rzuci sześcioma kostkami. Zanim to jednak nastąpi każdy z uczniów stawia na jedno z wypisanych na tablicy zdarzeń, wpisując na kartce symbol tego zdarzenia (a więc literę A albo literę B). Kiedy wynik rzutu jest już znany, punkt zdobywa ten z uczniów, który właściwie typował.

Większość uczniów stawia na zdarzenie A. Tak było na bez mała wszystkich lekcjach, jakie prowadziłem w klasie IV. Uczniowie typowali jednak bez zastanowienia się. Z różnych powodów tej popularności zdarzenia A wśród uczniów był wymieniany taki, że "ono jest takie ładniejsze". Były i wnioski, że "na to zdarzenie warto postawić, bo jest bardziej możliwe".

Grę powtarzamy kilka razy przy takim samym typowaniu przez każdego z uczniów, jak za pierwszym razem. Ci stawiający na zdarzenie A są wyraźnie rozczarowani ciągłym przegrywaniem. Tak powstał problem pewnej strategii, jaką można by w grze zastosować, by zmaksymalizować szanse wygranej.

Pierwsza analiza zdarzeń A i B prowadzi do wniosku, że oba są zdarzeniami prawdopodobnymi oraz że są to zdarzenia przeciwne. Istota problemu tkwi teraz w rozstrzygnięciu, które z nich jest bardziej, a które mniej prawdopodobne.

Zdarzenia A i B wiążą się ze złożonym eksperymentem losowym. Dobór takiego właśnie eksperymentu losowego i takich zdarzeń A i B był tu celowy z kilku powodów. Po pierwsze, określenie a priori rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wyników tak skomplikowanego eksperymentu nie jest możliwe na tym etapie nauczania. Chodzi bowiem o to, aby pewne cechy modelu probabilistycznego dla tego eksperymentu odkrywać na lekcji poprzez konkretne eksperymentowanie. Po drugie, zdarzenia A i B w modelu probabilistycznym wyraźnie różnią się wartością

prawdopodobieństwa $(P(A) \approx 0{,}015,\ P(B) = 1 - P(A))$, co uwidoczni się na pewno w eksperymentowaniu znaczną różnicą częstości każdego z tych zdarzeń.

Każdy z uczniów rzuca teraz swoimi sześcioma kostkami i rozstrzyga, któremu ze zdarzeń (A, czy B) sprzyja wynik tego rzutu. W górę podnoszą ręce ci, którzy otrzymali wynik sprzyjający zdarzeniu A. Tę liczbę podniesionych rąk zapisuję na tablicy. Czynność taką powtarzamy 10 razy, zapisując po każdej serii rzutów liczbę podniesionych rąk. Klasa dostarcza w krótkim czasie wyniki kilkuset powtórzeń tego eksperymentu losowego. Ich gromadzenie i opracowanie jest natychmiastowe.

Wyraźnie rzuca się w oczy pewna prawidłowość. Liczba zajść zdarzenia A stanowi znikomy procent dużej liczby wszystkich powtórzeń.

Zdarzenie A zachodziło bardzo rzadko. Czyli jego zajście za chwilę, gdy znów zechcę rzucić kostkami, jest mało prawdopodobne. Zdarzenie B zachodziło bardzo często. Zajście zdarzenia B jest bardzo prawdopodobne. Taki charakter mają pierwsze wnioskowania probabilistyczne na moich lekcjach probabilistyki w klasie IV.

Zgromadzone na lekcji dane empiryczne służą do pewnej jakościowej oceny modelu probabilistycznego. Te dane ujawniają pewne jakościowe cechy tego modelu. W modelu probabilistycznym (Ω, P) funkcja P powinna przyjmować dla zdarzenia A bardzo małą wartość dodatnią, dla zdarzenia B wartość tej funkcji powinna być bliska 1.

We wprowadzanych aktualnie do szkoły podręcznikach z matematyki do klas IV, V i VI konkretna czynność wiąże się z pojedynczym rzutem kostką czy monetą. Dane empiryczne służą w takiej sytuacji do sprawdzenia, że kojarzony tradycyjnie z tymi eksperymentami losowymi klasyczny model probabilistyczny jest właściwym modelem. W sytuacji złożonego eksperymentu, jakim jest rzut sześcioma identycznymi kostkami, dane empiryczne stanowią jedyny środek zdobywania informacji na temat modelu probabilistycznego.

Rozważany tu rzut sześcioma kostkami i zgromadzone dane empiryczne, a w istocie ukryte w tych danych prawwidłowości (zdarzenie A zachodzi bardzo rzadko, zdarzenie B zachodzi bardzo często) będą na późniejszym etapie nauczania prowokować do próby wytłumaczenia tego faktu empirycznego na gruncie matematyki. Zgromadzone tu dane empiryczne stwarzają bowiem pewną sytuację problemową, rodzą pytanie: dlaczego tak się stało? dlaczego tak, a nie inaczej rozłożyły się liczby zajść zdarzenia A i zdarzenia B w wielu powtórzeniach? czy można to jakoś wytłumaczyć?

Dane empiryczne pełnią tu rolę inspirującą do pewnych rozważań a priori, wyjaśniających uzyskane a posteriori prawidłowości czy też zaskakujące fakty. Ta inspirująca pewne rozumowania rola konkretnej czynności w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa nie jest jeszcze należycie doceniana.

Podobny, prowokujący do myślenia, do zastanawiania się nad wyjaśnieniem zauważonych faktów natury empirycznej charakter mają gromadzone na kolejnych lekcjach wyniki innych eksperymentów losowych.

Rzut sześcioma identycznymi kostkami wprowadził w pojęcie zdarzeń mało i bardzo prawdopodobnych. Kolejny konkretny eksperyment losowy wprowadza w pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa, najpierw poprzez oceny jakościowe (wyniki bardziej i mniej prawdopodobne). Eksperymentem tym jest rzut wieloma identycznymi monetami.

Każdy z uczniów przynosi na lekcję 7 dziesięciogroszówek. Wziąwszy je w garść potrząsa nimi i wszystkie rozrzuca na stół obserwując, na ilu monetach wypadł orzeł (liczbę wyrzuconych orłów oznaczamy przez x), a na ilu reszka (tę liczbę oznaczamy przez y). Wynik rzutu kodujemy parą (x,y), którą następnie traktujemy jako parę współrzędnych punktu na płaszczyźnie. Ta interpretacja zostanie później wykorzystana do określenia a priori rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wyników rzutu siedmioma identycznymi monetami, poprzez rozkład prawdopodobieństwa określony a priori dla siedmiokrotnego rzutu jedną monetą.

Problem pewnej estymacji rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wyników rzutu siedmioma monetami pojawia się na lekcji w związku z grą, która ów problem inspiruje i motywuje.

Za chwilę prowadzący lekcję rzuci siedmioma monetami. Ale zanim to uczyni, każdy z uczniów stawia na jeden z wyników rzutu, wpisując kod tego wyniku (parę liczb) na kartce. Kiedy wynik rzutu monetami jest już znany, punkt zdobywa ten, kto postawił na wynik, jakim właśnie eksperyment się zakończył.

Na tle sytuacji, jaką stworzyła gra, rodzą się następujące pytania:

a) Ta gra coś nam przypomina. Do jakiej popularnej gry jest ona podobna? Chodzi tu o analogie z totolotkiem. Rzucający monetami pełni tu jakby rolę maszyny losującej. Wpisywanie na kartce pary liczb - to jakby wypełnianie kuponu.
b) Czy można w tej grze stosować jakąś strategię? Czy są wyniki, na które opłaca się stawiać? Chodzi tu z kolei o istotną różnicę pomiędzy totolotkiem, w którym nie ma znaczenia, na jaki wynik losowania liczb się stawia. Tu pewne wyniki dają większe szanse wygranej.
c) W prawdziwym totolotku gracz może wypełnić tyle kuponów, ile tylko zechce. Gdyby regulamin gry z monetami również na to zezwalał, to ile par liczb (i jakie pary) wystarczy wpisać ma kartce przed rzutem monetami, aby być pewnym wygranej? W ostatnim pytaniu chodzi o określenie zbioru wszystkich możliwych, w ustalony wyżej sposób zakodowanych wyników rzucania siedmioma monetami.

Oceny a priori rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wyników rzutu siedmioma monetami, wynikające z pewnych symetrii przyrządu losującego, są na tym etapie nauczania i przy tak celowo złożonym eksperymencie losowym jeszcze niemożliwe. Chodzi bowiem o to, aby pewne cechy tego rozkładu odkrywać poprzez konkretną czynność, aby droga od konkretu do abstrakcji prowadziła w tym przypadku poprzez dane statystyczne, aby wartości rozkładu prawdopodobieństwa dla poszczególnych wyników

oceniać (szacować) częstościami tych wyników.

Obserwacja i analiza danych empirycznych ma tu znowu stanowić pierwszy etap myślenia matematycznego, jakie towarzyszy rozstrzyganiu powstałych na tle gry losowej problemów.

Każdy z uczniów powtarza rzut swoimi monetami 10 razy, rejestrując liczby rzutów zakończonych poszczególnymi wynikami. Dane od wszystkich uczniów zostają zebrane i opracowane na tablicy w następującej tabeli:

wynik:	(7,0)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(3,4)	(2,5)	(1,6)	(0,7)
łączna liczba rzutów zakończonych tym wynikiem	3	15	49	80	72	52	17	2

(Wypełniona wyżej tabelka jest protokołem z lekcji prowadzonej w klasie V).

Opracowane w tabeli dane empiryczne dają uczniowi pierwszy, jeszcze mglisty obraz rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wyników rzutu siedmioma monetami. Dane te są testem, dającym już teraz podstawy do kwestionowania zgodności rozkładu klasycznego na zbiorze ośmioelementowym z tym konkretnym eksperymentem losowym.

Analiza danych empirycznych prowadzi najpierw do jakościowych ocen rozkładu prawdopodobieństwa. I na razie oceny te pozostają w ścisłym związku z grą. Uczniowie wskazują teraz wyniki, na które w grze stawiać nie warto (bo dają małe szanse wygranej) oraz wyniki, na które opłaca się stawiać (bo dają duże szanse wygranej). We wnioskach pojawiają się terminy "mało prawdopodobny", "bardziej prawdopodobny".

Wyniki (0, 7) i (7, 0) są mało prawdopodobne. Wynika to z empirii. W pierwszych wnioskowaniach podkreślany jest związek słów "rzadko" i "mało prawdopodobne" oraz słów "często" i "bardzo prawdopodobne". Podkreślona zostaje także wspólna cecha formułowanych wniosków: Wszystkie one dotyczą pewnego prognozowania przyszłości na podstawie tego co się zdarzało

(częściej lub rzadziej) w przeszłości. Ocena szansy każdego z wyników na podstawie tego, jak często kończył się tym wynikiem rzut monetami, ma tutaj uzasadnienie w fakcie, że zwyczaje przyrządu losującego (monet), a ściślej: prawa rządzące losem tych monet w trakcie rzucania nimi, nie ulegają istotnej zmianie w czasie.

Dane empiryczne wskazują, że w modelu probabilistycznym wynikom $(7,0)$ i $(0,7)$ trzeba przypisać małe wartości funkcji p (rozkładu prawdopodobieństwa). Dane te nie rozstrzygają jednak, czy wartości funkcji p dla tych wyników powinny być równe czy też nie. Kształt monety, jej pewne symetrie, dają podstawy do wniosku, iż wyniki $(7, 0)$ i $(0, 7)$ należy uznać za jednakowo prawdopodobne.

Z symetrii tych wynika wniosek, iż w modelu probabilistycznym funkcja p powinna przypisywać wynikom $(7-j, j)$ i $(j, 7-j)$ równe wartości dla $j=0,1,2,3$.

Zaniedbanie owych mało istotnych w tej sytuacji asymetrii dziesięciogroszówek, zaniedbanie pewnych różnic pomiędzy monetami z zestawu, którym rzucano, stanowi istotę procesu schematyzacji, jaki towarzyszy przejściu od konkretu do jego matematycznego modelu.

W tym pierwszym stadium nauczania probabilistyki praca ucznia organizowana jest na konkretach (rzuty konkretnymi kostkami, rzuty dziesięciogroszówkami, rozkładanie potasowanych kart, spadanie kulki po nachylonej desce Galtona itp). Ale celem tej konkretnej czynności jest konstrukcja abstrakcyjnego modelu. Dane empiryczne dostarczają pewnych informacji na temat "kształtu" tego modelu, na temat pewnych jego cech charakterystycznych.

Gromadzone w klasie dane empiryczne mają także od samego początku prowokować ucznia do pewnych refleksji nad tym, dlaczego tak a nie inaczej rozłożyły się w tabeli liczby eksperymentów pomiędzy poszczególnymi wynikami. Celem konkretnej czynności, jaka towarzyszy pierwszym lekcjom rachunku prawdopodobieństwa, jest ujawnienie pewnych związków matematycznego schematu z rzeczywistością, dla której ten schemat konstruujemy.

Eksperyment fizyczny i dane empiryczne stanowią tu istotny etap procesu matematyzacji, etap formowania się w umyśle ucznia pierwszych schematów, pierwszych prób wnikania w znaczenie używanych tu, a zapożyczonych z mowy potocznej terminów.

Później powrócimy do zgromadzonych teraz danych empirycznych. Probabilistyczny model dla rzutu siedmioma monetami będzie można na następnym etapie nauczania skonstruować a priori, w procesie schematyzacji siedmiokrotnego rzutu monetą. Konfrontacja danych empirycznych z postacią tego modelu ujawni, jak przystaje ów matematyczny schemat do rzeczywistości, od której wyszliśmy.

W przypadku rozważanych teraz konkretnych eksperymentów dane empiryczne pełnią potrójną rolę: dają pewne oszacowanie nieznanego rozkładu prawdopodobieństwa, prowokują do prób wyjaśniania powodów prawidłowości, jakie w tych danych tkwią, potem posłużą do weryfikacji zgodności modelu z rzeczywistością.

Uzyskana ocena rozkładu prawdopodobieństwa wykorzystana zostaje do oceny prawdopodobieństwa następujących dwu zdarzeń związanych z rzutem siedmioma monetami:

A: wszystkie monety upadną ku górze tą samą stroną,

B: wypadną 3 orły względnie 3 reszki.

Zdarzenia te zostają zakodowane zbiorami sprzyjających im wyników (a więc podzbiorami zbioru Ω). Odtąd, na lekcji zdarzenia utożsamiane zostają ze zbiorami. Zbiory A i B są równoliczne. Z empirii wynika, że zdarzeń tych nie można uznawać za jednakowo prawdopodobne. Przy okazji pojawia się problem określania zdarzeń jednakowo prawdopodobnych. Uczniowie proponują przykłady zdarzeń tak samo prawdopodobnych, jak zdarzenie C: wypadnie więcej reszek niż orłów.

3.3. Losowe rozmieszczenie jednakowych kul w dużych ponumerowanych szufladach jako model symulacyjny

W klasie V omawiam z uczniami różne typy tak zwanych losowych rozmieszczeń kul w szufladach. W zależności od typu, liczby kul i liczby szuflad uczniowie konstruują różne przyrządy losujące, pozwalające przeprowadzać takie rozmieszczenia.
Oto jeden z typów losowego rozmieszczenia kul w szufladach, wiążący się z rzutem wieloma identycznymi monetami: Komoda ma dwie, ponumerowane liczbami 0 i 1, szuflady. Każda z szuflad może pomieścić wiele kul. Obok w pudełku znajduje się 7 identycznych kul, które trzeba rozmieścić w tych szufladach przestrzegając następującej zasady: dla każdej wyjętej z pudełka kuli trzeba wylosować szufladę, do której kula zostanie włożona, przy czym każda z szuflad ma mieć przy tym jednakowe szanse. Zadanie, jakie stoi przed klasą, to opracowanie sposobu przeprowadzenia takiego eksperymentu. Chodzi tu przede wszystkim o odkrycie, iż pozwala to zrobić rzut siedmioma monetami. Aby rozmieścić kule wystarczy rzucić siedmioma monetami i następnie tyle kul przełożyć z pudełka do szuflady numer 0, na ilu monetach wypadł orzeł, pozostałe przekładając do szuflady numer 1.

Ostatnie odkrycie wykorzystane zostaje do jakościowej oceny prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

A_1: wszystkie kule trafią do jednej szuflady,

B_1: do jednej szuflady trafią dokładnie 3 kule.

Odkryte analogie, odkryty jakby probabilistyczny izomorfizm sytuacji losowych daje podstawy do oceny i wniosków typu: Jest mało prawdopodobne, aby w losowym rozmieszczeniu 7 identycznych kul w dwu dużych szufladach wszystkie kule trafiły do jednej szuflady. I jest to tak samo mało prawdopodobne, jak to, że w rzucie siedmioma monetami wszystkie one upadną do góry tą samą stroną.

Na kolejnych lekcjach uczniowie odkrywają w znanym już rzucie identycznymi monetami i w losowym rozmieszczeniu jednakowych kul w dwu dużych ponumerowanych szufladach modele symulacyjne dla pewnych konkretnych zjawisk. Odkrycie to będzie mieć

zasadnicze znaczenie przy konstruowaniu właściwego modelu probabilistycznego dla tych zjawisk.

Proces odkrywania i dopasowywania dla rzeczywistej sytuacji właściwego dlań modelu probabilistycznego wymaga zdolności wyabstrahowywania faktów z probabilistycznego punktu widzenia najistotniejszych. Taki proces schematyzacji konkretnego zjawiska prowadzący poprzez właściwy model symulacyjny do odpowiedniego modelu probabilistycznego stanowi ważny element weryfikowania pewnego typu hipotez.

Istota weryfikacji pewnych hipotez metodami probabilistycznymi polega na eliminowaniu na podstawie znanego rezultatu tych spośród wielu jego możliwych przyczyn, które ze stosunkowo małym prawdopodobieństwem mogą doprowadzić do tego rezultatu. Prawdopodobieństwo, z jakim dana przyczyna może doprowadzić do znanego nam rezultatu, wyznaczamy w modelu probabilistycznym, jaki odpowiada sytuacji i który otrzymujemy w procesie schematyzacji i wstępnej matematyzacji tej rzeczywistej sytuacji. Mowa tu o sytuacji, której dotyczyła hipotetyczna przyczyna i znany rezultat (skutek). Przykłady ilustrujące ten typ weryfikowania hipotez zamieszczono w rozdziale 14 w [16].

Wspomniane wyżej powody natury praktycznej, ale przede wszystkim pewne dydaktyczne walory procesu schematyzacji rzeczywistych zjawisk, uzasadniają rolę, jaką przypisano w tej koncepcji propedeutyki probabilistyki analizie rzeczywistych zjawisk o charakterze losowym.

Zjawisko, które teraz poddawane zostaje procesowi wstępnej matematyzacji, to łowienie ryb przez dwu wędkarzy. Zadanie rodzi się na tle problemu, przed którym staje klasa w momencie, gdy urywa się opowiadanie o dwu wędkarzach, którzy łowiąc na identyczne przynęty i złowiwszy łącznie 7 ryb wrócili znad stawu. Chodzi tu o wnioski, jakie wynikają z tych informacji, a które dotyczą tego, co zdarzyło się w trakcie połowów.

Dyskusja rozpoczyna się od wyróżnienia rzeczy najistotniejszych (jednakowe przynęty) i od wskazywania tego, co można i co należy zaniedbać, jakie uproszczenia mają tu uzasadnienie, jakie nie wypaczają istoty sytuacji. Schematyzacja taka prowadzi do odkrycia, że w trakcie połowów zostały w istocie rozmie-

szczone losowo kule w dwu różnych szufladach. Jeśli przez x oznaczyć liczbę ryb złowionych przez jednego z wędkarzy, a przez y liczbę ryb złowionych przez drugiego z nich, to para (x,y), gdzie $x = 0,1,2,3,4,5,6,7$ i $y = 7 - x$, jest czytelnym kodem wyniku zjawiska, o jakim tu mowa. Tabelka ze str. 178 może być zatem uznana za podstawę dla jakościowej estymacji rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze wyników łowienia ryb.

Ostatnie spostrzeżenie prowadzi do ocen (na razie jeszcze jakościowych) prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

A_2: wszystkie ryby złowił jeden z wędkarzy,

B_2: jeden z nich złowił dokładnie 3 ryby.

Rozważania związane z konkretnymi zjawiskami ukazują uczniowi, co i jak się matematyzuje. Te dyskusje wprowadzają ucznia w proces konstrukcji modelu probabilistycznego dla rzeczywistych zjawisk o charakterze losowym oraz przygotowują do późniejszych zastosowań metody probabilistycznej przy weryfikowaniu hipotez.

W zadaniu domowym uczniowie mają ocenić, jak bardzo prawdopodobne są zdarzenia A_3 i B_3 związane z losowym rozkładem rodzynków w trakcie mieszania ciasta z siedmioma rodzynkami i dzielenia go na dwie równe części, z których uformowano dwie babki:

A_3: jedna z babek będzie bez rodzynków,

B_3: do jednej z babek trafią dokładnie 3 rodzynki.

Zjawiskom, doświadczeniom, eksperymentom losowym, wokół których skupiały się powyższe dyskusje, odpowiada ten sam model probabilistyczny (Ω, p), w którym $\Omega = \{(x,y) : x = 0,1,2,3,4,5,6,7 \text{ i } y = 7 - x\}$ oraz

$$p\big((x,y)\big) = \binom{7}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

Liczba 7 monet, 7 ryb, 7 rodzynków i 7 kul ma tu pewien związek z wymiarami szachownicy, która będzie na następnym etapie nauczania planszą do pewnej gry pozwalającej a priori określić rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze wyników sied-

miokrotnego rzutu monetą (ten ostatni eksperyment losowy pozostaje w związku z jednoczesnym rzutem siedmioma monetami). Liczba 7 wiąże się także z liczbą poziomów na desce Galtona, dostępnej aktualnie w sprzedaży, która na kolejnych lekcjach będzie przyrządem do symulowania siedmiokrotnego rzutu monetą i rzutu siedmioma monetami.

Pewną rolę w kontekście ostatnich przykładów odgrywa następujące zadanie: Paweł z Gawłem wyprowadzają co dzień swego psa na spacery. Postanowiono, że na każdy dzień najbliższego tygodnia towarzysz psich spacerów zostanie wylosowany. Z zestawu dwu białych i dwu czarnych kul losuje się dwie. Jeśli obie są tego samego koloru, to z psem wychodzi na spacer Paweł, jeśli różnego koloru, to z psem na spacer wychodzi Gaweł. Rozważmy dwa następujące zdarzenia:

A_4: cały tydzień będzie wyprowadzał psa ten sam chłopiec,

B_4: 3 lub 4 razy w tygodniu z psem na spacery będzie wychodził Paweł.

Czy A_4 jest zdarzeniem tak samo prawdopodobnym jak zdarzenie A? Czy zdarzenia B_4 i B są tak samo prawdopodobne? Dlaczego?

W zadaniu tym chodzi o wykrycie, iż określony wyżej rozkład prawdopodobieństwa na ośmioelementowym zbiorze nie jest w tej sytuacji właściwy (losowanie nie daje równych szans).

W omawianym do tej pory losowym rozmieszczaniu kul do jednej szuflady mogła trafiać dowolna ilość kul. Z tego powodu nazwano te szuflady dużymi. Teraz rozważać się będzie inny typ rozmieszczeń, przy których do każdej szuflady będzie trafiać dokładnie jedna kula. Szuflady nazwiemy wtedy małymi.

3.4. Losowe rozmieszczenie ponumerowanych kul w małych ponumerowanych szufladach i pierwsze ilościowe oceny a priori rozkładu prawdopodobieństwa

Jakościowe oceny prawdopodobieństwa zdarzenia dotyczyły zdarzeń, które w odpowiednim modelu probabilistycznym różnią się znacznie wartością prawdopodobieństwa, co w trakcie eksperymentowa-

nia uwidacznia się wyraźną różnicą częstości ich zachodzenia w bardzo wielu powtórzeniach eksperymentu. Były to wnioski a posteriori. Na podstawie częstości zdarzenia wnioskowano o wartości jego prawdopodobieństwa w modelu. Chodziło jednak tylko o to, czy wartość ta powinna być mała czy duża, większa czy mniejsza.

Pojęcie zdarzeń jednakowo prawdopodobnych i związanych z tym samym eksperymentem losowym należy do trudniejszych pojęć. Stosowane do tej pory oceny a posteriori zawodzą w przypadku zdarzeń jednakowo prawdopodobnych w modelu.

Podstawą do podjęcia decyzji o uznawaniu dwu zdarzeń związanych z tym samym eksperymentem losowym za jednakowo prawdopodobne (a ściślej, że w modelu probabilistycznym należy im przypisać równe wartości funkcji P) są na ogół pewne symetrie, które ujawniają się w procesie schematyzacji, a więc na etapie wstępnej matematyzacji.

Na jedną z lekcji w klasie VI uczniowie przynoszą talię kart. Wykorzystujemy najpierw 3 karty tego samego koloru: walet, damę i króla. Każdy z uczniów dokładnie tasuje swoje karty, a następnie rozkłada je w rzędzie jedna po drugiej tak, jak rozkłada się karty przy układaniu pasjansa. Obiektem zainteresowania jest kolejność, w jakiej ułożyły się karty.

Na tle powyższego konkretnego eksperymentu losowego pojawiają się następujące pytania:

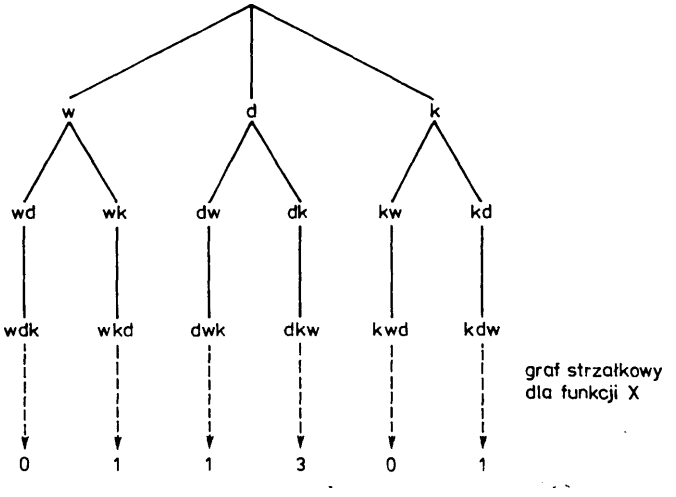
a) Jak czytelnie zakodować otrzymany wynik?
b) Jak określić zbiór Ω wszystkich możliwych wyników?
c) Czy są jakieś powody, dla których jeden z możliwych wyników należałoby uważać za bardziej możliwy (bardziej prawdopodobny) niż inny?

Na lekcji problemy te inspirowała gra losowa, w której trzy wspomniane karty są rekwizytem i która przypomina poznane uprzednio gry. Za chwilę prowadzący lekcję rozłoży swoje trzy potasowane wcześniej karty. Przedtem każdy z uczniów stawia na jeden z możliwych wyników rozkładania kart, wpisując jego kod na kartce. Kiedy wynik rozkładania kart jest już znany, każdy z graczy konfrontuje ten wynik z tym, na jaki wcześniej posta-

wił. Gracz uzyskuje tyle punktów, ile ma trafień, a więc na ilu miejscach przewidział karty tak, jak je ustawił przypadek w trakcie tasowania i rozkładania.

Sytuacja problemowa jest tu analogiczna do sytuacji przy grze z monetami. Teraz jednak można wygrać różne liczby punktów.

Karty kodujemy pierwszymi literami nazwy figury, a wynik rozkładania kart - permutacją zbioru $\{w,d,k\}$. Za pomocą drzewka uczniowie konstruują zbiór wszystkich możliwych wyników Przyjmujemy (w tej sytuacji bardzo dla ucznia naturalną) konwencję opisywania węzłów drzewka. Kolejny węzeł każdej gałęzi opisany jest ciągiem kodów wyników wszystkich etapów niepóźniejszych niż ten, któremu węzeł odpowiada. W przypadku rozkładania potasowanych wcześniej kart drzewko powstaje w trakcie analizy, jak etapami może powstawać wynik. Kolejne węzły danej gałęzi zawierają kod historii etapowego powstawania danego wyniku (zob. rys. 1). Jest to odmienna od przyjętej w teorii grafów (a także w [4], [5] i [8]) konwencja opisywania węzłów drzewka.



Rys. 1

Uczeń, który przed rozłożeniem kart postawił na jeden z możliwych wyników tego rozkładania, określił na zbiorze wszystkich wyników rozkładania zmienną losową. Na rysunku 1 zaznaczono grafem strzałkowym zmienną losową X, jaką na Ω określił gracz, który postawił na wynik dkw.

Pozostańmy przy tym graczu i rozważmy zdarzenia:

A_j: ten gracz zdobędzie j punktów $(j=0,1,2,3)$,

A: ten gracz zdobędzie przynajmniej jeden punkt.

Mamy tu $A_j = \{X=j\}$ dla $j=0,1,2,3$ oraz $A = A_1 \cup A_3$. Na uwagę zasługuje tu zdarzenie A_2 jako dobry przykład zdarzenia niemożliwego. Przykładami zdarzeń niemożliwych bywają zdarzenia typu: "w rzucie kostką wypadnie 7 oczek", "w rzucie monetą wypadnie orzeł i reszka". Nie wydają się to być właściwe przykłady, w ich określeniu tkwi pewna niedorzeczność. Problem wiąże się ogólnie z niedobrymi przykładami warunków określających zbiór pusty.

Aby ocenić, jak bardzo prawdopodobne są zdarzenia A_0, A_1, A_3 i A, uczniowie proponują gromadzenie danych empirycznych. Ale teraz już pora na oceny a priori. Warunki, w jakich przeprowadzany jest eksperyment (dokładne tasowanie kart), dają tu podstawy do uznania modelu klasycznego za właściwy model dla tego eksperymentu losowego. Ten fakt upoważnia do wniosków, że związane z tym eksperymentem zdarzenie jest tym bardziej prawdopodobne, im więcej sprzyja mu wyników oraz że zdarzenia równoliczne są jednakowo prawdopodobne.

Oceny mają teraz charakter ilościowy (A_0 dwa razy bardziej prawdopodobne niż A_3, A_1 trzy razy bardziej prawdopodobne niż A_3, A_3 tak samo prawdopodobne jak wyrzucenie szóstki kostką).

Szczególną rolę w odkrywaniu pewnych izomorfizmów pełni dyskusja nad szansami innego gracza, który postawił na przykład na wynik wdk. Niech Y będzie zmienną losową, jaką ów gracz automatycznie określił na zbiorze Ω. Chodzi o odkrycie, że zdarzenia $\{X=j\}$ oraz $\{Y=j\}$ są dla $j=0,1,2,3$ tak samo prawdopodobne, a więc że rozkłady zmiennych losowych X i Y są identyczne.

Poprzednie wnioski dotyczące rzutu siedmioma monetami (a więc dotyczące konkretnego, ale w pewnym sensie sztucznego eksperymentu losowego) zostały przeniesione na konkretne zjawiska, dla których po pewnej schematyzacji rzut monetami stał się odpowiednim modelem symulacyjnym.

Rozkład potasowanych kart jest także nieco sztucznym eksperymentem. Otrzymane w trakcie jego analizy oceny i wnioski zostaną teraz przeniesione na sytuacje w pewnym sensie analogiczne, na zjawiska z otaczającej nas rzeczywistości, dla których rozkład potasowanych kart wydaje się być właściwym modelem symulacyjnym.

W problem schematyzacji konkretnej sytuacji, która to schematyzacja poprzez model symulacyjny prowadzi do odpowiedniego modelu probabilistycznego, wprowadza na lekcji krótkie opowiadanie. Rzecz dotyczy zasłyszanej w pociągu rozmowy, w której jeden z pasażerów opowiada, jak to wczoraj napisał 3 listy (do babci, do wujka i do kolegi), które następnie włożył do trzech jednakowych kopert. Telefon przerwał ich adresowanie. Po rozmowie telefonicznej koperty zaadresował, nalepił nań znaczki i kiedy listy zostały już wrzucone do skrzynki, ów roztargniony człowiek uświadomił sobie, że wpisując na kopertach adresy nie sprawdził, jaki list (list do kogo) znajduje się wewnątrz. Tu kończy się opowiadanie. Uczniowie próbują ustalić jego związek z lekcjami matematyki (probabilistyki).

Uwaga uczniów skupiona zostaje następnie na zdarzeniach C_j: dokładnie j listów trafi pod właściwy adres ($j=0,1,2,3$).

Uczniowie proponują różne sposoby symulowania eksperymentu losowego, jaki towarzyszył wysyłaniu listów (a w istocie ich adresowaniu). Jedni proponują użycie do symulowania 3 jednakowych kopert i trzech kartek. Potem rezygnują z kopert. Trzy jednakowe kartki, opatrzone na odwrocie literami: b (babcia), w (wujek) i k (kolega), rozłożone - po wcześniejszym ich potasowaniu - na trzech wcześniej zaznaczonych miejscach (pierwsze na przykład literą b, drugie literą w, a trzecie literą k), dają jeden wynik eksperymentu losowego, symulując

przebieg tamtego eksperymentu z opowiadania.

Ostatni sposób symulowania podsuwa uczniom pomysł, aby użyć do symulacji trzech kart: waleta, damę i króla. Na stole zaznaczamy kontury trzech kart. To trzy miejsca, na które rozłożone zostaną po dokładnym potasowaniu trzy karty: walet (list do kolegi), dama (list do babci) i król (list do wujka). Kontury wcześniej oznaczone zostały literami: w, d i k. Liczba listów skierowanych pod właściwy adres jest w modelu symulacyjnym liczbą wygranych punktów w poprzednio omawianej grze przez gracza, który postawił na wynik określony poprzez oznaczenie konturów na stole. Odkrycie tego faktu pozwala natychmiast przenieść poprzednio uzyskane wnioski i oceny na zdarzenia C_j $(j=0,1,2,3)$, a także na zdarzenie

C: przynajmniej jedno pismo trafi pod właściwy adres.

Symulacja probabilistyczna, istotą której jest naśladowanie jednych eksperymentów losowych innymi, odgrywa więc ważną rolę w odkrywaniu pewnych analogii i w wykorzystywaniu tych analogii do wnioskowań o charakterze probabilistycznym. Ta rola symulacji nie wydaje się być doceniana w dydaktycznych koncepcjach probabilistyki.

Liczba uzyskanych punktów w grze z kartami, liczba listów, które trafiają pod właściwy adres - to liczby tak zwanych skojarzeń w losowym rozmieszczeniu ponumerowanych kul w ponumerowanych szufladach (zob. [16]).

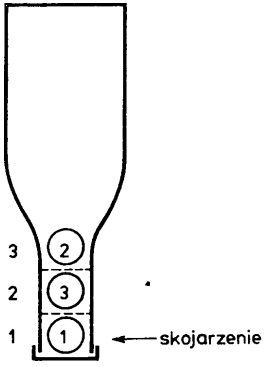
Komoda ma n ponumerowanych szuflad małych (bo w każdej może się pomieścić tylko jedna kula), a obok w pudełku znajduje się n ponumerowanych kul. Dla wyjętej z pudełka kuli numer 1 trzeba wylosować szufladę, do której tę kulę włożymy, przy czym każda z szuflad ma mieć przy tym jednakowe szanse. Dla wyjętej z pudełka kuli numer 2 losujemy jedną spośród pustych szuflad, dając każdej pustej szufladzie równe szanse. Tak samo postępujemy z pozostałymi w pudełku kulami.

Jak nietrudno zauważyć, kule można rozmieszczać w opisany wyżej sposób losując n-krotnie bez zwracania kulę z pudełka i kolejno wyciągane (wylosowywane teraz) kule wkładając do kolejnych szuflad.

Przyjmijmy n=3. Dyskusja w klasie nad sposobami przeprowadzenia losowego rozmieszczenia trzech ponumerowanych kul w trzech małych ponumerowanych szufladach prowadzi do odkrycia analogii pomiędzy tym rozmieszczeniem a rozkładaniem trzech potasowanych kart na trzech wcześniej oznaczonych miejscach, a także pomiędzy rozsyłaniem listów w sposób przypadkowy, o jakim wspomniano w opowiadaniu.

Dotychczasowe rozważania pozwala połączyć z nową grą i nową konkretną czynnością prosty przyrząd losujący. Jest nim plastykowa butelka do wielokrotnego losowania ze zwracaniem i bez zwracania kuli. Ten ciekawy przyrząd losujący znajduje się w zestawie pomocy do nauczania rachunku prawdopodobieństwa zaproponowanym przez A. Olecką i Z. Semadeniego, znajdującym się aktualnie w sprzedaży w sklepach CEZASu [1].

Przeźroczystą rurkę będącą przedłużeniem szyjki butelki dzielimy na segmenty, które następnie numerujemy. Po dokładnym potrząśnięciu butelki z trzema ponumerowanymi kulami i po



Rys. 2

[1] Dobry w pomyśle przyrząd losujący źle jednak funkcjonuje z powodu usterek technicznych. Na uwagę nauczyciela zasługują propozycje innych pomocy znajdujących się w tym zestawie, jak wirujące bączki generujące klasyczne rozkłady na różnych zbiorach. Zestaw zawiera także bogaty komentarz słowny.

szybkim odwróceniu butelki do góry dnem kulki losowo rozmieszczają się w poszczególnych segmentach. Mówimy o skojarzeniu, jeśli kulka trafiła do właściwego segmentu (zob. rys. 2).

Opisany tu przyrząd losujący jest rekwizytem w grze. Po potrząśnięciu butelką z kulkami zdobywa się tyle punktów, ile nastąpiło skojarzeń. Problem, w jaki wprowadza taka gra, to koszt wstępu uprawniającego do udziału w jednej takiej grze, który gwarantowałby pewną sprawiedliwość gry. Chodzi tu o ustalenie wartości oczekiwanej wygranej. W przypadku gry sprawiedliwej koszt wstępu powinien być równy tej właśnie wartości oczekiwanej.

Uczniowie próbują taki koszt oszacować poprzez dane empiryczne. Ta estymacja wartości oczekiwanej stanowi ważny etap kształtowania trudnego pojęcia, jakim jest wartość oczekiwana zmiennej losowej. Losowanie kul za pomocą wspomnianej butelki zostaje powtórzone bardzo wiele razy. Każdemu wynikowi przypisana zostaje liczba skojarzeń (liczba zdobytych punktów). Średnia arytmetyczna tych wartości dla wyników bardzo wielu powtórzeń eksperymentu losowego jest estymatorem (o największej wiarogodności) wartości oczekiwanej. Analiza tej średniej arytmetycznej podsuwa sposób określenia wartości oczekiwanej zmiennej losowej.

Niech m będzie liczbą powtórzeń trzykrotnego losowania bez zwracania kuli, a X liczbą skojarzeń. Niech $l_m(X=j)$ oznacza liczbę tych powtórzeń, w których było j skojarzeń $(j=0,1,3)$. Niech $\bar{x}_m$ będzie średnią arytmetyczną wartości zmiennej losowej X w m powtórzeniach losowania. Nietrudno zauważyć, że

$$\bar{x}_m = 0 \cdot \frac{l_m(X=0)}{m} + 1 \cdot \frac{l_m(X=1)}{m} + 3 \cdot \frac{l_m(X=3)}{m}.$$

Ułamek $\frac{l_m(X=j)}{m}$ jest częstością zdarzenia $\{X=j\}$ w m powtórzeniach eksperymentu. Ten ułamek jest pewnym oszacowaniem prawdopodobieństwa tego zdarzenia. Jeśli po prawej stronie ostatniej sumy wstawić w miejsce wspomnianych częstości odpo-

wiednie prawdopodobieństwa, to od średniej arytmetycznej przejdziemy do jej pewnego teoretycznego odpowiednika, a mianowicie do wartości oczekiwanej (zwanej także wartością średnią) zmiennej losowej X. Matematyzacja prowadzi tu do definicji wartości oczekiwanej. Estymacja podsunęła pomysł określenia wartości oczekiwanej zmiennej losowej X następująco:

$$E(X) = 0\ P(X=0) + 1\ P(X=1) + 3\ P(X=3).$$

Liczby 0,1 i 3 są jedynymi wartościami, jakie zmienna losowa X może przyjmować.

Dane empiryczne można w tym przypadku gromadzić za pomocą trzech kart.

3.5. Gry losowe a odkrywanie i wykorzystywanie we wnioskowaniach pewnych izomorfizmów

Dla wszystkich omawianych w związku z wysyłaniem listów przez roztargnionego nadawcę eksperymentów losowych odpowiednim modelem probabilistycznym jest para (Ω, p), gdzie Ω jest zbiorem permutacji zbioru $\{1,2,3\}$, a p klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na tym zbiorze.

Kolejną okazją do rozwijania pewnych intuicji są w klasie VI dyskusje nad różnymi na pierwszy rzut oka grami losowymi.

Gra I. Uczniowie zaznaczają na kartce 3 prostokąty (każdy wielkości karty do gry) w rzędzie jeden po drugim. Pierwszy oznaczają literą w, drugi literą d, a trzeci literą k. Każdy z uczniów tasuje dokładnie swoje trzy karty (waleta, damę i króla) i rozkłada je następnie na oznaczonych miejscach, odkrywając karty przy ich wykładaniu. Za wynik takiego rozkładania uczeń zdobywa tyle punktów, ile nastąpiło skojarzeń. Mówimy o skojarzeniu, gdy karta znalazła się na miejscu oznaczonym kodem tej karty.

Liczba zdobytych punktów jest zmienną losową o identycznym rozkładzie, jak wygrana gracza w grze, w której przed rozkładaniem kart stawiało się na jeden z możliwych wyników (wpisując na kartce permutację zbioru $\{w,d,k\}$ będącą kodem tego obstawianego wyniku).

Gra II. W regulaminie gry, od której rozpoczęły się rozważania, wprowadzamy pewną zmianę. Teraz w grze uczestniczy dwu graczy. Jeden obstawia wynik (wpisując jego kod na kartce), drugi tasuje i rozkłada karty. Na stole leżą 3 żetony. Gracz obstawiający wygrywa tyle żetonów, ile ma trafień. Pozostałe wygrywa jego przeciwnik. A grę wygrywa ten, kto zdobył więcej żetonów.

Chodzi tu o rozstrzygnięcie, czy szanse wygrania są dla obu graczy równe. Na zbiorze Ω wyników rozkładania kart zostają tu określone dwie zmienne losowe: X - liczba żetonów wygranych przez obstawiającego wynik oraz Y - liczba wygranych żetonów przez rozkładającego karty.

Gra III. W grze uczestniczy para uczniów. Jeden rozkłada trzy potasowane karty w rzędzie, a następnie w równoległym rzędzie naprzeciw rozkłada swe potasowane karty drugi z graczy. Obaj odkrywają wykładane na stół karty. Pierwszy zdobywa tyle żetonów spośród trzech leżących na stole, ile nastąpiło skojarzeń, a więc w ilu przypadkach naprzeciw siebie znalazły się identyczne karty. Pozostałe żetony zabiera drugi z graczy.

Wykrywanie istniejących analogii w grach (wykrywanie pewnych izomorfizmów w problemach, które te gry rodzą) - to wykrywanie wspólnego modelu probabilistycznego dla sytuacji losowych, jakie te gry stwarzają. Umiejętność wykrywania, zdolność widzenia, uzasadniania i wykorzystywania do wnioskowań takich analogii (takich probabilistycznych izomorfizmów) wynikających z identyczności modeli probabilistycznych, stanowi na tym etapie nauczania jeden z ważniejszych aspektów kształtowania pewnych intuicji i pojęć probabilistycznych.

3.6. Deska Galtona jako przyrząd losujący. Grafy stochastyczne w początkach nauczania probabilistyki

Konkretnym przyrządem losującym (i to niedocenianym w tworzonych aktualnie koncepcjach propedeutyki probabilistyki) jest deska Galtona. Ten przyrząd pozwala jednocześnie gromadzić, porządkować i przedstawiać dane statystyczne (wyniki bardzo wielu powtórzeń pewnego konkretnego eksperymentu losowego). Jest to zarazem przyrząd do symulowania wielu różnych zjawisk konkretnych.

W dostępnych aktualnie w sprzedaży deskach Galtona spadanie kulki odbywa się w 7 etapach (kulka 7 razy trafia na przeszkodę).

Obserwacja rozkładu dużej liczby spadających po nachylonej desce kulek w poszczególnych przegródkach stawia klasę przed pewną sytuacją problemową. Pierwsze pytanie, jakie rodzi się na jej tle, dotyczy prób wyjaśnienia, dlaczego tak jest? Czy da się jakoś uzasadnić dostrzeżoną w sposób wyraźny empiryczną prawidłowość.

Obserwujmy najpierw numer przegródki, do której trafia spadająca kulka. Przegródki ponumerowane są liczbami od 0 do 7. Dane empiryczne (liczby kulek w poszczególnych przegródkach) dostarczają pewnych informacji na temat modelu probabilistycznego dla spadania kulki po desce. Właściwy rozkład prawdopodobieństwa dla danego eksperymentu losowego nie jest rozkładem klasycznym.

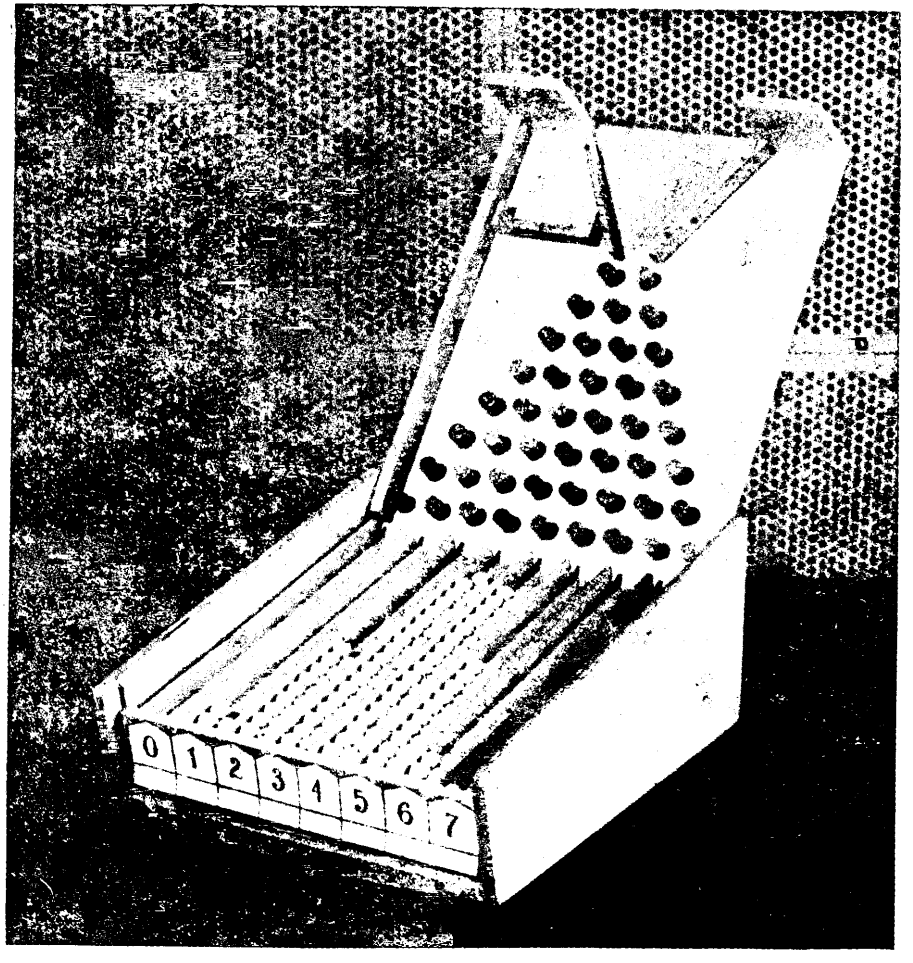
Przypuśćmy, że deska jest lekko nachylona, i że możliwe jest obserwowanie trasy, jaką kulka spada (a nie tylko przegródki, do której ostatecznie trafia). Z pewnych symetrii (każda trasa w kanalikowym labiryncie wyznaczonym przez kołki składa się z tej samej liczby odcinków, wybór każdego z dwu kierunków spadania w momencie trafienia kulki na kołek jest tak samo prawdopodobny - co wynika z kształtu kołka) wnosimy, że nie ma powodów, aby jedną z możliwych tras uważać za bardziej prawdopodobną niż inną. Jeśli przebieg i wynik tego eksperymentu losowego kodować trasą, to na zbiorze wszystkich

tras w kanalikowym labiryncie na desce Galtona rozkład prawdopodobieństwa jest klasyczny.

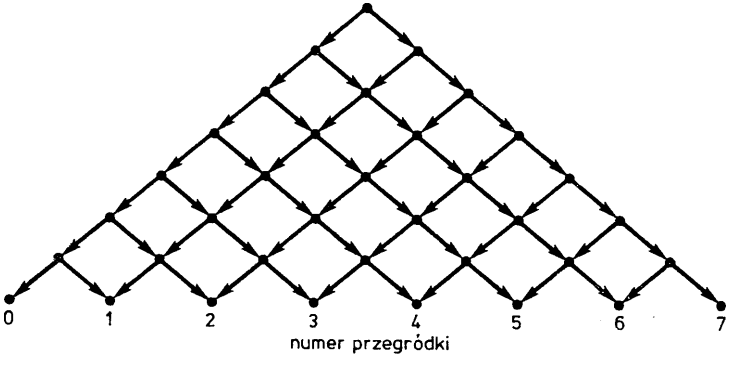
Odkrycie związku pomiędzy wspomnianymi wyżej modelami probabilistycznymi umożliwia analiza kanalikowego labiryntu, jaki wyznaczają na desce kołki. Konstrukcja schematu tego labiryntu jest dla ucznia trudnym, ale niezwykle kształcącym problemem. Uczeń musi tu dokonać właściwej schematyzacji podobnej do tej, która prowadzi do schematu sieci kolejowej, czy drogowej na mapie. Kołek trzeba zastąpić punktem, drogę kulki od jednej przeszkody do następnej - odcinkiem itd. Graf, jaki powstaje w trakcie tej schematyzacji, dzieci wykorzystują na lekcji do ustalenia liczby sposobów (tras), jakimi spadająca kulka może docierać do każdej z ośmiu przegródek. Liczby te otrzymuje się w trakcie konstrukcji trójkąta Pascala. Obok kolejno osiągalnych ze startu węzłów uczniowie wpisują liczby sposobów dotarcia do nich ze startu (por. [14]). Liczby te dają odpowiedź na pytanie, dlaczego duża liczba kulek spadających po desce rozłożyła się w poszczególnych przegródkach tak, a nie inaczej.

Jedną z lekcji w klasie VI rozpoczynam od problemu symulowania błądzenia kulki po kanalikowym labiryncie na desce Galtona w przypadku, gdyby deska była zepsuta (nie można jej nachylić). Chodzi tu o wyznaczenie trasy błądzenia za pomocą konkretnego przyrządu losującego takiego, jak moneta, kawałek ciasta z rodzynkiem, dwu wędkarzy z identycznymi przynętami na wędkach itd. Celem tego typu rozważań jest odkrycie analogii pomiędzy rozkładem wyników bardzo wielu powtórzeń rzutu siedmioma dziesięciogroszówkami (zob. tabelkę na str. 178), a rozkładem dużej (takiej samej, jak liczba wykonanych rzutów siedmioma dziesięciogroszówkami) liczby spadających po desce Galtona kulek w poszczególnych przegródkach.

Spadanie kulki po nachylonej desce Galtona i obserwacja numeru przegródki, do której trafia kulka, jest modelem symulacyjnym dla rzutu siedmioma monetami i na odwrót. To spadanie jest także modelem symulacyjnym dla losowego rozmieszczenia rodzynków w dwu kawałkach ciasta w trakcie dokładnego mieszania



Rys. 3a. Fotografia deski Galtona



Rys. 3b. Schemat kanalikowego labiryntu na desce Galtona

ciasta z siedmioma rodzynkami i dzielenia go na dwie równe części (liczbę rodzynków w ustalonej części można interpretować jako numer przegródki, do której trafia spadająca kulka i na odwrót).

Efektem procesu wstępnej matematyzacji empirycznych faktów związanych z błądzeniem losowym kulki po desce Galtona jest graf. Powstał on w trakcie schematyzacji kanalikowego labiryntu na desce i stał się pewnym narzędziem matematycznym pozwalającym dociec przyczyn (powodów) takiego a nie innego rozkładu kulek w przegródkach. Graf pozwolił rozwiązać w prosty sposób problem liczby tras prowadzących do danej przegródki (a więc pewien problem kombinatoryczny). Rozwiązanie tego problemu dało podstawy do konstrukcji modelu probabilistycznego.

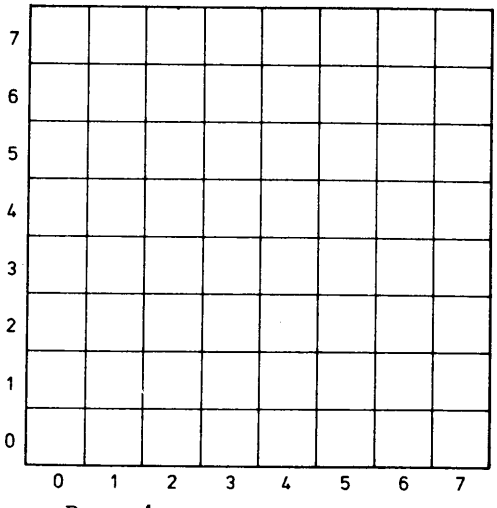
Inspirowana przez powyższą problematykę matematyczna aktywność sprzyja rozwojowi pewnych intuicji koniecznych do właściwego rozumienia podstawowych idei probabilistycznych. Na tę aktywność składa się schematyzacja i wstępna matematyzacja konkretnych sytuacji o charakterze losowym, odkrywanie pewnych wspólnych struktur wynikających z identycznych modeli symulacyjnych, pewien proces dedukcji, redukowanie jednych problemów do innych, przenoszenie wniosków i ocen z jednych sytuacji na sytuacje w sensie probabilistycznym analogiczne. Aktywności te inspirowane są i motywowane pytaniami: Dlaczego tak jest? W czym tkwią przyczyny dostrzeżonych prawidłowości empirycznych? Gdzie spotkaliśmy podobną sytuację? Co z tego faktu wynika?

Rozwiązywanie zadań rodzących się na tle tego typu pytań o charakterze probabilistycznym wymaga, aby w wyrażaniu własnych intuicji, myśli i sądów posługiwać się nowym językiem. Obok wielu specyficznych dla rachunku prawdopodobieństwa trudności szczególne miejsce w początkach nauczania zajmuje ów specyficzny język probabilistyki.

Pytanie: gdzie spotkaliśmy podobną sytuację i co z tego wynika? - pojawia się w trakcie analizowania kolejnej gry. Rekwizytem jest moneta dziesięciogroszowa oraz szachownica i dwa warcabowe pionki stanowiące własność dwu biorących udział w grze graczy. Pola szachownicy oznaczymy parą cyfr (zob. rys.

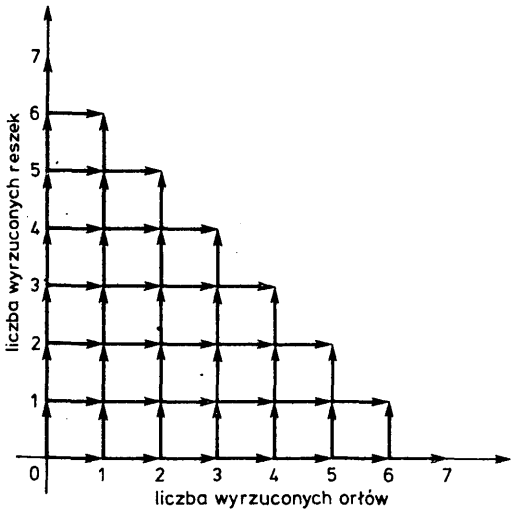
4). Numer pola jest parą jego współrzędnych, które odczytuje się podobnie, jak współrzędne punktu na płaszczyźnie.

Oba pionki startują z pola (0,0). Gracze rzucają na przemian monetą. Ilekroć wypadnie orzeł, pionek gracza, który rzucał monetą, przesuwany zostaje w sąsiednie prawe pole. Gdy wypadnie reszka - pionek zostaje przesunięty w sąsiednie pole u góry. Po siedmiu rzutach każdego z graczy jego pionek trafia do pewnego pola na przekątnej szachownicy. Jeśli jest to pole (7-j,j), to gracz zdobywa j punktów (j=0,1,2,...,7), a grę (mecz) wygrywa ten z graczy, który uzyskał więcej punktów.



Rys. 4

Liczba wygranych przez gracza punktów jest tu liczbą wyrzuconych reszek w siedmiokrotnym rzucie monetą. Zanim uczniowie odkryją ten fakt, ich aktywność skierowana zostaje na proces kolejnej schematyzacji. Chodzi o skonstruowanie grafu będącego schematem tej części szachownicy, po której błądzi pionek w trakcie gry. Pole szachownicy o współrzędnych (j,k) staje się teraz punktem o współrzędnych (j,k). Mety stają się punktami, których suma współrzędnych wynosi 7 (uczniowie odkrywają, że mety te leżą na prostej i że jej równanie ma postać $x + y = 7$) (rys. 5).



Rys. 5

Poprzez schematyzację, od której rozpoczyna się analiza szans każdego z graczy, dochodzimy na lekcji do wykrycia podobieństwa (analogii) otrzymanego tu grafu do schematu kanalikowego labiryntu na desce Galtona (jeden z tych grafów jest przekształceniem drugiego poprzez złożenie jednokładności i pewnej izometrii). Z wykrytych dzięki grafom analogii wynikają pewne wnioski na temat rozkładu liczby punktów wygranych przez każdego z graczy.

Uzyskane za pomocą deski Galtona wnioski przeniesione zostają na zdarzenia związane z siedmiokrotnym rzutem monetą.

Obok pewnych treści geometrycznych i kombinatorycznych, jakie towarzyszą grafom, ich głównym walorem jest umożliwienie wykrywania podstaw do przenoszenia ocen i wniosków o charakterze probabilistycznym z jednych sytuacji na inne.

3.7. Dwuwymiarowy graf stochastyczny

Użycie grafów daje okazję do korzystania w opisie i analizie sytuacji losowych różnorodnych treści matematycznych, a więc także języka matematyki. Główny walor grafów w nauczaniu probabilistyki tkwi w prostocie środków konstrukcji modelu probabilistycznego przy ich użyciu. Chodzi tu o użycie drzewek stochastycznych oraz stochastycznych grafów dwuwymiarowych.

Dwuwymiarowe grafy stochastyczne (czyli tak zwane grafy przepływu w czasie) wprowadzam w klasie VI w trakcie analizy prostej gry losowej.

W grze bierze udział dwu graczy: X i Y. Jeden z nich ma na starcie j żetonów, drugi ma ich k. Gracze rzucają na przemian monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to gracz X traci żeton przekazując go przeciwnikowi. Jeśli wypadnie reszka, to gracz Y traci żeton na korzyść gracza X. Gra toczy się do momentu, gdy jeden z graczy straci wszystkie żetony. Mówimy wtedy o ruinie tego gracza. Ale, aby gra nie przedłużała się, ograniczmy czas jej trwania - a więc liczbę rzutów monetą - do t ($t>j$ oraz $t>k$). Jeśli po t rzutach żaden z graczy nie zostanie zrujnowany, to rezultat gry zarejestrujemy parą (x,y), gdzie x jest liczbą żetonów gracza X, a y liczbą żetonów gracza Y po skończeniu gry.

Rozważmy zdarzenia:

A_l^s: po s rzutach monetą gracz X będzie miał l żetonów ($s=1,2,\ldots,t$ oraz $l=0,1,2,\ldots,j+k$).

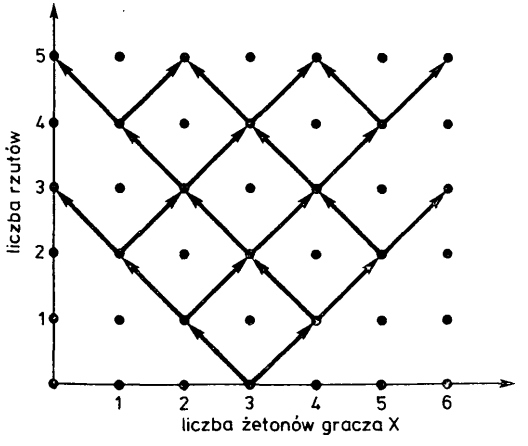
Przyjmijmy $j=k=3$ oraz $t=5$. Jedne z powyższych zdarzeń są prawdopodobne, inne z nich są niemożliwe. Ale na razie ocena tych zdarzeń pod kątem, czy jest ono niemożliwe czy prawdopodobne, jest trudna. Naturalne wydaje się tu założenie, że kolejne rzuty monetą są wykonywane w kolejnych jednostkach czasu. Koniec s-tej jednostki czasu nazywajmy chwilą s.

Po kilku rozegranych w klasie partiach rodzą się następujące problemy:

(a) Czy zestaw aż 6 żetonów jest tu konieczny? Czy można jakoś zmniejszyć liczbę tych rekwizytów?

(b) Które ze zdarzeń A_1^s są prawdopodobne, a które niemożliwe?
(c) Czy szanse obu graczy są w tej grze równe?
(d) Jakie przyrządy losujące mogą w tej grze zastąpić monetę?
(e) Czy dałoby się skonstruować planszę do tej gry?
(f) Czy zarejestrowane wyniki kolejnych partii rozegranych w klasie można by wykorzystać do oceny, jak bardzo prawdopodobne są zdarzenia A_1^s ?
(g) Liczba rzutów przypadających na jedną grę jest zmienną losową. Jest ona czasem trwania gry. Jakie wartości może ta zmienna losowa przyjmować? Które z nich są najbardziej prawdopodobne? Jak średnio długo trwała jedna gra przy jej wielokrotnym powtarzaniu w klasie?

Wzmianka o czasie trwania gry sugeruje, aby ów czas wprowadzić do rozważań jako parametr. Plansza, o którą chodzi w pytaniu (e), powinna uwzględniać zmiany liczby żetonów jednego z graczy oraz czas, a więc liczbę rzutów, po których tę liczbę żetonów ów gracz osiągnął. W trakcie konstrukcji takiej planszy powstaje graf stochastyczny dwuwymiarowy. Każdy węzeł takiego grafu jest punktem, którego odcięta oznacza liczbę żetonów gracza X, a rzędna - liczbę rzutów monetą, po których gracz X osiągnął tę liczbę żetonów (zob. rys. 6).



Rys. 6

Na początku gry stawiamy pionek w punkcie o współrzędnych $(3,0)$. Jest to węzeł startowy. W zależności od wyników kolejnych rzutów monetą pionek będzie błądził po grafie. Gdy wypadnie orzeł, pionek przesuniemy o wektor $[-1,1]$; gdy wypadnie reszka, pionek przesuniemy o wektor $[1,1]$. Błądzenie (gra) kończy się wraz z dotarciem pionka do prostej $x=0$ (co oznacza ruinę gracza X) albo do prostej $x=6$ (to oznacza ruinę gracza Y), albo do prostej $y=5$. Przebieg gry został tym samym zinterpretowany jako błądzenie losowe po dwuwymiarowym grafie.

Powyższa interpretacja umożliwia teraz odpowiedzi na te pytania, które do tej pory wydawały się trudne. Zajście zdarzenia A_1^s jest w powyższej interpretacji równoznaczne z dotarciem błądzącego pionka do węzła o współrzędnych $(1,s)$. Wynika stąd, że zdarzenia A_0^4, A_1^5 są niemożliwe, że zdarzenie $A_0^3 \cup A_0^5$ jest inaczej zdarzeniem: gracz X zostanie zrujnowany. Z tej interpretacji wynika także, iż czas trwania gry może wynosić 3 lub 5. Pewne symetrie (jednakowe liczby żetonów na starcie, a także kształt monety) dają podstawy do wysnucia wniosku, że ruina jednego z graczy jest tak samo prawdopodobna, jak ruina drugiego z nich.

Wyniki eksperymentu losowego, jaki przeprowadza się w trakcie gry, kodowane są trasami na grafie. Graf pozwala więc także określić zbiór Ω wszystkich możliwych wyników tego eksperymentu. Zgromadzone w klasie dane empiryczne dają podstawy do kwestionowania rozkładu klasycznego, jako właściwego w tym przypadku.

Dwuwymiarowy graf, którym można przedstawiać (symulować) przebieg każdego wieloetapowego eksperymentu losowego, umożliwia określanie rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze możliwych tras. Prostota sposobu konstrukcji modelu probabilistycznego za pomocą takiego grafu jest jego dużą zaletą dydaktyczną.

4. UWAGI KOŃCOWE

Istotą zaprezentowanego w tej pracy ujęcia wstępu do szkolnego rachunku prawdopodobieństwa jest ukierunkowany proces interio-

ryzacji prowadzący od konkretnych doświadczeń ucznia do operacji myślowych. Proces ten ma być oparty na właściwie - jeśli chodzi o interesy kształcenia matematycznego - zorganizowanej konkretnej czynności wykonywanej na odpowiednio dobranym materiale. Konkretna czynność związana jest przy tym zarówno z przeprowadzaniem eksperymentów losowych, z gromadzeniem, porządkowaniem i przedstawianiem w postaci tabel i diagramów danych statystycznych, jak i z kodowaniem, konstruowaniem plansz i grafów (chodzi tu o drzewka oraz o grafy do symulowania przebiegu specjalnych doświadczeń losowych) w trakcie analizy konkretnych wieloetapowych eksperymentów losowych, jak wreszcie przedstawianie za pomocą grafów strzałkowych zmiennych losowych i innych funkcji.

Czynność konkretna ma zgodnie z założeniami tej koncepcji dostarczać podstaw do pewnych operacji myślowych, ma te operacje inspirować i motywować. Konkretna czynność ma także być metodą weryfikacji rezultatów otrzymanych w trakcie wcześniejszych operacji myślowych.

Omawiana tu koncepcja propedeutyki probabilistyki (w odróżnieniu od koncepcji prezentowanych w cytowanej na końcu literaturze) nie obejmuje żadnych rachunków. Traktuje ona proces kształtowania pojęcia prawdopodobieństwa bardziej jakościowo niż ilościowo. Proces kształtowania pojęcia prawdopodobieństwa zdarzenia uwzględnia przy tym jego wieloaspektowość. Prawdopodobieństwo zdarzenia ma się stopniowo stawać w myśl tej koncepcji syntezą różnych podejść, a mianowicie: klasycznego (przypadek wyników, które a priori uznaje się za jednakowo prawdopodobne), częstościowego (prawdopodobieństwo zdarzenia rozumiane jako teoretyczna częstość tego zdarzenia w dużej liczbie eksperymentów), miarowego (prawdopodobieństwo trafienia danego rodzynka do jednej z wielu, niekoniecznie równych części, na które zostaje podzielony kawałek ciasta po jego dokładnym mieszaniu, jest stosunkiem masy tej części do masy całego ciasta), a także podejścia, które cechuje ideę liczydła probabilistycznego Engla (**idea stochastycznego grafu przepływu**).

Liczydło probabilistyczne jest prostym algorytmem do wyznaczania prawdopodobieństw różnych zdarzeń związanych z błądzeniami losowymi po grafach stochastycznych, ale prostym jedynie

z uwagi na rachunki. Jest to natomiast skomplikowany algorytm, jeśli brać pod uwagę istotę reguł jego działania. Idea liczydła opiera się na pewnej formie idealizacji, możliwej do zrozumienia przez uczniów dopiero z chwilą ukształtowania pojęcia prawdopodobieństwa zdarzenia, jako liczbowej miary szansy jego zajścia.

Komentowana tu koncepcja propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa nie obejmuje liczydła probabilistycznego, ale stanowi doń istotne przygotowanie i wprowadzenie. Liczydło probabilistyczne we właściwy sposób uwypukla częstościowy aspekt prawdopodobieństwa, a jednocześnie umożliwia uzupełnienie charakterystycznych dla okresu propedeutycznego aktywności prowadzących od częstości do prawdopodobieństwa, aktywnościami skierowanymi przeciwnie (od znanego prawdopodobieństwa do jego częstościowej interpretacji w sytuacji wyidealizowanej, do częstości oczekiwanej w sytuacji idealnej).

Wprowadzane stopniowo grafy stochastyczne stanowią więc także przygotowanie do stopniowego wprowadzania ucznia w następnych klasach w ideę liczydła probabilistycznego, a także do określania rozkładu prawdopodobieństwa dla wieloetapowych doświadczeń za pomocą drzewek i znanych rozkładów prawdopodobieństwa dla poszczególnych etapów.

LITERATURA

1. H. Athen, H. Griesel, W. Sprockoff, Mathematik heute (6,7 Schuljahr), Herman Schroedel Verlag KG, Hannover 1978.
2. Comprehensive School Mathematics Program, Elements of Mathematics, Book 0: Intuitive Background, Chapter 8, An Introduction to Probability, CEMREL, 1973.
3. Comprehensive School Mathematics Program. Elements of Mathematics, Book 0: Intuitive Background, Chapter 12, Topics in Probability and Statistics, CEMREL, 1973.
4. A. Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1973.
5. A. Engel, T. Varga, W. Walser, Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahracheinlichkeitsrechnung

auf der Primarstufe, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1974.
6. B. Feluch, W. Zawadowski, Matematyka 4, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1979.
7. H. Fletcher, A. Howell, Mathematics for Schools, Level II, Book 1-6, Addison-Wesley Publishers Limited, London, Don Mills-Ontario, Reading-Massachusetts, 1972.
8. Glaymann M., T. Varga, Les probabilités à l'école, CEDIC Paris 1973.
9. Z. Krygowska, Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.
10. H. Łabanowska, Matematyka 4, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.
11. A. Olecka, Aktualne tendencje dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa, Oświata i Wychowanie, wersja C, nr 11/12 (477/8), 1981, str. C-1 - C-5.
12. A. Olecka, Nowe metody i środki poglądowe w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa, Oświata i Wychowanie, wersja E, nr 3 (469), 1981, str. E-17 - E-24.
13. A. Płocki, Czas trwania gry losowej jako pewna funkcja oraz zdarzenia niemożliwe i prawdopodobne, Oświata i Wychowanie, wersja E, Materiały pomocnicze dla nauczycieli, nr 4 (470), 1981, str. 1110-1116, oraz nr 5 (471), 1981, str. 1217-1220.
14. A. Płocki, Klasyczne i nieklasyczne zbiory zdarzeń elementarnych a kształcenie pojęć probabilistycznych w okresie propedeutycznym, Oświata i Wychowanie, wersja E, Materiały pomocnicze dla nauczycieli, nr 20 (465), 1980, str. 1057-1073.
15. A. Płocki, Sytuacje problemowe i zadania w początkach nauczania probabilistyki, Oświata i Wychowanie, wersja E, Materiały pomocnicze dla nauczycieli, nr 9 (471), 1981, str. 1302-1312.
16. A. Płocki, Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli, PWN, Warszawa 1981.
17. Program dziesięcioletniej szkoły średniej, Instytut Programów Szkolnych Ministerstwa Oświaty i Wychowania, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.
18. J. Schönbeck, H. Schupp, Plus - Schülerbuch (6,7 Sch· F. Schöningh, Padeborn, 1977.

19. W. Szlenk, Rachunek prawdopodobieństwa dla klasy IV liceum i technikum, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1976.
20. K. Szymański, E. Zegadło, Matematyka 5, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1979.
21. T. Varga, M. Dumont, Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 14 ans (fiches de travail), OCDL, Paris 1973.
22. T. Varga, M. Dumont, Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 et 14 àns (guide et commentaires), OCDL, Paris 1973.
23. T. Varga, Mathematik 2. Raum und Ebene, Wahrscheinlichkeit, Logik und Kombinatorik, Akademiai Kiado, Budapest 1976.

A CONCRETE EXPERIMENT AND A PROCESS OF PRELIMINARY MATHEMATIZATION IN THE PROPEDEUTICS OF THE PROBABILITY THEORY

Summary

A proposal of developing of probabilistic notions in the school teaching has been presented. The crucial point is the process of internalization leading from manipulations to mental operations is its essence as well as the process of schematization and mathematization of real objects and of quantitative and qualitative relations perceived by students. The notion of probability thus becomes a synthesis of various aspects: statistical (frequential), measure theoretic (geometric), some aspects of classical model, etc.

Some examples of construction of adequate probabilistic models has been shown, preceded by an analysis and description of random events in terms of various areas of mathematics.